



İÇİNDEN AKIŞKAN GEÇEN RAYLEIGH TEORİSİ İLE MODELLENMİŞ BORULARIN LİNEER DİNAMİK ANALİZİ

Abdulkerim ERGÜT¹, Begüm Y.VAROL², B. Gültekin SINIR³

^{1,2,3}Celal Bayar Üniversitesi, Muradiye, MANİSA

ÖZET

Özellikle son yıllarda küreselleşmenin de etkisi ile verim, emniyet, sürat, maliyet gibi kriterlere bağlı olarak taşıma yolları da sürekli gelişmektedir. Kaynak ve talep merkezlerini birbirine bağlayan önemli taşıma yollarından birisi de boru hatlarıdır. Bu çalışma kapsamında içinden akışkan geçen silindirik borunun enine serbest titreşim hareketi incelenmiştir. Boru içerisinden geçen akışkan davranışı Navier - Stokes denkleminde yola çıkarak sembolize edilmiştir. Borunun dinamik davranışı modellenirken ağırlıktan kaynaklanan deplasman göz ardı edilerek, sadece dinamik denge altındaki titreşimi incelenmiştir. Boru Rayleigh Teorisi kullanılarak modellenmiştir. Elde edilen denklemlere ait çözümlerin malzeme yapısından ve geometriden bağımsız ve sonuçların genel olabilmesi için boyutsuzlaştırma işlemi yapılmıştır. Borunun her iki ucu da basit mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu da ankastre mesnetli olması durumuna göre 3 farklı sınır koşulu için mod yapıları, ilk üç frekans değeri ve kritik hız değerleri elde edilmiştir.

1. GİRİŞ

Günümüzde enerji ihtiyacı ile birlikte boyut ve sayı bakımında artış gösteren boru hatları ham petrol, petrol ürünleri (jet yakıtı, benzin, mazot) tabii gaz, CO₂, sıvı içerisinde konsantre katılar (maden ocağı çamurları gibi) ve arıtılmış su gibi maddelerin taşınmasında etkin rol oynamaktadır. Bugün var olan boru hatlarının büyük bölümü ham petrolün ve arıtılmış petrol ürünlerinin aktarılması için döşenmiştir. Çünkü petrol ve doğal gaz, bulunduğu yataktan tüketiciye ulaşıncaya kadar çok uzun bir yol izler. Kuyudan çıkarılan ham petrol ile doğal gazın önce işlenmek üzere rafinerilere (arıtım evleri-rine), burada işlenen ürünlerin de çoğu kez yükleme limanlarına, depolama tanklarına ve fabrika ya da ev gibi tüketim merkezlerine taşınması gerekir. Ham petrolü ya da benzin, mazot gibi bir petrol ürününü demiryolu, karayolu ve denizyolu üzerinden tankerler ya da varillerle taşımının maliyeti çok yüksektir. Bu nedenle, hatların döşenmesindeki yatırım giderlerinin fazlalığına karşın boru hattıyla taşıma en ekonomik yol sayılır.

Özellikle akışkan maddelerin taşınması amacı ile döşenmiş olan boru hatlarının tasarım ve projelendirilmesi çok önemlidir. Bu da mühendislikte akışkan taşıyan boru problemi olarak karşımıza çıkar.

¹Araştırma görevlisi, İnşaat Müh. Böl., abdulkerim.ergut@bayar.edu.tr

²Araştırma görevlisi, İnşaat Müh. Böl., begum.dagli@bayar.edu.tr

³Yard. Doç. Dr., İnşaat Müh. Böl., gultekin.sinir@bayar.edu.tr

Literatürde akışkan - yapı etkileşimini esas alan bu konu üzerine yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Akademik alanda ilk ciddi çalışma 1939 yılında yapılmıştır. Bu çalışma hareket denkleminin doğru olarak elde edildiği ilk çalışmadır.[Poidoussis ve Li (1993)]. Daha sonraki yıllarda araştırmacılar tarafından giderek artan bir ilgi ile bu konu incelenmiştir. İçinden akışkan geçen borunun dinamiği üzerine yapılmış çalışmaların büyük bir kısmı yine Poidoussis ve Li tarafından derleme bir makalede sunulmuştur (1993). Bu makalede düşey durumdaki bir boru için en genel haldeki lineer hareket denklemi verilmiştir. İçinden akışkan geçen borunun hareket denklemi, akışkan ve boru diferansiyel elemanlarına etki eden kuvvet terimlerinin dengesiyle veya enerjileri yazılarak elde edilir [Poidoussis ve Li (1993)]. Farklı giriş teorilerinin, akışkan hareketini de kapsayacak şekilde yeniden düzenlenmesi ile belirlenen diferansiyel denklemin çözümü ise çeşitli nümerik ve analitik metodlar yardımı ile yapılır. Genellikle Euler-Bernoulli Modeli kullanılarak yapılan çalışmaların aksine bu çalışma kapsamında daha gerçekçi sonuçlar elde etmek amacı ile Rayleigh giriş teorisi kullanılmıştır. Boru içerisinden geçen akışkan ideal, kararlı, üniform kabul edilerek, çözümler farklı mesnet koşulları için analitik olarak yapılmıştır. Doluluk oranı ve narinlik katsayısı olmak üzere yeni boyutsuz terimler elde edilmiş ve bu terimlerin akışkan hızı ile frekans arasındaki ilişkiyi ne ölçüde etkilediği grafikler yardımı ile açıklanmıştır.

2. HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Boyu L , kesit alanı A_p , birim uzunluk kütlesi m , elastisite modülü E , yoğunluğu ρ_p , atalet momenti I olan silindirik boru; kütlesi M , eksenel hızı u ve yoğunluğu ρ_f olan ideal bir akışkan taşımaktadır. Silindirik boru üniform ve homojen malzemeden oluşmaktadır. Sistemin hareketi düzlemseldir. Bu çalışmada öncelikle kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonları ve bu fonksiyonların Hamilton prensibinde uygulanması ile de hareket denklemleri elde edilmiştir. Boyutlu Lagrange terimi T-U ile ifade edilirken, Hamilton Prensibini veren bağıntı;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. T sistemin kinetik enerjisini U ise sistemin potansiyel enerjisini temsil eder. Çalışma kapsamında Lagrange çarpanı Rayleigh Giriş Teorisi kullanılarak elde edilen enerji fonksiyonlarının kullanılması ile belirlenmiştir. Burada ;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{E I}{L} \left(\frac{\partial^2 v^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} \right)^2 dx^* \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left(\frac{\partial v^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \right)^2 dx^* + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_f I \left(\frac{\partial^2 v^*(x^*, t^*)}{\partial t^* \partial x^*} \right)^2 dx^* \quad (2)$$

olarak yazılır.

2.1. Rayleigh Giriş Teorisi

İçinden akışkan geçen boru giriş gibi davrandığı için farklı giriş teorileri ile modellenebilmektedir. Bunlardan en yaygın olanı giriş problemlerinde de sıkça kullanılan Euler - Bernoulli Giriş Teorisi'dir. Gerilme ve uzama arasındaki ilişki lineerdir. Giriş eksenine dik olarak alınan düzlemsel kesitler deformasyondan sonra da düzlem olarak kalır. Yani hareket düzlem içindedir. Kayma gerilmesinden kaynaklanan deformasyonlar ihmal edilmektedir. Titreşim esnasında giriş en kesiti değişmemektedir. Boyuna direngenlik çok yüksek olduğu için boyuna uzama ihmal edilmiştir. Euler - Bernoulli Giriş Teorisinin tercih edilme nedeni basit olması ve pek çok sorun için makul mühendislik yaklaşımları sağlamasıdır. Ancak elde edilen doğal frekansların gerekenden fazla

olması özellikle yüksek modlarda karşılaşılan sorunlardan biridir. Rayleigh Kiriş Teorisi (1877) ise kesit dönme etkisinin Euler - Bernoulli Kiriş Teorisine eklenmesiyle daha gerçekçi bir yaklaşım sunar. Euler - Bernoulli Kiriş Teorisinde bulunan doğal frekanslardaki artış problemi kısmen giderilir.

Tablo 1.1: Kiriş Teorileri

	Eğilme Momenti	Yanal Deplasman	Dönme Ataleti	Kayma Deformasyonu
Euler	√	√		
Rayleigh	√	√	√	
Shear	√	√		√
Timoshenko	√	√	√	√

2.2. Akışkan Yapı Etkileşimi

Rayleigh Kiriş Teorisi problemin sadece yapısal kısmını içerdiğinden akışkan taşıyan boru problemini karşılayamaz. Bu yüzden denklem akışkan hareketini de içerecek şekilde yeniden formülize edilir. Viskozitenin ihmal edildiği ideal akışkana ait düşey doğrultuda Euler hareket denklemini;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho_f Y - \rho_f a_y \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada y düşey doğrultuyu, ρ_f akışkan özgül kütle, P basıncı, Y dış kuvvetin, a_y hareket halindeki akışkan ivmesinin, düşey bileşenini göstermektedir. Yapılan çalışmada boru boyunca iç kesitte ve özgül kütlede herhangi bir değişim meydana gelmemektedir. Boru yatayda olup, kot farkı oluşmadığından iç basınç farkı sıfırdır. Bu koşullar dikkate alınıp denklem yeniden düzenlenirse;

$$A_f \rho_f a_y = 0 \tag{4}$$

bağıntısına ulaşılır. Akışkan ve boru düşey yönde birlikte hareket edeceğinden sadeleştirilmiş Euler denklemindeki (4) ivme terimi, boru deplasmanı (v) cinsinden yazılabilir. Buna göre;

$$\rho_f A_f (\ddot{v}^* + 2u^* \dot{v}^{*'} + u^{*2} v^{*''}) = 0 \tag{5}$$

elde edilir. Denklem (4) Rayleigh kirişine ait hareket denklemini ile süperpoze edilerek içinden akışkan geçen borunun hareketini veren;

$$\rho_p A_p \ddot{v}^* + (\rho_f A_f) (\ddot{v}^* + 2u^* \dot{v}^{*'} + u^{*2} v^{*''}) + E I v^{*IV} - \rho I \ddot{v}^{*''} = 0 \tag{6}$$

bağıntısına ulaşılır.

3. BOYUTSUZLAŞTIRMA

Bağımlı ve bağımsız değişkenler olan deplasman, zaman ve konum terimleri geometri ve malzeme özelliklerinden bağımsızlaştırılarak aşağıdaki boyutsuz parametreler elde edilmiştir. Konum ve deplasman ifadesi r ile gösterilen atalet yarıçapına bölünerek, zaman ifadesi ise kirişin frekansını veren ifade yardımı ile boyutsuzlaştırılmıştır.

$$v = \frac{v^*}{r^*}, \quad x = \frac{x^*}{r^*}, \quad t = t^* \sqrt{\frac{EI}{L^4(m+M)}} \quad (7)$$

Hareketi ifade eden boyutsuz denklemin elde edilmesi sırasında bazı terimlerin sadeleştirilmesi, narinlik ve doluluk oranını veren yeni boyutsuz katsayıların kullanılması ile gerçekleştirilmiştir. Bunlar;

$$\lambda = \frac{L}{r}, \quad \beta = \frac{M}{m+M} \quad (8)$$

şeklinde gösterilir. Doluluk oranı, akışkan kütlelerinin toplam kütle (borunun kütlesi ile akışkanın kütlelerinin toplamı) oranı olarak ifade edilmektedir. Burada M akışkan kütlelerini, m ise borunun kütlelerini tanımlar. Doluluk oranı sıfır ile bir arasında değişmekte olup; sıfır olması durumu borunun boş olduğunu, bir olması durumu ise hareketin eksenel yüklü giriş problemi olduğunu göstermektedir. Narinlik katsayısı ise, boru boyunun atalet yarıçapına oranıdır.

Elde edilen boyutsuz terimler kullanılarak, Rayleigh Teorisi ile modellenmiş akışkan taşıyan borunun hareketini veren boyutsuz denklem;

$$v^{iv} + u^2 v'' + 2\sqrt{\beta} u v' + \ddot{v} - \frac{(1-\beta)}{\lambda^2} \ddot{v}'' = 0 \quad (9)$$

şeklinde düzenlenebilir.

4. ANALİTİK ÇÖZÜM

Boyutsuzlaştırma işlemi sonrasında daha sade bir denklem elde edilmiştir. Bu denklem ise deplasmanın konuma göre dördüncü dereceden kısmi türevlerini ve deplasmanın zamana göre ikinci dereceden kısmi türevlerini içermektedir. Denklemin lineer bir denklem olması, borunun dinamik davranışının harmonik şekilde olmasını sağlar. Hareketin harmonik olması durumunu kullanarak konuma bağlı lineer adi diferansiyel denklem olan;

$$v(x,t) = X(x)e^{i\omega t} + ke \quad (10)$$

elde edilir. Burada ke kompleks eşleniği göstermek için kullanılır. Bu çözümün hareket denkleminde uygulanması ile;

$$X^{iv} + \left(u^2 + \frac{(1-\beta)}{\lambda^2} \omega^2 \right) X'' + 2\sqrt{\beta} u i \omega X' - \omega^2 X = 0 \quad (11)$$

şeklinde klasik diferansiyel denklem çözüm metodolojisinin kullanılabileceği bağıntıya ulaşılır. Bu denklemin çözümü ise;

$$X(x) = Ce^{mx}$$

Şeklindedir. Bu çözümü yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$m^4 + \left(u^2 + \frac{(1-\beta)}{\lambda^2} \omega^2 \right) m^2 + 2\sqrt{\beta} u i \omega m - \omega^2 = 0 \quad (12)$$

şeklindedir. Çözüm sonucu dört adet keyfi sabit ortaya çıkar ve keyfi sabitleri çözmek için sınır şartları uygulanır. Bu çalışma kapsamında üç farklı sınır koşulu uygulanmıştır. Bu sınır koşulları, borunun her iki ucu da basit mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve her iki ucu da ankastre mesnetli olması durumudur.

4.1. Basit – Basit Mesnet Sınır Şartları

Burada borunun iki ucu da çökmeye karşı bağlı olduğu halde, dönme serbestliğine sahiptir. Biri geometrik değeri dinamik olan durum için aranan sınır şartları;

$$\begin{aligned} x=0 \rightarrow v(0,t) &= 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ &\rightarrow v''(0,t) = 0 \rightarrow X''(0) = 0 \rightarrow m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 + m_3^2 C_3 + m_4^2 C_4 = 0 \\ x=1 \rightarrow v(1,t) &= 0 \rightarrow X(1) = 0 \rightarrow C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2} + C_3 e^{m_3} + C_4 e^{m_4} = 0 \\ &\rightarrow v''(1,t) = 0 \rightarrow X''(1) = 0 \rightarrow m_1^2 C_1 e^{m_1} + m_2^2 C_2 e^{m_2} + m_3^2 C_3 e^{m_3} + m_4^2 C_4 e^{m_4} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

şeklindedir.

4.2. Ankastre – Basit Mesnet Sınır Şartları

Borunun bir ucunun çökme ve dönmeye karşı diğer ucunun ise sadece çökmeye karşı olan serbestlikleri yok edilmiştir. Bu durum için sınır şartları;

$$\begin{aligned} x=0 \rightarrow v(0,t) &= 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ &\rightarrow v'(0,t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \rightarrow m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4 = 0 \\ x=1 \rightarrow v(1,t) &= 0 \rightarrow X(1) = 0 \rightarrow C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2} + C_3 e^{m_3} + C_4 e^{m_4} = 0 \\ &\rightarrow v''(1,t) = 0 \rightarrow X''(1) = 0 \rightarrow m_1^2 C_1 e^{m_1} + m_2^2 C_2 e^{m_2} + m_3^2 C_3 e^{m_3} + m_4^2 C_4 e^{m_4} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

den ibarettir.

4.3. Ankastre – Ankastre Mesnet Sınır Şartları

Borunun her iki ucu da çökme ve dönmeye karşı rijittir. Bu durum için sınır şartları;

$$\begin{aligned} x=0 \rightarrow v(0,t) &= 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ &\rightarrow v'(0,t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \rightarrow m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4 = 0 \\ x=1 \rightarrow v(1,t) &= 0 \rightarrow X(1) = 0 \rightarrow C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2} + C_3 e^{m_3} + C_4 e^{m_4} = 0 \\ &\rightarrow v'(1,t) = 0 \rightarrow X'(1) = 0 \rightarrow m_1 C_1 e^{m_1} + m_2 C_2 e^{m_2} + m_3 C_3 e^{m_3} + m_4 C_4 e^{m_4} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

şeklindedir.

Sınır şartlarının uygulanması sonucunda keyfi sabitleri veren dört tane cebrik denklem elde edilir. Bu denklemlerin içinde bilinmeyen olarak sistemin doğal frekansı vardır. Keyfi sabitleri veren denklemlerin matris formunda yazılmasıyla, üç farklı mesnetlenme durumu için elde edilen katsayılar matrisleri;

basit- basit mesnetleme koşulu için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_4^2 \\ e^{m_1} & e^{m_2} & e^{m_3} & e^{m_4} \\ m_1^2 e^{m_1} & m_2^2 e^{m_2} & m_3^2 e^{m_3} & m_4^2 e^{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

ankastre- basit mesnetleme koşulu için;

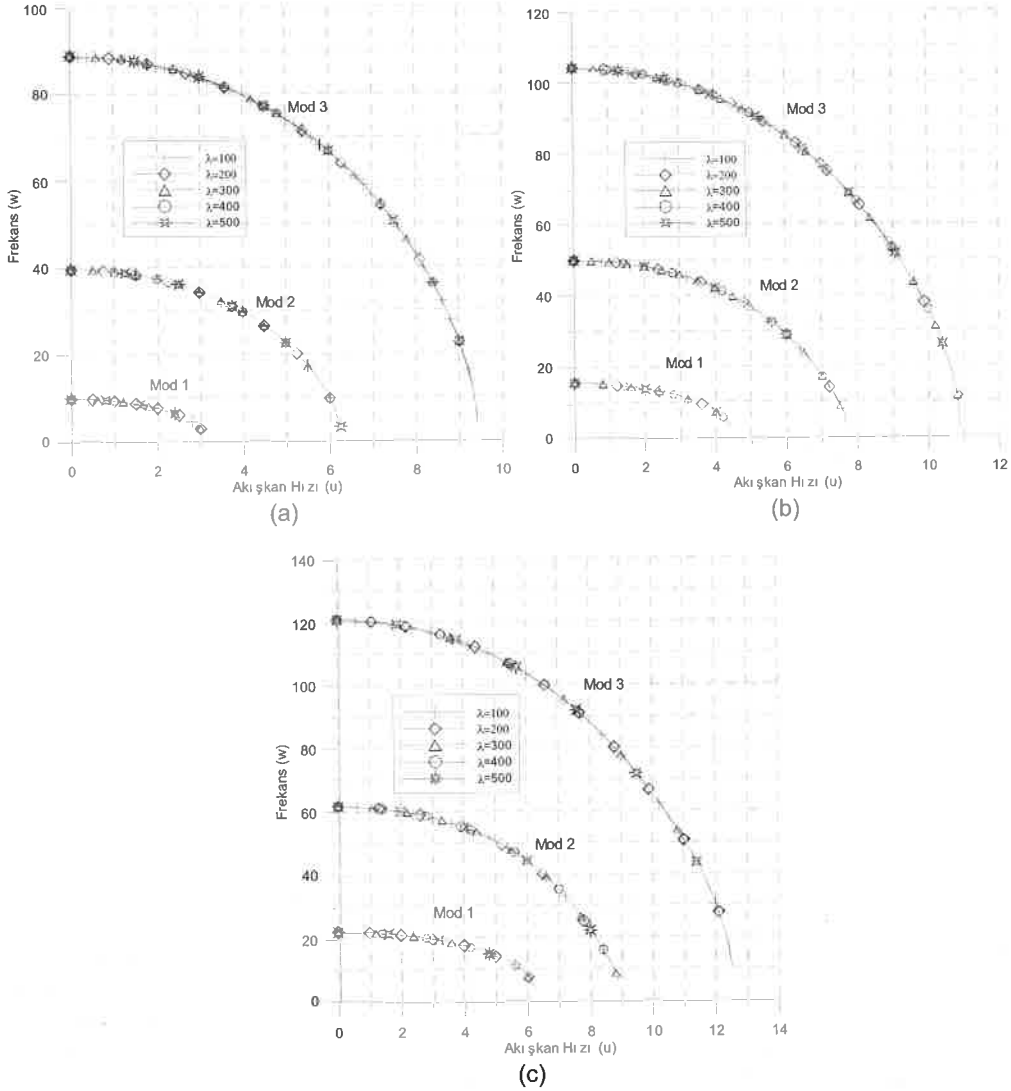
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ e^{m_1} & e^{m_2} & e^{m_3} & e^{m_4} \\ m_1^2 e^{m_1} & m_2^2 e^{m_2} & m_3^2 e^{m_3} & m_4^2 e^{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

ankastre- ankastre mesnetleme koşulu için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ e^{m_1} & e^{m_2} & e^{m_3} & e^{m_4} \\ m_1 e^{m_1} & m_2 e^{m_2} & m_3 e^{m_3} & m_4 e^{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

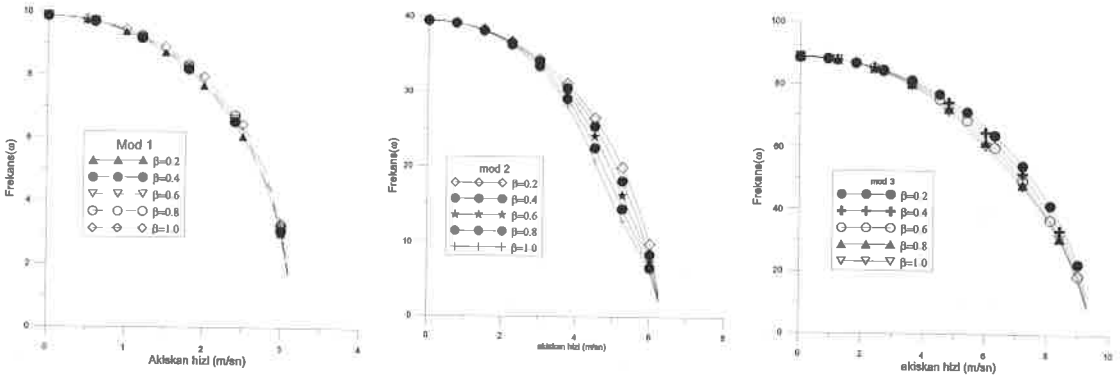
şeklindedir.

Sıfırdan farklı çözüm elde edebilmek için katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşit olmalıdır. Bu durumda problem çok iyi bilinen öz değer-öz vektör problemine dönüşür. Öz değerler doğal frekansı, öz vektörler ise mod yapısını gösterir. Burada sonsuz tane öz değer (frekans) bulunmaktadır. Biz bu çalışmada öneme binaen en küçük ilk 3 frekansı bulduk. Çünkü en küçük frekanslarda en büyük genlikler oluşmaktadır. 3 farklı mesnetlenme koşuluna göre boyutsuz akışkan hızı, doluluk oranı ve narinlik değişimini gösteren grafikler elde edilmiştir. Benzer şekilde 3 mesnetlenme koşulu için mod yapıları elde edilmiştir.

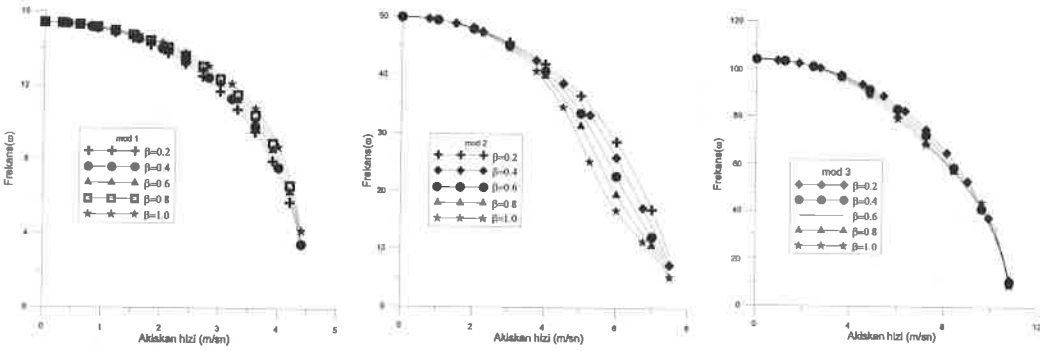


Şekil 1. Farklı mesnetlenme koşullarında λ değişimine bağlı akışkan hızı – frekans değerleri (a) Basit-basit mesnet sınır şartı, (b) ankastre-basit mesnet sınır şartı, (c) ankastre-ankastre mesnet sınır şartı

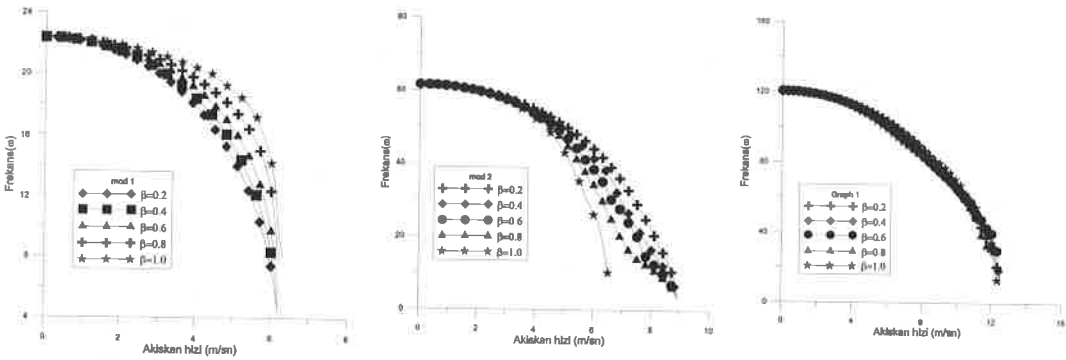
Şekil 1. de görüldüğü üzere mesnetleme koşullarına göre ilk üç mod için frekans değerleri ve kritik hız değerleri değişmektedir. En düşük ve kritik hız değerleri akışkan taşıyan borunun her iki ucunda basit basit mesnet ile sabitlendiği durumda ortaya çıkmaktadır. Rijitlik arttıkça yani dönme serbestliği kaldırıldıkça frekans ve hız değerleri de artmaktadır. Doluluk oranının 0.2 kabul edilerek sabit alındığı durumda; narinlik katsayısının frekans- hız değişimi üzerindeki etkisi yok denecek kadar azdır. Farklı mod yapısı söz konusu olduğunda dahi narinlik etkin parametre olmamaktadır.



Şekil 2. Basit-basit mesnetli durumda β değişimine göre akışkan hızı- frekans değerleri



Şekil 3. Ankastre-basit mesnetli durumda β değişimine göre akışkan hızı- frekans değerleri



Şekil 4. Ankastre-ankastre mesnetli durumda β değişimine göre akışkan hızı- frekans değerleri

Doluluk oranının 0.2 ile 1.0 arasında değiştirilmesi ile elde edilen grafikler şekil 2, şekil 3 ve şekil 4 de verilmiştir.

5. SONUÇLAR

Yapılan çalışma ile artan akışkan hızıyla birlikte elde edilen frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Belli bir hıza ulaşıldığında ise frekans sıfıra ulaşır. Frekansın yok olduğu durumda ise sistem burkulmaya maruz kalmaktadır. Bu durumda ortaya çıkan hız ise kritik hız olarak adlandırılır. Narinlik katsayısı değişimi kritik hız değerini önemli ölçüde değiştirmemektedir. Farklı mesnet şartları söz konusu olduğunda dahi farklı narinlik katsayısı değerleri için elde edilen frekans-hız değişim eğrileri çakışmaktadır. Serbestliklerin ortadan kaldırılması ile mod değişiminin gerçekleştiği frekans değeri ve kritik hız değeri artmaktadır. Narinliğin aksine doluluk oranı değişimi elde edilen sonuçlar üzerinde oldukça etkilidir. Doluluk oranının atması ile sistemin stabilitesini kaybettiği frekans değeri ve kritik hız değeri düşmektedir. Stabilitenin kaybolduğu yani burkulmanın meydana geldiği noktadan sonra elde edilen frekans ve kritik hız değerleri sağlıklı sonuç vermemektedir. Bundan sonra nonlinear dinamik analiz yöntemleri kullanılarak hesaplar yapılmalıdır.

Kaynaklar

- [1] Jer-Rong Chang , Wei-Jr Lin , Chun-Jung Huang , Siu-Tong Choi, *Vibration and stability of an axially moving Rayleigh beam ...Applied Mathematical Modelling* 34 ,1482–1497,(2010)
- [2] Y.Yesilce,*Effect of Axial Force on the Free Vibration of Reddy-Bickford Multi-span Beam Carrying Multiple Spring-mass Systems...*,Journal of Vibration and Control,16(1):11-32,2010
- [3] B. Gültekin Sınır, E. Alsancak, *Hafif Eğri Boruların Dinamik Analizi*, Tübitak Projesi, Proje No: 106M251, Mart 2008
- [4] J.N.Reddy,*Review of various beam theories...* International journal of Engineering Science45, 288-307,(2007)
- [5] Jun-min Wang, Gen-qi Xu, Siu-Pang Yung, *Exponential stability of variable coefficients Rayleigh beams under boundary feedback controls: a Riesz basis approach...*Systems & Control Letters 51, 33 – 50 (2004)
- [6] Paidoussis, M.P. *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2. Elsevier Academic Press, London, 2003.
- [7] SEON M. HAN, HAYM BENAROYA AND TIMOTHY WEI, *Dynamics Of Transversely Vibrating Beams*
- [8] H.R.Öz, *On The Vibrations Of An Axially Travelling Beam On Fixed Supports With Variable Velocity...*Journal of Sound and Vibration ,239(3),556-564, (2001)
- [9] *Using Four Engineering Theories...*Journal of Sound and vibration (1999) 225(5), 935}988, March 1999
- [10] Y.L. Zhang, D.G.Gorman, J.M.Reese, *Analysis of the Vibration of Pipes Conveying Fluid*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C., Journal of Mechanical Engineering Science, 1999.
- [11] Paidoussis, M.P. *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 1. Academic Press, London, 1998.

- [12] Yih-Hwang Lin and Yau-Kun Tsai, *Nonlinear Vibrations of Timoshenko Pipes Conveying Fluid...*int.J.Solids Structures Vol 34, No 23.2945-2956,1997
- [13] N.G.Stephen, *Macaulay's Method for a Timoshenko Beam...* Int.J. of Mechanical Engineering Education.35/4
- [14] <http://www.msxlabs.org/forum/x-sozluk/200205-boru-hatti-boru-hatti-nedir-boru-hatti-hakkinda.html>.