



XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

## ELASTİK YATAK ÜZERİNE YERLEŞTİRİLMİŞ EĞRİ MİKRO KİRİŞİN 2:1 İÇ REZONANSLARI

Gözde Sarı ve Mehmet Pakdemirli

Uygulamalı Matematik ve Hesaplama Merkezi, Celal Bayar Üniversitesi, 45140, Muradiye, Manisa  
Makine Mühendisliği Bölümü, Celal Bayar Üniversitesi, 45140, Muradiye, Manisa  
gozde.deger@cbu.edu.tr, mpak@cbu.edu.tr

### ABSTRACT

In this study, the dynamic behaviour of a slightly curved resonant microbeam having non-ideal boundary conditions is investigated. The ends of the curved microbeam are on immovable simple supports and the microbeam is resting on a non-linear elastic foundation. The forced vibration response of curved microbeam due to the small AC load is obtained analytically by means of direct application of the method of multiple scales (a perturbation method). Two-to-one internal resonances between any two modes of vibration are studied. Amplitude and phase modulation equations are obtained. Steady state solutions and stability are discussed, and a bifurcation analysis of the amplitude and phase modulation equations are presented. The effects of the non ideal boundary conditions on the vibrations of the microbeam are examined.

### ÖZET

Bu çalışmada, ideal olmayan sınır şartlarına sahip hafif eğrilikli rezonans mikro kirişin dinamik davranışı araştırılmıştır. Eğri mikro kirişin uçları basit basit mesnetlenmiştir ve kiriş nonlineer elastik yatak üzerine yerleştirilmiştir. Küçük AC yükünden dolayı eğri mikro kirişin zorlamalı titreşim tepkisi çok ölçekli metodun (perturbasyon metodu) direk uygulanması ile analitik olarak elde edilmiştir. Titreşimin iki modu arasında 2:1 iç rezonansları çalışılmıştır. Genlik ve faz denklemleri elde edilmiştir. Düzgün rejim çözümleri ve çözümlerin kararlılığı tartışılmış ve genlik-faz modülasyon denklemlerinin bifürkasyon analizi sunulmuştur. İdeal olmayan sınır şartlarının sistemin titreşimine etkileri araştırılmıştır.

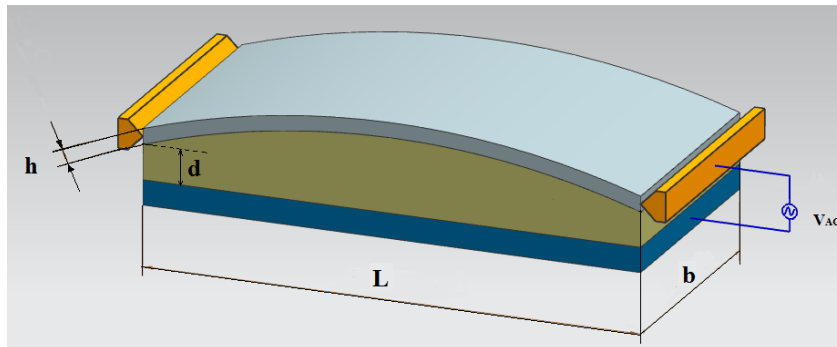
### 1. GİRİŞ

Mikro elektro mekanik sistemler yakın zamanda ortaya çıkmış devrim niteliğinde bir teknolojidir. Bu alan özellikle mekanik ve elektrik-elektronik alanları gibi disiplinler arası çalışmaların ortaklığını gerektirmektedir. [1,2] Bu çalışmada resonatör mikro sistemler üzerinde durulacaktır. Resonatörlerin uygulama alanlarına kimyasal ve biyolojik içerik belirlemek için kullanılan kütle sensörleri, kuvvet ve ivme sensörleri ve sıcaklık sensörleri

örnek olarak verilebilir. Rezonatörlerin doğal frekansları aksel şekil değiştirmeye çok duyarlıdır. Basınç, sıcaklık, kuvvet, ivme gibi dış yükler mikro kirişin aksel şekil değişimine neden olur ve bu değişim temel frekansın kaymasına neden olur. Bu frekans kaymaları dijital sinyale dönüştürülerek okunur. Bu sinyaller fiziksel büyüklükleri temsil eder. Bu yüzden rezonatör uygulamalarında, kirişin lineer olmayan rezonans frekansının kesin olarak belirlenmesi önemlidir. Elektriksel kuvvet ile tahrik edilen makro kiriş modeli literatürde pek çok çalışmada uygulanmış ve analitik metotlarla çözülmüştür. Makro model mikro sistemler için etkin ve doğru bir dizayna imkan sağlamaktadır. Geliştirilen model, literatürün deney ve sonlu elemanlar yönteminin sonuçları ile kıyaslanmıştır. Baskın rezonans, alt ve üst harmonik rezonans durumları incelenmiştir. [3-10] Eğri mikro kirişler son yıllarda yapılan çalışmalarda incelenmiştir. [11,12] Eğri mikro kirişler başlangıçta eğri olarak üretilebilirler, üretim kaynaklı iç gerilmelerden dolayı eğri olabilirler yada aksel baskı kuvveti ile burkularak da eğri yapılabilirler. Eğri mikro kirişin dinamik davranışını ifade etmek için doğal frekansını, zorlama genliğini ve non-lineerlik etkilerini belirlemek gerekir. Mikro kirişinin elastik yatak ile elektrotun üzerine yerleştirilmesi literatürde incelenmiştir. Burkulan kirişin etrafındaki titreşim modları ve kritik burkulma yükleri belirlenmiştir. [13,14] Literatürde makro eğri kiriş modeli detaylı olarak incelenmiştir. Baskın rezonans ve ikincil rezonanslar için frekans-tepki grafikleri sunulmuştur. [15,16] İdeal olmayan sınır şartları altında mikro ve makro kiriş için çalışmalar yapılmıştır. İdeal olmayan sınır şartlarının frekans-tepki grafiklerine etkileri grafiklerle gösterilmiştir.[17,18] Bu çalışmada mikro kiriş modelinde kirişin başlangıçta hafif eğriliği olacaktır ve elastik yatak üzerine yerleştirilecektir. Eğri mikro kirişin sınır şartları için ideal olmayan sınır şartı kabulü yapılacaktır. Modelde kuadratik nonlineerite olduğu için 2:1 iç rezonans durumuna bakılacaktır. Ayrıca sistemin kararlılık analizi de yapılacaktır.

## 2. MATEMATİKSEL MODEL

Bu bölümde elektriksel kuvvet ile zorlanan eğri mikro kirişin dinamik davranışını temsil eden denklem formüle edilmiştir. Şekil 2.1’de ideal olmayan sınır şartlarında çalışan eğri mikro kirişin şematik resmi görülmektedir. Eğri kiriş elektroda lineer olmayan elastik yatak ile sabitlenmiştir.  $w(x,t)$  mekana ve zamana bağlı deplasman,  $x$  mekan koordinatı,  $E$  elastisite modülü,  $I$  kesit alan atalet momenti,  $\rho$  malzeme yoğunluğu,  $A$  kesit alanı,  $L$  kiriş uzunluğu,  $k$  elastik yatağın lineer yay katsayısıdır.



Şekil 2.1. Elastik yatak üzerine sabitlenmiş eğri mikro kirişin şematik çizimi

Eğri mikro kirişin enine titreşimlerinde hareket denklemini çıkarmak için Hamilton prensibi kullanılmıştır. Hamilton prensibi aşağıdaki eşitliği gerektirir,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

(2.1)

Burada T kinetik enerjiyi, V ise potansiyel enerjiyi temsil eder. Bu ifadeleri oluşturmak istediğimiz eğri mikro kiriş modeli için yazalım,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}^{*2} dx^*$$

(2.2)

$$V = \frac{1}{2} E' A \int_0^L (u^{*'} + Z_0^* w^{*'} + \frac{1}{2} w^{*r2})^2 dx^* + \frac{1}{2} E' I \int_0^L w^{*n2} dx^* + \frac{1}{2} k \int_0^L w^{*2} dx^*$$

(2.3)

Denklem (2.1)'de kinetik ve potansiyel enerji ifadelerini yerine koyarak Hamilton prensibi ile hareket denklemi,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{w}^{*2} dx^* - \frac{1}{2} E' A \int_0^L (u^{*'} + Z_0^* w^{*'} + \frac{1}{2} w^{*r2})^2 dx^* - \frac{1}{2} E' I \int_0^L w^{*n2} dx^* - \frac{1}{2} k \int_0^L w^{*2} dx^* \right) dt^* = 0$$

(2.4)

şeklinde elde edilir.

Denklem (2.4)'ün sıfıra eşit olabilmesi için tek ve çift katlı integraller ayrı ayrı sıfıra eşitlenir ve sonuç olarak mikro kirişin enine titreşimlerini ifade eden hareket denklemi,

$$\rho A \ddot{w}^* - \frac{E' A}{2} (Z_0^{*n} + w^{*n}) \int_0^L \left( \frac{1}{2} w^{*r2} + Z_0^{*'} w^{*'} \right) dx^* + E' I w^{*IV} + k w^* = 0$$

(2.5)

ve sınır şartları,

$$w^*(0, t^*) = 0, \quad w^{*n}(0, t^*) = 0, \quad w^*(L, t^*) = \alpha(t^*), \quad w^{*n}(L, t^*) = 0$$

(2.6)

elde edilir. Elde ettiğimiz lineer olmayan diferansiyel denkleme sönüm ve zorlama etkileri de dahil edilirse

$$\rho A \ddot{w}^* + E' I w^{*IV} + 2\mu^* \dot{w}^* + k w^* = \frac{E' A}{2} (Z_0^{*n} + w^{*n}) \int_0^L \left( \frac{1}{2} w^{*r2} + Z_0^{*'} w^{*'} \right) dx^* + \frac{\varepsilon_0 b (V_{AC} \cos \Omega t^*)^2}{2(d + Z_0^* + w^*)^2}$$

(2.7)

denklemi elde edilir. Kiriş elektriksel kuvvet ile tahrik edilmektedir. Kiriş, d kadar uzağına yerleştirilen paralel-plak elektrotlar sayesinde AC harmonik yükü ile uyarılmaktadır. Harmonik yükün genliği  $V_{AC}$  ile gösterilirken frekansı  $\Omega$ 'dir. Sınır şartlarında sağ uçta çok küçük deplasman meydana geldiği varsayılmıştır. Bu yüzden sağ uçtaki sınır şartı ideal değildir. Hareket denklemleri ve sınır şartları aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılabilir,

$$w = \frac{w^*}{d}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{T}, \quad Z_0 = \frac{Z_0^*}{d}, \quad \Omega = \Omega^* T$$

(2.8)

Boyutsuz hareket denklemi ve sınır şartları şöyledir,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_1 w = \Gamma \left( \frac{d^2 Z_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[ \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ_0}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] + \alpha_2 \frac{(V_{AC} \cos(\Omega t))^2}{(1 + Z_0 + w)^2}$$

(2.9)

$$w(0,t)=0, \quad \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad w(1,t)=\alpha(t), \quad \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.10)$$

Boyutsuz parametreler ve fiziksel olarak anlamları Tablo 2.1 'de yazılmıştır.

Tablo 2.1. Boyutsuz parametreler

Parametre	Fiziksel tanımları
$\alpha_1 = \frac{kL^4}{EI}$	Lineer elastik yatak yay katsayısı
$\alpha_3 = \frac{\varepsilon_0 b L^4}{2d^3 EI}$	Elektriksel kuvvet parametresi
$\Gamma = \frac{12d^2}{h^2}$	Orta düzlem gerilme parametresi
$\mu = \frac{\mu^* L^2}{\sqrt{\rho AEI}}$	Sönüm parametresi

$Z_0$  eğrilik fonksiyonudur ve  $Z_0 = 4x(1-x)$  şeklinde alınmıştır.

### 3. PERTURBASYON ANALİZİ

Matematik modelin yaklaşık çözümünü hesaplamak için perturbasyon metotlarından çok zaman ölçekli metot denkleme direk olarak uygulanacaktır. [19] Sistemin enine titreşim hareketi aşağıdaki gibi önerilmiştir,

$$w(x,t; \varepsilon) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1) \quad (3.1)$$

Baskın rezonans durumu için aşağıdaki gibi mertebeye düzenlemesi yapalım,

$$Z_0 \sim O(1), \quad \mu \sim \varepsilon \mu, \quad \alpha_2 \sim \varepsilon^2 \alpha_2, \quad 2\Omega \sim \omega_n$$

Denklem (3.1) boyutsuz hareket denkleminde yerleştirilirse ve mertebelerine ayrıştırılırsa,

$\varepsilon$  Mertebesi :

$$w_1^{iv} + D_0^2 w_1 + \alpha_1 w_1 - \Gamma Z_0'' \int_0^1 Z_0' w_1' dx = 0 \quad (3.2)$$

$$w_1(0, T_0, T_1) = 0, \quad w_1''(0, T_0, T_1) = 0, \quad w_1(1, T_0, T_1) = \alpha, \quad w_1''(1, T_0, T_1) = 0$$

$\varepsilon^2$  Mertebesi:

$$w_2^{iv} + D_0^2 w_2 + \alpha_1 w_2 - \Gamma Z_0'' \int_0^1 Z_0' w_2' dx = -2D_0 D_1 w_1 - 2\mu D_0 w_1 + \frac{\Gamma}{2} Z_0'' \int_0^1 w_1'^2 dx \quad (3.3)$$

$$+ \Gamma w_1'' \int_0^1 Z_0' w_1' + \frac{\alpha_2 V_{AC}^2 \cos^2(\Omega t)}{(1+Z_0)^2}$$

$$w_2(0, T_0, T_1) = 0, \quad w_2''(0, T_0, T_1) = 0, \quad w_2(1, T_0, T_1) = \alpha, \quad w_2''(1, T_0, T_1) = 0$$

elde edilir.

$\varepsilon$  mertebenin çözümü parabolik eğrilik fonksiyonu için aşağıdaki gibidir,

$$Y_n(x) = c_5 \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \beta_n x + \frac{1}{2} \frac{(\cos \beta_n - 1)}{\sin \beta_n} \sin \beta_n x - \frac{1}{2} \cosh \beta_n x + \frac{1}{2} \frac{(\cosh \beta_n - 1)}{\sinh \beta_n} \sinh \beta_n x \right) \quad (3.4)$$

$\varepsilon^2$  mertebesinde 2:1 iç rezonans durumu incelenecektir. Bu yüzden zorlama frekansı sistemin tabii frekanslarından birine yakın alınacaktır. Zorlama frekansı m'ci tabii frekansa yakın olacak şekilde alınmıştır.

$$2\Omega = \omega_m + \varepsilon\sigma \quad (3.5)$$

Burada  $\sigma$  ayar parametresi olup zorlama frekansının doğal frekanslara yakınlığını göstermek için kullanılmıştır. Bu açımda bu mertebedeki çözümleri elde etmek için zorlama ifadesinde yerine yazılacaktır. Herhangi bir m'inci mod ile n'inci mod arasında iç rezonansın varlığı araştırılacaktır. 2:1 iç rezonans şartı için frekansın biri yaklaşık olarak diğersinin iki katı olması gerekmektedir.

$$\omega_m = 2\omega_n + \varepsilon\rho \quad (3.6)$$

$\varepsilon$  mertebesindeki çözümleri  $\varepsilon^2$  mertebesinde yerine yazılır ve gerekli ara işlemler yapılır ise düzgün rejim davranışında genlikler aşağıdaki gibi hesaplanabilir. an'ın basit çözümü için,

$$a_n = 0 \text{ ve } a_m = \frac{\alpha_2 V_{AC}^2 f}{\sqrt{(M_m - 2\omega_m \sigma)^2 + (2\omega_m \mu)^2}} \quad (3.7)$$

elde edilir. an'ın basit olmayan çözümü için

$$a_m = \frac{2}{|\lambda_1|} \sqrt{(M_n - 2\omega_n(\sigma + \rho))^2 + (2\omega_n \mu)^2} \quad (3.8)$$

$$a_n = \left( \frac{-4M_m \omega_n (\sigma + \rho) + 8\omega_m \omega_n (-2\mu^2 + \sigma(\sigma + \rho)) - 8\sigma \omega_m M_n + 4M_n M_m}{\lambda_1 \lambda_2} \pm \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} (\alpha_2^2 V_{AC}^4 f^2 \lambda_1^2 - 16M_n^2 \mu^2 \omega_m^2 - 16\omega_n^2 \omega_m^2 \mu^2 (\rho + 3\sigma)^2 + 32\omega_m \mu^2 \omega_n^2 M_m (\rho + 3\sigma) + 32M_n \omega_n \omega_m^2 \mu^2 (\rho + 3\sigma) - 16\mu^2 M_m \omega_n (M_m \omega_n + 2\omega_m M_n))^2 \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada  $M_n$  ve  $M_m$  ideal olmayan sınır şartları ile ilgili terimlerdir ve frekans-genlik eğrilerine etkileri araştırılmaktadır.

#### 4. KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde düzgün rejim denklemlerinin kararlılığına bakılacaktır. Sistemin kararlılığı hakkında bilgi faz modülasyon denklemlerinden elde edilen Jakobiyen matristen elde edilecektir. Düzgün rejim genlik faz modülasyon denklemleri,

$$\begin{aligned} a_n' &= -\mu a_n + \frac{1}{4\omega_n} a_m a_n \lambda_1 \sin \gamma = G_1(a_n, a_m, \lambda, \gamma) \\ a_m' &= -\mu a_m - \frac{1}{4\omega_m} a_n^2 \lambda_2 \sin \gamma + \frac{1}{2\omega_m} \alpha_3 V_{AC}^2 f \sin \lambda = G_2(a_n, a_m, \lambda, \gamma) \\ \eta' &= -\frac{M_m}{2\omega_m} + \sigma + \frac{1}{4\omega_m a_m} a_n^2 \lambda_2 \cos \gamma + \frac{1}{2\omega_m a_m} \alpha_3 V_{AC}^2 f \cos \lambda = G_3(a_n, a_m, \lambda, \gamma) \\ \gamma' &= -\frac{M_n}{\omega_n} + \Lambda + \frac{M_m}{2\omega_m} - \frac{a_n^2}{4\omega_m a_m} \lambda_2 \cos \gamma - \frac{\alpha_3 V_{AC}^2 f \cos \lambda}{2\omega_m a_m} + \frac{a_m \lambda_1 \cos \gamma}{2\omega_n} = G_4(a_n, a_m, \lambda, \gamma) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olarak yazılır. Bu denklemler Jakobiyen matriste yerine yerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial a_n} & \frac{\partial G_1}{\partial a_m} & \frac{\partial G_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial G_2}{\partial a_n} & \frac{\partial G_2}{\partial a_m} & \frac{\partial G_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial G_3}{\partial a_n} & \frac{\partial G_3}{\partial a_m} & \frac{\partial G_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial G_4}{\partial a_n} & \frac{\partial G_4}{\partial a_m} & \frac{\partial G_4}{\partial \lambda} & \frac{\partial G_4}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{\substack{a_n=a_{n0} \\ a_m=a_{m0} \\ \eta=\eta_0 \\ \gamma=\gamma_0}} \quad (4.2)$$

elde edilir. Jakobiyen matrisin öz değerlerinin, kararlılığın sağlanabilmesi için, pozitif reel kısma sahip olmaması gerekir. Bu yaklaşım basit olmayan çözüm için geçerlidir. Fakat basit çözüm için uygun değildir. Basit çözümün kararlılığını belirlemek için kompleks genlik denklemleri için alternatif bir form kullanılacaktır.

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2}(p_n - iq_n)e^{iv_n T_1} \quad \text{ve} \quad A_m(T_1) = \frac{1}{2}(p_m - iq_m)e^{iv_m T_1} \quad (4.3)$$

Çözülebilirlik şartı denklemlerinde genliğin (4.3) ifadesinde belirtildiği gibi yeni formları yerleştirilip denklemler reel ve sanal kısımlara ayrılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} q_n' &= -\frac{1}{2\omega_n} M_n p_n + p_n v_n - \mu q_n - \frac{1}{4\omega_n} (p_n p_m + q_n q_m) \lambda_1 = H_1(q_n, p_n, q_m, p_m) \\ p_n' &= \frac{1}{2\omega_n} M_n a_n - q_n v_n - \mu p_n + \frac{1}{4\omega_n} (p_n q_m - q_n p_m) \lambda_1 = H_2(q_n, p_n, q_m, p_m) \\ q_m' &= -\frac{1}{2\omega_m} M_m p_m + p_m v_m - \mu q_m - \frac{1}{4\omega_m} (p_n^2 - q_n^2) \lambda_2 + \frac{\alpha_3 V_{AC}^2 f}{2\omega_m} = H_3(q_n, p_n, q_m, p_m) \\ p_m' &= \frac{1}{2\omega_m} M_m a_m - q_m v_m - \mu p_m + \frac{1}{2\omega_m} p_n q_n \lambda_2 = H_4(q_n, p_n, q_m, p_m) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada  $v_n = \frac{\sigma + \Lambda}{2}$  ve  $v_m = \sigma$ 'dir. Denklemin sabit noktaları hesaplanırsa,

$$p_m = \frac{\alpha_3 V_{AC}^2 f (M_m - 2\sigma\omega_m)}{4\omega_m \mu^2 + (M_m - 2\sigma\omega_m)^2} = p_{m0}, \quad q_m = \frac{2\mu\omega_m \alpha_3 V_{AC}^2 f}{4\omega_m^2 \mu^2 + (M_m - 2\sigma\omega_m)^2} = q_{m0} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu sabit noktalarda Jakobiyen matrisi oluşturalım,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p_n} & \frac{\partial H_1}{\partial p_m} & \frac{\partial H_1}{\partial q_n} & \frac{\partial H_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_n} & \frac{\partial H_2}{\partial p_m} & \frac{\partial H_2}{\partial q_n} & \frac{\partial H_2}{\partial q_m} \\ \frac{\partial H_3}{\partial p_n} & \frac{\partial H_3}{\partial p_m} & \frac{\partial H_3}{\partial q_n} & \frac{\partial H_3}{\partial q_m} \\ \frac{\partial H_4}{\partial p_n} & \frac{\partial H_4}{\partial p_m} & \frac{\partial H_4}{\partial q_n} & \frac{\partial H_4}{\partial q_m} \end{bmatrix}_{\substack{p_n=0 \\ q_n=0 \\ p_m=p_{m0} \\ q_m=q_{m0}}} \quad (4.6)$$

Bu matrisin özdeğerlerinin, kararlılığın sağlanabilmesi için pozitif reel kısımlara sahip olmaması gerekir. Özdeğerler analitik olarak hesaplanabilmektedir. Eğer (4.7) ifadesindeki şartlar sağlanırsa çözüm kararlı, sağlanamazsa çözüm kararsızdır.

$$V_{AC}^2 < \frac{2}{|\lambda_1| \alpha_3 f} \sqrt{(M_m - 2\omega_m \sigma)^2 + 4\omega_m^2 \mu^2} \sqrt{(M_n - \omega_n(\sigma + \Lambda))^2 + 4\omega_n^2 \mu^2} \quad (4.7)$$

Zorlama genliğinin az olduğu bölgede, alçak modun çözümü basittir. Zorlama genliği arttırıldıkça alçak mod basit olmayan çözüm verir ve yüksek mod ile etkileşir. Sistem hem alçak mod hem de yüksek modda titreşir. Enerji transferinin olduğu bu nokta süper kritik çatal bifürkasyon noktasıdır. Bifürkasyon noktasını veren genel denklem,

$$V_{AC_1}^2 = \frac{1}{f_1 \alpha_3 |\lambda_1|} \sqrt{[(M_n - \omega_n(\sigma + \Lambda))^2 + 4\omega_n^2 \mu^2]} \sqrt{[(M_m - 2\omega_m \sigma)^2 + 4\omega_m^2 \mu^2]} \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilir. Sistem parametrelerinin bazı özel değerleri için, zorlama-genlik grafiklerinde eğer-düğüm bifürkasyon noktaları görülmektedir. Eğer-düğüm bifürkasyon noktaları Denklem (4.9)'da analitik olarak hesaplanır.

$$V_{AC_2}^2 = \frac{4\mu(M_m \omega_n + \omega_m M_n - \Lambda \omega_n \omega_m - 3\omega_m \omega_n \sigma)}{f_2 \alpha_3 |\lambda_1|} \quad (4.9)$$

## 5. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde sayısal analiz sonuçları verilecektir. Parabolik eğrilik durumu için 2:1 iç rezonans durumu için çözümler bir önceki bölümde elde edilmişti. Farklı elastik yatak katsayısı için ilk beş tabi frekans Tablo 5.1'de yazılmıştır.

2:1 rezonansları elde etmek için elastik yatak değerleri denklem 5.1'den elde edilecektir.

$$\alpha_1 = \frac{\beta_m^4 - 4\beta_n^4}{3} \quad (5.1)$$

Tablo 5.1. Elastik katsayı değerine göre ilk beş tabi frekans

$\alpha_1$	0	10	50	100	500
$\omega_1$	12.2166	12.6192	14.1154	15.7875	25.4803
$\omega_2$	39.4784	39.6049	40.1067	40.7252	45.3712

$\omega_3$	88.8591	88.9153	89.1400	89.4200	91.6294
$\omega_4$	157.9140	157.9450	158.0720	158.2300	159.4890
$\omega_5$	246.7440	246.7650	246.8460	246.9470	247.7550

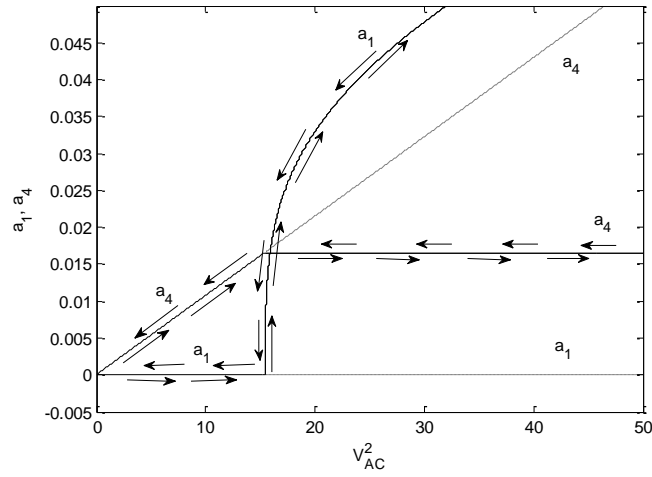
Elastik yatak katsayısı 8113 değerine eşit olduğunda, birinci ve dördüncü modlar arasında iç rezonans meydana gelmektedir.

Şekil 5.1'de birinci ve dördüncü modlar arasında iç rezonanslar incelenmiştir. Dış zorlama frekansı dördüncü mod frekansına yakın alınmıştır. Dördüncü mod frekansı ise birinci mod frekansının yaklaşık olarak iki katı alınmıştır. Şekillerdeki sürekli çizgiler kararlı çözümleri, kesikli çizgiler ise kararsız çözümleri ifade etmektedir. Sistemin parametre değerleri değiştirilerek kuvvet-tepki ve frekans tepki grafikleri elde edilmiştir. İdeal olmayan sınır şartının kuvvet-tepki ve frekans-tepki grafiklerine etkileri gösterilmiştir.

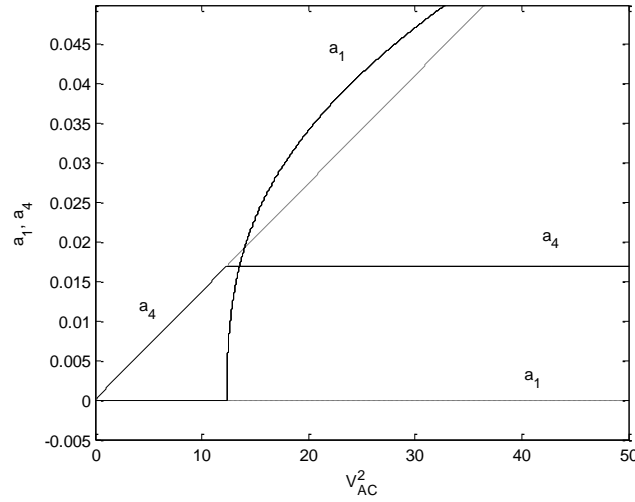
Şekil 5.1'de ideal ve ideal olmayan sınır şartı durumlarını kıyaslamak için iki grafik çizdirilmiştir. Şekil 5.1 (a)'da ideal sınır şartı durumu, (b)'de ise ideal olmayan sınır şartı parametresinin farklı değeri için kuvvet tepki eğrileri görülmektedir. Sınır şartı parametresi hariç diğer parametreler her iki grafikte de sabit alınmıştır. Şekil 5.1 (a) grafiğinde ideal sınır şartı durumu için birinci mod ve dördüncü mod tepkileri oklar ile açıklanmıştır. Grafiklerde elektriksel kuvvet genliği kademeli olarak artırılmıştır.  $V_{AC}^2$  değeri 15.4218 değerine ulaşıncaya kadar birinci modun genlik değeri sıfırdır. Dördüncü modun genliği ise bu kritik değere kadar lineer olarak artmaktadır.  $V_{AC}^2$  değeri 15.4218 kritik değere ulaşıncaya dördüncü mod birinci modu uyarır. Bu kritik nokta süper kritik çatal bifürkasyon noktasıdır. Bu kritik kuvvet değerinden sonra ilk mod basit olmayan çözüm vermektedir ve genlik artmaktadır. Dördüncü modun genliği ise sabit kalmaktadır. Zorlama kuvvetinin genliği kademeli olarak artırıldığında ve azaltıldığında birinci mod ve dördüncü mod aynı genlik değerlerini vermektedir. Birinci mod ve dördüncü mod için ideal olmayan sınır şartı parametreleri sırası ile  $B_1$  ve  $B_2$ 'dir. Bu parametrelere sıfırdan farklı değerler verildiğinde sistem ideal olmayan sınır şartına sahip olmaktadır. Şekil 5.1 (b) grafiğinde kuvvet tepki grafiği  $B_1=B_2=0.02$  alınarak çizdirilmiştir. Bu durumda bifürkasyon noktası 13.3252'dir. İdeal sınır şartı durumundaki grafik ile kıyaslandığında bifürkasyon noktasının sola doğru kaydığı ve modlar arasındaki enerji transferinin azaldığı görülmektedir.

Şekil 5.2, ideal ve ideal olmayan sınır şartı durumlarının frekans tepki grafiklerine etkilerini belirlemek için çizdirilmiştir. Şekil 5.2 (a)'da ideal sınır şartı durumu, (b)'de ise ideal olmayan sınır şartı için frekans tepki eğrileri görülmektedir. Sınır şartı parametresi hariç diğer parametreler iki grafikte de sabit alınmıştır. Şekil 5.2 (a) grafiğinde ideal sınır şartı durumu için birinci mod ve dördüncü mod tepkileri oklar ile açıklanmıştır. Grafiklerde frekans kademeli olarak artırılmıştır. Frekans değeri -0.1009 değerine ulaşıncaya kadar birinci modun genlik değeri sıfırdır. Bu kritik nokta süper kritik çatal bifürkasyon noktasıdır. Dördüncü modun genliği ise bu kritik değere kadar artmaktadır. Frekans ayar parametresi değeri -0.1009 kritik değere ulaşıncaya dördüncü mod birinci modu uyarır. Bu kritik frekans değerinden sonra ilk mod basit olmayan çözüm verir. Birinci modun genliği artarken dördüncü modun genliği azalmaktadır.





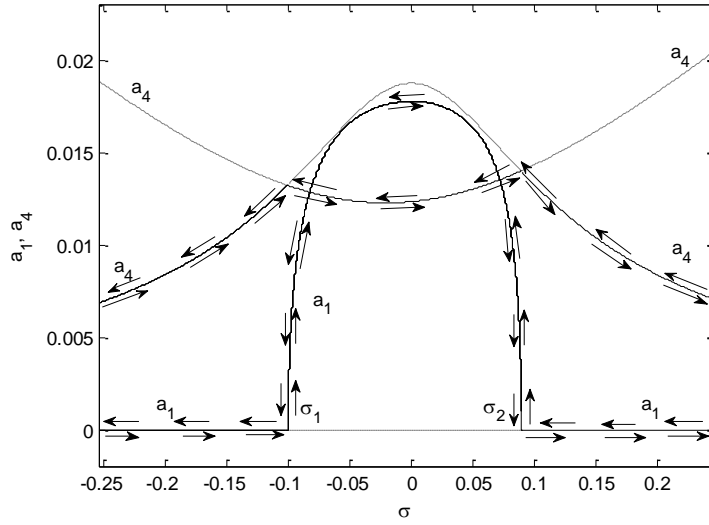
(a) İdeal sınır şartı



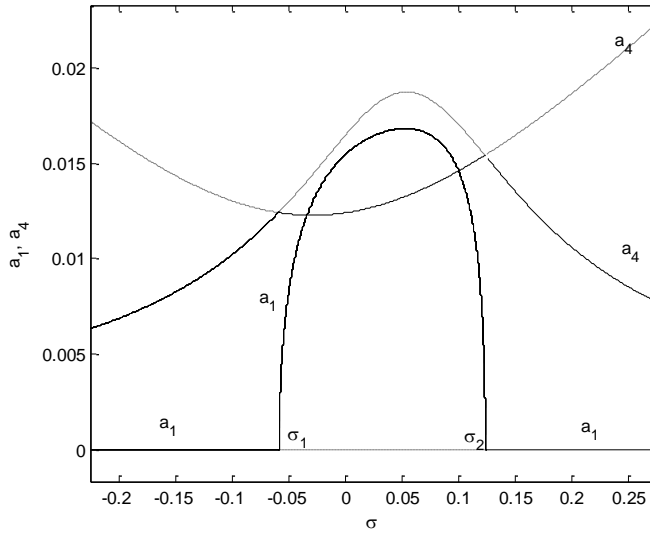
(b) İdeal olmayan sınır şartı

Şekil 5.1. Kuvvet tepki grafiği ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha_1 = 8113$ ,  $\alpha_3 = 0.25$ ,  $\mu=0.11$ ,  $\Gamma=15$ ,  $f=0.2727$ ,  $\omega_1 = 90.8969$ ,  $\omega_4 = 181.7958$ ,  $\rho=0.0205695$ ,  $\lambda_1=2961.00$ ,  $\lambda_2=1480.5$ ,  $\sigma=0.13557$ ) (a)  $B_1=0$ ,  $B_2=0$ , (b)  $B_1=0.02$ ,  $B_2=0.02$ )

Şekilde görüldüğü gibi birinci mod genliği maksimum genliğe ulaştıktan sonra azalmaktadır ve bu noktadan sonra dördüncü mod genliği ise artmaya başlamaktadır. Frekans ayar parametresi değeri 0.0891 olduğunda birinci mod genlik değeri sıfıra ulaşmakta ve dördüncü mod genliği de bu noktadan sonra azalmaya başlamaktadır. Şekil 5.2 (b) grafiğinde frekans tepki grafiği  $B_1=B_2=0.02$  alınarak çizdirilmiştir. Bu durumda bifürkasyon noktaları -0.0592 ve 0.1229'dur. İdeal sınır şartı durumdaki grafik ile kıyaslandığında bifürkasyon noktalarının sağa doğru ötelendiğini ve modların genlik değerlerinde önemli farklılıklar olduğu görülmektedir.



(a) İdeal Şart



(b) İdeal olmayan şart

Şekil 5.2. Frekans tepki grafiği ( $\varepsilon=0.1$ ,  $\alpha_1=8113$ ,  $\alpha_3=0.1$ ,  $\mu=0.1$ ,  $\Gamma=15$ ,  $f=0.2727$ ,  $\omega_1=90.8969$ ,  $\omega_4=181.7958$ ,  $\rho=0.0205695$ ,  $\lambda_1=2961.00$ ,  $\lambda_2=1480.5$ ,  $V_{AC}=5$ , (a)  $B_1=0$ ,  $B_2=0$ , (b)  $B_1=0.02$ ,  $B_2=0.02$ )

## 6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ideal olmayan sınır şartlarının eğri mikro kirişin ikincil rezonanslarına etkileri araştırılmıştır. İdeal olmayan sınır şartları perturbasyon teorisi ile modellenmiştir. Denklem çözümleri çok ölçekli metot ile elde edilmiştir. Sonuç olarak ideal olmayan sınır şartlarının eğri mikro kirişin kuvvet tepki ve frekans tepki eğrilerinde önemli değişiklikler meydana getirdiği bulunmuştur. Bifürkasyon noktalarında önemli kaymalar meydana gelmiştir. Bu bilgiler literatüre önemli katkıda bulunmaktadır. Çünkü gerçekte sınır şartlarının ideal olabilmesi neredeyse imkansızdır. İdeal olmayan sınır şartı kabulü sistemin modelini daha gerçeğe uygun hale getirmektedir. Mikro aletlerin çok hassas çalıştığı ve nonlineerlik etkilerinin bu aletler için çok önemli olduğu bilindiğinden yapılan nonlineer analiz önem taşımaktadır.

## 6. REFERANSLAR

- [1] R.M. Lin, W.J. Wang, "Structural dynamics of Microsystems-current state of research and future directions" *Mechanical Systems and Signal Processing* 20 1015-1043, 2006.
- [2] J.F. Rhoads, S.W. Shaw, L. K. Turner, "Nonlinear Dynamics and Its Applications in Micro- and Nanoresonators" *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 132 / 034001-1, 2010.
- [3] M.I. Younis, "Investigation of the Mechanical Behaviour of Microbeam-based Mems devices" Thesis, 2001.
- [4] M.I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, "Static and dynamic behaviour of an electrically excited resonant microbeam in Proceedings of the AIAA 43rd Structures" Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, AIAA Paper No. 2002-1305, 2002.
- [5] E.M. Abdel-Rahman, M.I. Younis and A.H. Nayfeh, "Characterization of the mechanical behaviour of an electrically actuated microbeam" *Journal of Micromechanics and Microengineering* 12 759-766, 2002.
- [6] M.I. Younis, A. Nayfeh, "A Reduced-Order Model for Electrically Actuated Microbeam-Based MEMS" *Journal of Micro electro mechanical Systems* 12 672-680, 2003.
- [7] E.M. Abdel-Rahman, A.H. Nayfeh, "Super harmonic resonance of an electrically actuated resonant micro sensor" *Nanotech* 2 440-433, 2003.
- [8] M.I. Younis and A.H. Nayfeh, "A study of the non linear response of a resonant microbeam to electric actuation" *Nonlinear Dynamics* 31 91-117, 2003.
- [9] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, "Dynamics of MEMS resonators under superharmonic and subharmonic excitations" *Journal of Micromechanics and Microengineering* 15 1840-1847, 2005.
- [10] F. Najar, A.H. Nayfeh, E.M. Abdel-Rahman, S. Choura, S. El-Borgi, "Nonlinear Analysis of MEMS Electrostatic Microactuators: Primary and Secondary resonances of the first mode" *Journal of vibration and control*, 16(9):1321-1349, 2010.
- [11] H.M. Ouakad, M.I. Younis, "The dynamic behaviour of MEMS arch resonators actuated electrically" *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 704-713, 2010.
- [12] M.I. Younis, H.M. Ouakad, F.M. Alsaleem, R. Miles, W. Cui, "Nonlinear Dynamics of Mems Arches Under Harmonic Electrostatic Actuation" *Journal of Micro electro mechanical Systems*, Vol. 19, No. 3, June 2010.
- [13] S. Abu-Salih and D. Elata, "Electromechanical buckling of a pre-stressed layer bonded to an elastic foundation" *NSTI-Nanotech* 2 223-226, 2004.
- [14] A. Delnavaz, S.N. Mahmoodi, N. Jalili and H. Zohoor, "Linear and nonlinear vibration and frequency response analyses of micro-cantilevers subjected to tip-sample interaction" *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 176-185, 2010.
- [15] H.R. Öz, M. Pakdemirli, E. Özkaya, M. Yılmaz, "Non linear vibrations of a slightly curved beam resting on a nonlinear elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration* Volume 212, Issue 2, 295-309, 1998.
- [16] H.R. Öz, "Two-to-one internal resonances in a shallow curved beam resting on an elastic foundation" *Acta Mechanica* 185, 245-260, 2006.

- [17] H.O. Ekici and H. Boyacı, "Effects of Non-ideal Boundary Conditions on Vibrations of Microbeams" *Journal of Vibration and Control* 13 1369-1378, 2007.
- [18] M. Pakdemirli, H. Boyacı, "Effect of non-ideal boundary conditions on the vibrations of continuous systems" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, no. 4, pp. 815-823, 2002.
- [19] A.H. Nayfeh, "Introduction to Perturbation Techniques". New York, Wiley, 1981.