

## **AĞIRLIĞI DİKKATE ALINAN KİRİŞLERDE, GENİŞLETİLEN EULER HİPERBOLÜNÜN, ANALİTİK VE SAYISAL YÖNTEMLE İNCELENMESİ**

Yeliz PEKBEY

*Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Kampüs, Bornova, İZMİR*

### **ÖZET**

Eksenel basınca maruz kirişlerin kritik burkulma kuvvetleri, 1744 yılında Euler tarafından, çubuk ağırlığı ihmal edilerek, sabit enine kesit kabulü altında yapılmıştır. Euler tarafından bulunan sonuçlar, kritik normal gerilme ile çubuk narinlik derecesi arasındaki bağıntıyı veren Euler Hiperbolü yardımıyla ifade edilmektedir. Ozdamar (1997), yapmış olduğu çalışmada, ağırlığı dikkate alınan ve her iki ucundan basit mesnetlenmiş bir kiriş için, boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile boyutsuz çubuk boyu arasındaki ilişkiyi bularak Euler Hiperbolünü çelik ve bakırdan imal edilen çubuklara genişletmiştir.

Bu çalışmada ise, çubuk enine kesitinin, çubuk boyunca değişmediği kabul edilerek, ağırlığı dikkate alınan her iki ucu ankastre mesnetli çubuklar için, Euler Hiperbolü hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemi (ANSYS 10.0) kullanılarak çizilmiştir. Ayrıca, bası kuvvetine maruz ve ağırlığı dikkate alınan çubukların kritik burkulma kuvvetlerini etkileyen faktörler de irdelenmiştir. Kirişin narinlik derecesi arttığı zaman, ağırlığın dikkate alınması ile elde edilen malzeme tasarrufu hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlardan, aynı enine kesite sahip ve eşit boyda olan çubuklardan, çubuk elastisite modülünün çubuk malzemesinin özgül ağırlığına oranı büyük olanının, kritik normal gerilmesinin daha büyük olduğu görülmüştür.

### **ABSTRACT**

In 1744, Euler computed the critical buckling load with the assumption of uniform cross-section without weight of column. The results obtained by Euler expressed as Euler's Hyperbole, which is given relationship between the critical normal stress and the slenderness ratio of column. Ozdamar (1997) studied Euler's Hyperbole for heavy column, which composed of steel and copper. He considered the self-weight of column at its top hinged and lower roller column for obtaining Euler's Hyperbole.

In this study, Euler's Hyperbole is considered for heavy fixed column with the assumption of uniform cross-section by using both analytic and the finite element method (ANSYS 10.0). Besides, the factors affected the critical buckling load examined with axially loaded heavy column. When the slenderness ratio of column is increased, material saving is calculated with considering the weight of column. From obtained results, it is stated that the critical buckling load is high with the biggest ratio of Young Modulus over the specific gravity.

## 1. GİRİŞ

Son zamanlarda gelişen teknolojiye paralel olarak, yüksek mukavemetli yapıların kullanılması, yapıları oldukça narin bir hale getirmiş, dolayısıyla stabilite kavramını da ön plana çıkartmıştır. Burkulma bir stabilite problemi ve bu problemde amaç, sistemde dengeyi sağlayacak kritik yük değeridir. Eğer sisteme uygulanan aksel bası kuvveti, sistem için bulunan kritik yükten büyükse, kararsız denge durumu, küçükse, kararlı denge durumu ve eşit ise farksız denge konumu oluşmaktadır [1]. Aksel bası kuvvetine maruz kirişlerin, burkulma kuvvetleri, 1744 yılında, Euler tarafından, dört mesnetleme durumu için, çubuk ağırlığı ihmal edilerek, sabit enine kesit kabulü altında yapılmıştır [2]. Euler tarafından bulunan sonuçlar, kritik normal gerilme ile çubuk narinlik derecesi arasındaki bağıntıyı veren Euler Hiperbolü yardımıyla ifade edilmektedir. Literatüre bakıldığında, Özdamar (1997) yapmış olduğu çalışmada, her iki tarafı basit mesnetli çubuk için, ağırlık kuvvetini dikkate alarak, Euler hiperbolünü çizmiştir [3]. Bu çalışmada ise çubuk ağırlık kuvveti dikkate alınarak, her iki ucu ankastre mesnetli çubuklar için, kritik yükler hesaplanmış ve kritik normal gerilme ile çubuk narinlik derecesi arasındaki bağıntıyı veren, Euler hiperbolü, çeşitli malzemeler için çizilmiştir. Analitik olarak elde edilen sonuçlar, ANSYS 10.0 sonlu elemanlar paket programı ile de desteklenmiştir.

## 2. ANALİTİK ÇÖZÜM

### 2.1. Ağırlığı Dikkate Alınan Çubuklarda Kritik Burkulma Kuvveti

$\gamma$ , çubuk malzemesinin özgül ağırlığını ifade etmek üzere, ağırlığı dikkate alınan ve aksel yüke maruz bir çubuğun diferansiyel denklemi,

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + (P - \gamma Ax) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \gamma A \frac{dw(x)}{dx} = 0 \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir [4]. Ayrıca,

$$P_0 = \gamma A \quad (2)$$

ifadesi de çubuk ağırlığını, birim boya düşen kuvvet olarak ifade etmektedir. (7) nolu diferansiyel denklemin çözümü ise,

$$w(x) = C_1 \int \zeta^{\frac{1}{3}}(x) s_{0, \frac{1}{3}}(x) dx + C_2 \int \zeta^{\frac{1}{3}}(x) J_{\frac{1}{3}}(x) dx + C_3 \int \zeta^{\frac{1}{3}}(x) J_{-\frac{1}{3}}(x) dx + C_4 \quad (3)$$

olup,

$$\zeta(x) = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} (b-x)^{\frac{3}{2}}, a = \frac{\gamma A}{EI}, b = \frac{P}{\gamma A}, a, b > 0 \quad (4)$$

ile verilmekte olup,  $s_{0, \frac{1}{3}}(x)$  Lommel Fonksiyonu ve  $J_{\pm \frac{1}{3}}(x)$  ise Bessel fonksiyonları olarak

adlandırılmaktadır [4]. Buna göre ağırlığı dikkate alınan aksel yüke maruz çubuklarda boyutsuz kritik burkulma kuvveti ve boyutsuz çubuk boyu,

$$\bar{P}_{kr} = \frac{P_{kr}}{\sqrt[3]{EI(\gamma A)^2}}, \bar{L} = L \sqrt[3]{\frac{\gamma A}{EI}} \quad (5)$$

ile verilmektedir [4]. Ağırlığı dikkate alınan çubuklarda, Euler hiperbolünün çizilmesi için çubuk narinlik katsayısı ve kritik normal gerilmenin, boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile boyutsuz çubuk boyu cinsinden yazılması gerekmektedir. Buna göre ,

$$\sigma_{kr} = \frac{PL}{\lambda^2} \frac{E}{I}, \lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \mu L \quad (6)$$

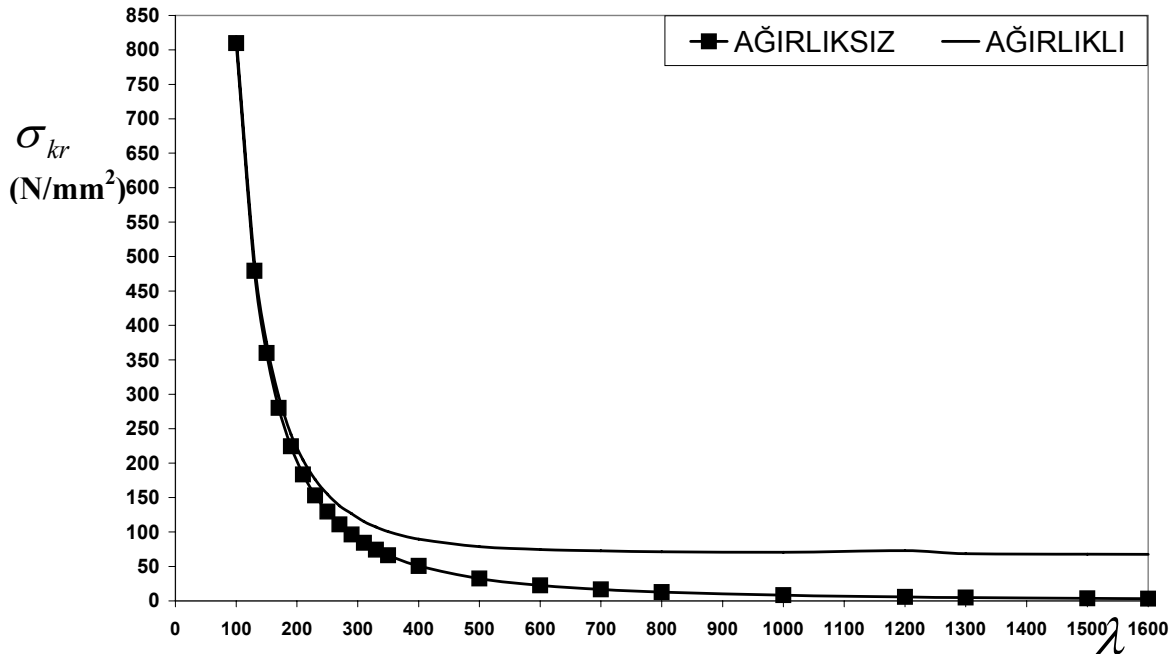
bağıntıları elde edilmiş olur ki burada,

$$\mu = \left(\frac{E}{\gamma}\right)^{1/3} \left(\frac{A}{I}\right)^{1/6} \quad (7)$$

olup, burkulma ağırlık parametresi olarak tanımlanmaktadır.

## 2.2. Euler Hiperbolünün Ağırlığı Dikkate Alınan Çubuklar İçin Çizimi

Bu çalışmada, her iki ucu ankastre mesnetli durum için Euler hiperbolü çizilmiştir. Yapılan hesaplamalarda, dolu gövdeli, dairesel enine kesitli çubuk formları düşünülmüş ve belirli bir çap değeri için çubuk uzunlukları değiştirilerek, kritik yük ve kritik normal gerilme hesaplanmıştır. Bu çalışmada burkulma ağırlık parametresi olan  $\mu$  değeri, 100 olarak alınmış, buradan çap değeri de  $r=5,33$  m olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, yarıçap sabit kalarak, boyutsuz çubuk uzunluğu, yani bir başka deyişle çubuk uzunluğu değiştirilerek hesaplamalar yapılmıştır. Şekil 1’de, çelikten imal edilen çubuk için, ağırlıksız ve ağırlığın dikkate alınmasıyla elde edilen, Euler hiperbolleri görülmektedir. Euler hiperbolü çiziminde herhangi bir emniyet katsayısı kullanılmamıştır. Euler hiperbolünün çiziminden elde edilen kritik gerilmelerin kullanılması için, kullanılan malzemenin akma gerilmesi de büyük önem taşımaktadır.



Şekil 1 Ağırlık kuvvetinin dahil edilmesi ve edilmemesi durumu için Euler hiperbolü (Durum 1 için)

### 3. SAYISAL ÇÖZÜM

ANSYS de burkulma analizi, modellenen sistemin özdeğerini bulma prensibine dayanmaktadır. Burada yapılan analiz, aşağıda bağıntısı verilen eşitliğe göre yapılmaktadır:

$$([K] + \lambda_i [S])\{\psi\}_i = \{0\} \quad (8)$$

bu bağıntıda,

[K]: Eleman katılık matrisi (stiffness matrix)

[S]: Eleman gerilme katılık matrisi (stress stiffness matrix)

$\lambda_i$  = sistemin i.özdeğeri

$\psi_i$  = sistemin i.özvektörü

belirtmektedir. Bilindiği gibi, sistemin en küçük özdeğeri, kritik burkulma kuvveti, özvektörü ise burkulma modunu vermektedir. Burada da çalışmada, ANSYS'de analiz yapılmıştır. Çizelge 1'de ağırlıksız ve ağırlığı dikkate alınan çelik çubuğun sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen kritik burkulma kuvvetleri görülmektedir. Özellikle ağırlıksız çubuklarda, kritik burkulma değeri, analitik elde edilen kritik burkulma yüküne oldukça yakın olduğu görülür. Ağırlığın dikkate alınmasıyla hesaplanan kritik burkulma kuvvetlerinde ise, belirli bir çubuk uzunluğundan sonra sonuçların çok fazla yakınsamadığı görülmektedir.

**Çizelge 1** Ağırlıksız ve ağırlığı dikkate alınan çelik çubuğun sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen kritik burkulma kuvveti (N)

L (m)	Ağırlıksız		Ağırlık Kuvveti Dahil	
	Analitik	ANSYS	Analitik	ANSYS
266.4322	72266826178	0. 72517E+11	73124282777	73193384712
399.6483	32118589412	0. 32230E+11	33461794715	33414912546
452.9347	25005822207	0. 25115E+11	26534943475	26420986652
506.2211	20018511407	0. 20040E+11	21596338155	21539881763
559.5076	16387035414	0. 16391E+11	18280887783	17974368057
666.0804	11562692188	0. 11565E+11	13811998702	13607916761
719.3669	9913144880	0. 99152E+10	12324134102	12107032950
772.6533	8592963874	0. 85948E+10	11288279928	11198810206
825.9397	7519961101	0. 75216E+10	10282725011	9162100235
879.2262	6636072193	0. 66375E+10	9563700659	8969801303
932.5126	5899332749	0. 59006E+10	8988078772	8504539981
1065.729	4516676636	0. 45176E+10	7988834295	7359039411
1332.161	2890673047	0. 28913E+10	7028367016	5577473169
1598.593	2007411838	0. 20078E+10	6652484278	3873569184
1865.025	1474833187	0. 14751E+10	6475974865	2845684082
2131.457	1129169159	0. 11294E+10	6370435041	2178781645
2664.322	722668261.8	0. 72282E+09	6294709759	1394377445
3197.186	501852959.6	0. 50196E+09	6508533078	968326396. 5
3996.483	321185894.1	0. 32125E+09	6048694050	619729410. 6
4262.915	282292289.8	0. 28235E+09	6029488362	544680894. 8

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, eksenel bası kuvvetine maruz çubuklar için, ağırlığının dikkate alınması durumu verilen Euler hiperbolü, çelik çubuk için çizilmiştir. Analitik çözüm ANSYS 10.0 sonlu elemanlar paket programı ile de desteklenmiştir. Elde edilen sonuçlardan, bası kuvvetine maruz çubukların boyutlandırılmasında, Euler hiperbolü yerine, bu çalışmada verilen ağırlığın dikkate alınmasıyla tekrar çizilen, geliştirilmiş Euler hiperbolünün kullanılması, çubuk güvenliğinden ödün vermeksizin, malzeme tasarrufu sağlayacaktır. Çubuğun narinlik derecesi arttıkça, ağırlığın dikkate alınmasıyla elde edilen malzeme tasarrufu daha belirgin olmaktadır. Narinlik derecesi küçük olan çubuklar için, ağırlığın ihmal edilmesi ile elde edilen Euler hiperbolü de kullanılabilir. kritik gerilmenin, çubuğun narinlik derecesi ile ters orantılı olduğu, dolayısıyla, çubuğun narinlik derecesi büyüdükçe, kritik gerilmelerin küçüldüğü görülür. Ayrıca, kritik gerilme, malzemenin elastisite modülü ( $E$ ), ve kesitin atalet yarıçapına ( $i$ ) bağlı olarak değişmektedir. Çubuğun narinlik derecesi arttıkça, burkulma tehlikesi ön plana çıkmaktadır. Çizilen Euler hiperbolleri, malzemenin akma mukavemetinin altındaki gerilmeler için geçerli olmaktadır. Eğer malzemenin kritik gerilmesi akma mukavemetinden büyük ise, çubuk akarak çökmektedir. Yani burkulmadan dolayı değil de akmadan dolayı kullanılmaz hale gelecektir. Dolayısıyla boyutlandırma yapılırken bu kriterin de göz önüne alınması gerekmektedir. Eşit çubuk uzunluğuna ve aynı malzemeden imal edilmiş olan çubuklarda,  $\frac{I}{A}$  oranı arttıkça, kritik normal gerilmeler artmaktadır. Eşit çubuk uzunluğuna ve aynı enine kesite sahip çubuklardan,  $\frac{E}{\gamma}$  oranı büyük olan, kritik normal gerilmesinin büyük olduğu görülür.

#### KAYNAKLAR

- [1] Pekbey, Y., Özdamar, A., “Bası Yükleri Altında Burkulmaya Zorlanan Çubuklarda Optimum Enine Kesit Değişimi Üzerine Bir Araştırma” D.E.Ü. Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi 4/3 103-112, 2002.
- [2] Euler, L., De curvis elasticis. In Methodus inveniendi leneas curva maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti, Lausannae, E65A. O. O. Ser.I., 24, 231-297, 1744.
- [3] Özdamar, A., “Euler Hiperbolünün Ağırlığı Dikkate Alınan Çubuklara Genişletilmesi” X. Ulusal Mekanik Kongresi 15-17 Eylül 1997, İstanbul.
- [4] Özdamar A., “Das Knicken schwerer Gestänge”, Yayınlanmış Doktora Tezi, VWF Verlag für Wissenschaft und Forschung, Berlin, 1996.

