

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ  
KİRİŞLER İÇİN TAŞIMA MATRİSİ VE  
UYGULAMALAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İnş. Müh. Erdem BİLGİN**

**Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ**

**OCAK 2007**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ  
KİRİŞLER İÇİN TAŞIMA MATRİSİ VE  
UYGULAMALAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İnş. Müh. Erdem BİLGİN  
(501041132)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2006  
Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 2007**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN**

**Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)**

**Doç.Dr. Ünal ALDEMİR**

**OCAK 2007**

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde bana yol gösteren, karşılaştığım her türlü zorluğu aşmamda tecrübeleriyle bana yardımcı olan çok saygıdeğer hocam Prof.Dr.Reha ARTAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu yaşıma kadar desteğini bir an olsun arkamdan eksik etmeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

OCAK 2007

Erdem BİLGİN

# İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	ii
TABLO LİSTESİ .....	iv
ŞEKİL LİSTESİ .....	v
SEMBOL LİSTESİ .....	vi
ÖZET .....	vii
SUMMARY .....	ix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Problemin Tanımlanması .....	1
1.2. Problemin Üzerine Yapılmış Çalışmalar .....	1
1.3. Çalışmanın Amacı .....	2
<b>2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ . . .</b>	<b>3</b>
2.1. Tanımlar .....	3
2.1.1. Serret-Frenet Formülleri .....	4
2.1.2. Çubukta Statik Analiz .....	5
2.1.3. Çubuğun Şekil Değiştirmesi .....	8
2.1.4. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Bağlılıları .....	9
2.1.5. Aranılan Kesit Değerleri ve Kullanılan Denklemler .....	11
2.2. Doğru Eksenli Çubuklar .....	12
2.3. Düzlemsel Çubuklar .....	13
2.3.1. Düzlemde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar .....	17
2.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar .....	18
2.4. Düzlemsel Çubuklar İçin Sınır Koşulları .....	20
2.4.1. Düzlemde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları .....	20
2.4.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları .....	21
2.5. Dairesel Çubuklar .....	25
2.5.1. Düzlemde Eğilen Dairesel Çubuklar .....	25
2.5.2. Düzlemine Dik Kuvvet Etkisinde Dairesel Çubuklar .....	27
2.6. Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi .....	28
2.6.1. Taşıma Matrisinin Hesabı ve Özellikleri .....	32
2.6.2. Taşıma Matrisinin Hesabına Farklı Bir Yaklaşım .....	34
2.6.3. Yaklaşık Taşıma Matrisi Metodunun Dairesel Çubuklara Uygulanması . . .	36
2.7. Elastik Zemine Oturan Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuklar .....	38
<b>ÖRNEK .....</b>	<b>43</b>
<b>3. SONUÇLAR .....</b>	<b>56</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>57</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>59</b>

## TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
<b>Tablo 2.1</b> : Zemin Yatak Katsayıları .....	42
<b>Tablo 2.2</b> : $T_b$ değerinin aralık sayısına göre değışimi	46

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.5 : $\vec{i}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksen Takımı .....	4
Şekil 2.6 : Çubukta statik denge .....	7
Şekil 2.7 : Düzleminde yüklü çubuk için serbest uç .....	20
Şekil 2.8 : Düzleminde yüklü çubuk için kayıcı mesnet .....	21
Şekil 2.9 : Düzleminde yüklü çubuk için ankastre mesnetli uç .....	21
Şekil 2.10 : Düzlemine dik yüklü çubuk için serbest uç .....	22
Şekil 2.11 : Düzlemine dik yüklü çubuk için sabit mesnetli uç .....	23
Şekil 2.12 : Düzlemine dik yüklü çubuk için kayıcı mesnetli uç .....	24
Şekil 2.13 : Düzlemine dik yüklü çubuk için tam ankastre mesnetli uç .....	24
Şekil 2.14 : Elastik zemine oturan dairesel çubuk .....	43
Şekil 2.15 : $F^{-1}(x)$ fonksiyonu .....	45
Şekil 2.16 : $U_b - \varphi$ noktasal grafik .....	50
Şekil 2.17 : $\Omega_n - \varphi$ noktasal grafik .....	50
Şekil 2.18 : $\Omega_t - \varphi$ noktasal grafik .....	51
Şekil 2.19 : $M_n - \varphi$ noktasal grafik .....	51
Şekil 2.20 : $M_t - \varphi$ noktasal grafik .....	52
Şekil 2.21 : $T_b - \varphi$ noktasal grafik .....	52
Şekil 2.22 : $U_b - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	53
Şekil 2.23 : $\Omega_n - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	54
Şekil 2.24 : $\Omega_t - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	54
Şekil 2.25 : $M_n - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	54
Şekil 2.26 : $M_t - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	54
Şekil 2.27 : $T_b - \varphi$ fonksiyon, nokta uyumu .....	55

## SEMBOL LİSTESİ

$\vec{t}$	: Teğet Birim Vektör
$\vec{n}$	: Esas Normal Birim Vektör
$\vec{b}$	: Binomal Birim Vektör
$\vec{r}$	: Yer Vektörü
$s$	: Yay Parçasının Uzunluğu
$\chi$	: Eğrilik
$\vec{T}$	: Kesme Kuvveti
$T_{tt}, T_{nn}, T_{bb}$	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Kesme Kuvvetleri
$\vec{M}$	: Moment
$M_{tt}$	: $\vec{t}$ Burulma Momenti
$M_{nn}$	: $\vec{n}$ Eğilme Momenti
$M_{bb}$	: $\vec{b}$ Ekseni Momenti
$\vec{p}$	: Dış Yük
$\vec{m}$	: Dış moment
$\vec{U}$	: Yer Değiştirme
$U_{tt}, U_{nn}, U_{bb}$	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Doğrultusundaki Yerdeğiştirmeler
$\vec{\Omega}$	: (Rölatif Birim) Dönme
$\Omega_{tt}, \Omega_{nn}, \Omega_{bb}$	: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ Eksenleri Etrafındaki Dönmeler
$\vec{\gamma}$	: Rölatif Birim Kayma
$S_{tt}, S_{nn}$	: Burulma ve Eğilme Rijitlikleri
$C_{tt}$	: Eksenel Rijitlik
$C^{-1}, S^{-1}$	: Esneklik Matrisleri
$\zeta$	: Burulma Rijitliği / Eğilme Rijitliği
$\vec{\lambda}$	: Eksen Eğriliği
$I_n$	: Atalet Momenti
$I_t$	: Atalet Momenti
$E$	: Elastisite Modülü
$G$	: Kayma Modülü
$P$	: Durum Vektörü
$I$	: Birim Matris
$D$	: Diferansiyel Geçiş Matrisi
$F$	: Taşıma Matrisi
$\beta$	: Skaler Kuvvet Serisi
$\Psi$	: Skaler Kuvvet Serisi
$C_i$	: integral Sabiti
$k$	: Winkler Zemin Yatak Katsayısı
$\nu$	: Poisson Oranı
$q$	: Zemin Tepki Kuvveti

## ÖZET

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel kirişlerin analizi Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılarak yapılmıştır. Hesaplarda kesme etkisi çok küçük olduğu için ihmal edilmiştir. Yapılan uygulamalarda düzlemine dik yüklü çubuklar incelenmiştir.

Giriş bölümünde problemin önemi, daha önce yapılan çalışmalar ve bu tezin amaçları anlatılmıştır. Tanımlar bölümünde çubuk mukavemetinin esasları anlatılmıştır. Çubuklar için alan denklemleri elde edilmiştir. Şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları bulunmuştur. Hooke yasaları incelenmiştir. Bu bölümün sonunda toplu halde çubuk sistemleri için bilinmeyen değerler kullanılarak denklemler özetlenmiştir.

Doğrusal çubuklar kısaca anlatılmış ve çalışmanın temelini düzlemsel çubuklar oluşturduğu için üzerinde fazla durulmamıştır. Düzlemsel çubukların genel denklemleri ve sınır koşulları iki ana başlık altında incelenmiştir. Bunlar düzlemine yüklü düzlemsel çubuklar ve düzlemine dik yüklü çubuklardır. Eğri eksenli düzlemsel çubuklar için genel denklemler gene iki başlık altında elde edilmiştir. Her iki tür yükleme türü için homojen halde yer değiştirmelerin sağlandığı gerekli diferansiyel denklemler bulunmuştur. Bu diferansiyel denklem çözümü için Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodu kullanılmıştır. Başlangıç Değerleri yönteminin kullanımı ve önemi anlatılmıştır. Diferansiyel Geçiş Matrisinden Taşıma Matrisine nasıl geçildiği anlatılmıştır. Bu noktada bu çalışmada çözüm yöntemi olan Picard Açılımı ve Matrisant İntegral serisi yönteminin nasıl uygulandığı teorik esasları ile verilmiştir. Dairesel çubuklar gene iki ana başlık altında incelenmiştir. Düzlemine dik yüklü ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubukların eksen eğriliklerinin bir daire gibi sabit olması durumunda ki denklemler verilmiştir. Düzlemine dik yüklü çubuklarda yer değiştirme bileşenin sağlanması gerekli diferansiyel denklem elde edilmiş ve bunun başlangıç değerleri taşıma matrisi metodu ile nasıl çözüleceği incelenmiştir.

Yayıllı yük ile yüklü dairesel çubuk matemetika yazılımında yapılan bir program yardımı ile çözülmüş ve kesit tesitleri elde edilip bunalar problemin kesin çözümüyle karşılaştırılmıştır. Winkler elastik zemin hipotezi anlatılmış ve elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü dairesel çubuklar için genel denklemler elde edilmiştir. Uygulama olaması açısından aynı program ve metodla problem çözülmüş ve kesit tesitleri elde edilmiştir. Tepe açısı  $\frac{\pi}{6}$  olan daire eksenli yayılı yüklü çubuk parçası için 15 parçada ayrı ayrı kesit tesitleri bulunmuş ve grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklere en uygun polinom fonksiyonları matemetika yazılımı ile bulunup kesit tesitleri fonksiyonları belirlenmiştir. Bulunan bu fonksiyonlarında grafikleri çizilerek karşılaştırma yapılmıştır.

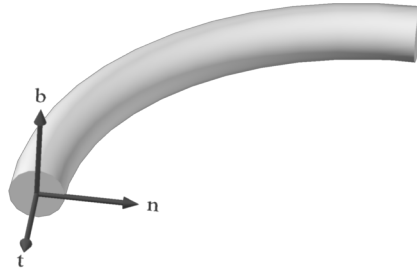
Sonuçlar bölümünde yapılan çalışma ve nümerik hesap yöntemleriyle ilgili bulu-



nanlar anlatılmıştır. Çalışma LaTeX tabanlı bir editör olan TexnicCenter programı ile yazılmıştır.

## SUMMARY

In this study we try to find out a section effects for a *Circular bar on a Elastic Soil*. Bar is so simple and effective structure element. It has two dimensions. According to the this fact bar is a one dimension element. A bar occur with two main parametres. One of them is the *parpendicular-section* and the other *bar axis*. In the next step decribed three vectors shown fig1.



Şekil 1:  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  Axes

$\vec{t}$  = Tangent Unit Vector

$\vec{b}$  = Binomal Unit Vector

$\vec{u}$  = Principal Normal Unit Vector

There are some different relationship between these three unit vectors Serrent-Frenet formulation gives like that;

$$\frac{\vec{t}}{s} = \chi \cdot \vec{n} \quad (1)$$

$$\frac{\vec{n}}{s} = \tau \cdot \vec{b} - \chi \cdot \vec{t} \quad (2)$$

$$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau \cdot \vec{n} \quad (3)$$

$$\chi = \frac{x^1 y^{11} - y^1 x^{11}}{((x^1)^2 + (y^1)^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Acting on a bar external forces and moments can show with  $\vec{p}(s)$  and  $\vec{m}(s)$ . Result of all external effects are shown with two function depends on  $s$ . Internal forces can be show that  $\vec{T}$  and  $\vec{M}$ . Internal forces discrete to their components in  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  coordinate system;

$$\vec{T} \cdot \vec{t} = T_t, \text{ Axial Normal Force}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = T_n, \text{ Shear Force on } \vec{n} \text{ axis}$$

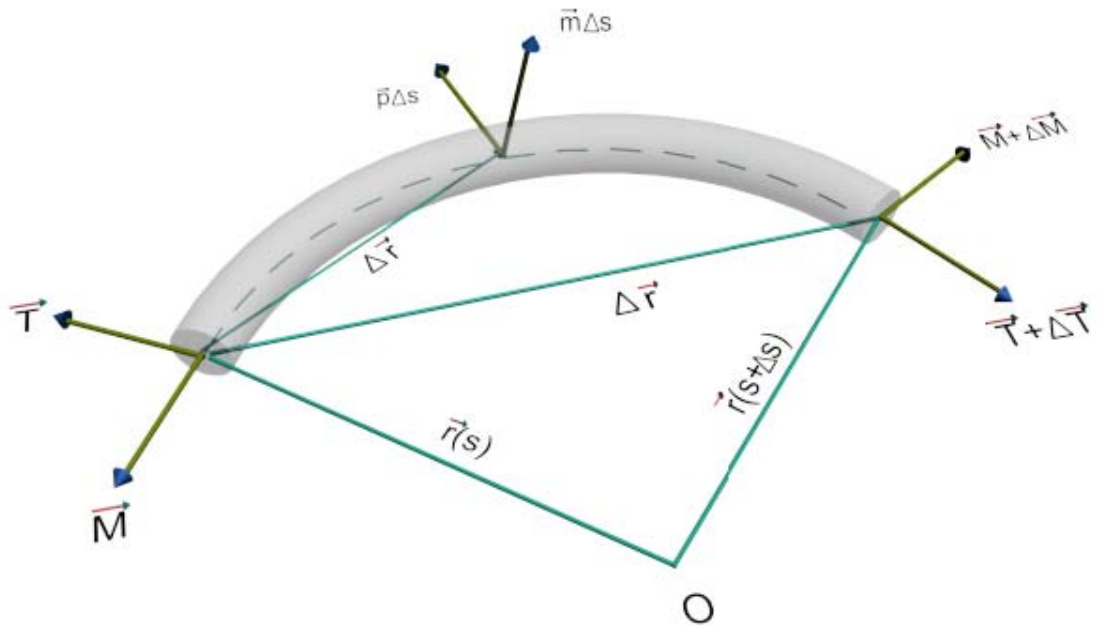
$$\vec{T} \cdot \vec{b} = T_b, \text{ Shear Force on } \vec{b} \text{ axis}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{t} = M_t, \text{ Torsional Moment}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = M_n, \text{ Bending Moment around } \vec{n} \text{ axis}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{b} = M_b, \text{ Bending Moment around } \vec{b} \text{ axis}$$

Search for differantial relationships between Internal and External forces darw a bar which statically in equilibrium like show in fig 2



**Şekil 2:** A Bar in Statically Equilibrium

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t}x\vec{T} + \vec{m} = 0 \quad (6)$$

gives so important equations called are *Field equations or Differential Equilibrium Equations*.

Next step try to answer for question how is a bar strain-deformation relationship under external effects. The vector of  $\vec{U}(s)$  describe of motion of gravity center of perpendicular section.  $\vec{\Omega}(s)$  show that the rotation around axis which pass the gravity center. There are some differential relation with these two vectors because there are describe same perpendicular section motion. Addition to this it has to two unit vector.  $\vec{\gamma}$ : Relative unit sway and  $\vec{\omega}$ : Relative unit rotation as a result of this;

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{t}x\vec{\Omega} \quad (8)$$

find out to *Compatibility Equations*.

Another physical relation exist for  $\vec{T}$ ,  $\vec{M}$  section effects and  $\vec{\gamma}$ ,  $\vec{\omega}$  strain vectors. Material assumed that isotrop and elastic, behaviour of bar is linear and Hooke's Law satisfy. If thinking about the behaviour, establish a function among rotations with moments andsways with shear.

$$\vec{T} = f' \vec{\gamma}$$

$$\vec{M} = f'' \vec{\omega}$$

If there are show that indis form;

$$T_i = C_{ik\gamma k}$$

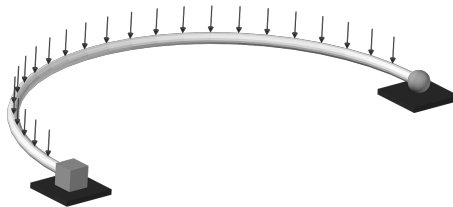
$$M_i = D_{ik\omega k}$$

$C_{ik}$  called is *Shear Rigidity Matrix* because its coefficients relation with shear force and shear strain,  $S_{ik}$  called is *Bending Rigidity Matrix* because its coefficients relation with bending moments and rotations. If use diadical expression;

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma}, \vec{M} = \mathbf{S} \cdot \vec{\omega}$$

For some primitive coordinate systems these matrices will be so simple and useful. For example in  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  coordinate systems ;and also assume that symetry axis of section overlapping with  $\vec{n}, \vec{b}$  plane C, S matrices will be

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix}$$



**Şekil 3:** Uniformly Distributed load acting on Circular Bar in homogenous case

General equation of loaded perpendicular to plane bars with curve axis like show in Fig 3

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} + \Omega_n - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \Omega_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} + M_n - \lambda T_b + \lambda m_t = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + M_t - \lambda p_b = 0 \quad (14)$$

In the case of  $\lambda = R$  and homogenous state, differential equation which  $U_b$  have to satisfy;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0 \quad (15)$$

This study based on solution of this differantial equations with Initial Values and Carry-Over Matrix Method. If shortly given meaning of this method, will be;

$$\begin{aligned} F[t, 0] &= I + \int_t^0 D(\tau) d\tau + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha \\ &+ \int_0^t D(\zeta) \int_0^\zeta D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha d\zeta + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

$$F(t,0) = F(t,t_n) \cdot F(t_n,t_{n-1}) \cdot F(t_{n-1},t_{n-2}) \dots F(t_2,t_1) F(t_1,0)$$

$$F[t] = F[t,0] \cdot F[0]$$

This equation gives solution of Initial Values Problem.

If circular and loaded perpendicular plane bar settlement on elastic soil which Winkler Elastic Soil, simulated by linear spring, general equations will be;

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} + \Omega_n - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \Omega_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0 \quad (20)$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} + M_n - \lambda T_b + \lambda m_t = 0 \quad (21)$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(q - p) = 0 \quad (22)$$

like that. Differential equation which  $U_b$  have to satisfy;

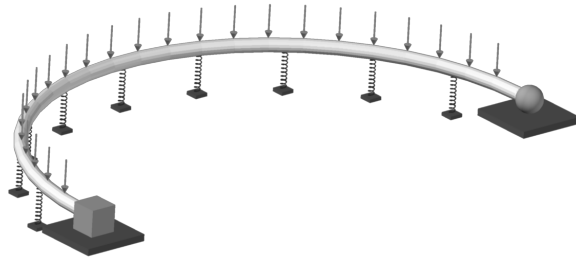
$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0 \quad (23)$$

In this study above differential equation solve by The Initial Values and Carry-Over Matrix Method.

Differential Matrix for this case;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{R}{S_{nn}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{R}{S_{tt}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix}$$



Şekil 4: Circular bar in Elastic Soil



# 1.GİRİŞ

## 1.1.Problemin Tanımlanması

Çubuk en basit taşıyıcı elemandır. İki boyutu, diğer bir boyutu yanında ihmal edilerek sadece tek bir boyut üzerinde hesaplamalar yapılır. Fakat daha kompleks taşıyıcı sistemlerin<sup>1</sup> temelini oluşturduğu için üzerinde yapılan hesaplamalar ve elde edilen sonuçlar her zaman için önemli olmuştur. Uygulamada en çok karşılaşılan çubuk türleri; *Doğru ve Daire Eksenli* çubuklardır. Bunun nedeni; bu özellikte ki çubuk sistemlerde hesaplamaların daha da kolaylaşması uygulamaya yönelik oldukça verimli sonuçlar elde edilmesidir. Bu çalışmada incelenen daire- sel eksenli çubuklar uygulamada, silo, su tankı gibi mühendislik yapıların temel sistemlerini oluşturmada kullanılmaktadır.

Çalışmada incelenen problem yukarıda tarif edilen daire eksenli bir çubuğun bir zemin sistemiyle etkileşiminde, çubuktaki kesit tesirlerinin ne şekilde ortaya çıkacağıdır. Yapı-zemin etkileşmesi mühendislikte her zaman önemli bir konu olmuştur. Farklı özellikli zeminlerde yapılan yapı temel sistemlerinin davranış özellikleri günümüzde de önemini korumaktadır. Burda problemin çözümünü önemli ölçüde zemin özelliğinin nasıl seçildiğidir. Bu çalışmada, uygulamada çok geniş bir uygulama alanı olan teorisindeki basitliğe rağmen pratikte çok iyi sonuçlar vermesi sebebi ile *Winkler Elastik Zemin Hipotezi* kullanılmıştır.

Anahatlarıyla tanımlanan problem için bir çok çözüm metodu bulunmaktadır. Bu mekanik problem bir diferansiyel probleme indirgenmiş ve denklemin çözümü için hem analitik hemde numerik bir çok çözüm tarzı vardır. Bu çalışmada diferansiyel denklemin kapalı çözümündeki zorluk nümerik bir hesapla aşılmaya çalışılarak sonuçların kapalı çözüme yakınsandığı irdelenmiştir.

Günümüzde elektronik hesap makinalarının ve bilgisayarların gelişmesi mühendislerin ve bilim adamlarının nümerik ve sayısal çözümlenmelere olan ilgisini artırmıştır. Güçlü bilgisayar programları saniyeler içinde çok sayıda işlem yapan işlemciler eskiden hesaplaması çok uzun zaman alan işlemleri saniyeler içinde gerçekleştirir oldu. Fakat nümerik hesaplamalar her zaman için beklenen sonuçları vermediği bilinen bir gerçektir.

## 1.2.Problem Üzerinde Yapılmış Çalışmalar

Hetenyi [5] 1946'da Winkler zemini üzerine oturan taşıyıcı sistemler için kesin çözümleri bulmaya uğraşmıştır. Daha önceden de belirtildiği gibi bu problemin kesin çözümünde bir çok zorlukla karşılaşılmaktadır. Buda bilim adamlarını mühendisleri nümerik hesaplar yapmaya yönelten bir etkendir. Diğer etken ise de

---

<sup>1</sup>Plak , Kabuk vb. gibi sistemler .

bir önceki başlık altında belirtildiği gibi günümüzde sayısal hesap yapan makineler ve bilgisayarların olmasıdır. Buna bir örnek vermek gerekirse Chudnovsky Kardeşler 1996'da kendi evlerinde yaptıkları bir süper bilgisayarla  $\pi$  sayısının 8 milyarı aşkın basamağını hesaplamayı başarmışlardır. Bunlar gelişen mikro işlemci, nano teknoloji ve güçlü algoritmalar kullanan bilgisayarlar sayesinde olmaktadır.

Elastik zemine oturan dairesel eksenli çubuklar ise 1952'de *Volterra* [6] tarafında yapılmıştır. *Volterra* eğriliği sabit bir yarıçapa eşit olan daire eksenli çubuklar için çeşitli yükleme tipleri altında çeşitli yükleme tipleri elde etmiştir ve bunları parametrik olarak tablolar halinde vermiştir.

İnan [1-4] 1964'de başlangıç değerleri metodu ile daire eksenli çubuklar için taşıma matrisini elde etmiştir. Fakat elastik zemine oturan daire eksenli çubuk olması halinde, 6. dereceden bir diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin köklerini kapalı olarak bulamadığı için bu durumun taşıma matrisine ulaşamamıştır. Ama elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için 1996'da kapalı bir taşıma matrisi vermiştir.

*Kıral ve Ertepinar* [10] elastik zemine oturan daire eksenli çubuklara ait genel denklemleri kanonik bir hale indirgeyerek kapalı bir çözüme ulaşmışlardır.

*Kadioğlu* [11] elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altında davranışlarını sonlu elemanlar metodu ile incelemiştir.

*Artan* [9] 1999'da düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubuklar için taşıma matrisini kapalı olarak vermiştir.

### **1.3.Çalışmanın Amacı**

Bu çalışmanın amacı elastik bir zemin üzerine oturan daire eksenli çubuk için kesit tesirlerini başlangıç değerleri ve taşıma matrisi metodu kullanılarak elde etmektir. Öncelikle elastik zemine oturan daire eksenli çubuk için taşıma matrisi elde edilirken çok yakınsak bir seri olan Picard Açılımı kullanılmıştır. Ama bu açımdan fazla terim alınması artan hesap yoğunluğu ve zorluğu nedeniyle kullanışsızdır. Bu çalışmada Matrisant İntegral Serisi kullanılarak Picard Açılımından çok az terim alınsa dahi oldukça yaklaşık taşıma matrisleri elde etmek mümkün olmuştur. Elastik zemine oturan daire eksenli çubuk için yaklaşık kesit tesirleri fonksiyonları elde edilmiş ve bunlar grafikler üzerinde yorumlanmıştır.

## 2.ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL ÇUBUKLARIN ANALİZİ

### 2.1.Tanımlar

Bir çubuk eksen ve dik kesit adı verilen iki ana elemandan meydana gelir. Çubuk eksenini herhangi bir uzay eğrisi teşkil edebilir. Bu eğriyi;

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

şeklinde bir yer vektörüyle tanımlayalım. Bu uzay eğrisi üzerinde ki herhangi bir  $B_p$  ve  $E_p$  arası mesafeyi gösteren yay parçasının uzunluğu  $s$  kadar olsun. Bu bir eğri boyunca tanımlanacak olursa;

$$s = \int_c |d\zeta| \quad (24)$$

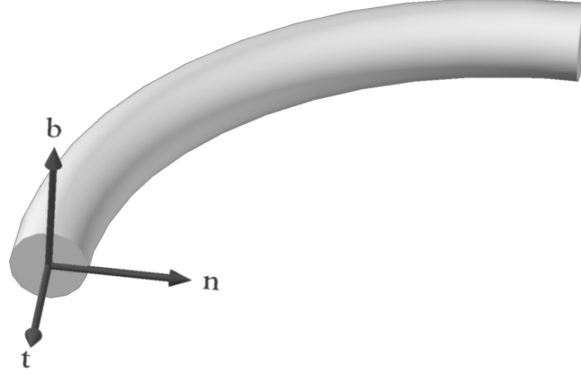
burada  $d\zeta$  ile gösterilen eğri boyunca olan diferansiyel yer değiştirme vektörüdür.

Örneğin açıları radyan cinsinden  $\alpha_1$   $\alpha_2$  şeklinde olan  $r$  yarıçaplı bir çemberde, iki nokta arasında ki yay parçasının uzunluğu;

$$s = r |\alpha_2 - \alpha_1|$$

şeklinde olur. Bir sonraki adım olarak eksene bağımlı üç birim vektör tarif edilirse; her üç birim vektör ile  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  ifadesiyle betimlenen yer vektörü arasında diferansiyel geometrik bağlar söz konusudur. Bu vektörler doğrultuları itibariyle aşağıdaki gibi isimlendirilirler;

- $\vec{t}$  = Teğet Birim Vektör
- $\vec{b}$  = Binomal Birim Vektör
- $\vec{n}$  = Esas Normal Birim Vektör



Şekil 5:  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  Eksen Takımı

### 2.1.1.Serret-Frenet Formülleri

**Frenet** formülleri teğet, esas normal ve binormal vektörleri aralarındaki ilişkileri vermektedir. Bunları şu şekilde yazabiliriz;

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \chi \cdot \vec{n} \quad (25)$$

$\vec{t} = \frac{dr}{ds}$ ,  $|\vec{t}| = 1$  bağıntıları teğet birim vektör içindir.  $\chi$  adına *eğrilik* denilen ve sürekli pozitif değer alan bir skalerdir.

$$\chi = \frac{d\phi}{ds}$$

$\phi$  tanjant açısını,  $s$  ise yay parçası uzunluğunu sembolize eder.

$$\chi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

burada  $\chi = \frac{d\phi}{ds}$  terimini bulmak için bir takım trigonometri ve türev işleminden faydalanılarak;

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{(x')(y'') - (y'')(x'')}{(x')^2} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\sec^2\phi} \frac{d}{dt}(\tan\phi)$$

$$= \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{1 + \tan^2\phi} = \frac{(x')(y'') - (y'')(x'')}{(x')^2}$$

Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\chi = \frac{(x')(y'') - (y')(x'')}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\vec{n}}{s} = \tau \cdot \vec{b} - \chi \cdot \vec{t} \quad (26)$$

$\vec{n}$  vektörü teğet vektöre dik olup doğrultusu eğrilik merkezi yönündedir.  $\tau$  eğrinin tabii torsiyonu adı verilen ikinci tür bir eğriliği sembolize eder. Bütün düzlem eğriler için sıfır olmasına karşın uzay eğrileri için sıfırdan farklıdır. Pozitif yada negatif değerler alabilir.

$$\frac{\vec{b}}{s} = -\tau \cdot \vec{n} \quad (27)$$

$\vec{b} = \tau x \vec{n}$  şeklinde bir kartezyen çarpımdan ibarettir. Frenet formülleri şu şekilde de yazılabilir;

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{t} \\ \ddot{\vec{r}} &= \chi \cdot \vec{n} \\ \ddot{\vec{r}} &= \chi \cdot \vec{n} + \chi(\tau \vec{b} - \chi \vec{t}) \end{aligned}$$

$\chi$  ve  $\tau$  değeri sabit olan eğrilere helezon adı verilir. Her iki eğriliğede sıfır olanlara ise doğru adı verilir. Çubuktan normal düzlemle bir kesit alınırsa kesen düzlemin her iki tarafında kalmak üzere çubukta iki ayrı yüz oluşur. Bir işaret kabulü yapmak istenirse; pozitif kesiti dış normal  $\vec{t}$  ile aynı yönde olan kesit, diğerine ise negatif kesit olarak düşünülebilir.

### 2.1.2.Çubukta Statik Analiz

**Doğrultuları** çubuk ekseninden geçen ve yayılı olan dış kuvvetleri  $\vec{p}$  ile gösterilsin. Eğer bu dış kuvvetler çubuk ekseninden geçmez iseler bir kuvvet çifti tarif ederek çubuk eksenine taşınabilirler. Bu kuvvet çifti  $\vec{m}$  ile gösterilsin. Sonuç olarak çubuğa etkiyen bütün dış kuvvetler  $\vec{p}(s)$  ve  $\vec{m}(s)$  şeklinde iki adet fonksiyonla belirlenmiş olur. İç kuvvetlere gelinirse  $\vec{T}$  ile kesite etki eden iç kuvvetlerin vektörel toplamı,  $\vec{M}$  ile de bunların ağırlık merkezine taşındığı zaman ortaya çıkan kuvvet çifti tarif edilsin. Bunlara kesit tesirleri adı verilmektedir. Aslında bütün yapılmak istenen  $s$  ile değişkenlik gösteren  $\vec{T}(s)$  ve  $\vec{M}(s)$  fonksiyonlarını hesaplayabilmektedir. Bu bahsi geçen kesit tesirlerinin daha önceden belirtilen ( $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ ) eksen takımındaki koordinatları farklı anlamlar ifade eder.

Kesit tesirleri bu eksen takımına indirildiğinde cisimlerin mukavemetinin de konusu olan basit mukavemet halleri ile karşılaşmak mümkündür. Örnek verilirse; aksenal normal kuvvet hali, burulma hali, basit eğilme v.b gibi mukavemet hallerinde çubuk elemana kesit tesirlerinin yalnız bir bileşenin etkidiği düşünülerek problem basitleştirilir ve olayın mühendislik doğası hakkında fikir vermesi beklenir. Bunun yapılmasındaki amaç çok kompleks hesaplamalar gerektiren şekil değiştiren cisimler teorisini basitleştirerek uygulamalı mekaniğe yönelik sonuçlar elde etmektir.

$$\vec{T} \cdot \vec{i} = T_t, \text{ Aksenal Normal Kuvvet}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = T_n, \vec{n} \text{ Akseni Kesme Kuvveti}$$

$$\vec{T} \cdot \vec{b} = T_b, \vec{b} \text{ Akseni Kesme Kuvveti}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{i} = M_t, \text{ Burulma Momenti}$$

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = M_n, \vec{n} \text{ Akseni Etrafında Eğilme Momenti}$$

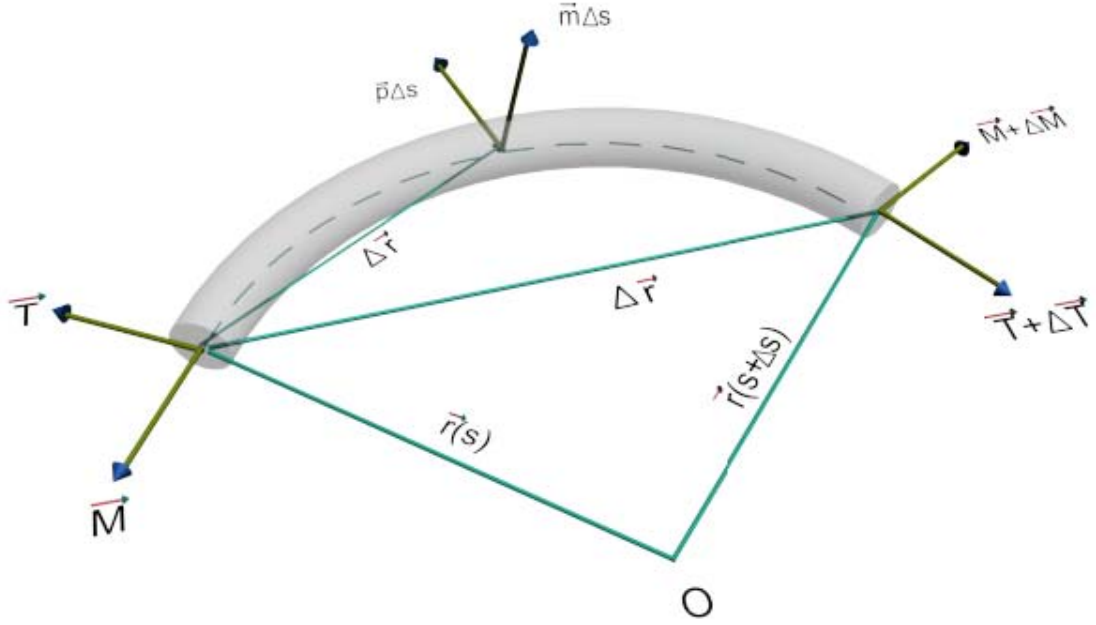
$$\vec{M} \cdot \vec{b} = M_b, \vec{b} \text{ Akseni Etrafındaki Eğilme Momenti}$$

Bağıntıları sonucu kesitteki kuvvet ve moment bileşenleri ;  $T_t, T_n, T_b, M_t^2, M_n, M_b$  şeklinde toplam 6 tanedir.

Şimdi ise bu  $\vec{T}(s)$  ve  $\vec{M}(s)$  fonksiyonlarının dış kuvvetlerle olan diferansiyel bağlantıları araştırılsın. Bunu elde etmek için  $\Delta s$  uzunluğunda ve dengede olan bir çubuk elemanı oluşturulur ve bunun denge denklemi ile  $B_p$  noktasına göre moment denklemi yazılırsa;

---

<sup>2</sup>Not: Burulma Momenti;  $M$ 'nin kesitin ağırlık merkezine etkidiği durum için geçerlidir.



**Şekil 6:** Çubukta Statik Denge

$$- \vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + p\Delta s = 0, \text{Denge Denklemi}$$

$$- \vec{M} - \vec{M} + \Delta\vec{M} + m\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0, \text{B}'_p \text{ye Gore Moment}$$

$$+ \Delta\vec{T} + p\Delta s = 0$$

$$+ \Delta\vec{M} + m\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0$$

Limit teoremi kullanılarak ;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} + \frac{p\Delta s}{\Delta s} = \quad (28)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (29)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{M}}{\Delta s} + \frac{\vec{m}\Delta s}{\Delta s} + \frac{\Delta r}{\Delta s} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = \quad (30)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{T} \times \vec{t} + \vec{m} = 0$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{T} \times \vec{t} + \vec{m} = 0$$

*Diferansiyel Denge Denklemleri* yada *Alan Denklemleri* adı verilen çok önemli iki denklemi elde edilmiştir. Bu denklemler kurulurken çubuğun şekil değiştirmiş hali göz önüne alınmamıştır. I. Mertebe teorisi esasına göre şekil değiştirmeler ve yer değiştirmeler çok küçüktür.

### 2.1.3. Çubuğun Şekil Değiştirmesi

**Çubuk** dış yüklerin etkisiyle şekil değiştirdiği zaman ekseni üzerindeki bir P noktası konusundan uzaklaşarak yeni bir  $P'$  noktasına gelir. Bu iki noktayı birbirine bağlayan çizgi bir vektör gibi düşünülürse  $\vec{PP}'$  gibi bir yer değiştirme vektörü elde edilir. Buda s ye bağlı bir  $\vec{U}$  vektörü ile gösterilirse;

$$\vec{PP}' = \vec{U}(s)$$

gibi bir eşitlik yazılabilir. Bu fonksiyon belirlendiği zaman eksenin şekil değiştirmeden sonraki konumu tamamen belli olur. Eğer dik kesitin şekil değiştirmeden sonraki konumuna bakılacak olunursa oldukça karmaşık bir geometrik hal aldığı gözlenir. Bu noktada Bernoulli prensibi ve I. Mertebe teorisi uyarınca şekil değiştirmeden önce düzleme dik olan kesit şekil değiştirdikten sonra düzlem kalır. Dik kesitin düzlemsel bir şekilden olan sapmaları ihmal edilecektir. Hatta kesitin bazı noktalardaki bir ötelenme ve dönmeden oluşan rijit levhanın hareketine benzetilebilir.  $\vec{U}(s)$  vektörü dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelenmesini  $\Omega(s)$  ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösterir. Şiddetleri çok küçük olarak kabul edilen bu iki vektör aynı cisme ait dik kesitin hareketini tanımladığı için aralarında bir diferansiyel bağıntı vardır. Birim uzunlukta bir çubuk elemanı için öncekilerden farklı iki yeni vektör daha tanımlamak gerekir.  $\vec{\gamma}$ : relatif birim kayma,  $\vec{\omega}$ : relatif birim dönme. Bu son gösterilen iki vektörle öncekiler arasında birtakım diferansiyel bağıntılar vardır;

$$\vec{\gamma} = \left( \frac{d\vec{U}}{ds} \right)_{\vec{\Omega}} \rightarrow 0 \quad (31)$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \quad (32)$$

$\vec{U}(s)$  ile  $\vec{\Omega}(s)$  arasındaki bağıntı; çubuk ekseni üzerinde alınan iki noktanın yer değiştirmelerinin farkı  $\Delta\vec{U}$  ile gösterilsin. Burada bu iki nokta  $\vec{\gamma}\Delta s$  kadar relatif



bir farkla hareket eder. İlk noktadan geçen kesit  $\vec{\Omega}$  kadar dönünce diğer nokta  $\vec{\Omega} \times \Delta r$  kadar döner.

$$\Delta \vec{U} = \vec{\gamma} \cdot \Delta s + \vec{\Omega} \times \Delta \vec{r} \quad (33)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{U}}{\Delta s} = \vec{\gamma} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} + \vec{\Omega} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \quad (34)$$

$$\text{Not : } \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{t} \quad (35)$$

$$\frac{\Delta \vec{U}}{\Delta s} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (36)$$

ifadesi aranılan bağıntıyı verir. Bu bağıntıya uygunluk şartı denilmektedir. Kesit tesirleri bulunurken yapılan kabuller burada da geçerlidir. Sonuç olarak  $\vec{U}, \vec{\Omega}, \vec{\gamma}, \vec{\omega}$  vektör fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar söz konusudur.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t} \times \vec{\Omega} + \vec{\gamma} = 0 \quad (38)$$

$\gamma_t$ : Birim Uzama.  $\gamma_t, \gamma_b$ : Farklı iki doğrultudaki kaymalar.  $\omega_t$ : Burulmada ki birim dönme.  $\omega_t, \omega_b$ : n , b eksenleri etrafında eğilmeler. Yer değiştirme hesaplarında  $\omega$ 'nın rolü  $\gamma$ 'dan önemli olduğu için;  $\gamma \cong 0$  kabul edilir. Yapılan bu kabul ile kayma uzamaları ihmal edilmiş olur.

#### 2.1.4. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Bağıntıları

Bu başlık altında incelene;  $\vec{T}, \vec{M}$  kesit tesitleri ile  $\vec{\gamma}, \vec{\omega}$  şekil değiştirme vektörleri arasındaki fiziksel ilişkiyi betimleyen bağıntılardır. Malzeme homojen, izotrop ve elastik kabul edilir, davranış linerdir ve *Hooke kanunu* geçerlidir. Tanımlarından da anlaşıldığı gibi kesme kuvvetleri ile uzama ve kaymalar, momentlerle de dönmeler ilgilidir. Bu ilişki bir fonksiyonla gösterilirse;

$$\vec{T} = f'(\vec{\gamma}) \quad (39)$$

$$\vec{M} = f''(\vec{\omega}) \quad (40)$$

bu  $f'$  ve  $f''$  fonksiyonu birer liner vektör fonksiyonudur. Buradan vektörlerin koordinatlarının liner bağımlı olduğu anlaşılır. Seçilen herhangi bir a, b ve c koordinat sistemi için yukarıda bahsi geçen vektörlerin bu koordinat sistemindeki halleri;

$$T_a = C_{aa}\gamma_a + C_{ab}\gamma_b + C_{ac}\gamma_c$$

$$T_b = C_{ba}\gamma_a + C_{bb}\gamma_b + C_{bc}\gamma_c$$

$$T_c = C_{ca}\gamma_a + C_{cb}\gamma_b + C_{cc}\gamma_c$$

olur . İndissel gösterim kullanılır bu uzun ifadeyi kısaltılırsa;

$$T_i = C_{ik}\gamma_k$$

Benzer şekilde ;

$$M_a = S_{aa}\omega_a + S_{ab}\omega_b + S_{ac}\omega_c$$

$$M_b = S_{ba}\omega_a + S_{bb}\omega_b + S_{bc}\omega_c$$

$$M_c = S_{ca}\omega_a + S_{cb}\omega_b + S_{cc}\omega_c$$

$$M_i = D_{ik}\omega_k$$

$C_{ik}$  katsayıları kesme kuvvetleri ve kaymalarla ilişkili olduğundan buna çubuğun kaymaya karşı rijitliği,  $S_{ik}$  katsayılarına ise çubuğun dönmeye karşı rijitliği olan eğilme rijitliği denilebilir. Eğer diyadik gösterim kullanılırsa;

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma}, \vec{M} = \mathbf{S} \cdot \vec{\omega}$$

Bu  $\mathbf{C}$  ve  $\mathbf{S}$  tansörleri simetriktir. Yani 9 elemandan oluşan bu tansörlerin belirli olabilmesi için simetriden dolayı 6 büyüklük yeterli olacaktır. Eksen takımının değişimine göre transformasyona uğrarlar. Bazı özel eksen takımlarında oldukça sade ve kullanışlı bir hale gelirler. Örneğin bu çalışmada kabul edilen  $\vec{i}, \vec{n}, \vec{b}$  takımı için bunlar;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & C_{nb} \\ 0 & C_{bn} & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & S_{nb} \\ 0 & S_{bn} & S_{bb} \end{bmatrix}$$

şeklinde olmaktadır. Ortaya çıkan bu sadeleşmenin nedeni;  $\gamma_t$  aksenal birim uzamasını yalnız  $T_t$  aksenal normal kuvvetine,  $\omega_t$  birim burulma açısında yalnız  $M_t$  burulma momentine bağlı olmasıdır. İş daha ileri götürüp  $\vec{n}, \vec{b}$  takımının kesitin simetri eksenleriyle çakıştığı varsayılırsa;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & S_{bb} \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Fakat  $\mathbf{S}$  matrisinin diagonal hale gelmesi için kesitte çift simetri olmasına ihtiyaç yoktur. Bir eksen  $\vec{t}$  diğerleride  $\vec{\zeta}, \vec{\xi}$  asal eksenleri olduğu zaman;

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\xi\xi} \end{bmatrix}$$

olur. Burada  $S_{tt}$ : Burulma rijitliği,  $S_{\zeta\zeta}, S_{\xi\xi}$  asal eğilme rijitlikleridir.  $\mathbf{C}$  ve  $\mathbf{S}$  tansörlerinin determinantları sıfırdan farklı olduğu için tersleri vardır denilebilir.

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T}, \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M}$$

Burada  $C^{-1}, S^{-1}$  *Esneklik tansörleri* olarak adlandırılır.

## 2.1.5. Aranan Kesit Değerleri ve Kullanılan Denklemler

BİLİNMEYENLER;

Kesit Tesirleri

$\vec{T}$  ( Kuvvet Tesiri ) ,  $\vec{M}$  (Moment Tesiri)

Yer değiştirme vektörleri

$\vec{U}$  (Ötelenme Bileşenleri) ,  $\vec{\Omega}$  (Dönme Bileşenleri)

Şekil Değiştirme Vektörleri

$\vec{\gamma}$  (Birim Kaymalar) ,  $\vec{\omega}$  (Birim Dönmeler)

DENKLEMLER;

Denge Denklemleri

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0, (\text{Kuvvet Denge Denklemi}) \quad (41)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0, (\text{Moment Denge Denklemi}) \quad (42)$$

Uygunluk Denklemleri

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} \quad (44)$$

Hooke Kanunları

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T}, \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M}$$

## 2.2. Doğru Eksenli Çubuklar

Bir doğrunun yada doğru parçasının eğriliği ( $\vec{\chi}$ ) ve tabii torsiyonu ( $\tau$ ) sıfırdır. Böylelikle 25 denklemden, teğet birim vektör ( $\vec{t}$ ) sabit bir vektör olur.  $\vec{n}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri ise Serret-Frenet bağıntılarından kolayca görüleceği gibi 26, 27 anlamını yitirir. Bu sebepten ötürü doğru eksenli çubuklar hareketli  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  takımı yerine sabit bir koordinat eksenine yerleştirilir. Örneğin, çubuk eksenini gösteren bir z eksen ve düzlem üzerinde seçilen x ve y eksenleri sabit bir koordinat üçlüsüdür. Çubuk en kesiti yani düzlemi sabit olduğunda bahsi geçen x, y eksenleri asal eksen takımı olarak seçilmez iseler; dik kesitin asal eksen takımı  $\zeta, \xi$  ve bunlarla herhangi bir x, y eksen takımı arasında açı  $\varphi = \varphi(s)$  şeklinde bir fonksiyonla, dik kesitin eksene göre tarifi yapılması gerekir. Formüllerle kolaylık sağlaması açısından x, y eksenlerinin asal eksen takımı olarak seçilmelerinde fayda vardır.

Daha önceden çıkarılan denge denklemlerinde  $s$  yerine  $z$ ,  $\vec{t}$  yerine de  $\vec{k}$  olarak  $z$  eksenini doğrultusundaki birim vektörü tanımlanırsa doğru eksenli çubuklar için alan denklemleri bulunmuş olur.

Alan Denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{dz} + \vec{p} &= 0 \\ \frac{d\vec{M}}{dz} + \vec{k} \times \vec{T} + \vec{m} &= 0\end{aligned}\quad (45)$$

Uygunluk Denklemleri

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dz} - \vec{\omega} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = \vec{k} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} \quad (47)$$

Hooke Kanunları

$$\vec{T} = \mathbf{C} \cdot \vec{\gamma}$$

$$\vec{M} = \mathbf{S} \cdot \vec{\omega}$$

haline gelir. Eğer istenilirse bu vektörel denklemlerin skaler halleride yazılabilir ve çubukların aksenal normal kuvvet altında eğilmelerinden bağımsız olarak burulma, kesme etkisi olmadan eğilme, kesmeli eğilme, aksenal normal kuvvetin eğilmeye etkisi, eğilmeyi etkileyen bütün tesirleri içine alan elastik zemine oturan çubuk gibi mukavemet konuları incelenebilir.

### 2.3.Düzlemsel Çubuklar

**Daha** önceden tanımlanan çubuk eksenini eğer bir düzlem içinde yer alıyorsa böyle çubuklara düzlemsel çubuklar denir. Frenet formülleri, düzlemsel çubuklarda *tabi torsiyon*  $\tau = 0$  ve *binormal vektör*  $\vec{b} =$  sabit olmaktadır.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (48)$$

Denge denkleminde  $ds = \lambda d\phi$  olarak alınsın. Bu vektörler Denge denklemini  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  takımında skaler olarak yazılırsa;

$$\frac{d\vec{T}_t}{d\phi} - \vec{T}_n + \lambda p_t = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d\vec{T}_n}{d\phi} + \vec{T}_t + \lambda p_n = 0 \quad (50)$$

$$\frac{d\vec{T}_b}{d\phi} + \lambda p_b = 0 \quad (51)$$

$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0$ ...Vektörel moment denkleminde

$$\frac{d\vec{M}_t}{d\phi} - M_n + \lambda m_t = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d\vec{M}_n}{d\phi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d\vec{M}_b}{d\phi} + \lambda T_n + \lambda m_b = 0 \quad (54)$$

şeklinde 6 adet skaler denklem elde edilir. Uygunluk denklemlerinde ise;  
 $\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0$  ..... vektörel dönme denkleminde

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \lambda \omega_t = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\omega_n = 0 \quad (56)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda\omega_b = 0 \quad (57)$$

$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma}$ ..... vektörel şekil değiştirme denkleminde

$$\frac{d\vec{U}_t}{d\varphi} - U_n - \lambda\gamma_t = 0 \quad (58)$$

$$\frac{d\vec{U}_n}{d\varphi} + U_t - \lambda\Omega_b - \lambda\gamma_n = 0 \quad (59)$$

$$\frac{d\vec{U}_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n - \lambda\gamma_b = 0 \quad (60)$$

Böylelikle aranan dört  $\vec{T}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{U}$ ,  $\vec{\Omega}$  vektörünün  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  eksen takımındaki koordinatları elde edilmiş olur.

$$\vec{\gamma} = C^{-1} \cdot \vec{T}, \quad \vec{\omega} = S^{-1} \cdot \vec{M}$$

Hooke kanunları bu 12 denklemde yerine konulursa bilinmeyen sayısı 18'den 12'ye düşer ( $\vec{M}_t, \vec{M}_n, \vec{M}_b, \vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{T}_b, \vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n, \vec{\Omega}_b$ ). Yapılacak bir takım kabullerle bu denklem sisteminde sadeleştirmeler ve sistemi 2 farklı problemin çözümü haline getirmek mümkündür. Çubuk ekseninin içinde yer aldığı düzlemin iki tane simetri eksenine olduğu ve dik kesit adı verilen düzlemi tarif eden  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  takımı ile her kesitte çakıştığı kabul edilsin. Bu kabul  $\mathbf{S}$  rijitlik tansörünü sadece diagonal elemanlardan oluşan bir hale getirir. Şekil değiştirmelerle ilgili olarak ise Kesme ve Normal kuvvetlerin etkisini momentler yanında çok küçük kabul edilir ve

$$\vec{\gamma} = 0$$

olarak alınır ;

$$\omega_t = \frac{M_t}{S_{tt}}, \omega_n = \frac{M_n}{S_{nn}}, \omega_b = \frac{M_b}{S_{bb}} \quad (61)$$

elde edilir. Bunlar *Uygunluk Denklemlerinde* yerine konulursa;

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \frac{M_n}{S_{nn}} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \lambda \frac{M_b}{S_{bb}} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{dU_t}{d\varphi} - U_n = 0 \quad (65)$$

$$\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda \Omega_b = 0 \quad (66)$$

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda \Omega_n = 0 \quad (67)$$

bağıntıları elde edilir.  $\vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{\Omega}_b, \vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{M}_b$  fonksiyonlarını diğer bir grup olan;  $\vec{U}_b, \vec{\Omega}_t, \vec{\Omega}_n, \vec{T}_b, \vec{M}_t, \vec{M}_n$  kesit fonksiyonlarından ayırmak ve 51, 54, 57, 60, 67 bağıntılarından görüldüğü gibi her iki fonksiyon grubunu farklı iki denklem takımının çözümüne indirgemek olasıdır. İlk gruptaki  $\vec{T}_t, \vec{T}_n, \vec{M}_b$  kuvvet ve kuvvet çifti büyüklüklerinin hepsi çubuk eksenin bulunduğu düzlemde  $\vec{U}_t, \vec{U}_n, \vec{\Omega}_n$  ise aynı düzlem içinde şekil değiştirmelerdir. Dış kuvvet bileşenleri olan  $p_t, p_n, m_b$  bu düzleme etkir. Sonuç olarak birinci grupta dış ve iç kuvvetler çubuk düzlemi içindedir. Diğer gruptaki  $\vec{T}_b, \vec{M}_t, \vec{M}_n$  kuvvet ve kuvvet çifti büyüklükleri



çubuğa dik olarak ortaya çıkarlar.  $\vec{U}_b$ ,  $\vec{\Omega}_t$ ,  $\vec{\Omega}_n$  yer değiştirme ve şekil değiştirme büyüklükleri aynı düzleme dik olurlar. Dış etkiler olan  $p_b$ ,  $m_t$ ,  $m_n$  büyüklükleri de çubuğa dik olarak etki etmektedir. İlk gruba benzer olarak, ikinci gruptaki etki ve sonuçlarda *çubuk düzlemine dik olmaktadır*. Sıradaki bölümde *Eğri Eksenli Çubuklar* iki ana kategoriye ayrılarak incelenmiştir.

### 2.3.1.Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar:

**Bu** tip çubuklar için aranan kesit tesirleri;  $T_t$ ,  $T_n$ ,  $M_b$  yerdeğiştirme ve dönmeler ise;  $U_t$ ,  $U_n$ ,  $\Omega_b$  olmak üzere 6 adet bilinmeyen fonksiyon olarak ortaya çıkar. Bu bilinmeyen fonksiyonlardan birisi seçilip diğerini bunun cinsinden yazılarak çözüm aranır<sup>3</sup>;

İlk adımda esas değişken olarak  $U_t$  seçilir ve diğer bilinmeyenler bunun cinsinden yazılmaya çalışılır;

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\
\Omega_b &= \frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})] \\
M_b &= \frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})]) \\
T_n &= -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} [\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})])] \\
T_t &= \frac{d}{d\varphi} [\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})]))] \\
&+ \frac{dm_b}{d\varphi} - \lambda p_n
\end{aligned} \tag{68}$$

Buradan yok etme metodu kullanılarak;  $U_t$ 'nin sağlamak zorunda olduğu diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\cos \lambda} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} [\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\frac{D_{bb}}{\lambda} \frac{d}{d\varphi} (\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} (\frac{U_t}{\cos \varphi})])]]] \\
&= \frac{d}{d\varphi} \lambda p_n - \lambda p_t - \frac{d^2 m_b}{d\varphi^2} - m_b
\end{aligned} \tag{69}$$

olarak elde edilir. Not:*Eşitsizlikler değişken değiştirme işlemi yapılarak elde edilmiştir*. Bu diferansiyel denklemin sağ tarafındaki terimleridir. Bu diferansiyel

<sup>3</sup>Bu çözüm [1] nolu kaynak, sy.119'da bulunabilir.

denklemin sağ tarafındaki terimler yük terimleridir. Sol tarafı ise 6. Mertebeden değişken katsayılı bir diferansiyel denklemlerdir. Çubuk üzerinde yayılı yük ve yayılı moment olmadığı durumda genel denklemlerde geçen yük ve moment terimlerini sıfır yapılı ve homojen hal için bu diferansiyel denklem 6 defa integre edilirse;

$$U_t = \cos \varphi (C_1 + C_2 \tan \lambda + C_3 \tan^2 \lambda + C_4 \tan^3 \lambda + C_5 \tan^4 \lambda + C_6 \tan^5 \lambda) \quad (70)$$

denkleme ulaşılır. Diğer bilinmeyen kesit tesirlerinin yukarıda elde edilen integrasyon sabitlerine bağlı  $U_t$  cinsinden ifadeleri yazılırsa, integrasyon sabitlerine bağlı formülasyonları elde edilmiş olur. İncelenen problemin sınır şartları kullanılarak bu integrasyon sabitleri ve bilinmeyen değerler elde edilebilir.

### 2.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Bu tip bir yükleme altında çubukta oluşan iç kuvvetler;  $T_b$ ,  $M_n$ ,  $M_t$  yer değiştirme ve dönmeler ise  $U_b$ ,  $\Omega_n$ ,  $\Omega_t$  şeklinde olmaktadır. İç kuvvet sembollerinden de anlaşıldığı gibi kesit içerisinde 2 tür moment oluşmaktadır. Bunlar  $M_n$  eğilme momenti ve  $M_t$  burulma momentidir. Yani çubuk eleman için bir burulmalı eğilme hali söz konusudur. Çözüm<sup>4</sup> için; İlk adımda 51 denklemlerinden  $T_b$  ifadesi integre edilir;

$$T_b = C_1 - \int_0^{\varphi} \lambda p_b d\varphi \quad (71)$$

2. adımda, 54 denklemlerinden  $M_n$ ,  $M_t$ 'den herhangi biri yok edilerek, örneğin burada  $M_n$  yok edilmiştir;

$$\frac{d^2 M_t}{d\varphi^2} + M_t = \lambda T_b - \lambda m_n - \frac{d}{d\varphi}(\lambda m_t) \quad (72)$$

bağıntısına ulaşılır. Burda da 2 ardışık integrasyon yapılırsa  $M_t$  fonksiyonu  $\varphi$  ve üç adet integral sabitine bağlı olarak bulunur.

$$M_n = \frac{dM_t}{d\varphi} - \lambda m_t \quad (73)$$

<sup>4</sup>Detaylı çözüm [1] nolu kaynak sy. 126'da bulunabilir.

67 denklemlerinde  $\Omega_n$ ,  $\Omega_t$  den herhangi biri yok edilerek, burada  $\Omega_n$  yok edilmiştir;

$$\frac{d^2\Omega_t}{d\phi^2} + \Omega_t = \lambda \frac{M_n}{S_{nn}} + T_b - \frac{d}{d\phi} \left( \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} \right) \quad (74)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı 2 kere integre edilir ve;

$$\Omega_t = \Omega_t(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \phi)$$

çözümüne ulaşılır. Buradaki  $C_1, C_2, C_3$  katsayıları daha önce  $M_t$  integrasyonundan gelen sabitlerdir.  $C_4, C_5$  ise yani sabitlerdir. Bu çözüm 74 denkleminde yerine konursa;

$$\Omega_n = \frac{d\Omega_t}{d\phi} - \lambda \frac{M_t}{S_{tt}} \quad (75)$$

elde edilir. Son olarak [75] denklemi [67] bağıntılarındaki  $U_b$  ifadesinde yerine konulursa;

$$U_b = C_6 \int_0^{\phi} \lambda \Omega_n d\phi \quad (76)$$

$U_b$  için bu bağıntı elde edilir.  $C_6$  son integrasyon sabitidir. Burada uygulanan metod *Kendi düzleminde yüklere maruz çubukların* çözümündekine benzemekle beraber farklı bir yöntemdir. Orada  $U_t$  esas bilinmeyen fonksiyon olarak seçilmekte ve bunun sağlanması gereken 6. dereceden diferansiyel denklem araştırılırken diğer bilinmeyenlerin hepsi  $U_t$ 'den ardaşık türev yoluyla elde edilmektedir. Burada ise esas bilinmeyen olarak  $T_b$  fonksiyonu seçilmekte ve bir sabit farkla birinci dereceden bir denklem bulunmaktadır. Diğer bilinmeyen fonksiyonların hesabında,  $T_b$ 'den ardaşık integrasyon uygulanmaktadır. Fakat bu bahsi geçen düzlemsel çubuğun özel bir hal olarak dairesel bir düzleme sahip olması durumunda  $U_b$ 'nin sağlanması gereken gene aynı 6. derecede bir diferansiyel denklem elde etme yoluyla çözüme gidilebilir. İntegrasyon sabitleri daha önce olduğu gibi yine sınır koşulları yardımıyla belirlenebilir.

## 2.4.Düzlemsel Çubuklar İçin Sınır Koşulları

**Sınır** koşullarının incelenmesinde daha önceki başlıktaki gibi 2 ana grup 4 alt kısım oluşturulmuştur.

### 2.4.1.Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları:

Bahsedeceğimiz 4 ana grubu şu şekilde sıralayabiliriz; Serbest uç, Kayıcı mesnetli uç, Sabit mesnetli uç, Ankastre uç.

- Serbest uç:Buradaki tüm sınır şartları Dinamik Tip sınır şartıdır. Yani sadece kuvvet koşulları mevcuttur.

$$T_t = T_t(B)$$

$$T_n = T_n(B)$$

$$M_b = M_b(B)$$



**Şekil 7:** Serbest Uç

- Kayıcı mesnetli uç:Buradaki sınır şartları hem Dinamik hemde Geometrik Tip sınır şartı bulundurur. Buna karışık mesnet koşulları da diyebiliriz.



**Şekil 8:** Kayıcı Mesnetli Uç

$$T_n = 0$$

$$M_b = 0$$

$$U_t = 0$$

- Sabit mesnetli uç:Burada da karışık mesnet koşulları ortaya çıkar.

$$M_b = 0$$

$$U_t = 0$$

$$U_n = 0$$

- Ankastre mesnetli uç:Burada da sınır şartlarının hepsi *Geometrik Tiptendir.*

$$U_t = 0$$

$$U_n = 0$$

$$\Omega_b = 0$$

#### **2.4.2.Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar İçin Sınır Koşulları:**

Bu tür çubukların uçlarında yada başlarında  $U_t$ ,  $\Omega_t$ ,  $\Omega_n$  olmak üzere 3 tip hareket serbesitesi vardır. Mesnetin düzenlenme şekline göre, çubuğun mesnetli ucuna istenilen hareket serbestliği verilebilir.



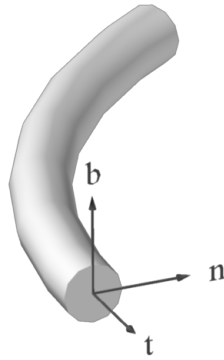
**Şekil 9:** Ankastre Mesnetli Uç

- Serbest uç:Dinamik Tip sınır şartı;

$$M_t = sabit$$

$$M_n = sabit$$

$$T_b = sabit$$



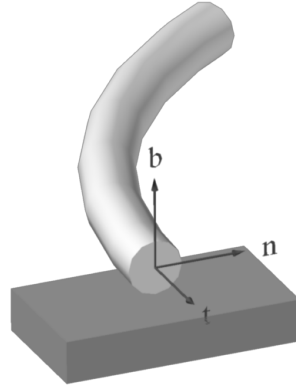
**Şekil 10:** Serbest Uç

- Sabit mesnetli uç:Burulmaya ve eğilmeye karşı bir mesnetleme türüdür. Dönemeler serbestir.

$$U_b = 0$$

$$M_t = 0$$

$$M_n = 0$$



**Şekil 11:** Sabit Mesnetli Uç

- Yarı Mafsallı Sabit mesnetli uç:Sabit mesnete  $\Omega_n$  serbestliği verilerek mesnet yalnız eğilme yönünden çalıştırılabilir.

$$U_b = 0$$

$$\Omega_t = 0$$

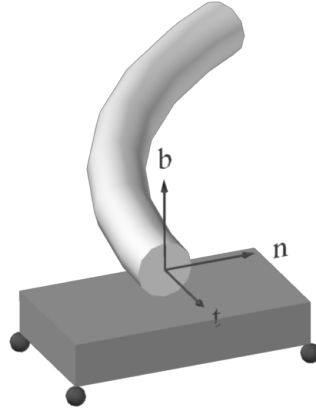
$$M_n = 0$$

- Yarı Ankastre mesnetli uç:Sabit mesnete  $\Omega_t$  serbestliği verilerek mesnet yalnız burulma yönünden de çalıştırılabilir.

$$U_b = 0$$

$$M_t = 0$$

$$\Omega_n = 0$$



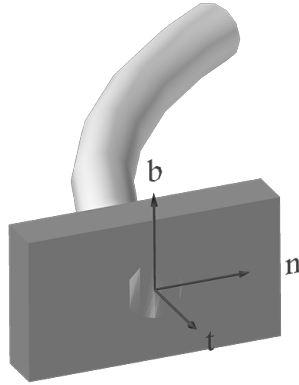
**Şekil 12:** Kayıcı Mesnetli Uç

- Tam Ankastre mesnetli uç:Sınır şartları Geometrik Tiptendir.

$$U_b = 0$$

$$\Omega_t = 0$$

$$\Omega_n = 0$$



**Şekil 13:** Tam Ankastre Mesnetli Uç



## 2.5.Dairesel Çubuklar

### 2.5.1.Düzleminde Eğilen Dairesel Çubuklar

**Öncelikle** kendi düzlemi içinde yüklere maruz kalan yani burulmasız eğilme halinde olan dairesel çubuklar incelenmiştir. Seçilen çubuk eksenin daireselliği, onun denklemleri kolaylaştıracak basit karakterli bir eğri olmasından kaynaklanır. Şimdi  $r$  yarıçaplı bir daire üzerinde rastgele seçilen bir  $B$  noktasından keyfi uzaklıktaki bir kesit,  $\varphi$  açısına bağlı olarak tanımlansın. Yerdeğiştirme, dönme, moment ve kesme kuvveti vektörel olarak gösterilirse;  $\vec{U}(\varphi)$ ,  $\vec{\Omega}(\varphi)$ ,  $\vec{M}(\varphi)$ ,  $\vec{T}(\varphi)$  gibi bir hal alır. Bunlar skaler olarak  $\vec{U}_b$ ,  $\vec{\Omega}_t$ ,  $\vec{\Omega}_n$  üçlüsündeki bileşenlerine ayrılarak gösterilebilir. Düzlem hal için elde edilen genel denklemler;

$$\begin{aligned}\frac{dT_t}{d\varphi} - T_n + \lambda p_t &= 0 \\ \frac{dT_n}{d\varphi} + T_t + \lambda p_n &= 0 \\ \frac{dM_b}{d\varphi} + \lambda T_n + \lambda m_t &= 0 \\ \frac{dU_t}{d\varphi} - U_n - \lambda \gamma_t &= 0 \\ \frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - \lambda \Omega_b - \lambda \gamma_n &= 0\end{aligned}\quad (77)$$

olur. Yukarıda bahsedilen  $r$  yarıçaplı çember için bunlar düzenlenirse<sup>5</sup>  $p_t$ ,  $p_n$  ve  $m_b$  ile teorinin başından  $\gamma_t \cong \gamma_n \cong 0$  olarak kabul edilmiş olan terimler denklemlere katılmaz.  $\lambda$  eğriliği çubuklar için sabittir ve burada  $R$  değerine eşittir.  $\lambda = R$ ;

$$\begin{aligned}\dot{U}_t &= U_n \\ \dot{U}_n &= -U_t + R\Omega_b \\ \dot{\Omega}_b &= \frac{R}{S_b} M_b \\ \dot{M}_b &= -RT_n \\ \dot{T}_n &= -T_t \\ \dot{T}_t &= T_n\end{aligned}\quad (78)$$

<sup>5</sup>Düzenleme homojen hal içindir. Çubuk boyunca yayılı durumda olan bir yük yada moment yoktur

Not:  $\dot{y} = \frac{dy}{d\varphi}$ ,  $S_b = E.I_b$  ( b eksenini etrafındaki eğilme rijitliği)

bu diferansiyel denklem takımının çözümü için<sup>6</sup> altı skaler fonksiyondan biri esas alınıp diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse; Burada seçilen esas bilinmeyen fonksiyon  $U_t$ 'dir,

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{dU_t}{d\varphi} \\ \Omega_b &= \frac{1}{R}U_t + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2} \\ M_b &= \frac{S_b}{R^2}\left(\frac{dU_t}{d\varphi} + \frac{d^3U_t}{d\varphi^3}\right) \\ T_n &= -\frac{S_b}{R^3}\left(\frac{d^2U_t}{d\varphi^2} + \frac{d^4U_t}{d\varphi^4}\right) \\ T_t &= -\frac{S_b}{R^3}\left(\frac{d^3U_t}{d\varphi^3} + \frac{d^5U_t}{d\varphi^5}\right)\end{aligned}\quad (79)$$

elde edilir. Bu şekilde yok etmeye devam edilirse homogen hal için  $U_t$ 'nin sağlaması gereken diferansiyel denklem;

$$\frac{d^6U_t}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4U_t}{d\varphi^4} + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2} = 0 \quad (80)$$

olur. Bu yüksek mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin çözümü;

$$U_t = C_1 + C_2\varphi + C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + C_5\varphi \sin \varphi + C_6\varphi \cos \varphi \quad (81)$$

şeklindedir. Buradaki  $C_j$  integrasyon sabitleri başlangıç değerleri verildiği zaman hesaplanabilir ve  $U_t$  bilinmeyeni başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilebilir. Aynı işlem diğer 5 bilinmeyen içinde yapılırsa, tüm bilinmeyenler başlangıç değerlerine bağlı olarak ifade edilmiş olur. İntegrasyon sabitlerinin

<sup>6</sup>[1] nolu kaynak sy.77'de bulunabilir.

başlangıç değerlerine göre nasıl hesaplanacağı taşıma matrisi konusunda açıklanacaktır.

### **2.5.2.Düzlemine Dik Kuvvet Etkisinde Dairesel Çubuklar:**

**Öncelikle** düzlemine dik yükler etkileyen bir düzlemsel çubuk için genel denklemler belirlenecek olursa; Burada ki dış kuvvetler  $p_b$ ,  $m_t$  ve  $m_n$  şeklinde sıralanabilir. Buradan , aranan iç kuvvetler;  $T_b$ ,  $M_t$ ,  $M_n$ , yerdeğiştirme ve dönmeler;  $U_b$ ,  $\Omega_t$ ,  $\Omega_n$  olarak ortaya çıkar. Dış yüklerin mevcut olması ve çubuk eksenin herhangi bir düzlem ile teşkil edilmesi hali için genel denklemler aşağıda verildiği şekildedir;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda p_b &= 0
\end{aligned} \tag{82}$$

Bu genel denklemler eğriliği R olan ve üzerine yayılı yük ya da moment etkimeyen dairesel çubuk için yeniden düzenlenirse<sup>7</sup>;

$$\begin{aligned}
\dot{U}_b &= -R\Omega_n \\
\dot{\Omega}_n &= -\Omega_t + \frac{R}{S_{nn}}M_n \\
\dot{\Omega}_t &= \Omega_n + \frac{R}{S_{tt}}M_t \\
\dot{M}_n &= -M_t + RT_b \\
\dot{M}_t &= M_n \\
\dot{T}_b &= 0
\end{aligned} \tag{83}$$

---

<sup>7</sup>*Homojen Durum*

şeklinde altı adet genel denklem elde edilmiştir olur. Şimdi bunun çözümünün nasıl yapılabileneceği araştırılsın. Kendi düzleminde yüklü çubukların analizinde yapıldığı gibi bilinmeyenlerden bir tanesi esas alıp, diğerleri bunun türevleri cinsinden ifade edilirse; Burada bilinmeyen olarak  $u_b$  yer değiştirmesi alınmıştır;

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= -\frac{1}{R} \frac{dU_b}{d\varphi} \\
\Omega_t &= \frac{1}{R} \left( \frac{\zeta}{1+\zeta} \frac{d^4 U_b}{d\varphi^4} + \frac{2\zeta+1}{1+\zeta} \frac{d^2 U_b}{d\varphi^2} \right) \\
M_n &= \frac{S_n}{R^2} \left( \frac{\zeta}{1+\zeta} \right) \left( \frac{d^4 U_b}{d\varphi^4} + \frac{d^2 U_b}{d\varphi^2} \right) \\
M_t &= \frac{S_2}{R^2} \left( \frac{\zeta}{1+\zeta} \frac{d^5 U_b}{d\varphi^5} + \frac{2\zeta+1}{1+\zeta} \frac{d^3 U_b}{d\varphi^3} + \frac{dU_b}{d\varphi} \right) \\
T_b &= \frac{S_b}{R^3} \left( \frac{d^5 U_b}{d^5 \varphi} + 2 \frac{d^3 U_b}{d\varphi^3} + \frac{dU_b}{d\varphi} \right)
\end{aligned} \tag{84}$$

Not:  $\zeta = \frac{S_t}{S_n}$

yok etme işlemine devam edilirse, sadece  $U_b$ 'nin sağlanması gereken diferansiyel denklemi şu şekilde elde ederiz;

$$\frac{d^6 U_t}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_t}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_t}{d^2 \varphi} = 0 \tag{85}$$

Bu homojen Diferansiyel Denklemin *Başlangıç Değerleri Metodu* ve *Taşıma Matrisi* kullanılarak nasıl çözüleceği ilerleyen başlık altında incelenmiştir.

## 2.6. Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi

**Başlangıç Değerleri Metodu** tek değişkenli problemlere uygulanan bir metottur. Amacı sınır değer problemleri başlangıç değer problemlere çevirerek ara şartlarda dolayı girebilecek ek sabit değerlerin önüne geçmek ve problemi başta belirlenen sabitlerle çözmektir. Hesapların daha doğru ve düzenli yapılabilmesi bakımından bu metot uygulanırken matris formasyonları kullanmak çok daha iyi sonuç

verir. Matris notasyonu kullanıldığı zaman, daha önceden de belirtmiş olduğumuz değişkenin farklı değerleri arasında geçişi sağlayan ve *Taşıma Matrisi* adı verilen matrisin önemi büyüktür.

Bir sistemin durumunu belirlemek için, onun koordinatlarına ihtiyacımız olduğu açıktır. Bunların sayısı sistemden sisteme farklılıklar gösterir. Genel bir tarif yapmak açısından bu sayı  $n$  olarak kabul edilsin.

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$$

Başlangıç Değerleri Metodu'nun bir değişkenli problemlere uygulandığı belirtilmişti. Şimdi bu sistemin durumunu belirleyen  $P_i$  koordinatları bir parametriye bağlı olarak gösterilsin. Örneğin bu parametre  $t$  zaman parametresi olabilir.

$$P_i[t], i = 1, 2, 3, \dots, n - 1, n$$

Sistemin durumunu belirten  $n$  tane tek değişkenli fonksiyon vardır. Bu  $n$  değişkenli fonksiyonlar bir vektörün koordinatları gibi düşünülüp;

$$\mathbf{P}[t] = \begin{bmatrix} P_1[t] \\ P_2[t] \\ P_3[t] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n[t] \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu vektöre *Durum Vektörü* denir. *Durum Vektörü*'nün koordinatları, boyutsuzluk şeklinde oluşturmak gerekir.  $P[t]$  vektörünü nasıl belirtmek için *Kanonik* (düzgün, düzenli) *tasvir* denilen şekilde tarif oldukça basittir. Buna geçmeden önce yapılması gereken şey *Durum Vektörünü*'nün bütün  $P_i[t]$  koordinatlarının (fonksiyonlarının) 1. türevlerinin bulunduğunu kabul etmek ve *Durum Vektörü*'nünkine benzer bir matris notasyonu ile göstermektir. Bu gösterim aşağıdaki gibi bir eşitliği ortaya çıkar.

$$\mathbf{P}[t] = \begin{bmatrix} \dot{P}_1[t] \\ \dot{P}_2[t] \\ \dot{P}_3[t] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{P}_n[t] \end{bmatrix}$$

Kanonik Tasvirle yapılmak istenen  $P[t]$  ile  $\dot{P}_1[t]$  vektörleri arasındaki ilişkiyi belirtmektir. Yani parametrenin  $t$  anındaki değeriyle,  $t+dt$  değeri arasındaki değişimi gösterim şeklidir. Fakat bu bağıntı nasıldır? Liner mi yoksa liner olmayan bir bağıntı mı söz konusudur? Bu soruların cevabı çözüm şeklini büyük ölçüde etkiler. Bu çalışmada bağıntı liner olarak kabul edilmiştir. Linerlik kabulü, bu ilişkiyi bir liner denklem sistemiyle tarif edilmesine olanak verir.

$$\begin{aligned} \dot{P}_1[t] &= d_{11} \times P_1[t] + d_{12} \times P_2[t] + \dots + d_{1n} \times P_n[t] \\ \dot{P}_2[t] &= d_{21} \times P_1[t] + d_{22} \times P_2[t] + \dots + d_{2n} \times P_n[t] \\ \dot{P}_3[t] &= d_{31} \times P_1[t] + d_{32} \times P_2[t] + \dots + d_{3n} \times P_n[t] \\ &\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{P}_n[t] &= d_{n1} \times P_1[t] + d_{n2} \times P_2[t] + \dots + d_{nn} \times P_n[t] \end{aligned} \quad (86)$$

Bu  $n$  adet liner denklem sisteminde bulunan  $d_{ij}$  katsayıları  $P_i$  koordinatlarından bağımsızdır. Ama  $t$  parametresine bağlı olabilirler. Denklem sistemini daha düzenli bir halde gösterilecek olursa;

$$\dot{P}[t] = D.P[t] \quad (87)$$

Bu formülasyonda geçen **D** matrisi kare bir matristir ve *Diferansiyel Geçiş Matrisi* olarak nitelendirilir. Bu matris, sistemin yakın durumları arası geçişte kullanılır.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}$$

[87] nolu ifade de türevin tanımından faydalanılarak,

$$P[t + dt] = P[t][D.P(t)]dt \quad (88)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifade ile sistemin yakın durumları arasındaki geçişi ifade eden bir denklem kurulmuş olur. Burada  $t=0$  anından herhangi bir  $t$  anına sonsuz

küçük adımla yani parça parça bir diferansiyel geçişle ulaşmak mümkündür. Aynı zamanda bunun yerine tek bir integral geçiş de yapılabilir. Bu bir defada parametrenin t=0 ait değerden t anına ait değere geçişi sağlayan matrise *Taşıma Matrisi* denilir.

$$P[t] = F[t].P[0] \quad (89)$$

P[0] durum vektörü,

$$\mathbf{P}[0] = \begin{bmatrix} P_1[0] \\ P_2[0] \\ P_3[0] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n[0] \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bunlar durum vektörünün başlangıç değerleridir. F(t) ile de bir kare matris olan *Taşıma Matrisi*,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Buradaki  $f_{ij}$  değerleri zaman parametresi yerine  $\varphi$  konum değişkenine bağlı fonksiyonlar olabilir. Bu boyutlu sürekli ortamlar için (Çubuk Mukavemeti Problemleri) bu parametre yeri gösteren bir konum değişkenidir.  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  *Taşıma Matrisi* konum değişkenine bağlı olarak ifade edilirse,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} f_{11}(\varphi) & f_{12}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1n}(\varphi) \\ f_{21}(\varphi) & f_{22}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{2n}(\varphi) \\ f_{31}(\varphi) & f_{32}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{3n}(\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(\varphi) & f_{n2}(\varphi) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn}(\varphi) \end{bmatrix}$$

gösterimini ulaşılır. Şimdi problemin diferansiyel karakterini gösteren  $\mathbf{D}$  *Diferansiyel Geçiş Matrisinden*, problemin integral karakterini gösteren  $\mathbf{F}$  *Taşıma Matrisini* nasıl doğrudan elde edileceğini inceleyelim.

### 2.6.1. Taşıma Matrisinin Hesabı ve Özellikleri

Bir önceki başlık altında [89] denklemi ile gösterilen durum matrisinin, başlangıç değerleri ve taşıma matrisine bağlı ifadesi hatırlanacak olursa;

$$P[t] = F[t].P[0]$$

Burada  $F[t]$  matrisini bulmak için bunun sağlanması gereken diferansiyel denklem araştırılsın;

$$\frac{P[t]}{dt} = \frac{F[t]}{dt} \cdot \frac{P[0]}{dt}$$

$$P'[t] = F'[t].P[0]$$

[87] denkleminde,  $P'[t] = DP[t]$  olduğu hatırlanarak

$$DP[t] = F'[t].P[0]$$

ifadesinde  $P[t]$  yerine [89] denklemi konulursa;

$$\begin{aligned} D.F[t].P[0] &= F'[t].P[0] \\ D.F[t].P[0] - F'[t].P[0] &= 0 \\ [D.F[t] - F'[t]].P[0] &= 0 \\ P[0] &\neq 0 \text{ ise} \\ [D.F[t] - F'[t]] &= 0 \\ F'[t] &= D.F[t] \end{aligned} \tag{90}$$

bağıntısı bulunur. Görüldüğü gibi  $D$  matrisi sistemin iki farklı konumu arasındaki diferansiyel bağı karakterize etmektedir. Burada  $D$  matrisinin bütün elemanlarının sabit olması halinde [90] diferansiyel denkleminin özel çözümü;

$$F[t] = F[0].e^{t.D} \tag{91}$$



olur . Burada [89] no'lu denklem kullanılırsa ;

$$P[t] = F[t].P[0]$$

t=0 için ;

$$P[0] = F[0].P[0]$$

denklemin sağlanması, F[0] matrisinin bir *Birim Matris* olmasına bağlıdır.

$$P[0] = I.P[0]$$

$$F[0] = I$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{t.D}$ , ye gelince;

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \\ e^{A.t} &= 1 + t + \frac{t^2}{2!}.A^2 + \frac{t^3}{3!}.A^3 + \frac{t^4}{4!}.A^4 + \dots + \frac{t^n}{n!}.A^n + \dots \\ e^{t.D} &= I + t + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + \dots + \frac{t^n}{n!}.D^n + \dots \end{aligned} \quad (92)$$

burada A sabit bir sayıdır.

$$F[t] = I + t + \frac{t^2}{2!}.D^2 + \frac{t^3}{3!}.D^3 + \frac{t^4}{4!}.D^4 + \dots + \frac{t^n}{n!}.D^n + \dots \quad (93)$$

şeklinde bir seri haline gelir. Böylelikle F[t] taşıma matrisi, sonsuz sayıda matris kuvvetlerinin toplamıyla ifade edilmiş oldu. *Cayley-Hamilton Denklemi* adı verilen denklem yardımıyla;

$$D^n + \beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \beta_{n-3}D^{n-3} + \dots + \beta_1D + \beta_0D \quad (94)$$

yazılabilir.<sup>8</sup>

Taşıma Matrisi  $\mathbf{F}[t]$  sınırlı sayıda matris kuvvetinin toplamına gelir. Bu işlemde matrislerin katsayıları skaler kuvvet serileridir.

$$F[t] = \psi_0(t).I + \psi_1(t).D + \psi_2(t).D^2 + \psi_3(t).D^3 + \dots + \psi_{n-1}(t).D^{n+1} \quad (95)$$

<sup>8</sup> $\beta_j$  katsayıları  $\mathbf{D}$  matrisinin öz değerlerini veren karakteristik denklemin katsayılarıdır. Burada  $\mathbf{D}$  matrisi sabit ve n. dereceden kare bir matristir.

sonunda [93] denklemi,[95] denklemine dönüşür. Yani **D** matrisinin n kadar kuvveti ile, diğer bütün kuvvetlerinin hesaplanabileceği ortaya çıkar. Böylelikle **F[t]** *Taşıma matrisinin*, **D** *Diferansiyel Geçiş Matrisinden* nasıl doğrudan elde edileceği gösterilmiş oldu. Taşıma Matrisinin bir kaç özelliği verilirse;

$$\mathbf{F[m + n]} = \mathbf{F[m]} \cdot \mathbf{F[n]} \quad (96)$$

Diğer özellikler bu temel özellikten yola çıkılarak bulunabilir.

$$\begin{aligned} F[m] &= F[m].F[0], n = 0 \text{ için} \\ F[0] &= I \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} F[0] &= F[-n].F[n], m = -n \text{ için} \\ I &= F[n]^{-1}.F[n] \text{ olması gerekir.} \end{aligned}$$

$$F[n]^{-1} = F[-n] \text{ olur.} \quad (98)$$

$$F[n].F[m] = F[n].F[m] \text{ kumutatif tir.} \quad (99)$$

## 2.6.2. Taşıma Matrisinin Hesabına Farklı Bir Yaklaşım

**Daha** önceki hesaplarda özel bir yaklaşımla **D** matrisini sabit bir matris olarak kabul edip

$$F'[t] = D.F[t]$$

denklemin çözümü;

$$F[t] = e^{t.D} \text{ şeklinde bulunmuştu.}$$

Fakat **D** matrisinin elemanları t'nin fonksiyonları olduğu zaman çözüm bu şekilde olmaz. Bu durum için çeşitli *Taşıma Matrisi* hesap metodları vardır. Bu başlık altında, tez çalışmasının da temelini oluşturan *PICARD İTERASYON* ve *Matrisant* yolunun nasıl kullanıldığı açıklanacaktır.  $F(t)$  taşıma matrisinin  $F[t]_{n-1}$  gibi bir değeri biliniyorsa onun bir basamak üstü olan  $F[t]_n$  değerine geçmek mümkündür.

$$F'(t) = D.f(t)$$

formülünü rekürans formülü olarak alınırsa,

$$F'[t]_n = D.F[t]_{n-1} \quad (100)$$

denklemini elde edilir.  $t = 0$  için ;  $F(0)=I$  olur. Her iki taraf integre edilirse,

$$F[y]_n = I + \int_0^t D(\tau)F[t]_{n-1}d\tau \quad (101)$$

denkleminde ulaşılır. Burada  $F[0]=I$  alınıp n ile ilişkili ve aşağıda görülen şekilde bir iterasyon uygulanırsa

$$F[0] = I$$

$$F[t]_1 = I + \int_0^t D(\tau) d\tau$$

$$F[t]_2 = I + \int_0^t D(\alpha) [I + \int_0^\alpha D(\tau) d\tau] d\alpha$$

$$F[t]_3 = I + \int_0^t D(\alpha) d\alpha + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha$$

... = .....

... = .....

$$F[t, 0] = I + \int_0^t D(\tau) d\tau + \int_0^t D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha + \int_0^t D(\zeta) \int_0^\zeta D(\alpha) \int_0^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha d\zeta + \dots \quad (102)$$

Şeklinde bir integral serisi elde edilir. Bu integral serisine *Matrisant* adı verilmektedir. Eğer **D** matrisinin elemanları *t* nin sürekli fonksiyonu olursa, her **D** matrisi için bu seri yakınsar. **D** matrisi sabit olursa bu seri;

$$f[t] = I + t + \frac{t^2}{2!} \cdot D^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot D^3 + \frac{t^4}{4!} \cdot D^4 + \dots + \frac{t^n}{n!} \cdot D^n + \dots = e^{t \cdot D}$$

haline gelir. Şimdi *Taşıma Matrisinin* farklı bir özelliğini kullanarak  $0 - t$  aralığı *n* eşit parçaya ayrılınsın;

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq \dots \leq t_n \leq t$$

Bu durumda ;

$$F_0^t = F_{t_n}^t \cdot F_{t_{n-1}}^{t_n} \cdot F_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \dots F_0^{t_1} \text{ olur} \quad (103)$$

$$\text{Not: } F_{t_i}^{t_j} = I + \int_{t_i}^{t_j} D(\alpha) d\alpha + \int_{t_i}^{t_j} D(\alpha) \int_{t_i}^\alpha D(\tau) d\tau d\alpha + \dots \quad (104)$$

Farklı bir indissel gösterim kullanılarak (103) ifadesi;

$$F(t, 0) = F(t, t_n) \cdot F(t_n, t_{n-1}) \cdot F(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots F(t_2, t_1) \cdot F(t_1, 0) \quad (105)$$

şeklinde de yazılabilir.

$$F[t] = F[t,0].F[0] \quad (106)$$

denklemi bize *başlangıç değer* probleminin çözümünü verir.  $F[0] = I$  olduğu bilindiğine göre, *Taşıma Matrisini* hesaplamak için (106)ifadesinden  $F[t,0]$ 'ın hesaplanması yeterli olacaktır. Yukarıdaki ifade  $t - 0$  aralığı ne keder fazla parçaya bölünürse, sonuç o kadar yakınsar.

Yani belli bir değerdeki sonucunu bulmak istediğimiz *Taşıma Matrisini* (102) ifadesini kullanarak hesaplamak mümkün olmadığından 105 ifadesinde olduğu gibi parçalara bölerek ve bu parçalardan herbirine 104 ifadesi belli sayıda terim alınarak uygulanırsa yaklaşık sonuç elde etmek mümkün olacaktır. 105 ifadesindeki parça sayısı ve 104 ifadesinden alınan terim sayısı arttırıldıkça sonuç kesin sonuca yaklaşacaktır.

### 2.6.3.Yaklaşık Taşıma Matrisi Metodunun Dairesel Çubuklara Uygulanması

**Başlangıç** olarak merkezinde çubuk düzlemine dik tekil yük bulunan dairesel bir çubuk incelenecektir. Bu problemin homojen hal için kesin çözümü mevcuttur<sup>9</sup>. Buradaki amaç kesin çözümle, ortaya konan yaklaşık yöntemin yakınlığını belirtmektir. Düzlemine dik yükleme durumunda eğer  $U_b$  esas bilinmeyen olarak seçilirse homojen hal için  $U_b$ 'nin sağlaması gereken differansiyel denklemin;

$$\frac{d^6 U_b}{d^6 \varphi} + 2 \frac{d^4 U_b}{d^4 \varphi} + \frac{d^2 U_b}{d^2 \varphi} = 0 \quad (107)$$

olduğu bilinmektedir. Bunun  $C_i$  integrasyon sabitleri cinsinden çözümü;

$$\begin{aligned} U_b &= e^{\varphi t} \\ t^6 . e^{\varphi t} + 2t^4 . e^{\varphi t} + t^2 . e^{\varphi t} &= 0 \\ t^6 + 2t^4 + t^2 &= 0 (\text{karakteristik denklem}) \\ t_1 = t_2 = 0, t_3 = t_4 = i, t_5 = t_6 = -i \end{aligned}$$

olur. Karakteristik denklemin altı kökü bulunmuş olur. Bu kökler çift katlı kök olarak ortaya çıkmaktadır. Differansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere çift kat kök olması durumundaki çözüm;

$$U_b = C_1 . e^{\varphi . 0} + C_2 . \varphi . e^{\varphi . 0} + C_3 . e^{\varphi . i} + C_4 . \varphi . e^{\varphi . i} + C_5 . e^{\varphi . -i} + C_6 . \varphi . e^{\varphi . -i}$$

<sup>9</sup>[1]nolu kaynak sy.152'de bulunabilir

$$U_b = C_1 + C_2\varphi + C_3\sin\varphi + C_4\cos\varphi + C_5\varphi\sin\varphi + C_6.\varphi\cos\varphi \quad (108)$$

olmaktadır. Bilinmeyenlerin arandığı kesitin başlangıç değerlerinin şu şekilde verilmiş olduğu kabul edilsin;

$$U_b(0), \Omega_n(0), \Omega_t(0), M_n(0), M_t(0), T_b(0) \quad (109)$$

Bu durumda ;

$$U_b(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \sin 0 + C_4 \cos 0 + C_5 \cdot 0 \sin 0 + C_6 \cdot 0 \cos 0$$

$$U_b(0) = C_1 + C_4$$

$$\Omega_n(0) = -\frac{1}{r}(C_2 + C_3)$$

$$\Omega_t(0) = -\frac{1}{r}\left(C_4 - \frac{2}{1+\zeta}C_5\right)$$

$$M_n(0) = -\left(\frac{2\zeta}{1+\zeta}\right)\frac{D_n}{r^2}C_5$$

$$M_t(0) = \left(\frac{2\zeta}{1+\zeta}\right)\frac{D_n}{r^2}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}C_2 + C_6\right)$$

$$T_b(0) = -\frac{D_t}{r^3}C_2 \quad (110)$$

elde edilen denklem sisteminden  $C_j$  leri çözersek  $U_b$  esas bilinmeyen fonksiyonu;

$$\begin{aligned} U_b &= U_b(0)f_{11}[\varphi] + \Omega_n(0)f_{12}[\varphi] + \Omega_t(0)f_{13}[\varphi] + M_n(0)f_{14}[\varphi] \\ &+ M_t(0)f_{15}[\varphi] + T_b(0)f_{16}[\varphi] \end{aligned} \quad (111)$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemler diğer bilinmeyen değerler için de yapılırsa;

$$\begin{aligned} \Omega_b &= U_b(0)f_{21}[\varphi] + \Omega_n(0)f_{22}[\varphi] + \Omega_t(0)f_{23}[\varphi] + M_n(0)f_{24}[\varphi] \\ &+ M_t(0)f_{25}[\varphi] + T_b(0)f_{26}[\varphi] \end{aligned} \quad (112)$$

.

$$\begin{bmatrix} U_b(\varphi) \\ \Omega_n(\varphi) \\ \Omega_t(\varphi) \\ M_n(\varphi) \\ M_t(\varphi) \\ T_b(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b(0) \\ \Omega_n(0) \\ \Omega_t(0) \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix} \quad (113)$$

şeklinde genel bir formülasyon elde edilir. Buradaki matris notasyonu ile anlatılmak istenen herhangi bir kesitteki bilinmeyenlerin bir  $F[\varphi]$  matrisi ve *başlangıç değerleri* yardımıyla ifade edilebileceğidir. Bu  $F[\varphi]$  matrisinin elemanları, başlangıç değerlerinden bağımsız olup yalnızca  $\varphi$  değişkenine bağlıdır.  $F[\varphi]$  matrisi Taşıma Matrisi olarak adlandırılmaktadır.

## 2.7. Elastik Zemine Oturan Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuklar

Elastik bir zemine oturan çubuk için mesnetlendirme süreklidir. Bu özellik, problemin daha önceden diferansiyel karakterinde bir takım değişiklikler yaratır. Değişikliğin formülasyonu çubuğun oturduğu ortamın şekil değiştirme karakteristiklerine bağlıdır. Bahsi geçen bir elastik ortam için bu irdelenirse; Çubuk elemanı üzerine etkiyen  $p$  yükleri, çubukta  $U_b$  çökmeleri oluşturur.  $U_b$  çökmeleri elastik olarak şekil değiştiren ortamdan  $q$  tepkilerini görür. Kirişe etkiyen toplam kuvvet,  $\vec{b}$  eksenini için kuvvet dengesi için yazılırsa;

$$p_b = q - p$$

olarak meydana gelir. Düzlemine dik yükler altında ki elastik zemine oturan eğri eksenli çubuklar için genel denklemler yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} + \lambda\Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - \lambda\frac{M_n}{S_{nn}} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - \lambda\frac{M_t}{S_{tt}} &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - \lambda T_b + \lambda m_n &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n + \lambda m_t &= 0 \\
\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(q - p) &= 0
\end{aligned} \tag{114}$$

bağıntıları bulunur. Görüldüğü gibi bu denklemlerin, [82] denklemlerinden tek farkı  $T_b$ ' de ortaya çıkar.  $\lambda$ , [82] denklemlerinden R'ye eşittir. Zeminden çubuğa etkiyen bu  $q[\varphi]$  kuvvetinin tanımlanmasında bir çok teorik ve deneysel çalışma vardır. Bu çalışmanın sınırları içerisinde  $q[\varphi]$  kuvvetinin belirlenmesinde çok basit bir liner bağıntı olan ve yay sabiti yardımıyla icra edilebilen *Winkler Elastik Zemin Hipotezi* kullanılmıştır. Bu bağıntı pratikte çok iyi ve kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Winklerin ortaya attığı teoriye göre zemin, onu oluşturan bir çok yaydan meydana gelmiştir. bu yaylar için;

$$q = k.U_b \tag{115}$$

bağıntısı yazılabilir. [114] denklemlerindeki  $T_b$  ifadesinde bu son bağıntı yerine konulursa;

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(k.U_b - p) = 0 \tag{116}$$

denkleminin elde edilmesiyle, çubuğun elastik bir zemin üzerine oturması formülüne edilerek denklemlere katılmış olur.

Şimdi bu denklem sisteminin çözümününün *Başlangıç Değerleri ve Taşıma Matrisi Metodundan* faydalanılarak nasıl bulunabileceğini inceleyelim. Daha önceden

de olduğu gibi ilk hedef bu liner diferansiyel denklem takımı için Diferansiyel Geçiş Matrisinin bulunmasıdır. Fakat bunu yapmadan önce işlemlerde kolaylık sağlaması ve işlem yoğunluğu ile uğraşmaktan çok sonuçları irdelemeye fırsat vermesi bakımından bir takım hesap kolaylığı kabulleri yapılacaktır.

Düzlem çubuk, daire gibi basit karakterli bir enkesitten meydana gelsin (  $\lambda[\varphi] = \text{sabit} = R$  ). Çubuk üzerinde yayılı bir yük yada moment olmasın. Bu kabullerden sonra genel denklemlerin;

$$\frac{dU_b}{d\varphi} + R\Omega_n = 0 \quad (117)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\varphi} + \Omega_t - R\frac{M_n}{S_{nn}} = 0 \quad (118)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\varphi} - \Omega_n - R\frac{M_t}{S_{tt}} = 0 \quad (119)$$

$$\frac{dM_n}{d\varphi} + M_t - RT_b = 0 \quad (120)$$

$$\frac{dM_t}{d\varphi} - M_n = 0 \quad (121)$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + R(k.U_b) = 0 \quad (122)$$

haline geldiği görülür. Sistem matrislerinden  $[\varphi]$  ve  $[d\varphi + \varphi]$  kesitlerindeki değeri yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\varphi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\varphi} \\ \frac{dM_n}{d\varphi} \\ \frac{dM_t}{d\varphi} \\ \frac{dT_b}{d\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R/S_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/S_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k.R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ T_b \end{bmatrix}$$

bağıntısı elde edilir. Artık sistemin diferansiyel karakterini tanımlayan *Diferansiyel Geçiş Matrisi* (**D**) oluşturulmuş olur. Bundan *Taşıma Matrisi*'ne (**F**) nasıl



geçildiği ve bu matris aracılığı ile kesit tesirlerinin nasıl bulunacağı daha önceki başlıklarda ayrıntılı bir şekilde anlatıldı.

Çubukta yayılı yüklü olursa;

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + \lambda(q - p) = 0 \quad (123)$$

denkleminde,

$q = k \cdot U_b$  ve  $\lambda = R$  iken

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + R(k.U_b - p) = 0 \quad (124)$$

$$\frac{dT_b}{d\varphi} + R.k.U_b - R.p = 0 \quad (125)$$

$p = \varphi$  çubuğun üzerine gelen yayılı yük.

Bu şekilde verilen başlangıç değerleri probleminin çözümü;

$$\vec{y}(\varphi) = e^{A\varphi} \cdot \vec{y}_0 + \int_0^{\varphi} e^{A(\varphi-\tau)} \cdot \vec{f}(\tau) \cdot d\tau \quad (126)$$

$$= e^{A\varphi} \cdot \vec{y}_0 + \int_0^{\varphi} e^{A(\varphi)} \cdot e^{-A(\tau)} \cdot \vec{f}(\tau) \cdot d\tau$$

$$= e^{A\varphi} \cdot \vec{y}_0 + e^{A(\varphi)} \cdot \vec{f} \int_0^{\varphi} e^{-A(\tau)}(\tau) \cdot d\tau$$

$$F(\varphi) = e^{A(\varphi)}$$

$$F^{-1}(\varphi) = e^{-A(\varphi)}$$

$$\vec{y}(\varphi) = F(\varphi) \cdot \vec{y}_0 + F(\varphi) \cdot \vec{f} \int_0^{\varphi} F^{-1}(\tau) \cdot d\tau \quad (127)$$

Burada  $F$  Taşıma matrisi,  $\vec{f}$ ;

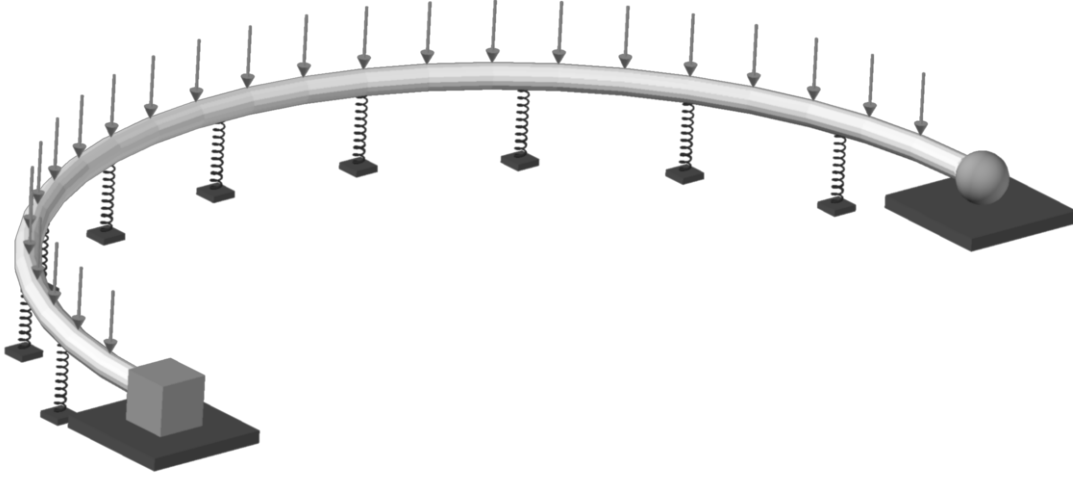
$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p.R \end{bmatrix}$$

Sistemi ve çözüm modelini sayısal olarak görmek ve kesit tesirlerine ait fonksiyonları belirleyerek bunlara ait eğrileri çizmek için bir örnek üzerinde anlatılan işlemler gerçekleştirilsin.

**Tablo 1:** Zemin yatak katsayıları

Zemin Cinsi	k =zemin katsayısı (ton/m3)
Gevşek kum	480 - 1600
Orta sertlikte kum	960 - 8000
Sert kum	6400 - 12800
Siltli orta sert kum	2400 - 4800
<b>Killi Zemin</b>	
$q_u \leq 2.0 \text{ kgf/cm}^2$	1200 - 2400
$2.0 < q_u \leq 2.0 \text{ kgf/cm}^2$	2400 - 4800
$q_u > 8.0 \text{ kgf/cm}^2$	> 48000
$q_u = \text{silindirik basınç dayanımı}$	

## ÖRNEK



Şekil 14: Elastik Zemine Oturan Çubuk

Tepe açısı  $\frac{\pi}{6}$  olan daire eksenli yaylı yüklü çubuk parçası için;

### Kesit Özellikleri

Dairesel Enkesit , Yarıçap ( $r$ ) = 0.75m , Çap ( $D$ ) =  $2r = 1,5m$

Eksen Eğriliği ( $\lambda$ ) = sabit =  $R = 8m$

Kesit Alanı ( $A$ ) =  $\pi.r^2 = 1,767 m^2$

Açısal Frekans ( $\omega$ ) = 0  $\frac{rad}{sn}$

Birim boydaki çubuğun kütlesi ( $\rho$ ) = 0

Winkler Zemin Yatak Katsayısı ( $k$ ) =  $1,5 \frac{t}{m^2}$

### Malzeme Sabitleri

Elastisite Modülü ( $E$ ) =  $3,025.10^6 \frac{t}{m^2}$

Poisson Oranı ( $\nu$ ) = 0,3

Kayma Modülü ( $G$ ) =  $E/(2.(1+\nu)) = 1,16346.10^6 \frac{t}{m^2}$

### Rijitlikler

Atalet Momenti ( $I_n$ ) =  $\frac{\pi.r^4}{4} = 0,2485m^4$

$I_t = \frac{\pi.D^4}{32}$ , Not :  $D = 2r, I_t = 0,497m^4$

Eksenel Rijitlik ( $C_{tt}$ ) =  $E.A = 5,3456.10^6 t$

Eğilme Rijitliği ( $S_{nn}$ ) =  $E.I_n = 0,7517.10^6 tm^2$

Burulma Rijitliği ( $S_{tt}$ ) =  $G.I_t = 578250,99tm^2$

Not:Daire enkesitli olmayan çubuklarda  $I_t$ 'yi bulmak için matematik elastisite teorisi kullanmak gerekir. Burada kullanılan değer, [1] nolu kaynak, sy31, Tablo III 'den alınmıştır.

**Problemin sınır koşulları:**

$$\varphi = 0'da$$

$$U_b(0) = 0$$

$$\Omega_n(0) = 0$$

$$\Omega_t(0) = 0$$

$$\varphi = \pi/6'da$$

$$U_b(\pi/6) = 0$$

$$M_n(\pi/6) = 0$$

$$M_t(\pi/6) = 0$$

Yukarıda verilen kesit değerleri için sistemin diferansiyel geçiş matrisi;

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.0000106422 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.0000138348 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

Bu matristen, [104] ifadesinden 4 terim alınarak taşıma matrisine geçilir. Daha yakınsak sonuçlar elde etmek için Mathematica ' da hazırlanan program ile  $0 - \pi/6$  aralığı "1000" parçaya bölünerek [105] ifadesi taşıma matrisine uygulandığında,  $\varphi = \pi/6$  için elde edilen taşıma matrisi;

$$\begin{bmatrix} 0.999975 & -3.99998 & 1.07179 & -0.0000108041 & 4.55763 \cdot 10^{-6} & -0.000015566 \\ 0.000023349 & 0.866001 & -0.499997 & 4.75135 \cdot 10^{-6} & -3.20402 \cdot 10^{-6} & 0.0000108041 \\ 7.22537 \cdot 10^{-6} & 0.499994 & 0.866026 & 3.20402 \cdot 10^{-6} & 6.34771 \cdot 10^{-6} & 4.55763 \cdot 10^{-6} \\ 12.8615 & -17.8752 & 2.36152 & 0.866001 & -0.499994 & 3.99998 \\ 2.26548 & -2.36152 & 0.248599 & 0.499997 & 0.866026 & 1.07179 \\ 6.28315 & -12.8615 & 2.26548 & -0.000023349 & 7.22537 \cdot 10^{-6} & 0.999975 \end{bmatrix} \quad (129)$$

olur.

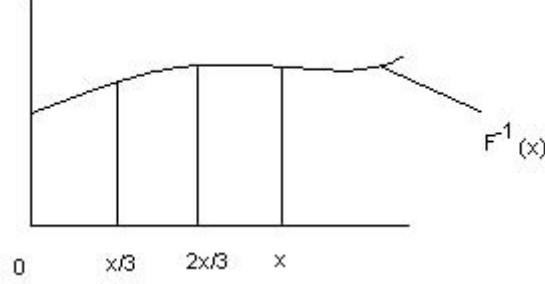
Böylece,

$$P[\pi/6] = F[\pi/6].P[0] + F[\pi/6].\vec{f} \int F[\pi/6]^{-1}(\tau)d\tau \quad (130)$$

denkleminde  $F[\pi/6]$  değeri hesaplanmış olduğundan,  $P[0]$  ve  $P[\pi/6]$  değerlerini hesaplamak mümkündür. Fakat denklemin sağ tarafındaki  $\int F[\pi/6]^{-1}(\tau)d\tau$  ifadesinin hesaplanması zor olduğundan farklı bir yol kullanılmıştır.

$\int_0^x F[\tau]^{-1} d\tau$  ifadesinin hesaplanması:

$F^{-1}$  in grafiğinin şöyle olduğunu varsayalım;



**Şekil 15:**  $F^{-1}(x)$

İntegral alma işlemi grafiğin alanını hesaplamak anlamına geldiğinden, grafiğin alanı bulunmaya çalışılır. Şekil [15] daki örnekte  $x$ 'e kadar olan bölüm 3 eşit parçaya bölünmüştür. Bu 3 parça dikdörtgen kabul edilip alanları toplanırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^x F[\tau]^{-1} d\tau &= F^{-1}(x/3) \cdot x/3 + F^{-1}(2x/3) \cdot x/3 + F^{-1}(x) \cdot x/3 \\ &= x/3(F^{-1}(x/3) + F^{-1}(2x/3) + F^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (131)$$

Taşıma matrisinin herhangi bir açıdaki değerini Matematika' da hazırlanan program ile bulabildiğimize göre yukarıdaki ifadeyi hesaplayabiliriz. Bu hesaplama için tekrar Metematika programından faydalanabiliriz.

Yukarıdaki örnekte grafiğin alanını bulabilmek için grafiği 3 aralığa bölmüştük yani 3 esit dikdörtgen olarak düşünmüştük. Bu aralık sayısını ne kadar çok artırırsak kesin sonuca o kadar daha yakın değerler elde ederiz. Fakat aralık sayısı arttıkça yapılan işlem de artar. Bu yüzden hata payı ihmal edilebilecek düzeyde olacak şekilde aralık sayısı kullanılabilir.

Bu yöntem kullanılarak kendi örneğimizin denklemini (130) hesaplayabiliriz. Yapılan hesaplamalar sonucu  $P[0]$  ve  $P[\pi/6]$  değerleri hesaplanabilir. Bu hesaplamalarda hata payını kontrol etmek için çeşitli aralık sayıları kullanılmıştır. Çıkan sonuçlardaki  $T_b$  değerlerini hata payını görebilmek için bir tablo halinde göstereyim;

**Tablo 2:**  $T_b$  değerinin aralık sayısına göre değişimi

Aralık Sayısı	$T(0)$	$T(\frac{\pi}{6})$
4	-10.3625	10.5815
25	-12.7027	8.24117
100	-13.0208	7.92309
250	-13.0839	7.86004
500	-13.1048	7.83906

görüldüğü üzere 250 ile 500 arasındaki fark çok azdır. Bu örneğin hesaplarının yapılmasında 500' e bölmenin yeterli olacağı kabul edilmiştir.

$P[\pi/6] = F[\pi/6].P[0] + F[\pi/6].\int_0^{\pi/6} F[\pi/6]^{-1}(\tau)d\tau$   
denkleminde, bilinmeyen başlangıç değerleri;

$$P[0] = \begin{bmatrix} U_b(0) \\ \Omega_n(0) \\ \Omega_t(0) \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11.5993 \\ 0.827828 \\ -13.1048 \end{bmatrix} \quad (132)$$

olarak bulunur. B sabit mesnetindeki değerlere bakılıcak olursa;

$$P[\pi/6] = \begin{bmatrix} U_b(\pi/6) \\ \Omega_n(\pi/6) \\ \Omega_t(\pi/6) \\ M_n(\pi/6) \\ M_t(\pi/6) \\ T_b(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0842.10^{-19} \\ -0,0000115223 \\ 6,68145.10^{-6} \\ -7,10543.10^{-15} \\ -1,77636.10^{-15} \\ 7,83906 \end{bmatrix} \quad (133)$$

Şeklinde oldukları görülür. Burada  $U_b[\pi/6]$ ,  $M_n[\pi/6]$ ,  $M_t[\pi/6]$  değerlerinin ankas-tre olarak mesnetlenmiş çubuk ucunda "0" çıkması beklenirken, çok küçük değerler çıktığı gözlemlenmektedir. Bunun sebebi yapılan numerik hesaplamalardır. Picard İntegrasyonunda alınan terim sayısı artırıldığında ve belirtilen aralık daha fazla parçaya bölüldüğünde bu sayıların çok daha azaldığı gözlemlenmiştir. Tüm numerik hesaplamalarda olduğu gibi burada da sonuçlar yaklaşık olarak bulunmuştur. Fakat önemli olan sonuçların ne kadar yaklaşık olduğu ve onları elde etmek için izlenen yöntemin, matematiksel bazda ne kadar güçlü olduğudur. I. Mer-tebe teorisinin geçerli olduğu ve zemin, çubuk etkileşiminin lineer elastik kabul

edildiği bu çalışma için ortaya çıkan nümerik hataların mertebesi ihmal edilebilecek mertebede küçüktür. Hesaplanan  $P[0]$  başlangıç değerinden faydalanarak istenilen herhangi bir kesitteki iç kuvvet ve şekil değiştirme değerleri bulunabilir. Bundan sonraki bölümde, şekilde görülen çubuğun başlangıç kesitinden, sabit mesnete kadar olan kısmı için kesit tesirleri 15 parçada ayrı ayrı hesaplanıp, elde edilen değerlere, her bilinmeyen fonksiyon için en uygun polinomu hesaplanmaya çalışılmıştır. Bu hesaplarda gene Mathematica yazılımından faydalanılmıştır. Yapılan program istenilen özellikteki dataların girilmesiyle her kesit değeri için bu grafikleri elde etmektedir. Burada adım adım programın çıktıları irdelenerek, çubuğun kesit tesiri grafikleri çizilmiştir.

$$P[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11.5993 \\ 0.827828 \\ -13.1048 \end{bmatrix} \quad (134)$$

$$P[\pi/90] = \begin{bmatrix} -5.38707 \times 10^{-7} \\ 3.63825 \times 10^{-6} \\ 5.54785 \times 10^{-7} \\ 8.09906 \\ 1.17053 \\ -11.7086 \end{bmatrix} \quad (135)$$

$$P[\pi/45] = \begin{bmatrix} -1.91522 \times 10^{-6} \\ 6.02253 \times 10^{-6} \\ 1.35135 \times 10^{-6} \\ 4.97806 \\ 1.39764 \\ -10.3123 \end{bmatrix} \quad (136)$$

$$P[\pi/30] = \begin{bmatrix} -3.79799 \times 10^{-6} \\ 7.28751 \times 10^{-6} \\ 2.29562 \times 10^{-6} \\ 2.24008 \\ 1.52246 \\ -8.91606 \end{bmatrix} \quad (137)$$

$$P[2\pi/45] = \begin{bmatrix} -5.89368 \times 10^{-6} \\ 7.57231 \times 10^{-6} \\ 3.30476 \times 10^{-6} \\ -0.111538 \\ 1.5584 \\ -7.5198 \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$P[\pi/18] = \begin{bmatrix} -7.9483 \times 10^{-6} \\ 7.01986 \times 10^{-6} \\ 4.30732 \times 10^{-6} \\ -2.07392 \\ 1.51898 \\ -6.12353 \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$P[\pi/15] = \begin{bmatrix} -9.74824 \times 10^{-6} \\ 5.7764 \times 10^{-6} \\ 5.24347 \times 10^{-6} \\ -3.64467 \\ 1.41783 \\ -4.72727 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$P[7\pi/90] = \begin{bmatrix} -0.000011121 \\ 3.99083 \times 10^{-6} \\ 6.0651 \times 10^{-6} \\ -4.82187 \\ 1.26862 \\ -3.33102 \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$P[4\pi/45] = \begin{bmatrix} -0.0000119361 \\ 1.81416 \times 10^{-6} \\ 6.73597 \times 10^{-6} \\ -5.60409 \\ 1.08513 \\ -1.93476 \end{bmatrix} \quad (142)$$



$$P[\pi/10] = \begin{bmatrix} -0.0000121051 \\ -6.01083 \times 10^{-7} \\ 7.23175 \times 10^{-6} \\ -5.99036 \\ 0.881124 \\ -0.538499 \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$P[\pi/9] = \begin{bmatrix} -0.0000115827 \\ -3.10148 \times 10^{-6} \\ 7.54015 \times 10^{-6} \\ -5.9802 \\ 0.670437 \\ 0.857759 \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$P[11\pi/90] = \begin{bmatrix} -0.000010366 \\ -5.53329 \times 10^{-6} \\ 7.66086 \times 10^{-6} \\ -5.57362 \\ 0.466891 \\ 2.25402 \end{bmatrix} \quad (145)$$

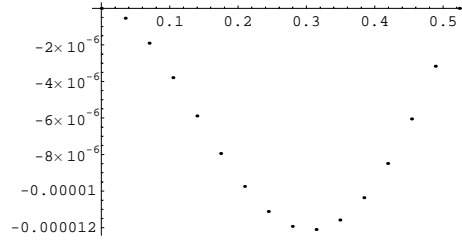
$$P[2\pi/15] = \begin{bmatrix} -8.49535 \times 10^{-6} \\ -7.74305 \times 10^{-6} \\ 7.60564 \times 10^{-6} \\ -4.7711 \\ 0.284304 \\ 3.65028 \end{bmatrix} \quad (146)$$

$$P[13\pi/90] = \begin{bmatrix} -6.05362 \times 10^{-6} \\ -9.57818 \times 10^{-6} \\ 7.39823 \times 10^{-6} \\ -3.57362 \\ 0.136469 \\ 5.04654 \end{bmatrix} \quad (147)$$

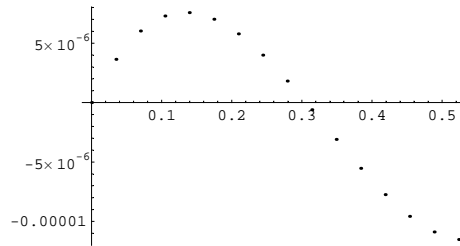
$$P[7\pi/45] = \begin{bmatrix} -3.16611 \times 10^{-6} \\ -0.0000108876 \\ 7.07432 \times 10^{-6} \\ -1.98261 \\ 0.0371371 \\ 6.4428 \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$P[\pi/6] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0000115223 \\ 6.68145 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 7.83906 \end{bmatrix} \quad (149)$$

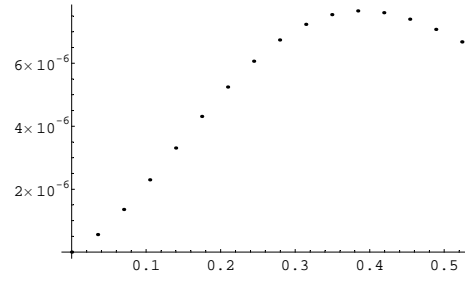
elde edilen bu değerler yardımı ile kesit tesir fonksiyonlarının  $\varphi$  ' ye bağlı grafikleri çizilirse;



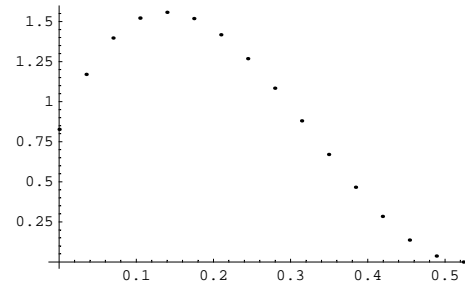
**Şekil 16:**  $U_b - \varphi$



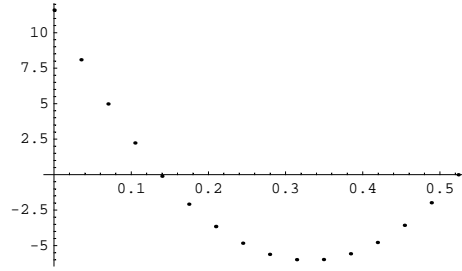
**Şekil 17:**  $\Omega_n - \varphi$



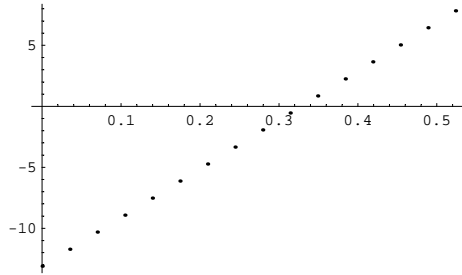
**Şekil 18:**  $\Omega_t - \varphi$



**Şekil 19:**  $M_t - \varphi$



**Şekil 20:**  $M_n - \varphi$



**Şekil 21:**  $T_b - \varphi$

Bu grafikler elde edildikten sonra burada yapılması gereken her kesit tesiri fonksiyonu için, bu noktalarla en iyi uyumu sağlayan eğrileri bulmak olacaktır. Her kesit tesiri için bulunan polinom fonksiyonun mertebesi farklı olabilir. Bulunan bu polinom fonksiyonlarının genel denklemlerde yerine konulması ile uygunluğu ve nümerik hesaplar sonucu ortaya çıkan hatalar gözlenebilir. Kesit tesirine uygun polinomlar seçilmesinde Mathematica yazılımı kullanılmıştır. Elde edilen fonksiyonlar;

$$\begin{aligned}
 U_b &= 1,4751506023122006 \cdot 10^{-12} - 6,875385766691765 \cdot 10^{-10} \cdot x \\
 &- 0,0004937427912409798 \cdot x^2 + 0,0015143406780601212 \cdot x^3 \\
 &- 0,000993063088280595 \cdot x^4 - 0,00025405659737886757 \cdot x^5 \\
 &+ 0,00012719655619475664 \cdot x^6
 \end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_n &= 2,2834556920192762 \cdot 10^{-12} + 0,00012344058463103572 \cdot x \\
 &- 0,0005679576808165822 \cdot x^2 + 0,0004976563339144806 \cdot x^3 \\
 &+ 0,00015689357744313583 \cdot x^4 - 0,00009242253078914772 \cdot x^5 \\
 &- 1,906131802980777 \cdot 10^{-6} \cdot x^6
 \end{aligned} \tag{151}$$

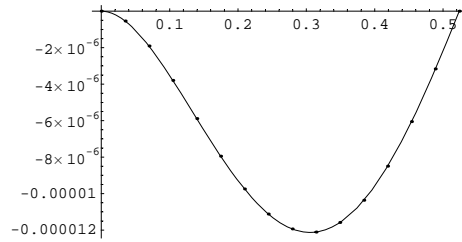
$$\begin{aligned}
\Omega_t &= -2,263719743390947 \cdot 10^{-13} + 0,000011452955967718992 \cdot x \\
&+ 0,0001419542718071246 \cdot x^2 - 0,00043293072351158207 \cdot x^3 \\
&+ 0,0003011228914987824 \cdot x^4 + 0,000044107930383002305 \cdot x^5 \\
&- 0,000022098184438095484 \cdot x^6
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}
M_n &= 11,599293523730715 - 105,66658919186402 \cdot x \\
&+ 153,8803997697371 \cdot x^2 + 17,610516032665583 \cdot x^3 \\
&- 12,797132358307445 \cdot x^4 - 0,8851304791789593 \cdot x^5 \\
&+ 0,44425664845348467 \cdot x^6
\end{aligned} \tag{153}$$

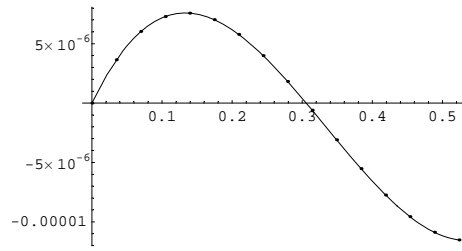
$$\begin{aligned}
M_t &= 0,8278278056541449 + 11,599278251609995 \cdot x \\
&- 52,832813687921195 \cdot x^2 + 51,23473592851039 \cdot x^3 \\
&+ 4,432566141060559 \cdot x^4 - 2,6404646920755654 \cdot x^5 \\
&- 0,03134203056110712 \cdot x^6
\end{aligned} \tag{154}$$

$$\begin{aligned}
T_b &= -13,104845005835042 + 39,99999994760242 \cdot x \\
&+ 1,6470681721267 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 0,00199387330379381 \cdot x^3 \\
&+ 0,004645850035279132 \cdot x^4 - 0,002668153851620435 \cdot x^5 \\
&- 0,00010897319289805907 \cdot x^6
\end{aligned} \tag{155}$$

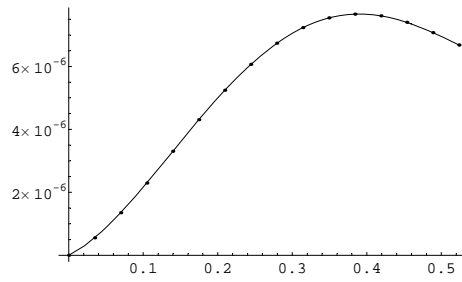
Bu fonksiyonların grafikleri ve daha önceden çizilen nokta bazlı grafikler karşılaştırılırsa;



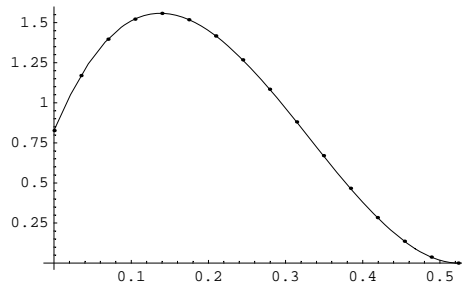
**Şekil 22:**  $U_b - \varphi$



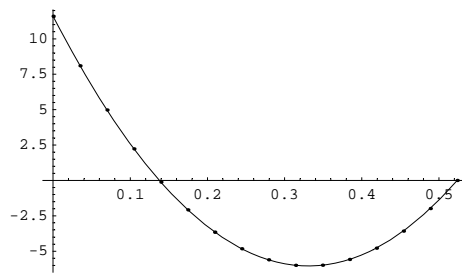
**Şekil 23:**  $\Omega_n - \varphi$



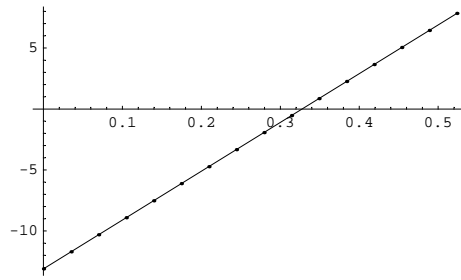
**Şekil 24:**  $\Omega_t - \varphi$



**Şekil 25:**  $M_t - \varphi$



**Şekil 26:**  $M_n - \varphi$



**Şekil 27:**  $T_b - \varphi$

### 3.SONUÇLAR

**Yapı** zemin etkileşimleri konusu günümüze kadar önemini koruyarak gelmiştir. Elastik zemine oturan dairesel çubukların kapalı olarak taşıma matrisini bulmak için yapılması gereken işlemler bilgisayarsız yapılamayacak kadar uzundur. Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel eksenli yayılı yüklü çubuğun kesit tesirleri, başlangıç değerleri ve taşıma matrisi yöntemi kullanılmak suretiyle elde edilmiştir. Çalışmada yapılan işlemlerde matematika programı kullanılmıştır.

Başlangıç değerleri metodunda kullanılan Taşıma Matrisini bulmak için Picard açılımından fazla terim alınmasının iyi sonuçlar verdiği literatürde bilinmektedir. Fakat alınan fazla terimler sonucu işlem kalabalığı artar. Günümüz bilgisayarlarının çok güçlü olmasına ve kullanılan programın çok iyi olmasına rağmen beklenmeyen sonuçlarla karşılaşılabilir. Sonuç olarak işlem hacmini düşürmek için sistemin diferansiyel karakterini ifade eden **D** *Diferansiyel Geçiş Matrisinden*, sistemin integral özelliklerini karakterize eden **F** *Taşıma Matrisine* geçilirken, Picard açılımından alınan terim sayısını arttırmak yerine *Matrisant* "integral serisi" metodu kullanılır. Bu işlemler matematika yazılımı kullanılarak seri bir bilgisayar programı haline getirilmiştir.

Problemin hiperstatiklik derecesinin artması problemin çözümüne ek bir hesap fazlalığı getirmez. Bu zaten *Başlangıç Değerleri Metodunun* özelliğidir. Uygulamalarda bu metod sayesinde problemin kuruluş ve çözümü aynı genel denklemler yardımıyla olmaktadır. *Matrisant* "integral serisi" metodunu kullanarak sayısal hesaplama makinalarında kolaylıkla programlama yapılabilmesi sayesinde, eğriği nasıl olursa olsun, düzlem çubuklar için *Taşıma Matrisi* bulmak ve analitik çözümü oldukça zor olan elastik zemine oturan eğri eksenli bir çubuk için istenilen kesitteki tesirleri bulmak oldukça kolaydır. Sadece diferansiyel geçiş matrisinde yapılan basit değişiklikler ile hesap çeşitliğinin oluşması yöntemin önemli bir özelliğini göstermektedir.



## KAYNAKLAR

- [1] **İnan, M.**, 1996. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [2] **İnan, M.**, 1996. Elasto-Mekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [3] **İnan, M.**, 1988. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü Yayınları, 6.Baskı.
- [4] **İnan, M.**, 1968. The Method of Initial Values and Carry-Over Matrix in Elastomechanics, Middle East Technical University, Ankara.
- [5] **Hetyeny, M.**, 1946. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, MI.
- [6] **Volterra, E.**, 1952. Bending of Circular Beam Resisting on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics, ASME, 19, 1-4.
- [7] **Popov, P.E.**, 1979. Introduction to Mechanics of Solid, Prentice Hall of India, New Delhi -110001.
- [8] **Cerit, C.**, 1998. Çözümlü Diferansiyel Denklemler, İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
- [9] **Artan, R.**, 1999. Kendi Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Düzlem Çubukların Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Hesabı, XI. Ulusal Mekanik Kongresi, Bolu, 6-10 Eylül.
- [10] **Kıral, E.**, 1974. Elastik Zemine Oturan Eğri Eksenli Düzlemsel Çubuklar, METU Journal of Pure and Applied Science, 7, 44-53, April.
- [11] **Aköz, Y.**, Zubaroğlu, S., 1995. Elastik Zemine Oturan Dairesel Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi IX. Ulusal Mekanik Kongresi, Ürgüp, Eylül.
- [12] **Aköz, Y.**, Aksoydan, M., 2004. Transfer Stiffness Matrix for Timoshenko Beams on Elastic Foundations, ARI The Bulletin of the Istanbul Technical University, 54, 1-15.
- [13] **Aköz, Y.**, Kadıoğlu, F., 2004. The Mixed Finite Element Solution of Circular Beam on Elastic Foundation, Computers and Structure, 60, 643-651.
- [14] **Civalek, Ö.**, 2004. Elastik Zemine Oturan Yapıların Hesap Yöntemlerine Genel Bir Bakış, Türkiye Mühendislik Haberleri, 432, 45-54

[15]**Zubaroglu,S.** ,1994. Elastik Zemine Oturan Dairesel Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[16]**Atımtay,E.** ,2000. Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik (Betonarme Yapılar)

## **ÖZGEÇMİŞ**

1981 yılında Hendek'te doğdu. İlk okulu Eczacı Başı İlk Öğretim okulunda bitirdi. Orta ve lise öğrenimini Özel Doğuş Lisesinde tamamladı. 1999 yılında İstanbul Üniversitesi İnşaat mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı. 2003 yılında mezun oldu. 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Yapı Mühendisliği Mekanik Ana Bilim dalında yüksek lisansa başladı.