



HAREKETLİ ZIMBA İLE BASTIRILAN TABAKANIN SÜRTÜNME Lİ DEĞME PROBLEMİ

İsa Çömez¹, Handan Adıbelli² ve Ragıp Erdöl³

¹. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

². Bozok Üniversitesi, Yozgat

³. Canik Başarı Üniversitesi, Samsun

ABSTRACT

In this study frictional moving contact problem for a rigid cylindrical punch and an elastic layer is considered. The punch subjected to concentrated normal and tangential force, and moves steadily with a constant subsonic velocity on the boundary. The problem is reduced to a singular integral equation of the second kind, in which the contact stress and the contact area are the unknowns, and it is treated using Fourier transforms and the boundary conditions for the problem. The numerical solution of the singular integral equation is obtained by using Gauss-Jacobi integration formulas. Numerical results for the contact stress and the contact area are given. The results show that with increasing values of relative moving velocity, contact width between the moving punch and the layer increases whereas contact stress decreases.

ÖZET

Bu çalışmada rijit dairesel zımba (panç) ve tabakanın hareketli değme problemi sürtünme etkisi dikkate alınarak incelenmiştir. Yatay ve düşey tekil kuvvetlere maruz bırakılan panç yüzeyde sabit ses altı hızla hareket etmektedir. Sınır şartları ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak problem değme uzunluğunun ve değme gerilmesinin bilinmeyen olduğu ikinci tür bir tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak tekil integral denklemin sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. Değme uzunluklarına ve değme gerilmelerine ait sayısal sonuçlar verilmiştir. Panç ile tabaka arasındaki değme uzunluğunun bağıl hız ile arttığı, değme gerilmesinin ise azaldığı görülmüştür.

GİRİŞ

Çoğu yapılarda ve mekanik sistemlerde temas eden elemanlar arasında yük iletimi meydana geldiğinden değme problemleri üzerine yapılan çalışmalar önem kazanmıştır.

Son zamanlarda yapılan çalışmalar daha çok fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemeler üzerinde yoğunlaşmıştır. Guler ve Erdogan [1,2], Ke ve Wang [3], Chen ve Chen [4], El-Borgi vd. [5] FD tabaka ile kaplı yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Yang ve Ke [6], Rhimi vd. [7], Liu ve Wang [8], Liu vd. [9], Ke ve Wang [10] ise rijit panç veya yayılı yük ile yüklü FD tabaka ve yarım düzlemin sürtünmesiz değme

problemini incelemişlerdir. Comez[11] Winkler zeminine oturan FD tabakanın, Choi [12] alttan tam bağlı FD tabakanın değme problemini incelemişlerdir.

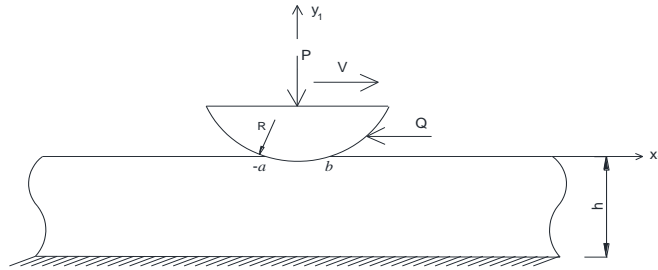
Kahya vd. [13] anizotrop tabaka ve yarım düzlemin sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Yaylacı vd. [14] çeyrek düzlemlere oturan iki tabakanın ayrılmalı değme problemini analitik olarak ve ANSYS ile çözmüşlerdir.

Buraya kadar bahsedilen çalışmalar statik problemlerdir. Pratikte bir elemanın değerine göre hızının oldukça fazla olduğu problemler ortaya çıkar ve bu yüzden problemin dinamik karakterini göz önüne almak gerekir Galin [15]. Eringen [16] hareketli rijit panç ile bastırılan yarım düzlemin sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Zhou vd. [17] önceki çalışmayı ortotropik yarım düzleme genişletmiştir. Viskoelastik malzemeden oluşan malzemelerde yarı statik değme probleminin matematiksel modellenmesi Li ve Liu [18] ve Shillor ve Sofonea [19] tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada rijit dairesel panç (zımba) ve tabakanın hareketli değme problemi sürtünme etkisi dikkate alınarak incelenmiştir. Tabaka ile panç arasındaki sürtünme etkisi dikkate alınmıştır. Panç P tekil yüküyle bastırılırken, yatayda da $Q = \eta P$ değerindeki yatay kuvvet etkisi altındadır. Panç tabaka yüzeyinde sabit ses altı (subsonik) hızla hareket etmektedir. İntegral dönüşüm teknikleri ve lineer elastisite teorisi yardımıyla problem çözülmüş, değme uzunlukları ve değme gerilmeleri bulunmuştur.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Problemde panç ile tabaka $(-a, b)$ aralığında temas halindedir. h yüksekliğindeki homojen tabaka alttan tam bağlıdır. R yarıçaplı rijit panç tabaka üzerinde V sabit hızıyla x_1 doğrultusunda hareket etmektedir.



Şekil 1. Hareketli panç probleminin geometrisi

Kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde elasto-dinamiğin dalga denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_1} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y_1} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada u, v yer değiştirme vektörünün sırasıyla x_1 – ve y_1 – bileşenleridir. ρ yoğunluk ve t ise zaman değişkenidir.

Galile dönüşümü[15]:

$$x = x_1 - Vt \quad y = y_1 \quad (2)$$

kullanılarak dinamik problem statik hale gelmektedir.

(2) nolu deklemler (1)'de yerine konur ve Hooke kanunu kullanılırsa $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ için aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda - V^2 \rho) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ (\mu - V^2 \rho) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Burada

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4)$$

ile ifade edilir. E elastisite modülünü ve ν Poisson oranını ifade etmektedir.

Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklem adı diferansiyel denkleme dönüştürülecektir. Bunun için $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri Fourier dönüşümü şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

burada $\tilde{u}(\alpha, y)$ and $\tilde{v}(\alpha, y)$ yer değiştirme bileşenlerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır.

(5) nolu denklemin gerekli türevleri alınıp (3)'de yerine konursa aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem takımı elde edilir:

$$\begin{aligned} -(2\mu + \lambda - V^2 \rho) \alpha^2 \tilde{u} + \mu \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} - i\alpha(\mu + \lambda) \frac{d\tilde{v}}{dy} &= 0 \\ -(\mu - V^2 \rho) \alpha^2 \tilde{v} + (2\mu + \lambda) \frac{d^2 \tilde{v}}{dy^2} - i\alpha(\mu + \lambda) \frac{d\tilde{u}}{dy} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(6) nolu denklemler çözüldüğünde karakteristik denklem elde edilir:

$$c^4 + \frac{\alpha^2(-2\mu(\lambda + 2\mu) + \rho V^2(\lambda + 3\mu))}{\mu(\lambda + 2\mu)} c^2 + \frac{\alpha^4(\mu - \rho V^2)(\lambda + 2\mu - \rho V^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} = 0 \quad (7)$$

Karakteristik denklemin kökleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \alpha \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_T^2}} = -c_3, & c_T &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\
c_2 &= \alpha \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_L^2}} = -c_4, & c_L &= \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}
\end{aligned} \tag{8}$$

burada c_L ve c_T tabakadaki boyuna ve enine dalga hızlarını ifade etmektedir. Böylelikle (6) nolu denklemlerin çözümü bulunabilir:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1 e^{c_1 y} + A_2 e^{c_2 y} + A_3 e^{-c_1 y} + A_4 e^{-c_2 y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha \\
v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i) \left\{ -A_1 \frac{1}{c_1} e^{c_1 y} - A_2 c_2 e^{c_2 y} + A_3 \frac{1}{c_1} e^{-c_1 y} + A_4 c_2 e^{-c_2 y} \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha
\end{aligned} \tag{9}$$

ve tabaka için gerilme ifadeleri

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i\mu\alpha \left[2A_1 e^{c_1 y} + \frac{2\mu + \lambda(1 - c_2^2)}{\mu} A_2 e^{c_2 y} + 2A_3 e^{-c_1 y} + \frac{2\mu + \lambda(1 - c_2^2)}{\mu} A_4 e^{-c_2 y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\mu\alpha \left[2A_1 e^{c_1 y} + (1 + c_1^2) A_2 e^{c_2 y} + 2A_3 e^{-c_1 y} + (1 + c_1^2) A_4 e^{-c_2 y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \\
\tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\alpha \left[\frac{1 + c_1^2}{c_1} A_1 e^{c_1 y} + 2c_2 A_2 e^{c_2 y} - \frac{1 + c_2^2}{c_2} A_3 e^{-c_2 y} - 2c_2 A_4 e^{-c_2 y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha
\end{aligned} \tag{10}$$

olarak elde edilir. Gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen A_j ($j=1, \dots, 4$) katsayıları problemin sınır şartlarından elde edilecektir.

SINIR ŞARTLARI VE İNTEGRAL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

Problem, (x, y) koordinat sisteminde, aşağıdaki sınır şartları altında çözülecektir.

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, 0) &= \begin{cases} -p(x) & -a < x < b \\ 0 & x \leq -a, x \geq b \end{cases} \\
\tau_{xy}(x, 0) &= \begin{cases} -\eta p(x) & -a < x < b \\ 0 & x \leq -a, x \geq b \end{cases} \\
u(x, -h) &= 0 \\
v(x, -h) &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Yukarıdaki şartlarda geçen $p(x)$; rijit panç ile tabaka arasında oluşan bilinmeyen değme gerilmesi fonksiyonudur. a ve b rijit panç ile tabaka arasındaki değme uzunluklarıdır.

(11) nolu sınır şartlarının Fourier dönüşümleri alınıp yazıldığında dört denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem sisteminin çözümünden gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen A_j katsayıları bilinmeyen değme gerilmesi $p(x)$ 'e bağlı olarak elde edilir. $p(x)$ 'i bulabilmek için aşağıdaki sınır şartı kullanılır:

$$\frac{dv(x,0)}{dx} = F(x) \quad -a < x < b \quad (12)$$

Burada $F(x)$ yükü ileten eğrisel rijit pançın şekil fonksiyonunun türevini ifade etmektedir. Dairesel panç için

$$F(x) = \frac{x}{R} \quad (13)$$

olarak yazılabilir. A_j katsayıları (12) nolu sınır şartında yazıldığında bir tekil integral denklem elde edilir:

$$+ \eta \frac{\beta_2}{\beta_1} p(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b p(\xi) d\xi \left[\frac{1}{\xi - x} + k_1(x, \xi) + \eta k_2(x, \xi) \right] = \frac{4}{\beta_1} \mu \frac{x}{R} \quad (-a < x < b) \quad (14)$$

(14) nolu integral denklemde değme gerilmesinin yanı sıra değme uzunlukları da bilinmeyendir. İntegral denklemin çözümü aşağıdaki denge denklemini sağlamalıdır

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(x,0) dx = - \int_{-a}^b p(\xi) d\xi = -P \quad (15)$$

TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

İntegral denklemini sayısal çözümü için $\alpha = z/h$ değişken dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$$\xi = \frac{a+b}{2} r + \frac{b-a}{2}, \quad x = \frac{a+b}{2} s + \frac{b-a}{2}, \quad \phi(s) = \frac{p(s)}{P/h} \quad (16)$$

Boyutsuzlaştırmalar ve değişken değişimleri sonucunda integral denklem

$$+ \eta \frac{\beta_2}{\beta_1} \phi(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b \phi(r) dr \left[\frac{1}{r-s} + k_1^*(s, r) + \eta k_2^*(s, r) \right] = H(s) \quad (17)$$

haline gelir. Burada

$$k_1^*(s, r) = \frac{a+b}{2h} k_1(x, \xi), \quad k_2^*(s, r) = \frac{a+b}{2h} k_2(x, \xi)$$

$$H(s) = \frac{4}{\beta_1} \frac{\mu}{P/h} \frac{1}{R/h} \left(\frac{a+b}{2h} s + \frac{b-a}{2h} \right) \quad (18)$$

Benzer şekilde denge denklemini de aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{a+b}{2h} \int_{-1}^1 \phi(r) dr = 1 \quad (19)$$

Temas uç noktalarında gerilme “0” olacağından integral denklemin (17) indeksi “-1” olur (Erdogan, 1978). Gauss-Jacobi integrasyon formülü ile integral denklemin çözümü

$$\phi(r) = g(r)w(r) \quad (20)$$

olarak aranır ve $g(r)$ fonksiyonunun N noktadaki değerleri için aşağıdaki cebrik denklem takımı elde edilir

$$\sum_{m=1}^N W_m^N g(r_i) \left[\frac{1}{r_m - s_k} + k_1(s_k, r_m) + \eta k_2(s_k, r_m) \right] = H(s_k) \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (21)$$

Denge denklemini de aşağıdaki hale getir:

$$\frac{b+a}{2h} \sum_{m=1}^N W_m^N g(r_m) = \frac{1}{\pi} \quad (22)$$

Burada

$$\begin{aligned} w(r) &= (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \\ \alpha &= \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\eta \beta_2 / \beta_1 - i}{\eta \beta_2 / \beta_1 + i} \right] + N_0 \\ \beta &= -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{\eta \beta_2 / \beta_1 - i}{\eta \beta_2 / \beta_1 + i} \right] + M_0 \end{aligned} \quad (23)$$

olarak tanımlıdır. N_0 ve M_0 , $0 < \text{Re}[\alpha, \beta] < 1$ şartını sağlayacak şekilde belirlenir. r_m ve s_k ilgili Chebyshev polinomlarının kökleri ve W_m^N ise ağırlıklarıdır:

$$\begin{aligned} P_N^{(\alpha, \beta)}(r_m) &= 0 & m &= 1, 2, \dots, N \\ P_{N+1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) &= 0 & k &= 1, 2, \dots, N+1 \\ W_m^N &= -\frac{1}{\pi} \frac{2N + \alpha + \beta}{(N+1)!} \frac{\Gamma(N + \alpha + 1) \Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{2^{(\alpha + \beta)}}{P_N^{(\alpha, \beta)}(r_i) P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(r_i)} \end{aligned} \quad (24)$$

(21) nolu denklem sistemi (22) nolu denge şartı sağlatılacak şekilde çözülerek değme gerilmesi ve değme uzunlukları bulunacaktır. Denklem (21)’de N tane bilinmeyen noktadaki $g(r_i)$ değerleri için $N+1$ tane denklem ortaya çıkmaktadır. Fazlalık denklem dışarı alınarak, (22) nolu denge şartı ile beraber sağlatılmaya çalışılacaktır. Denklem sistemi $g(r_i)$ değerleri için doğrusal olsa da değme uzunluklarının a, b bilinmeyen olması problemi doğrusal olmayan hale getirmektedir. Bu nedenle değme uzunluklarına başlangıçta rastgele değerler verilerek (21) nolu denklem sisteminden $g(r_i)$ değerleri bulunur. Bu değerler (22) nolu denge denkleminde yazılır ve sağlatana kadar iterasyona devam edilir.

BULGULAR VE İRDELEME

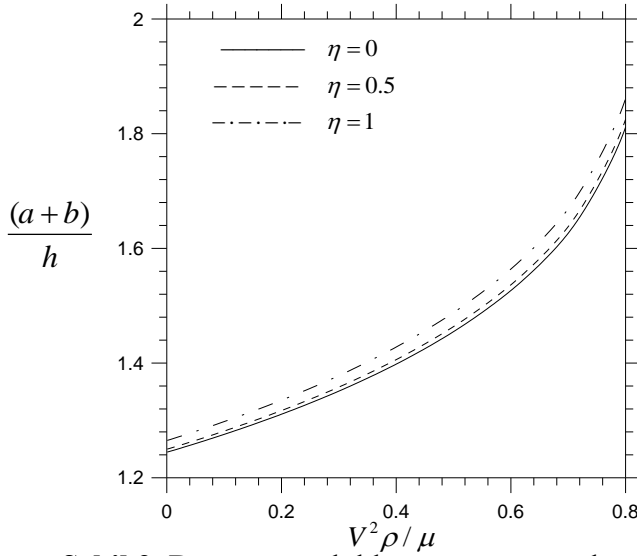
Bağıl hızın ($V^2\rho/\mu$), sürtünme katsayısının (η) ve paç yarıçapının (R/h) değme uzunlukları ve değme gerilmeleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Çalışmada Poisson oranı $\nu=0.2$ olarak alınmıştır.

İlk olarak değme uzunluklarının sürtünme katsayısı ve bağıl hız ile değişimi incelenmiştir (Şekil 2). Hem bağıl hız hem de sürtünme katsayısı arttığında değme uzunluklarının arttığı görülmektedir.

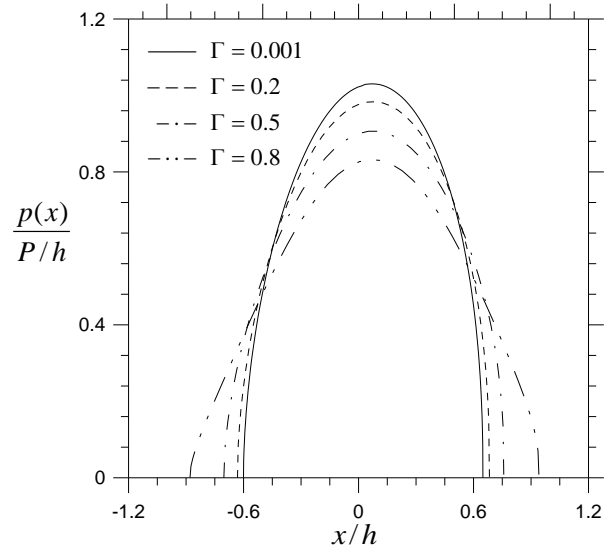
Bağıl hızın ($V^2\rho/\mu$) değme gerilmesine etkisi Şekil 2.'de incelenmiştir. Bağıl hız arttığında değme uzunlukları da artmakta ve böylece değme gerilmesi daha büyük bir alana dağılacığından değme gerilmesinin en büyük değeri azalmaktadır.

Sürtünmesiz halde değme gerilmesinin dağılımı y eksenine göre simetriktir ve en büyük değerini $x=0$ noktasında almaktadır. Sürtünmeli halde değme gerilmesinin dağılımındaki simetri bozulmaktadır. Sürtünme katsayısı arttıkça değme gerilmesinin en büyük değeri azalmaktadır ve bu değeri aldığı nokta yatay kuvvetin tersi yöne kaymaktadır (Şekil 4).

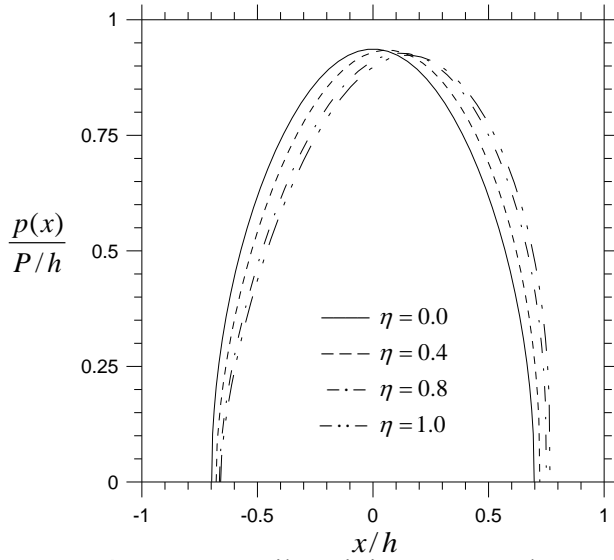
Paç yarıçapı ile değme gerilmesini değişimi Şekil 5. ile verilmiştir. Paç yarıçapı artırıldığında değme uzunluğu artmakta ve bunun neticesinde değme gerilmesinin en büyük değeri azalmaktadır.



Şekil 2. Değme uzunluklarının sürtünme katsayısı η ve bağıl hız $V^2\rho/\mu$ ile değişimi.
($R/h = 250$, $\mu/(P/h) = 250$)

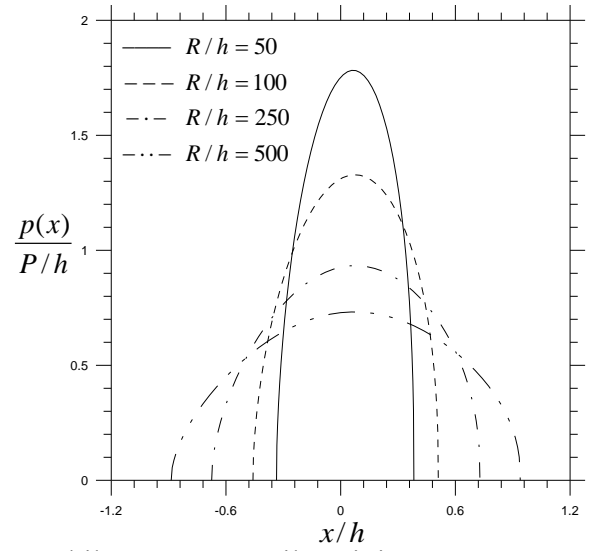


Şekil 3. Değme gerilmesinin bağıl hız $\Gamma = V^2\rho/\mu$ ile değişimi.
($R/h = 250$, $\mu/(P/h) = 250$, $\eta = 0.5$)



Şekil 4. Değme gerilmesinin sürtünme katsayısı (η) ile değişimi.

($R/h = 250, \mu/(P/h) = 250, V^2 \rho/\mu = 0.4$)



Şekil 5. Değme gerilmesinin panç yarıçapı (R/h) ile değişimi.

($\mu/(P/h) = 250, V^2 \rho/\mu = 0.4, \eta = 0.5$)

SONUÇLAR

Bu çalışmada rijit dairesel zımba (panç) ve tabakanın hareketli değme problemi sürtünme etkisi dikkate alınarak elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşümü çerçevesinde incelenmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda bağıl hız ve sürtünme katsayısı artırıldığında değme uzunluklarının arttığı, değme gerilmelerinin ise azaldığı görülmüştür. Yine panç yarıçapı arttırıldığında değme gerilmesi azalmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Guler, M.A., Erdogan, F., Contact mechanics of graded coatings. *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004) 3865–3889 .
2. Guler, M.A., Erdogan, F., Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings. *Mechanics of Materials.* 38 (2006) 633–647.
3. Ke, L.L., Wang, Y.S., Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. *Int. J. Solids Struct.* 43 (2006) 5779–5798.
4. Chen, P., Chen, S., Contact behaviors of a rigid punch and a homogeneous half-space coated with a graded layer. *Acta Mech.* 223 (2012) 563-577.
5. El-Borgi, S., Usman, S., Güler M.A. A frictional receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *Int. J. Solids Struct.* 51 (2014) 4462-4476.
6. Yang, J., Ke, L.L., Two dimensional contact problem for a coating-graded layer- substrate structure under a rigid cylindrical punch. *Int. J. Mech. Sci.* 50 (2008) 985–994.
7. Rhimi, M., El-Borgi, S., Ben Said, W., Ben Jemaa, F.: A receding contact axisymmetric problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *Int. J. Solids Struct.* 46, (2009) 3633–3642.
8. Liu, T.J., Wang, Y.S., Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus. *Acta Mech.* 199 (2008) 151–165.
9. Liu, T.J., Wang, Y.S., Zhang, C., Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials. *Arch. Appl. Mech.* 78 (2008) 267–282.

10. Ke, L.L., Wang, Y.S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* 26 (2007) 171–188.
11. Cömez, I., Contact problem of a functionally graded layer resting on a Winkler foundation. *Acta Mech.* 224 (2013) 2833-2843.
12. Choi, H.J., On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch. *J. Mech. Sci. Technol.* 23 (2009) 2703–2713
13. Kahya, V., Ozsahin, T.S., Birinci, A., Erdol, R., A receding contact problem for an anisotropic elastic medium consisting of a layer and a half plane. *Int. J. Solids Struct.* 44 (2007),5695-5710.
14. Yaylacı, M., Oner, E., Birinci, A., Comparison between Analytical and ANSYS Calculations for a Receding Contact Problem. *J. Eng. Mech.* 140 (2014) 1-10.
15. Galin, L.A., Contact problems: the legacy of L.A. Galin. Ed. G.M.L. Gladwell (Ed.) Springer, Dordrecht 2008.
16. Eringen, A. C., Suhubi, E. S., *Elastodynamics, Vol. I and II* Academic Press, New York 1974.
17. Zhou, Y.T., Lee, K.Y., Jang Y.H., Indentation theory on orthotropic materials subjected to a frictional moving punch. *Arch. Mech.* 66 (2014) 71-94.
18. Li, Y., Liu, Z., A quasistatic contact problem for viscoelastic materials with friction and damage. *Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl.* 73 (2010) 2221-2229.
19. Shillor, M., Sofonea, M., A quasistatic viscoelastic contact problem with friction. *Int. J. Eng. Sci.* 38 (2000) 1517-1533.
20. Erdogan, F., Mixed boundary value problems in mechanics. In: Nemat-Nasser S, editor. *Mechanics today*, vol. 4. Pergamon Press 1978.
21. Cömez, İ., Erdöl, R., Frictional contact problem of a rigid stamp and an elastic layer bonded to a homogeneous substrate. *Arch. Appl. Mech.* 83 (2013) 15-24.