



## FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İÇİ BOŞ SİLİNDİRLERDE SÜREKLİ REJİMDE SICAKLIK DAĞILIMININ TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL OLARAK BULUNMASI

Hakan Pekel<sup>1</sup>, Vebil Yıldırım<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Niğde Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, Niğde

<sup>2</sup> Çukurova Üniversitesi Müh.-Mim. Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, Adana

### ABSTRACT

This study presents a numerical solution for the steady state hyperbolic heat conduction problem in radial direction as one-dimensional case for the thick walled hollow cylinders made of Functionally Graded Material (FGM). The simple power that accepted as the material changing function has been applied for the material properties such as thermal conductivity, density, and specific heat. The governing differential equation of the temperature distribution has been solved using Complementary Function Method (CFM) which is one of the initial value methods. The obtaining numerical results have been compared with the analytical results. The variation of the nondimensional temperature distribution has been investigated with the in-homogeneity parameter. The results have been demonstrated in the figure.

### ÖZET

Bu çalışmada radyal doğrultuda Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden (FDM) yapılmış kalın cidarlı içi boş silindirlerin tek boyutlu zamana bağlı olmayan ısı problemi sayısal olarak ele alınmıştır. Malzeme değişim fonksiyonu olarak kabul edilen basit kuvvet fonksiyonu (simple power) ısı iletkenliği, yoğunluk ve özgül ısı gibi malzeme özelliklerine uygulanmıştır. Sıcaklık dağılımını idare eden ikinci dereceden diferansiyel denklem başlangıç değerleri yöntemlerinden biri olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile çözülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmış, boyutsuz sıcaklık dağılımının inhomojenlik parametresiyle değişimi incelenmiştir. Sonuçlar grafik halinde sunulmuştur.

### GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) özellikleri bir yüzeyden diğerine gittikçe belirli bir fonksiyona göre değişkenlik (sürekli veya dereceli olarak) gösteren kompozit sınıfta sayılan malzemelerdir. 1980'li yıllarda ilk Japonya'da geliştirilen bu malzemeler özellikle yüksek sıcaklığa maruz kalan ortamlarda kullanılmaya başlanmıştır. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerin yüksek basınçlara dayanma, radyal yüklemeler ve radyal sıcaklık dağılımındaki etkileri sebebiyle silindir şeklinde kullanımları bulunmaktadır. Özellikle ısıl gerilme problemlerinde önemli bir tasarım işini oluştururlar [1]. Nükleer reaktörlerde, uzay araçlarında ve soğutma sistemlerinin yansıra dışılıkta (implant), ortopedide, sensör [2] ve jeneratör yapımında kullanım alanları bulunmaktadır. Ayrıca ülkemizin Vizyon 2023 hedefleri kapsamında da kompozit malzemelerin hem üretim hem de kullanım alanında hedefleri olduğu bilinmektedir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde, malzeme üzerinde meydana gelen gerilmelerin yoğunluk, elastisite modülü, ısı iletim katsayısı, ısı genleşme katsayısı gibi malzeme özelliklerini kullanarak azaltmak amaçlanır. Bu hangi malzemenin karışıma ne kadar oranla ilave edilmesi gerektiğini ortaya çıkarır. Bunun için inhomojenlik parametresi olarak adlandırılan boyutsuz bir büyüklük kullanılır. İmalatlarında daha çok toz metalürjisi yönteminin kullanıldığı görülür. Bu şekilde Alüminyum-Seramik gibi farklı kombinasyonlar yapılabilmektedir.

Araştırmacılar FDM'lerdeki sıcaklık dağılımı problemlerini farklı boyut ve durumlar için incelemiştir. Bunlardan bazılarında değinecek olursak, Jabbari ve ark. [3] tek boyutta FDM silindir için zamana bağılı olmayan genel ısı gerilme analizi yapmışlardır. Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin yarıçap ile değiştiğini kabul etmişler ve Navier denklemleri kullanarak çözüme gitmişlerdir. Bir başka çalışmada FDM'den yapılmış ve özellikleri aksel simetri ile değişen içi dolu bir silindirdeki sıcaklık dağılımı değişkenlerine ayırma yöntemi ile yapılmıştır [4]. Kısa boyutlu FDM silindirlerin hem mekanik hem de ısı gerilme analizlerini veren bir çalışmanın yine aksel simetri içinde ele alındığı görülmektedir [5]. Bu kapsamda FDM silindirlerdeki sıcaklık dağılımını inceleyen çalışmalar için [6-8] referanslarına bakılabilir.

Bu çalışma kapsamında fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış ısıya maruz kalan içi boş kalın cidarlı bir silindirdeki sıcaklık dağılımı zamandan bağımsız ve boyutsuz halde hesaplanmaktadır. Malzeme özellikleri yarıçapın bir fonksiyonu olarak belirlenmekte ve tek boyutta olan bu değişimin malzemedeki sıcaklık dağılımına etkisi araştırılmaktadır. Bu noktada inhomojenlik parametresi olarak adlandırılan  $\beta$ 'nin farklı değerlerinde (-3, -1, 0, 1 ve 3) sıcaklığın nasıl değiştiği sayısal bir çözümleme yöntemi olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile belirlenmektedir. Bu yöntemin daha önce yaylarda [9], disk ve kürelerde [10] başarı ile uygulandığı görülmektedir.

## ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

### Diferansiyel Denklemin Elde Edilmesi:

Kalın cidarlı içi boş silindirlerde zamana bağılı olmayan tek boyutlu ısı transferi denklemi silindirik koordinatlar gözüne alınarak [11] şu şekilde yazılabilir ( $k' = \frac{dk(r)}{dr}$ ):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{1}{r} + \frac{k'}{k} - \frac{\rho'}{\rho} - \frac{C_p'}{C_p} \right) = 0 \quad (1)$$

Burada  $r$  radyal koordinat,  $T$  sıcaklık,  $k$  ısı iletim katsayısı,  $\rho$  yoğunluk ve  $C_p$  sabit basınçtaki özgül ısıyı göstermektedir. Bu denklemde yer alan tüm malzeme özelliklerinin sadece radyal koordinatla aşağıda gösterildiği şekilde basit bir kuvvet fonksiyonuna uyacak şekilde değiştiği kabulü yapılmıştır.

$$k(r) = k_o \left( \frac{r}{r_o} \right)^\beta, \quad \rho(r) = \rho_o \left( \frac{r}{r_o} \right)^\beta, \quad C_p(r) = C_{p_o} \left( \frac{r}{r_o} \right)^\beta \quad (2)$$

Bu denklemlerde alt indis "o" söz konusu büyüklüğün dış yüzeydeki değerini temsil etmektedir. Fiziksel olarak her bir malzeme özelliğine ait kuvvet parametresi farklı değerler almaktaysa da, bu çalışmada genel bir görüş elde edebilmek amacıyla bu kuvvetler birbirine eşit olarak kabul edilmiştir. Bu kabuller ile (1) nolu denklem aşağıda olduğu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}(1-\beta)\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$T_o$  ortam sıcaklığını ve  $T_{w_o}$  silindirin dış yüzey sıcaklığını göstermek üzere tanımlanan

$$R = \frac{r}{r_o} \Rightarrow r = r_o R$$

$$\theta = \frac{T - T_o}{T_{w_o} - T_o} \Rightarrow T = \theta(T_{w_o} - T_o) + T_o \quad (4)$$

boyutsuz büyüklükler yardımı ile (3) nolu denklem boyutsuz şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + (1-\beta)\frac{1}{R}\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (5)$$

Bu denklemin kapalı çözümü  $C_1$  ve  $C_2$  integral sabitleri olmak üzere

$$\theta(R) = \beta^{-1} R^\beta C_1 + C_2 \quad (6)$$

şeklindedir. Aşağıda ele alınan boyutsuz sınır şartları yardımı ile

$$\theta = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\theta = 0 \Rightarrow R = 0.6 \quad (7)$$

sıcaklık dağılımının analitik çözümü için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\theta(R) = \frac{R^\beta - 0.6^\beta}{1 - 0.6^\beta} \quad (8)$$

Sayısal çözümleme Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile yapılmakta ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

### Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY):

Bu çalışmada sayısal analiz Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile gerçekleştirilmektedir. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi, sınır değer problemlerini başlangıç değer problemine dönüştürerek çözmek için geliştirilmiş yöntemlerden bir tanesidir. Adı geçen yöntemin en büyük avantajlarından birisi yöntemin denklemin mertebesinde bağımsız olması ve denklemdeki katsayıların değişken olabilmesine izin verebilmesi özelliğidir. Bu nedenlerden ötürü çok farklı fiziksel olayların çözümünde başarıyla kullanılabilir. TFY ile çözüm yapabilmek için öncelikle mevcut denklemin kanonik formda yazılması gerekir. Diğer bir deyişle ikinci dereceden olan bu tek denklemin, iki adet birinci dereceden diferansiyel denklemle temsil edilmesi gerekir. Örneğin aşağıdaki diferansiyel denklem ve sınır şartları göz önüne alındığında [12], mevcut denklemin kanonik formda yazılabilmesi için

$$y''(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = x$$

$$y(1) + y'(1) = 0$$

$$y(2) = 0$$

basit değişken dönüştürmesi yapılabilir veya probleme ait fiziksel büyüklüklerden uygun olan iki tanesi problemin esas değişkenleri olarak seçilebilir. Değişken dönüştürmesinin kullanılması durumunda

$$z_1 = y(x)$$

$$z_2 = y'(x)$$

esas denklem aşağıdaki kanonik formu

$$z'_1 = z_2$$

$$z'_2 = -\frac{1}{x^2} z_1 + x$$

veya

$$\begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ x \end{Bmatrix}$$

sınır şartları da aşağıdaki formu alacaktır.

$$z_1(1) + z_2(1) = 0$$

$$z_1(2) = 0$$

Bu tip n inci mertebeden denklemler yöntem gereği tanımlanan (n+1) adet sınır şartı ve probleme ait gerçek sınır şartları göz önüne alınarak ayrı ayrı çözüldükten sonra, genel çözüm bu çözümlere bağlı olarak ifade edilmektedir. Sonuçların hassasiyeti seçilen sayısal yöntemle bağlıdır. Burada dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi ile çözümlenmeler yapılmaktadır. Yöntem hakkında daha detaylı teorik bilgi [13-15] referanslarından temin edilebilir.

### SAYISAL SONUÇLAR

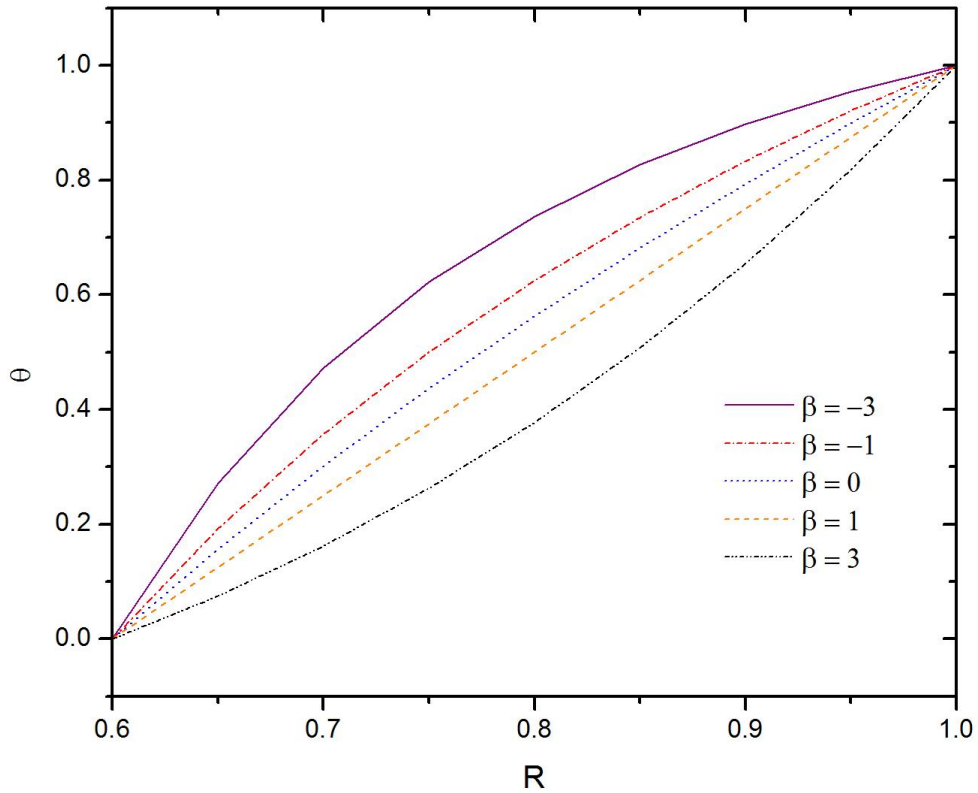
İnhomojenlik parametresi olan  $\beta$ 'nin sıcaklık dağılımındaki rolünü belirlemek için TFY  $\beta$ 'nin 0, 1 ve 3 değerleri için uygulanmıştır. Her bir durum için program çalıştırılmış ve basit kuvvet fonksiyonuna bağlı olarak boyutsuz sıcaklık değerleri elde edilmiştir. Çizelge 1, bu dağılımın analitik ve sayısal sonuçlarının karşılaştırmasını vermektedir. Sonuçlar virgülden (veya noktadan) sonra 6 hane olacak şekilde gösterilmiştir. Boyutsuz yarıçap olan  $R$  0,6'dan 1'e kadar 0,05 artışlarla değişmektedir.

Çizelge 1'de  $\beta$ 'nin negatif değerlerine ayrıca yer verilmemiştir. Dikkate alınan hane sayısında hata miktarının çok düşük olduğu gözlenmiş bu sebeple yüzde bağıl hataları hesaplanmamıştır.

Çizelge 1. Farklı  $\beta$  değerleri için sonuçların karşılaştırılması

$R$	$\beta = 0$		$\beta = 1$		$\beta = 3$	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
0.60	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.65	0.156693	0.156693	0.125000	0.125000	0.074777	0.074777
0.70	0.301768	0.301768	0.250000	0.250000	0.161990	0.161990
0.75	0.436829	0.436829	0.375000	0.375000	0.262596	0.262596
0.80	0.563171	0.563171	0.500000	0.500000	0.353751	0.377551
0.85	0.681850	0.681850	0.625000	0.625000	0.507813	0.507812
0.90	0.793745	0.793745	0.750000	0.750000	0.654337	0.654337
0.95	0.899587	0.899587	0.875000	0.875000	0.818080	0.818080
1.00	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Boyutsuz sıcaklık  $\theta$ 'nın boyutsuz yarıçap  $R$  ile değişimini elde etmek amacıyla  $\beta$  pozitif ve negatif olmak üzere farklı değerlerde (-3, -1, 0, 1 ve 3) seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 1'de verilmiştir. Bu durum değerlerin pozitiften negatife doğru nasıl değiştiğini göstermesi açısından önemlidir.



Şekil 1. Boyutsuz sıcaklığın boyutsuz yarıçap ile değişimi

## SONUÇLAR

Bu çalışmada içi boş kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş silindir malzemelerin zamana bağlı olmayan sıcaklık dağılımı incelenmiştir. Bu dağılımı idare eden ikinci dereceden doğrusal ve homojen bir diferansiyel denklem Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile sayısal olarak çözümlenmiştir. Çözümlemede dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak sonuçlar altı haneli hassasiyette gösterilmiştir. Sağlama yapmak amacıyla analitik sonuçlarla karşılaştırılmaya gidilmiştir.

Elde edilen sonuçlar ışığında; artan  $\beta$  değerleri ile boyutsuz sıcaklığın düştüğü, negatif değerlerde ise arttığı gözlemlenmiştir. Aynı zamanda  $\beta$ , birleşen malzemelerin hacim oranlarını gösteren bir parametre olması sebebiyle belli bir oranda seçilebilmektedir. Teorik olarak büyük değerlerin hesaplanabiliyor olması gerçekte, üretim sürecinde kullanılan diğer malzeme özelliklerine bağlı olacağından tasarım ve hesaplamalarda araştırmacıların dikkat etmesi gereken bir konudur. Sonuçlar  $\beta$ 'nın sıcaklık dağılımının bulunmasında yararlı bir parametre olduğunu göstermektedir. Söz konusu yöntemin silindirlerin ısı analizlerinde de başarılı bir şekilde kullanılabileceği ve yüksek hassasiyetle sonuçlara ulaşılabileceği anlaşılmıştır.

## KAYNAKLAR

- [1] R.B. Hertenaski, M.R. Eslami, *Thermal Stresses-Advanced Theory and Applications Solid Mechanics and its Applications*. Springer, 2009.
- [2] K.M. Liew, X.Q. He, T.Y. Ng, S. Kitipornchai, Finite element piezothermoelasticity analysis and the active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators, *Computational Mechanics*, 31 (2003) 350–358. doi:10.1016/S0020-7683(03)00061-1.
- [3] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M.R. Eslami, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79, (2002) 493–497. doi:10.1016/S0308-0161(02)00043-1.
- [4] J. Zhao, X. Ai, Y.Z. Li, Transient temperature fields in functionally graded materials with different shapes under convective boundary conditions. *Heat Mass Transfer*, 43 (2007) 1227-1232. doi: 10.1007/s00231-006-0135-5.
- [5] M. Jabbari, A. Bahtui, M.R. Eslami,. Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length fgm cylinders, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86 (2009) 296–306. doi:10.1016/j.ijpvp.2008.12.002.
- [6] M.N. Ozisik, *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, 1993.
- [7] H. Awaji, R. Sivakumar,. Temperature and stress distributions in a hollow cylinder of functionally graded material: the case of temperature-independent, *Material Properties, J. Am. Ceram. Soc.*, 84 5 (2001) 1059-1065. doi: 10.1111/j.1151-2916.2001.tb00790.x.
- [8] P. Nayak, and S.C. Mondal, Analysis of a functionally graded thick cylindrical vessel with radially varying properties. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, 3 2 (2011)1551-1562. ISSN : 0975-5462.
- [9] V. Yildirim, Free vibration analysis of non-cylindrical coil springs by combined use of the transfer matrix and the complementary functions methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13 (1997) 487-494. doi: 10.1002/(SICI)1099-0887(199706).
- [10] N. Tutuncu, B. TEMEL,. A novel approach to stress analysis of pressurized fgm cylinders, disks and spheres. *Composite Structures*, 91 (2009) 385-390. doi:10.1016/j.compstruct.2009.06.009.

- [11] H. Pekel, *Dynamic thermal stress analysis of FGM cylinders*, Doktora tezi, University of Çukurova, 2014.
- [12] Y. Mengi, *Lecture Notes of Numerical Analysis*. University of Çukurova, Department of Civil Engineering, 1985.
- [13] Z. Aktas, *Numerical Solutions of Two-Point Boundary Value Problems*. METU, Dept of Computer Eng, 1972.
- [14] S.M. Roberts, J.S. Shipman, Fundamental Matrix and Two-Point Boundary-Value Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, , 28 1 (1979) 77-78. doi:10.1007/BF00933601.
- [15] S.C. Chapra, R.P. Canale,. *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, 1998.