

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇEŞİTLİ ANİZOTROPİK UZAYLARDA SACHS-WOLFE ETKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Utku ZORBA

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇEŞİTLİ ANİZOTROPİK UZAYLARDA SACHS-WOLFE ETKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Utku ZORBA
(509101136)**

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR

MAYIS 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509101136 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Utku ZORBA**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ÇEŞİTLİ ANİZOTROPİK UZAYLARDA SACHS-WOLFE ETKİSİ**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. A. Savaş ARAPOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd.Doç. Dr. Mehmet Ali KARACA
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **5 Mayıs 2014**
Savunma Tarihi : **29 Mayıs 2014**

"Evreni anlamak için harcanan çaba insan yaşamını gülmece düzeyinin biraz üstüne çıkararak, trajik çekiciliğe sahip birkaç şeyden biridir."
Steven Weinberg

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca gösterdiği ilgi, cesaretlendirici desteği ve eşsiz emekleri için danışman hocam Sayın Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR 'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez dönemi boyunca sürekli yanımda olan ve desteğini esirgemeyen değerli dostum Gökhan TORUN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aileme, hayatım boyunca yanımda oldukları için minnettarım.

Mayıs 2014

Utku ZORBA
Fizikçi

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. STANDART KOZMOLOJİ	3
2.1 Planck uydusu verileri:	8
3. KOZMOLOJİK PERTÜRBASYON	9
3.1 Giriş	9
3.2 Pertürbasyonların Sınıflandırılması	9
3.3 Ayar Dönüşümleri.....	11
3.4 Skaler Pertürbasyon	14
3.5 Vektörel Pertürbasyon	16
3.6 Tensörel Pertürbasyon	17
3.7 Entropi Pertürbasyonları.....	18
4. PERTÜRBE UZAY-ZAMANDA KİNEMATİK	21
4.1 Enerji-Momentum Tensörü	21
4.2 Alan Denklemleri	22
4.3 Geodezik Denklemi ve 4-Vektörler	24
4.4 Sachs - Wolfe Etkisi	26
5. KANTOWSKI-SACHS, BIANCHI TİP-I ve TİP-III MODELLERİ	29
5.1 Alan Denklemleri	29
5.2 Kinematik	30
5.3 Anizotropi Ölçümü	34
5.4 Grafikler.....	35
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	41

KISALTMALAR

GR	: Genel Relativite
FRW	: Friedmann Robertson Walker
CMB	: Kozmik Mikrodalga Fonu
LSS	: Son Saçılma Yüzeyi
KS	: Kantowski-Sachs
BT3	: Bianchi Tip-III
BT1	: Bianchi Tip-I

SEMBOL LİSTESİ

$(-, +, +, +)$:	Metriğin İşareti
,	:	Kısmi Türev
$\eta_{\mu\nu}$:	Minkowski Metriği
;	:	Kovaryant Türev
$T_{\mu\nu}$:	Enerji-Momentum Tensörü
$R_{\mu\nu\gamma}^{\sigma}$:	Riemann Tensörü
$R_{\mu\nu}$:	Ricci Tensörü
R	:	Ricci Skaleri

ÇEŞİTLİ ANİZOTROPİK UZAYLARDA SACHS-WOLFE ETKİSİ

ÖZET

Astrofiziksel gözlemler büyük ölçeklerde evrenin homojen (her noktadaki enerji yoğunluğu aynı) , izotrop (her doğrultudaki radyasyon aynı) ve hemen hemen düz olduğunu göstermektedir. Günümüzdeki gözlemlere göre evreni en iyi tanımlayan model düz ($k=0$) Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzayıdır. FRW modeli uzaysal olarak homojen ve her doğrultuda aynı ölçekte genişleme faktörüyle zamanla genişlemekte yani izotropdur. Ancak, FRW modeli Kozmik Mikrodalga Fon (CMB) radyasyonundaki anizotropi, evrendeki madde dağılımı ve galaksilerin oluşumu gibi sorulara cevap verememektedir. Bu problemlerden CMB radyasyonundaki 10^{-5} mertebesindeki anizotropinin nedeninin enflasyondan hemen sonra Son Saçılma Yüzeyi (LSS)'nden saçılan fotonların gravitasyonel alandaki anizotropiler nedeni ile frekanslarındaki kırmızıya kayma olarak açıklanabilir. 1967'de R. Sachs ve A.M. Wolfe CMB radyasyonundaki anizotropinin evrenin ilk dönemlerine ait bilgi taşıdığı ($3 - 4 \times 10^5$ yıl), gravitasyonel orijinli olduğunu ve mertebesinin 10^{-2} den daha küçük olduğunu söylemişlerdir. Sachs-Wolfe, FRW metriğini lineer mertebede pertürbe ederek elde edilen fon uzayında fotonun jeodezik denklemini çözmüş, foton enerjisindeki değişimi hesaplamıştır. Bu etkiye Sachs-Wolfe etkisi denmektedir. Gözlemlerden günümüzde CMB dalgalanmasının 10^{-5} mertebesinde ve bu salınımına en büyük katkının ilk evrene ait bilgiler içermekte olduğunu söyleyebiliriz.

Bu tezde P. Aguiar ve P. Crawford' un [1, 2] numaralı referanslarda Bianchi –I, Bianchi III ve Kantowski Sachs gibi çeşitli anizotropik uzaylar için elde ettiği Sachs-Wolfe etkisini inceliyoruz. Çalışmamızın ikinci bölümünde standart kozmoloji, üçüncü bölümünde ise pertürbe FRW uzayı tanıtılmış ve pertürbasyonların özellikleri incelenmiştir. Pertürbe FRW metriğindeki skaler pertürbasyonlara enerji yoğunluğundaki anizotropiler neden olmaktadır, vektörel ve tensörel katkılarla karşılaştırdığımızda evrenin yapısının oluşumunda en etkili olan etken gibi gözükmektedir. Sonsuz küçük (sürekli) koordinat dönüşümleri altında fiziksel ölçülebilir büyüklüklerin değişmemesi gerekir. Metrik pertürbasyonları fiziksel ölçülebilir büyüklük olmadığı için ayar dönüşümleri altında pertürbasyon gibi davranan büyüklüklerin sıfır olduğu özel bir ayar dönüşüm seçiyoruz. Bölüm 4'de pertürbe uzay-zamanda kinematik incelenmiş, fotonun pertürbe uzayda izlediği yol yani geodezikleri bulunarak anizotropinin enerjisine katkısı hesaplanmıştır. Bianchi uzayları uzaysal olarak homojen ancak anizotrop uzaylardır. FRW uzayı ile benzerlik taşıyan, uzaysal olarak homojen ancak, radyal ve açısal yönde farklı genişleme parametresine sahip Bianchi-I, Bianchi-III ve Kantowski Sachs gibi uzaylarda Sachs-Wolfe etkisi incelenmiştir. Gözönüne alınan uzaylarda metrik pertürbe edilerek foton için geodezik denklemler elde edilerek enerji katkıları ve dolayısıyla, sıcaklı dalgalanmaları “toz” için hesaplanmıştır. Bu dalgalanmaların CMB radyasyonuna katkısı, pertürbe FRW uzayından elde edilen katkıdan ayırd edilemeyeceği gösterilmiştir. Ayrıca, genişleme parametreleri ve birbirlerine göre değişimleri nümerik olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada P. Aguiar ve P. Crawford'un [1,2] numaralı

referanslarda verilen Sachs-Wolfe etkisini pertürbe uzaylardan başlayarak detayları ile vermeye çalıştık. Sayısal hesaplar cebrik programlama dili kullanılarak yapılmıştır. Bundan sonraki amacımız [1,2] de “toz” için elde edilen büyüklükleri toz dışında diğer madde formları ve bu madde formlarının birbirleri ile özel etkileştiği durumları için elde etmektir.

SACHS-WOLFE EFFECT IN SOME ANISOTROPIC SPACES

SUMMARY

Astrophysical observations show that universe is homogeneous (energy density is the same at all points), isotropic (radiation coming from all directions are the same) and almost flat on large scale. The best candidate metric defining the universe is Friedmann Robertson Walker (FRW) which is homogeneous spatially and isotropic, expands with the same speed in each space direction,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

with the equations of the motion that the matter content satisfies called Friedmann equations

$$\begin{aligned} \frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} &= 8\pi G\rho + \Lambda \\ k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} &= -8\pi Gpa^2 + \Lambda a^2 \\ \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} &= -3H(\rho + p) \quad \rightarrow \quad H = \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Besides the quite well definition of the universe by FRW there still exists some questions to be answered such as anisotropy in the Cosmic Microwave Background radiation on scales greater than 100Mpc, seeds needed for galaxy formation and matter content today. One of these question can be answered by inhomogeneous initial energy densities in the early epoch. The small amount of the energy densities will carry their imprints on CMB radiation. In 1967, R. Sachs and A.M. Wolfe calculated the temperature anisotropy in the Cosmic Microwave Background (CMB) radiation as order of 10^{-2} on the large scale ($> 100Mpc$) and showed that its origin is gravitational. They considered perturbed FRW metric and calculated photons' geodesics from Last Scattering Surface (LSS). Since the matter density i.e., gravitational potential changes point to point, due to anisotropy, there will be gravitationally redshifted or blueshifted photons coming from LSS ($3 - 4 \times 10^5$ years before) to the observer (today). According to the today's observations, order of the anisotropy in the CMB spectrum is less than 10^{-5} on $> 100Mpc$ and the dominant contribution to the anisotropy comes from gravitationally redshifted photons called "Sachs-Wolfe effect". In this thesis we review Sachs-Wolfe effect for some anisotropic cosmological models Bianchi Type-I, Bianchi Type-III and Kantowski Sachs given by [1,2]. We start with general introductory information about standard cosmology in chapter 2 and give metric, energy and entropy perturbations for FRW space metric

$$ds^2 = a^2(\eta)\{- (1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + (\bar{g}_{ij} - 2D\delta_{ij} + 2E_{ij})dx^i dx^j\}$$

Here, A, B, ψ, E are scalar functions due to anisotropic energy perturbations which makes the most important contribution to the formation of the structure. F_j, S_i vector valued contributions are related to the rotation of the matter content and can be neglected when compared to scalar ones. The tensoral perturbations E_{ij}^T do not contribute to the calculations at the linear order and out of scope of thesis context.. Scalar, vectorial and tensorial quantities have different transformation rules under general coordinate transformations. We transform anisotropic quantities by coordinate transformations first and classify the anisotropies with respect to their transformation rules. The gauge transformations are special type of coordinate transformations such that coordinates are infinitesimally distorted (smoothly mapped). We know that physical observables are measurable then, they are gauge independent. But metric perturbations and energy densities are gauge dependent. For example, under certain type of transformations a homogeneous energy distribution become homogeneous. Therefore, we need to fix gauge and work with gauge invariant quantities in perturbation theory . If we perform gauge transformation to scalar perturbations and choose special gauge conformal Newtonian gauge the perturbed metric becomes

$$ds^2 = a(\eta)^2[-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (\bar{g}_{ij} - 2\Psi\delta_{ij})dx^i dx^j]$$

The geodesics of photons are obtained in this pertubed metric in chapter 4. Perturbations or changes in graviational field causes energy shift in the first order. Therefore we observe CMB anisotropy due to metric anisotropy. In chapter 5, we consider some cosmological models, having similar physical properties with FRW, BI, BIII, KS spaces which are homogeneous but anisotropic spaces. They are spatially homogeneous but have different expansion ratios in radial and angular coordinates.

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= -dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\phi^2) \\ f(\theta) &= \sin \theta \quad \text{Kantowski - Sachs} \\ f(\theta) &= \sinh \theta \quad \text{Bianchi Tip III} \\ f(\theta) &= \theta \quad \text{Bianchi Tip I} \end{aligned}$$

In this section we review the references [1] and [2]. We obtain field equations for non-zero k values and arbitrary matter distributions

$$\begin{aligned} 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{k}{b^2} &= 8\pi G\rho + \Lambda \\ \frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{k}{b^2} &= -8\pi Gp + \Lambda \\ \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} &= -8\pi Gp + \Lambda \end{aligned}$$

and the continuity equation

$$\dot{\rho} = -(H_a + 2H_b)(\rho + p)$$

After solving geodesic equation for photon in the perturbed universe

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$$

where $g_{\mu\nu}$ represents unperturbed BI, BIII, KS and $h_{\mu\nu}$ represents linear perturbation, we obtain photon energy equation for the perturbed universe and, Show that temperature change related to anisotropy can be obtained in these spaces

$$\frac{\delta T_r}{T_r} = \frac{\delta T_e}{T_e} - \frac{1}{2} h_{00}|_e^r - \vec{P} \cdot \vec{V}|_e^r - \frac{1}{2} \int_e^r g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda.$$

Finally, if we choose

$$h_{00} = 2\Psi \quad h_{ii} = 2\Phi$$

then use Newtonian gauge

$$\Psi = \Phi$$

We find that contributions to CMB radiation from anisotropy becomes

$$\frac{\delta T_r}{T_r} = \frac{1}{3} \Psi_e + 2 \int_e^r \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\lambda$$

Finally we obtain radial and angular expansion rates and compare their changes by using numerical methods and plot their graphs. Since the field equations non-linear and do not allow us to integrate them for different matter species (separately or mixed) analytically. In the future, we would like to generalize and find for Sachs-Wolfe effect for different matter species and their mixture.

1. GİRİŞ

Genel Görelilik Teorisi (GR), matematiksel zarıflığından daha çok sistemin fiziksel yapısını daha doğru yansıtmışından kaynaklı ayakta kalabilmektedir. Einstein kendi alan denklemlerinin güneş sistemi dışında evren hakkında da ciddi şeyler söyleyeceğini hemen farketmiş, bulduğu çözümlerde evrenin statik değil dinamik bir karaktere sahip olduğunu farketmiş, ancak buna inanmadığı için kozmolojik sabit ekleyerek bu statik yapıyı koruyabileceğini düşünmüştür. Ancak, Edwin Hubble 'ın 1929'da gözlemler sonucu elde ettiği evrenin genişlediği olgusu, Einstein'ın kozmolojik sabit terimini geri çekmesine neden olmuştur. Ne varki günümüzde kozmolojik sabitin evrenin madde içeriğini oluşturan bir alana denk geldiği düşünülmekte ve çok önemli bir yer tutmaktadır.

FRW metriği geniş ölçekte evrenin izotropik ve homojen oluşundan kaynaklı evreni iyi bir yaklaşıklıkla temsil eden bir model olarak kullanılmaktadır. Ancak bu model evrenin içeriğini açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Enflasyon ve kozmolojik pertürbasyon teorisi ile bu yapı oluşumu, evrenin geniş ölçekte izotropik ve homojen oluşu, açıklanabilmektedir. Enflasyon teorisi, evrenin büyük patlamayı takip eden 10^{-33} ile 10^{-32} saniye aralığında ışık hızından çok daha hızlı bir şekilde genişlediğini iddia eder ve standart modelin evrenin günümüzde homojenlik, izotropluk ve ufuk problemlerine bir çözüm getirmektedir [3]. Başlangıçta aşırı yoğun ve homojen olmayan madde dağılımına sahip bir evren modelinden evrenin FRW metriğine evrimi enflasyon teorisi ile açıklanabilmektedir. Bu teoriye göre başlangıçta homojen ve anizotrop bir uzay FRW uzayına evrimleşebilir [4] [5].

Bianchi tipi uzaylar kozmolojide homojen fakat anizotropik modellerin sınıflarıdır. Einstein alan denklemlerinin boşluk ya da ideal akışkanlar için formları oldukça basit olmalarına karşın, anizotropik madde dağılımı için alan denklemleri non-lineer formda olur. Literatürde anizotropik ve homojen Bianchi modelleri üzerine anizotropik enerji kaynakları kullanılarak çeşitli modeller geliştirilmiş, Bianchi modellerinin enflasyon döneminden geçerek bugün evrenin homojen ve izotrop yapısına evrimleşebileceği çeşitli modellerde ele alınmıştır [5], [4]. Bianchi modelleri geometrinin genelleştirilmesine

olanak sağlarken çeşitli anizotropik enerji kaynaklarının da kullanılmasını olanaklı kılmıştır. Literatürde FRW metriğine birinci mertebeden pertürbasyonlar ekleyerek elde edilen anizotropik uzaylar CMB radyasyonunda 10^{-5} mertebesinde sıcaklık dalgalanmalarını açıklayacak şekilde çalışılmaktadır.

P. Aguiar ve P. Crawford anizotropik BI, BIII ve KS uzayları göz önüne alarak evrenin başlangıçta bu uzaylarla temsil edilip edilmeyeceğini incelemişlerdir. Evrenin başlangıçta radyal ve açısal yönde farklı genişlemeye sahip olması günümüzde ölçülebilen parametreler üzerinde ayırtebilecek bir etki yaratıp yaratmayacağını, CMB anizotropisindeki farklılıkları karşılaştırmaktadırlar. BI, BIII, KS uzaylarında lineer mertebeden pertürbasyonları göz önüne alarak toz ($p = 0$) için CMB de ölçülen dalgalanmalarda bir farklılık olmadığı gösterilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde lineer metrik pertürbasyonları, dördüncü bölümde pertürbe uzaya ait kinematik verilmiş, beşinci bölümde ise P. Crawford ve P. Aguiar'ın referans [1], [2] deki çalışmaları ayrıntıları ile incelenmiştir.

İlerideki çalışmalarımızda yukarıdaki çalışmaların bir özetini vererek ek olarak çeşitli ω değerleri ve kozmolojik sabitin varlığında bu modellerin davranışını inceleyeceğiz.

2. STANDART KOZMOLOJİ

Evreni bir bütün olarak anlamak için elimizde bulunan araç, bugüne kadar gerçekleştirilen testlerden başarı ile çıkan ve uzay-zamanın davranışını madde-enerji içeriği ile birlikte tanımlayan Genel Görelilik teorisidir (GR). Ancak, bu teorinin en basit çözümlerinden biri olan Schwarzschild çözümü bile belirli simetriler ve kısıtlamalar ile çözülebilmiştir. Simetriler sadece denklemleri rahatlıkla çözmeye yarayan birer araç değil, aynı zamanda simetrilerin altında gizli olan, fiziğin son yüzyılına damgasını vuran korunum yasaları ve çeşitli teorilerin ortaya çıkış mekanizmalarıdır. Bu simetrilerin sonucu olarak uzay-zamanın geometrisi üzerinde yapılan çeşitli dönüşüm, öteleme ve ayar seçimleri (gauge) oldukça sıklıkla kullanılan araçlardır. Evreni anlamaya başlarken ve evreni tasvir edecek matematiksel modelleri yazarken simetrilerin ve ayar seçimlerinin ne kadar önemli olduğunu görüyoruz [6].

Evrenimiz yaklaşık olarak $13.798 \pm 0.037 \times 10^9$ yıl yaşında ve Güneş sistemi, samanyolu galaksisi ve diğer galaksilere bakıldığında, yerel olarak inhomojen ve anizotropik olmasına rağmen, geniş ölçekte baktığımızda ($100Mpc$, $1Mpc \simeq 3,2 \cdot 10^6$ ışık yılı, bir ışık yılı ise yaklaşık olarak $3,08 \cdot 10^{16}$ m olmak üzere) homojen ve izotropiktir. Evrenin geniş ölçekte homojen ve izotropik olduğu varsayımı çeşitli deneysel gözlemlerle büyük bir yaklaşıklıkla uyumludur (CMB gözlemleri, Planck, WMAP vb.) $T_0 = 2.7255K$, $\delta T/T_0 < 10^{-5}$ dir. Evrenin geniş ölçekte homojen ve izotropik olduğu varsayımına **Kozmolojik İlke** denmektedir: Belirli bir zamanda evren, uzayın her yerinde aynı görünmektedir ve uzayın her doğrultusu ise birbirine eşittir.

GR teorisinde "zamanın bir anı" kesin bir tanımlamaya ihtiyaç duyar. Evrensel olarak zamanın bir anını tanımlamak için uzay-zamanı, dilimler halinde (slicing) birbiri ile kesişmeyen uzaysal hiperyüzeylerin bir bütünü olarak ele alırız. Bu hiper yüzeyler ise belirli bir "t" zaman parametresine göre ifade edilmektedir. Böylece belirli bir evrensel an, "t" anındaki uzaysal hiper yüzeyler olarak ifade edilmektedir. Bu tanımla birlikte kozmik akışkan ile birlikte hareket eden eş hareketli gözlemcileri tanımlayalım. Bu gözlemciler kozmik akışkan ile birlikte hareket halinde olduklarından CMB'de her hangi bir dipol ölçemeyeceklerdir. Eğer kozmik akışkana nazaran bir hızları bulunmuş olsaydı CMB'de bir frekans kayması ölçeceklerdi. Weyl postülasına göre bu gözlemcilerin zamansal dünya

çizgisi (time-like world line) birbiri ile ancak teklik noktalarında kesişen ve uzay-zamanı tasvir eden manifold üzerinde birer demet (congruence) oluşturmakta ve bunlar ise uzaysal hiperyüzeyleri kesmektedir. Bu dilimleri kesen demetler (dünya çizgileri, world line) iplik demetleri şeklindedir (threading). Bu gözlemcilerin 4-hız vektörleri böylelikle uzaysal hiperyüzeylere dik olmaktadır. Sonuç olarak her $t = \text{sabit}$ hiperyüzeyi eş hareketli gözlemcilerin dünya çizgisine dik olur ve yay elemanı [7],

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Ancak en genel hali ile bu metrik uzay-zamanın homojen ve izotropik özelliğini taşıyamamaktadır. Evrenin homojen olması varsayımına göre metriğin uzaysal kısmı zamana bağlı bir parametreye bağlı olmasını gerektirmektedir. Evrenin anizotropik olması ise uzaklıkların her an aynı orana sahip olmasını gerektirmektedir. Böylece metrik,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.2)$$

burada $a(t)$ zamana bağlı ölçek faktörü (scale factor) ve h_{ij} ise (x^1, x^2, x^3) koordinatlarına bağlı bir fonksiyondur.

Sabit eğrilikli uzaylar maksimum simetrilere sahip olan uzaylardır ve bu uzaylarda eğrilik tensörü bu sabitle orantılı olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad K : \text{sabit} \quad (2.3)$$

buradan Ricci tensörü elde edilirse,

$$R_{jk} = g^{il}R_{ijkl} = Kg^{il}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = -2Kg_{jk} \quad (2.4)$$

ve buradan Ricci skaleri

$$R = R^k_k = -6K \quad (2.5)$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi uzayın eğriliği belirli bir sabite eşittir.

Şimdi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2, \quad a : \text{const.} \quad (2.6)$$

olacak şekilde 4-boyutlu uzaya gömülü bir yüzey ele alalım. Yay elemanı bu uzay-zamana ait hiperyüzeyde

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. Küresel koordinatlarda (2.7) yay elemanı

$$dl^2 = \frac{a^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. $\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{|a^2|}}$ ve $k = \frac{a^2}{|a^2|}$ şeklinde koordinat dönüşümleri yaparsak, metrik tensörü

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

olarak yazılabilir. Burada $k = 1, 0, -1$, sırasıyla açık, düz ve kapalı uzayları belirtmektedir [8]. Sabit eğrilikli, homojen ve izotropik evreni tasvir eden metrik FRW metriği olarak gözönüne alınabilir ve en genel haliyle aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (2.10)$$

Metrik tensörün bileşenleri ise;

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, & g_{11} &= \frac{a^2}{1-kr^2} \\ g_{22} &= a^2 r^2, & g_{33} &= a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde dir.

FRW uzayına ait sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (2.12)$$

denklemini simetrik metrik bağlantı aracılığı ile bulunabilir:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, & \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ricci tensörü tanımını kullanarak

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \quad (2.14)$$

Ricci tensörünün bileşenleri hesaplandığında sıfırdan farklı bileşenleri

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \quad (2.15)$$

$$R_{11} = \frac{2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - kr^2} \quad (2.16)$$

$$R_{22} = (2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})r^2 \quad (2.17)$$

$$R_{33} = (2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})r^2 \sin^2 \theta \quad (2.18)$$

bulunur. Ricci skaleri ise

$$R^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu} \quad (2.19)$$

$$R = R^\mu_\mu = \frac{6(k + \dot{a}^2 + a\ddot{a})}{a^2} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir. Einstein tensörünü kozmolojik sabitle birlikte yazarsak,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

ve Einstein tensörünün bileşenleri (2.10) uzayı için:

$$G_{00} = 3\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} + \Lambda a^2 \quad (2.22)$$

$$G_{11} = \frac{(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a})}{kr^2 - 1} + \Lambda a^2$$

$$G_{22} = -r^2(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) + \Lambda a^2$$

$$G_{33} = -r^2 \sin^2 \theta (k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) + \Lambda a^2$$

bulunur. İdeal bir akışkan için Einstein alan denklemleri ise,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} = 8\pi G ((\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}) \quad (2.23)$$

şeklinde yazılır. Burada $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörünün bileşenleri, ρ enerji yoğunluğu, p basınç ve u^μ akışkanın 4-hızını temsil etmektedir.

$$T_{00} = \rho \quad (2.24)$$

$$T_{ij} = p g_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.25)$$

(2.22) Einstein tensörünün bileşenleri alan denkleminde yerine koyduğumuzda,

$$\frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G \rho + \Lambda \quad (2.26)$$

$$k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = -8\pi G p a^2 + \Lambda a^2 \quad (2.27)$$

elde edilir.

GR genel kovaryant bir teoridir ve $G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ olduğundan GR’de enerji-momentum tensörü de kovaryant olarak korunan bir büyüklüktür.

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = T_{\nu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.28)$$

(2.24) ve (2.25) denklemlerinden enerji-momuntum tensörü (1,1) tensör formunda

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (2.29)$$

gibi yazılabilir. (2.10) metriği homojen ve izotropik olduğu için metrik tensörün sadece diagonal terimleri sıfırdan farklıdır. (2.28) korunum denkleminde $\nu = 0$ yazarsak

$$T_{0;\mu}^{\mu} = T_{0,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_0^{\alpha} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0 \quad (2.30)$$

elde ederiz. (2.13) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki süreklilik denklemi elde edilir

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) \quad \rightarrow \quad H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.31)$$

Burada H **Hubble parametresi** olarak adlandırılmaktadır. Bu denklem (2.26),(2.27) denklemleri ile birlikte **Friedmann denklemleri** olarak adlandırılmaktadır.

Eğer

$$p = \omega\rho, \quad \omega : \text{parametre} \quad (2.32)$$

seçilir ve (2.31) durum denklemi yeniden düzenlenirse

$$\dot{\rho} = -3H\rho(1 + \omega) \quad (2.33)$$

elde ederiz. Buradan da enerji yoğunluğu ile ölçek faktörü arasında sürekli kullanacağımız bir bağıntı çıkar

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.34)$$

Örneğin madde-baskın (matter-dominated, $p = 0$) evren modeli için $\omega = 0$ dir ve (2.32) tekrar çözülürse veya (2.34)’den

$$\rho \propto a^{-3} \quad (2.35)$$

bulunur. Aslında enerji yoğunluğunun a^{-3} orantılı olması denklem çözülmeden de tahmin edilebilirdi. Çünkü evrenin hacmi a^3 şeklinde artar ancak bu hacim içerisinde kalan maddenin aynı kaldığını düşünürsek, enerji-momentumun korunumundan enerji

yoğunluğu a^{-3} şeklinde azalmalıdır. Diğer taraftan, eğer evreni ışıyım-baskın (radiation-dominated) olarak varsayarsak, $\omega = 1/3$, bu durumda enerji yoğunluğu

$$\rho \propto a^{-4} \quad (2.36)$$

şeklinde değişir. Evren genişledikçe madde miktarının sabit oluşundan yoğunluk a^{-3} şeklinde azalırken, ışıyımın kıızıla kayması (red shift) nedeniyle enerjisinde a^{-1} ile orantılı artı bir azalma meydana gelir.

Son olarak karanlık madde (dark matter) için $\omega = -1$ seçilir ve (2.32) denklemini tekrar çözülrse veya (2.34)den

$$\rho = \text{sabit} \quad (2.37)$$

olacak şekilde bir sonuç çıkar. Evrenin günümüzde $H = 70 \text{ km/s/Mpc}$ hızıyla genişlemesinin nedeni olarak gösterilen ve evrenin yoğunluğunun yaklaşık $\sim \%30$ 'unu oluşturan karanlık madde için değişik adaylar önerilebilir (kütleli nötrinolar, WIMP, exotic matters...). Ancak karanlık madde için ω 'nın yaklaşık olarak -1 'e yakın değeri süpernova gözlemleri ile çok yüksek bir uyumluluk göstermektedir [9].

2.1 Planck uydusu verileri:

Evrenin yaşı	:13.798 milyar yıl.
Evrenin çapı	:98 milyar ışıkyılı.
Hubble Parametresi	:67.80 (km/s)/Mpc.
Karanlık Enerji Oranı	:0.6825
Madde oranı	:0.049
Karanlık madde oranı	:0.268

(kaynak [10])

3. KOZMOLOJİK PERTÜRBASYON

3.1 Giriş

FRW metriği homojen ve izotropik yapısından dolayı büyük ölçeklerde (> 100 Mpc) evrenin yapısını iyi tasvir etmektedir. Ancak daha küçük ölçekteki bazı düzensizlikler, örneğin galaksilerin ve yıldızların oluşumuna neden olan dalgalanmaları (fluctuations) açıklamakta yetersizdir. Kozmolojik pertürbasyon teorisi işte bu noktada evrenin içeriğinin evrimi ve oluşumuna bir açıklama getirmek üzere geliştirilmiştir. Kozmolojik pertürbasyon teorisinin ana fikri evreni metriğe (burada FRW metriği) lineer (doğrusal) mertebede küçük pertürbasyon ekleyerek incelemektir [11].

Evrenin izotropik ve homojen olduğu duruma arka plan metriği diyeceğiz. FRW metriğini konformal olarak yazdığımızda

$$d\bar{s}^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j), \quad (3.1)$$

konformal zaman η ile eşhareketli (comoving) zaman koordinatı t arasında

$$a(\eta)d\eta = dt \quad (3.2)$$

bağıntısı vardır.

Metriğe birinci mertebeden bir pertürbasyon alanı ($h_{\mu\nu}$) eklersek, uzunluk elemanı aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (3.3)$$

burada $\bar{g}_{\mu\nu}$ (3.1) FRW arka plan metriğidir.

3.2 Pertürbasyonların Sınıflandırılması

(3.1) in her doğrultusunda lineer perturbe edilmiş genel formunu aşağıdaki şekilde yazalım

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + (\bar{g}_{ij} - 2D\delta_{ij} + 2E_{ij})dx^i dx^j\}. \quad (3.4)$$

Aşağıda göstereceğimiz gibi bu uzunluk elemanı skaler, vektör ve tensör kısımlarına ayrıştırıldığında hesapların basitleşmesine neden olacaktır. Skaler bileşen skaler bir fonksiyondan, vektör bileşen bir vektörden elde edildiği için bu adlandırmalar yapılmıştır. Tensör bileşen ise bu iki sınıflandırma dışında elde edilmektedir.

Pertürbasyonların skaler, vektörel ve tensörel bileşenlere ayrıştırılması, matematiksel olarak herhangi 3 boyutlu bir vektörün diverjansı sıfır (divergence-free) ve rotasyonel sıfır (non-rotational) kısımlara ayrıştırılabilmesi ilkesine dayanmaktadır: Helmholtz teoremi. Bu teoreme göre, 3-boyutlu bir V vektörü

$$V = V^{\parallel} + V^{\perp}, \quad \nabla \times V^{\parallel} = \nabla \cdot V^{\perp} = 0 \quad (3.5)$$

V^{\perp} diverjansı sıfır ve V^{\parallel} rotasyoneli sıfır kısımlara ayrıştırılabilir. Rotasyoneli sıfır olan kısım 3-boyutta bir skaler fonksiyonun diverjansı şeklinde yazılabileceğinden herhangi bir vektör alanı 3-boyutta

$$V = \nabla \phi + V^{\perp} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Skaler bileşen boyuna (longitudinal), sıfır diverjans bileşen ise enine ya da vektör bileşen olarak adlandırılabilir. Vektör bileşen diverjansı sıfır bir vektör olduğu için bize onu bir vektör potansiyelin rotasyoneli olarak yazabilme imkanı sağlar. Aynı mekanizmayı izi sıfır ve simetrik bir E_{ij} tensörü için de uygulayabiliriz. E_{ij} aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir:

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T, \quad (3.7)$$

burada bileşenler

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_l E_{lk}^S = 0, \quad \partial_i \partial_j E_{ij}^V = 0, \quad \partial_i E_{ij}^T = 0. \quad (3.8)$$

bağıntılarını sağlamaktadır ve sırasıyla rotasyoneli sıfır, diverjansı sıfır ve izi sıfır olacak şekilde ayrıştırılabilir. (3.8) bağıntılarını kullanılarak,

$$\begin{aligned} E_{ij}^S &= (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E, \\ E_{ij}^V &= -\frac{1}{2} (\partial_i F_j + \partial_j F_i), \quad \partial_i F_i = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir, burada E bir skaler ve F_i ise bir vektördür. E_{ij}^T ifadesi ise ne vektörel ne de skaler parçalara ayrıştırılamaz, bu nedenle tensör kısım olarak kalacaktır.

Yukarıdaki ayrıştırmaları kullanarak pertürbasyonu skaler, vektörel ve tensörel terimlerine göre yazabiliriz. Metriğin zaman-zaman bileşenindeki pertürbasyon skaler bir

fonksiyon şeklinde yazıldığı için ona dokunmamıza gerek yoktur. Zaman-uzay bileşeni pertürbasyon terimi ise bir B_i şeklinde bir vektör olarak yazılır, bu nedenle yukarıdaki vektörler için yazdığımız ayrıştırma yöntemini yeniden uygularsak,

$$B_i = -\partial_i B + S_i \implies \delta_{ij} S_{i,j} = 0 \quad (3.10)$$

elde ederiz. Burada B bir skaler fonksiyon ve S_i ise diverjansı sıfır olan bir vektördür. Skaler metrik pertürbasyonunu yazalım

$$\delta g_{\mu\nu}^s = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -2A & B_{,i} \\ B_{,i} & 2(-\psi\delta_{ij} + E_{,ij}) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

burada $\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E$ şeklinde tanımlanan bir skalerdir. Vektörel pertürbasyonlar

$$\delta g_{\mu\nu}^v = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & -(F_{i,j} + F_{j,i}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ve tensör pertürbasyonlar

$$\delta g_{\mu\nu}^t = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij}^T \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde gösterilir. Pertürbasyon terimlerini skaler, vektörel ve tensörel şekilde ayrıştırmamızın matematiksel kolaylıkları yanısıra fiziksel nedenleri de bulunmaktadır. Matematiksel olarak Einstein Alan Denklemleri skaler, vektör ve tensör kısımları olacak şekilde ayrıştırılabilir ve her kısım birinci dereceden yaklaşım kullanıldığında bağımsız bir şekilde evrimleşir. Örneğin skaler kısmın evrimleşmesi ile ilgileniyorsak vektörel ve tensörel kısımları sıfıra eşitleyebiliriz.

Fiziksel olarak, skaler kısım evrenin enerjisinin dinamiğine ve kütle çekim etkisine, vektörel kısım vortisiteye, tensörel kısım ise gravitasyonel dalgalara neden olmaktadır [12].

3.3 Ayar Dönüşümleri

Kozmolojik pertürbasyon teorisinde FRW metriği ile fiziksel olayların gerçekleştiği pertürbe edilmiş uzay-zaman üzerinde çalışmaktayız. Bulmaya çalıştığımız şey pertürbe edilmiş büyüklüklerle 4-vektörlerin bu iki uzay-zamandaki farklılıklarıdır. İki uzay zamandaki nicelikler arasındaki ilişkileri bulabilmek için, öncelikle bir manifolddaki noktaların diğer manifolddaki noktalar ile ilişkilerini tanımlamalıyız. Bu şekilde yapılan arka-plan uzay-zamanı ile fiziksel uzay-zaman arasındaki ilişkiyi tanımlamak "ayar seçimi" olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel olarak, ayar seçimi (choice of gauge) iki

uzay-zamanı temsil eden manifoldlar arasında bir difeomorfizma tanımlamak demektir. *Difeomorfizma* tersi alınabilen, diferansiyellenebilir bir manifoldu diğerine gönderen, kendisi ve tersinin düzgün (smooth) olduğu bir fonksiyondur. Difeomorfizma tanımı ile birlikte iki manifold arasında niceliklerin nasıl ilişik olduğunu bulalım.

\mathbf{M} pertürbe edilmemiş arka plan uzay-zamanı, \mathbf{N} ise pertürbe edilmiş uzay-zaman ve $\mathbf{D} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ ile \mathbf{M} den \mathbf{N} ye tanımlanan bir difeomorfizm olsun. \bar{x}^μ arka plan koordinatlarını, $\mathbf{D}(\bar{x}^\mu) = \mathbf{x}^\mu$, \mathbf{N} de tanımlı bir koordinat takımını, benzer şekilde $\tilde{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{x}}^\mu) = \tilde{\mathbf{x}}^\mu$, \mathbf{N} de tanımlı diğer bir koordinat takımını göstereyim. İki koordinat takımı arasında aşağıdaki bağıntı ile ifade edilen sonsuz küçük bir öteleme göz önüne alalım

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (3.14)$$

\tilde{x}^μ koordinatlarına göre türev alırsak

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} \left\{ \delta_\nu^\lambda - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \right\} \quad (3.16)$$

bağıntılarını elde etmiş oluruz. (3.16) denkleminde lineer mertebeden terimleri göz önüne alırsak

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \quad (3.17)$$

buluruz. $g_{\mu\nu}(x)$ koordinat dönüşümleri altında kovaryant rankı iki olan bir tensör olduğundan genel koordinat dönüşümleri altında

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = g_{\lambda\sigma}(x) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (3.18)$$

şeklinde dönüşür. Şimdi $g_{\mu\nu}(\tilde{x})$ tensörünü $g_{\mu\nu}(x)$ etrafında seriye açarsak tensörün bu tensör etrafında yaklaşık olarak dalgalanmasını hesaplayabiliriz:

$$g_{\mu\nu}(\tilde{x}) = g_{\mu\nu}(x + \xi) \simeq g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \xi^\lambda \quad (3.19)$$

Şimdi (3.18) e (3.17) de elde ettiğimiz yaklaşımı uygularsak

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= g_{\lambda\sigma}(x) \left(\delta_\mu^\lambda - \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \right) \\ &\simeq g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\lambda}(x) \frac{\partial \xi^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \xi^\lambda(x)}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde ederiz. (3.19) da bulunan bağıntı kullanılarak, bulduğumuz ifadeyi (3.20) de yerine yazarsak

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = g_{\mu\nu}(\tilde{x}) - g_{\mu\lambda}(x) \frac{\partial \xi^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \xi^\lambda \quad (3.21)$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifadede ξ ye göre birinci mertebeden yüksek terimler ihmal edilmiştir.

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (3.22)$$

$$g_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta g_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

olarak tanımlanır ve (3.21) yeniden düzenlenirse;

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda} \xi_{,\nu}^\lambda - g_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^\rho - g_{\mu\nu,\sigma} \xi^\sigma \quad (3.24)$$

elde edilir. Metrik tensörün ξ vektör doğrultusundaki Lie türevi tanımını göz önüne alalım

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\lambda} \xi_{,\nu}^\lambda + \bar{g}_{\rho\nu} \xi_{,\mu}^\rho + \bar{g}_{\mu\nu,\sigma} \xi^\sigma \quad (3.25)$$

(3.24), (3.25) ile karşılaştırılırsa

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \delta g_{\mu\nu}(x) - \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) \quad (3.26)$$

bulunur.

Metrik pertürbasyonları fiziksel olarak ölçülebilir olmadığından ayar seçimine bağlı olarak birbirinden farklı bağ koşulları sağlarlar. Biliyoruz ki fiziksel büyüklükler ayar değişmez olmalıdır. Elektromanyetik teoriden bildiğimiz gibi vektör potansiyel ve elektrostatik potansiyel (A ve ϕ) ayar seçimine bağlı olmalarına rağmen elektrik ve manyetik alanlar ayar seçiminden bağımsızdır. Ancak bir başka yaklaşım ayar değişmez büyüklüklerle çalışmaktır. Kozmolojik pertürbasyonda Lipshitz' in öncü çalışmaları olmasına rağmen ayar değişmez kozmolojik pertürbasyon teorisini tam bir teori olarak orataya koyan Bardeen [13] olmuştur.

Peki ayar değişmez nicelikler nasıl bulunur? Yukarıda gördüğümüz gibi sonsuz küçük yer değiştirmeler ayar dönüşümlerine bağlı olduklarından sonsuz küçük yerdeğiştirme nedeniyle değişmez (invariant) kalan nicelikleri bulmalıyız. Lie türevini tanımlarken, koordinat dönüşümü nedeniyle bir tensörün değişiminin, bir vektör alanı doğrultusunda Lie türevi kadar olduğunu elde etmiştik. Eğer Lie türevinin sıfır olduğu bir dönüşüm

bulursak bu büyüklük (burada tensör) o doğrultu boyunca değişmez kalacaktır. **Stewart lemması:** *Bir genel tensörel nicelik ancak ve ancak her sonsuz küçük vektör alanı boyunca Lie türevi sıfır ise değişmez kalır* [14].

3.4 Skaler Pertürbasyon

Şimdi sonsuz küçük bir konum vektörü alalım

$$\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i). \quad (3.27)$$

ξ^i bir üç-vektör olduğundan bölüm 2 de bahsettiğimiz yöntemlerle skaler ve vektörel kısımlarına ayrıştırabiliriz

$$\xi_i = \xi_{tr}^i - \delta^{ij} \partial_j \xi = \vec{\xi}_{tr} - \nabla \xi \Rightarrow \vec{\xi}_{tr,i} = 0 \quad (3.28)$$

Metrikte sadece skaler perturbasyon terimleri ile ilgileneceğimizden $\vec{\xi}_{tr} = 0$ alabiliriz. Böylece aşağıdaki gibi koordinat dönüşümleri yazabiliriz;

$$\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, x), \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i - \delta^{ij} \partial_j \xi(x, \eta). \quad (3.29)$$

Bu koordinat dönüşümleri altında skaler perturbasyonlar arasındaki dönüşüm denklemleri (3.25),(3.26) denklemleri yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur

$$\tilde{A} = A - \dot{\xi}^0 - \mathcal{H} \xi^0 \quad (3.30)$$

$$\tilde{B} = B \dot{\xi} + \xi^0 \quad (3.31)$$

$$\tilde{E} = E + \xi \quad (3.32)$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \mathcal{H} \xi^0. \quad (3.33)$$

$\mathcal{H} = a/(da/d\eta)$ Konformal Hubble sabiti ve \dot{E} konformal zamana göre türev olarak tanımlanır. Yukarıdaki denklemlerde $\xi = E$ ve $\xi^0 = -B + \dot{E}$ seçersek, böylece

$$B^N = E^N = 0 \quad (3.34)$$

$$A^N = \Phi \quad (3.35)$$

$$\Psi^N = \Psi \quad (3.36)$$

eşitlikleri ile ifade edilen ayar dönüşümlerine Konformal Newtonyen Ayar denir [15]. Böylece (3.4) metrik ifadesi

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (\bar{g}_{ij} - 2\Psi\delta_{ij})dx^i dx^j] \quad (3.37)$$

şeklini alır. Alan denklemlerini elde etmek için, (2.12) denkleminde Christoffel sembolleri bulunur ve birinci dereceden büyük terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \mathcal{H} + \dot{\Phi} & \Gamma_{0k}^0 &= \Phi_{,k} & \Gamma_{ij}^0 &= \mathcal{H} \delta_{ij} - [2\mathcal{H}(\Psi + \Phi) + \dot{\Psi}] \delta_{ij} \\ \Gamma_{00}^i &= \Phi_{,i} & \Gamma_{0j}^i &= \mathcal{H} \delta_j^i - \dot{\Psi} \delta_j^i & \Gamma_{kl}^i &= -(\Psi_{,l} \delta_k^i + \Psi_{,k} \delta_l^i) + \Psi_{,i} \delta_{kl}\end{aligned}\quad (3.38)$$

ifadeleri elde edilir. Pertürbe edilmiş uzaylar için Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (3.39)$$

şeklinde düşünülürse burada $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ pertürbasyon ve FRW ($k=0$) için arka plan Christoffel sembolleridir. Konformal FRW için Christoffel sembolleri yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \mathcal{H}, & \bar{\Gamma}_{0k}^0 &= 0, & \bar{\Gamma}_{ij}^0 &= \mathcal{H} \delta_{ij} \\ \bar{\Gamma}_{00}^i &= 0, & \bar{\Gamma}_{0j}^i &= \mathcal{H} \delta_j^i, & \bar{\Gamma}_{kl}^i &= 0.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Denklem (2.14) ten Ricci tensörü elde edilirse

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\dot{\mathcal{H}} + 3\ddot{\Psi} + \nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}(\dot{\Psi} + \dot{\Phi}) \\ R_{0i} &= 2(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\ R_{ij} &= (\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2)\delta_{ij} \\ &+ [-\ddot{\Psi} + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\dot{\Phi} + 5\dot{\Psi}) - (2\dot{\mathcal{H}} + 4\mathcal{H}^2)(\Psi + \Phi)]\delta_{ij} \\ &+ (\Psi - \Phi)_{,ij}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

R_{ν}^{μ} ifadesini elde etmek için

$$R_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu} = (\bar{g}^{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\alpha})(\bar{R}_{\alpha\nu} + \delta R_{\alpha\nu}) = \bar{R}_{\nu}^{\mu} + \delta g^{\mu\alpha} \bar{R}_{\alpha\nu} + \bar{g}^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\nu} \quad (3.42)$$

eşitliğin kullanılırsa

$$\begin{aligned}R_0^0 &= 3a^{-2} \dot{\mathcal{H}} + a^{-2}[-3\ddot{\Psi} - \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\dot{\Psi} + \dot{\Phi}) - 6\dot{\mathcal{H}}\Phi] \\ R_i^0 &= -2a^{-2}(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\ R_0^i &= 2a^{-2}(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\ R_i^j &= a^{-2}(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i + a^{-2}[-\ddot{\Psi} + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\dot{\Phi} + 5\dot{\Psi}) - (2\dot{\mathcal{H}} + 4\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{ij} \\ &+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}\end{aligned}\quad (3.43)$$

elde edilir. Ricci skaler eğriliği ise

$$\begin{aligned}R &= R_0^0 + R_i^i \\ &= 6a^{-2}(\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2) \\ &+ a^{-2}[-6\ddot{\Psi} + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}(\dot{\Phi} + 3\dot{\Psi}) - 12(\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\Phi].\end{aligned}\quad (3.44)$$

Einstein tensörünü yazarsak

$$G_0^0 = -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2 + 6\mathcal{H}\dot{\Psi} + 6\mathcal{H}^2\Phi] \quad (3.45)$$

$$G_i^0 = R_i^0 = -G_0^i$$

$$\begin{aligned} G_j^i &= a^{-2}(-2\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\delta_j^i \\ &+ a^{-2}[2\ddot{\Psi} + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\dot{\Phi} + 4\dot{\Psi}) + (4\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_j^i \\ &+ a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij} \end{aligned}$$

buluruz. Alan denklemleri çözülürken arka plan terimleri birbiri ile pertürbasyon terimleri birbiri ile eşleştirilir yani,

$$\bar{G}_\nu^\mu = 8\pi G\bar{T}_\nu^\mu, \quad \delta G_\nu^\mu = 8\pi G\delta T_\nu^\mu \quad (3.46)$$

3.5 Vektörel Pertürbasyon

Vektörel pertürbasyon için konformal dönüşümlerden faydalanacağız bu nedenle metriği

$$d\bar{s}^2 = a^2 ds^2 \quad (3.47)$$

şeklinde yazdığımızda alan denklemleri basit bir şekilde çözülür. Böylece (3.4) metriği

$$ds^2 = -d\eta^2 - 2S_i dx^i d\eta + (\bar{g}_{ij} - (F_{i,j} + F_{j,i}))dx^i dx^j \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Alan denklemlerini hesaplamada kullanacağımız ifadeleri hesaplayalım

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = -S_i, \quad g_{ij} = \delta_{ij} - F_{(i,j)} \quad (3.49)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}(S_{(i,j)} - \dot{F}_{(i,j)}), \quad \Gamma_{00}^i = -\dot{S}_i$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2}(-\dot{F}_{(i,j)} + S_{[i,j]}), \quad \Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2}(-\dot{F}_{(i,j),k} + \dot{F}_{(i,k),j} - \dot{F}_{(i,k),i})$$

burada

$$S_{(i,j)} = S_{i,j} + S_{j,i}, \quad S_{[i,j]} = S_{i,j} - S_{j,i} \quad (3.50)$$

kısaltmaları kullanılmıştır. Böylece Ricci tensörünün bileşenleri

$$R_{0i} = -\frac{1}{2}(\dot{F}_{(j,i),j} + S_{[j,i],j}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 V_i \quad (3.51)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{S}_{(i,j)} - \ddot{F}_{(i,j)}) = \frac{1}{2}\dot{V}_{(i,j)} \quad (3.52)$$

olarak yazılabilir. (3.48) metriğine ait alan denklemleri bulunduktan sonra, her $\tilde{g}_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu} = a^2 g_{\mu\nu}$ biçiminde konformal dönüşümde geçerli olan aşağıdaki denklemler kullanılarak alan denklemleri bulunur [12],

$$\tilde{R}_\nu^\mu = F^{-1}R_\nu^\mu - F^{-2}F_{;\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}F^{-2}F_{;\alpha}^{\mu}\delta_\nu^\alpha + \frac{3}{2}F^{-3}F_{;\nu}F^{\mu} \quad (3.53)$$

$$\tilde{R} = F^{-1}R - 3F^{-2}F_{;\alpha}^{\alpha} + \frac{3}{2}F^{-3}F_{;\alpha}F^{\alpha} \quad (3.54)$$

$$\tilde{R}_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i\tilde{R} = 8\pi G\tilde{T}_j^i. \quad (3.55)$$

Örneğin yukarıdaki denklemler kullanılarak $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$ arka plan metriğini düz FRW metriği seçersek ve $i \neq j$ ise

$$\dot{V}(i, j) + 2\mathcal{H}V(i, j) = 16\pi G a^2 \delta\tilde{T}_j^i(v) \quad (3.56)$$

burada,

$$V_i = S_i - \dot{F}_i \quad (3.57)$$

olarak tanımlanır. Diğer bir denklem ise,

$$\nabla^2 V_i = -16\pi G a^2 \delta\tilde{T}_i^0(v) \quad (3.58)$$

biçiminde yazılır.

3.6 Tensörel Pertürbasyon

Tensörel pertürbasyon içinde aynı şekilde konformal dönüşümlerden faydalanacağız. Bu nedenle metriği,

$$d\tilde{s}^2 = a^2 ds^2 \quad (3.59)$$

şeklinde yazdığımızda alan denklemleri basit bir şekilde çözülür. Böylece

$$ds^2 = -d\eta^2 + (\bar{g}_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada h_{ij} (3.7) ile verilen E_{ij}^T eşittir. Vektörel pertürbasyonda kullanılan yöntem uygulanırsa, alan denklemlerini bulmak için gerekli ifadeler, $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Böylece Ricci tensörü bileşenleri

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij,kk} \quad (3.62)$$

$$(3.63)$$

ve (3.53)-(3.55) denklemleri kullanılarak aşağıdaki alan denklemleri

$$\ddot{h}_{ij} + 2\mathcal{H}\dot{h}_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 16\pi G a^2 \delta T_j^i \quad (3.64)$$

bulunur.

3.7 Entropi Pertürbasyonları

Birden fazla madde bileşenine sahip ortamlarda adiabatik ve entropi pertürbasyonları oluşabilir [12]. Örnek olarak ortamın baryon-radyasyon plazması ve soğuk karanlık madde karışımından ibaret olduğunu varsayalım. Hidrodinamikte basınç, enerji ve parçacık başına entropinin fonksiyonu $p = p(\rho, S)$ dur. Bu durumda artık basınç dalgalanmaları yoğunluk dalgalanmaları ile birlikte entropi dalgalanmalarına da bağlı olacaktır. Entropi pertürbasyonları için öncelikle basınç dalgalanmalarını tanımlarsak

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho + \tau \delta S, \quad (3.65)$$

burada $c_s^2 \equiv (\frac{\partial p}{\partial \rho})_S$ ortamdaki ses hızının karesi ve $\tau \equiv (\frac{\partial p}{\partial S})_\rho$ olarak tanımlanır. Soğuk karanlık maddenin basınca ciddi bir katkısı olmadığından varsayarsak, basıncın radyasyondan kaynaklı olduğunu söyleyebiliriz, böylece

$$\delta p = \delta p_\gamma = \frac{1}{3} \delta \rho_\gamma \quad (3.66)$$

$$\delta \rho = \delta \rho_\gamma + \delta \rho_b \quad (3.67)$$

basınç ve enerji dalgalanmaları elde edilir. Burada radyasyon enerji yoğunluğu $\rho_\gamma \propto T_\gamma^4$ (T, sıcaklık), $\rho_b \propto n_b$ (n_b baryon sayı yoğunluğu) olduğundan $S \propto \rho_\gamma^{3/4} / \rho_b$ dan

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{3}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho} - \frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \quad (3.68)$$

elde edilir. Buradan (3.67-3.69) denklemleri kullanılarak

$$\delta p = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}\right)^{-1} \delta \rho + \frac{1}{3} \rho_b \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}\right)^{-1} \frac{\delta S}{S} \quad (3.69)$$

ve

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}\right)^{-1}, \quad \tau = \frac{c_s^2 \rho_b}{S} \quad (3.70)$$

eşitlikleri yazılır. Adyabatik pertürbasyonlar için $\delta S = 0$ olduğundan

$$\frac{3}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho} - \frac{\delta \rho_b}{\rho_b} = 0 \quad (3.71)$$

ve entropi pertürbasyonları için

$$\frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \simeq -2 \frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \quad (3.72)$$

bağıntıları yazılır [12].

4. PERTÜRBE UZAY-ZAMANDA KİNEMATİK

4.1 Enerji-Momentum Tensörü

Bölüm 2 ve 3 de uzay-zaman pertürbasyonlarının koordinat ve ayar dönüşümleri altında değişimlerini inceleyerek alan denklemlerini hesapladık. Ayrıca enerji-momentum tensöründe basınç ve enerji yoğunluğundaki pertürbasyonların etkisini inceledik. Bu bölümde FRW uzayında pertürbasyon gözönüne alarak fotonun jeodeziğini hesaplayacağız daha sonra sıcaklık dalgalanmalarına seçtiğimiz alanların (ϕ, ψ) katkısını hesaplayacağız. Arka plan uzay-zamanı için enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibi yazılır

$$\bar{T}_\mu^\nu = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu \bar{u}_\nu + \bar{p}\delta_\nu^\mu. \quad (4.1)$$

Uzay-zaman homojen ve izotropik olduğunda $\bar{u}^\mu = (\bar{u}^0, 0, 0, 0)$ olur. $\bar{u}^\mu \bar{u}_\mu = -1$ olduğu için

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}(1, 0, 0, 0) \quad \bar{u}_\mu = a(-1, 0, 0, 0) \quad (4.2)$$

olarak yazılır. Pertürbe uzay-zamanda enerji-momentum tensörü ise,

$$T_\mu^\nu = \bar{T}_\mu^\nu + \delta T_\mu^\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta_\nu^\mu \quad (4.3)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \quad (4.4)$$

$$p = \bar{p} + \delta p \quad (4.5)$$

$$u^i = \bar{u}^i + \delta u^i = \delta u^i \equiv \frac{1}{a}v_i \quad (4.6)$$

olarak yazılır. $u^\mu u_\mu = -1$ kısıtlamasından kaynaklı pertürbe uzay-zamanda hız 4-vektörleri aşağıdaki şekilde yazılır,

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1 - A, v_i) \quad ve \quad u_\mu = a(-1 - A, v_i - B_i). \quad (4.7)$$

Böylece enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibi olur,

$$\begin{pmatrix} -\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta_j^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i & \delta T_j^i \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\delta T_j^i \equiv \bar{p} \left(\frac{\delta p}{\bar{p}} + \Pi_{kj} \delta^{ik} \right) \quad (4.9)$$

burada Π_{ij} izi sıfır anti-simetrik bir tensördür. Bu tensör maddenin anizotropluğu ile ilgilidir. Pertürbasyonların sınıflandırılmasında gördüğümüz gibi burada da skaler, vektörel ve tensörel ayrıştırmalara gidersek,

$$v_i = v_i^S + v_i^V, \quad v_i^S = -v_{,i}, \quad \nabla \cdot \vec{v}^V = 0 \quad (4.10)$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^S + \Pi_{ij}^V + \Pi_{ij}^T \quad (4.11)$$

$$\Pi_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \Pi \quad (4.12)$$

$$\Pi_{ij}^V = \frac{1}{2} (\Pi_{i,j} + \Pi_{j,i}) \quad (4.13)$$

$$\delta^{ik} \Pi_{ij,k}^T = 0 \quad (4.14)$$

görüldüğü gibi mükemmel akışkan için $\Pi_{ij} = 0$ olur.

$$T_{\nu;\mu}^\mu = 0, \quad (4.15)$$

Tensörün $\nu = 0$ bileşeni (2.28) de yerine konarak hesaplandığında Friedmann denklemleri elde edilir ve birinci dereceden pertürbasyon terimlerini sadece tutarsak 0. dereceden arka plan denklemi yazılırsa,

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) \quad (4.16)$$

ve birinci dereceden pertürbasyon terimleri ise, örneğin Newtonyan ayar kullanıyorsa

$$(\delta \rho^N)' = -3\mathcal{H}(\delta \rho^N + \delta p^N) + (\bar{\rho} + \bar{p})(\nabla^2 v^N + 3\Psi') \quad (4.17)$$

(2.28) denklemi $\nu = i$ bileşenleri için hesaplandığında

$$(\bar{\rho} + \bar{p})(v^N)' = -(\bar{\rho} + \bar{p})' v^N - (\bar{\rho} + \bar{p})(4\mathcal{H} v^N) + (\bar{\rho} + \bar{p})\phi + \delta p^N + \frac{2}{3}\bar{p}\nabla^2 \Pi \quad (4.18)$$

elde edilir. Burada v^N (4.10) de tanımlanan hız potansiyelidir, $\vec{v}^N = -\nabla v^N$.

4.2 Alan Denklemleri

Einstein alan denklemlerinin geometri ve madde pertürbasyonları birinci dereceden yaklaşımı kabul ettiğimiz için (2.23) alan deklemlerine

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G \delta T_{\nu}^{\mu} \quad (4.19)$$

şeklinde pertürbasyon eklenir. (3.46) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\dot{\Psi} + 6\mathcal{H}^2\Phi] &= -8\pi G\delta\bar{\rho} \\
-2a^{-2}(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i} &= -8\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})(v_{,i} + B_{,i}) \\
2a^{-2}(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i} &= 8\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})v_{,i} \\
a^{-2}[2\ddot{\Psi} + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\dot{\Phi} + 4\dot{\Psi}) \\
+(4\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_j^i + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij} &= 8\pi G(\delta\rho\delta_j^i + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi))
\end{aligned} \tag{4.20}$$

yazılır.

Örnek vermek ve daha sonraki hesaplarda kullanmak üzere konformal Newtonyan ayar seçimini göz önüne alırsak, $B_{,i} = 0$ olur. Ayrıca mükemmel akışkan yaklaşımı için

$\Psi = \Phi$, $\Pi = 0$ ve madde-baskın model $p = 0$ seçilirse (4.22) alan denklemleri

$$(\dot{\Phi} + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi a^2 G(\bar{\rho} + \bar{p})v = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 v, \tag{4.21}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi a^2 G\bar{\rho}[\delta + 3\mathcal{H}v] = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2[\delta + 3\mathcal{H}v] \tag{4.22}$$

$$\ddot{\Phi} + 3\mathcal{H}\dot{\Phi} = 0 \tag{4.23}$$

bulunur ve konformal zamana göre Friedmann denklemleri aşağıdaki hali alırlar

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \tag{4.24}$$

$$\dot{\mathcal{H}} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}a^2$$

$$2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 = 0$$

$$a \propto \eta^2 \implies \mathcal{H} = \frac{2}{\eta}$$

$$\frac{3}{2}\mathcal{H}^2 = \frac{6}{\eta^2}$$

Buradan, düz uzay için Φ nin zaman içinde sabit olduğu varsayılırsa (4.23)-(4.25) denklemleri

$$v = \frac{2\Phi}{3\mathcal{H}} \tag{4.25}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2[\delta + 3\mathcal{H}v]$$

$$\delta = -2\Phi + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$$

elde edilir. Buradan Fourier uzayına geçilirse,

$$\delta = -\left[2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathcal{H}}\right)^2\right]\Phi_{\mathbf{k}} \tag{4.26}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $\mathbf{k} \gg \mathcal{H}$ (subhorizon scales) ise,

$$\delta = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi_{\mathbf{k}} \propto \eta^2 \propto a \propto t^{2/3} \quad (4.27)$$

ve eğer $\mathbf{k} \ll \mathcal{H}$ (superhorizon scales) ise,

$$\delta = -2\Phi_{\mathbf{k}} \quad (4.28)$$

olur. Yani yoğunluk pertürbasyonları sabit kalmaktadır.

4.3 Geodezik Denklemi ve 4-Vektörler

Metriğe birinci dereceden bir pertürbasyon terimi eklersek, uzunluk elemanı şu şekilde yazılır

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \quad (4.29)$$

Zamansal bir gözlemcini 4-hızı $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, λ gözlemcinin öz-zamanı ve FRW arka-plan uzay-zamanında 4-hız vektörü $\bar{V}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $V^\mu V_\mu = -1$ olacak şekilde tanımlanır. Böylece pertürbe uzay-zamanda zamansal bir gözlemcinin 4-hızı V^μ hesaplanmak istenirse

$$g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -1, \quad (4.30)$$

$$V^0 = 1 - \frac{1}{2}h_{00} \quad (4.31)$$

bağıntısını sağlayacaktır. Pertürbe uzay-zamanın 4-hız vektörü yazmak istenirse

$$V^\mu = \bar{V}^\mu + \delta V^\mu = \left(1 - \frac{1}{2}h_{00}, V^i\right) \quad (4.32)$$

elde edilir. Burada $V^i \ll 1$ olacak şekilde birinci mertebeden pertürbasyon katsayıları içersin. Arka plan uzay-zamanında foton için geodezik denklemini yazar ve düzenlersek

$$\frac{d\bar{P}^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{2}\bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta \bar{g}_{\alpha\beta,\mu} \quad (4.33)$$

bağıntısı elde edilir. Burada \bar{P} fotonun arka planda 4-momentumudur. Pertürbe edilmiş uzay zaman için geodezik denklemi yazılırsa

$$P_\mu = \frac{1}{2} \int d\lambda P^\alpha P^\beta g_{\alpha\beta,\mu} + \bar{P}_\mu \quad (4.34)$$

burada $P_\mu = \bar{P}_\mu + P_{\mu(1)}$ pertürbe uzay-zamanda 4-momentum vektörü, $P_{\mu(1)}$ 4-momentuma birinci mertebeden pertürbasyon katkısı, \bar{P}_μ ise arka plan momentum

4-vektörünü ifade etmektedir. Gözlemci tarafından ölçülen fotonun enerjisi ise fotonun 4-momuntum ve gözlemcinin 4-hız vektörlerinin çarpımı ile orantılıdır:

$$\begin{aligned}
 E &\propto P_\mu V^\mu \\
 E &\propto \left(\frac{1}{2} \int d\lambda P^\alpha P^\beta g_{\alpha\beta,\mu} + \bar{P}_\mu\right) \left(1 - \frac{1}{2} h_{00}, V^i\right) \\
 E &\propto \frac{1}{2} \int g_{\alpha\beta,0} P^\alpha P^\beta d\lambda - \frac{1}{4} h_{00} \int g_{\alpha\beta,0} P^\alpha P^\beta d\lambda \\
 &+ \bar{P}_0 - \frac{1}{2} h_{00} \bar{P}_0 + \bar{P}_i V^i + \frac{1}{2} V^i \int g_{\alpha\beta,i} P^\alpha P^\beta d\lambda
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.4 Sachs - Wolfe Etkisi

Primordial yoğunluk dalgalanmaları geniş açısal ölçekte CMB radyasyonundaki dalgalanmalar gibi çeşitli fiziksel olayların oluşmasında en önemli etkenlerden biridir. Bu etkiyi uzayın farklı yönlerinde CMB radyasyonunun sıcaklığında küçük dalgalanmalar olarak görebilmekteyiz. R.K. Sachs ve A.M. Wolfe tarafından 1967 yılında ortaya atılan ve Sachs-Wolfe etkisi olarak adlandırılan etki tamamen gravitasyonel orijindir. LSS'den günümüzdeki bir gözlemciye ulaşan fotonların frekanslarındaki farklılıkların nedeni gravitasyonel potansiyeldeki değişimlerden kaynaklanmaktadır. Evrenin genişlemesinden dolayı metrik pertürbasyonlarında zamansal bir genişleme olacağından bu etkinin de katkıları göz önüne alınmalıdır. CMB fotonları yaklaşık büyük patlamanın 4×10^5 yıl ardından günümüze kadar serbestçe hareket etmektedir. Bu serbest fotonların bize ulaşmasından kaynaklı CMB deki sıcaklık dalgalanmalarını ölçtüğümüzde LSS deki fiziksel koşullar hakkında bir harita elde ederiz. Gözlenen sıcaklık dalgalanmaları, LSS de meydana gelen yoğunluk dalgalanmalarının sonucu olarak gerçekleşmektedir. Esasında bu yoğunluk dalgalanmalarının kökeni, evrenin erken dönemlerinde meydana gelen enflasyon çağı boyunca gerçekleşen kuantum dalgalanmalarının bir sonucudur. Gerçekleşen sıcaklık dalgalarını iki kısma ayırabiliriz. İlki ve bizim için burada önemli olanı ilksel (primary) dalgalanmalardır ki bunlar CMB ışınımı için evrenin daha saydam olmadığı döneme ait olanlardır. İkincisi ise LSS den bize gelen fotonların frekansındaki kaymalardır. İlksel etkilerin en önemlileri ise Sachs-Wolfe etkisi, Doppler etkisi ve adyabatik etki olmak üzere üç çeşittir. Burada sadece Sachs-Wolfe etkisini inceleyeceğiz. LSS de meydana gelen kütleçekim potansiyelinin değişiminin etkisinden kaynaklı Sachs-Wolfe etkisi gözlenir. Bu etki iki türdür. (i) LSS de yüksek yoğunluklu bölgeden uzaklaşan fotonlar kütleçekim potansiyelinden kaynaklı enerji kaybeder ve frekansları kızıla kayar. (ii) Kütleçekimsel zaman kaymasından kaynaklı daha yoğun bölgelere baktığımızda zamanın daha yavaş aktığını gözlemleriz. Böylece bize bu bölgeler evrenin daha genç ve sıcak olduğu bölgeleri gibi görünür. Şimdi pertürbe uzay-zamanda yol alan bir foton ele alalım. Bu fotonun geodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (4.36)$$

burada λ afin parametredir. Fotonun 4-momentumu

$$P^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (4.37)$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta = 0 \quad (4.38)$$

$P^0 = d\eta/d\lambda$ kullanılırsa (4.36) denklemi

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{P^\alpha P^\beta}{P^0} = 0 \quad (4.39)$$

şeklinde yazılır. Sadece $\mu = 0$ bileşeni ile ilgileneceğiz böylece

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \Gamma_{00}^0 P^0 + 2\Gamma_{0k}^0 P^k + \Gamma_{ij}^0 \frac{P^i P^j}{P^0} = 0 \quad (4.40)$$

(3.38) 'den Newtonian ayar için ilgili eşitlikler (4.40) 'te yerine konulursa,

$$\frac{dP^0}{d\eta} + (\mathcal{H} + \dot{\Phi})P^0 + 2\dot{\Phi}_k P^k + [\mathcal{H} - 2\mathcal{H}(\Phi + \Psi) - \dot{\Psi}] \delta_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0} = 0 \quad (4.41)$$

ifadelerini elde ederiz. P^μ 4-momuntum bileşenleri koordinat çerçevesinde yazdığımız momentum bileşenleridir. Bir gözlemci kendi orthonormal gözlem çerçevesinde foton enerjisini ve momentum bileşenlerini fotonlar kütsüz olduğu için $P^\mu P_\mu = 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \hat{P}^\mu &= \sqrt{g_{\mu\nu}} P^\nu \\ E \equiv \hat{P}^0 &= a(1 + \Phi)P^0 \quad \hat{P}^i = a(1 - \Psi)P^i. \\ E^2 &= \delta_{ij} \hat{P}^i \hat{P}^j \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak hesaplar. Ayrıca iki farklı tanım daha yaparsak

$$q \equiv aE = a^2(1 + \Phi)P^0 \Rightarrow P^0 = a^{-2}(1 - \Phi)q \quad (4.43)$$

$$q^i \equiv a\hat{P}^i = a^2(1 - \Psi)P^i \Rightarrow P^i = a^{-2}(1 - \Psi)q^i \quad (4.44)$$

burada $q^2 = \delta_{ij}q^i q^j$ olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikler uygun bir şekilde (4.46) da yerine konulup yüksek dereceden terimler ihmal edilirse,

$$(1 - \Phi) \frac{dq}{d\eta} = q \frac{d\Phi}{d\eta} - q\dot{\Phi} - 2q^k \dot{\Phi}_{,k} + q\dot{\Psi}. \quad (4.45)$$

bu ifadeyi $(1 - \Phi)q$ ya bölersek,

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{d\eta} = \frac{d\Phi}{d\eta} - \dot{\Phi} - 2 \frac{\vec{q} \cdot \nabla \Phi}{q} + \dot{\Psi}. \quad (4.46)$$

Burada fotonun geodezik boyunca toplam türevi

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{dx^k}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (4.47)$$

$$\frac{\vec{q}}{q} = \frac{(1-\Psi)P^k}{(1+\Phi)P^0} \approx \frac{P^k}{P^0} = \frac{dx^k}{d\eta} \quad (4.48)$$

böylece,

$$2\frac{\vec{q} \cdot \nabla\Phi}{q} = -2\frac{dx^k}{d\eta} \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} = -2\left(\frac{d\Phi}{d\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right), \quad (4.49)$$

böylece (4.51) denklemi,

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{d\eta} = -\frac{d\Phi}{d\eta} + \dot{\Phi} + \dot{\Psi}. \quad (4.50)$$

halinde yeniden yazılır. Enerji dalgalanmaları için ifade yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\bar{E}} = \frac{\delta q}{q} &= \int \frac{dq}{q} = -\int d\Phi + \int (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) d\eta \\ \frac{\delta E}{\bar{E}} &= -\Delta\Phi + \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) d\eta \end{aligned} \quad (4.51)$$

Arka plan uzayında (FRW) fotonun enerjini $\bar{E}a \propto$ sabit olmaktadır. Pertürbasyon göz önüne alındığında artık $q = aE \neq$ sabit olmaktadır. buarada $\Delta\Phi = \Phi|_r - \Phi|_e$ şeklinde tanımlanırken, $\Phi|_r$ ifadesi gözlemin yapıldığı bölge açısından tüm yönlerdeki fotonlar için genel bir arka plan etkisi gibi ele alınabilir. Enerji dalgalanmaları ile sıcaklık dalgalanmaları arasında,

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta E}{E}. \quad (4.52)$$

ilişkisi yazılır. Bu eşitlik ve Stefan-Boltzman yasası kullanılırsa,

$$\rho_\gamma = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4} \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma}. \quad (4.53)$$

Bu sonuçlar kullanılır ve gözlemcinin CMB ye göre hareketi ihmal edilirse,

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4} \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} + \Phi|_e + \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) d\eta \quad (4.54)$$

burada ilk iki terim Sachs - Wolfe etkisi olarak adlandırılırken, son terim Integrated Sachs - Wolfe etkisi olarak adlandırılır [11].

5. KANTOWSKI-SACHS, BIANCHI TİP-I ve TİP-III MODELLERİ

Bu bölümde FRW uzayına benzer ancak açısal ve radyal doğrultuda farklı hızlarda genişleyen anizotropik uzaylarda sıcaklık dalgalanmalarını Aguiar ve Crawford tarafından yayınlanan [1] [2] referanslı eserlere benzer olarak inceledik. Göz önüne alınan modellerin FRW den günümüzdeki fiziksel parametrelerin değerleri kullanılarak farklı özelliklere sahip olup olamayacağı incelendi.

5.1 Alan Denklemleri

Genel görelilik teorisine göre uzaysal homojen uzaylar Bianchi modelleri olarak adlandırılan belirli bir sınıf oluşturur [9]. FRW metriğine benzer bu modeller ile Kantowski-Sachs uzayı üzerinde Sachs-Wolfe etkisi Aguiar ve Crawford tarafından çalışılmıştır. Kantowski-Sachs ve Bianchi I-III metriği en genel olarak;

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\phi^2) \quad (5.1)$$

$$f(\theta) = \sin \theta \quad \text{Kantowski - Sachs} \quad (5.2)$$

$$f(\theta) = \sinh \theta \quad \text{Bianchi Tip III} \quad (5.3)$$

$$f(\theta) = \theta \quad \text{Bianchi Tip I} \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlanır. Alan denklemleri (2.22),(2.24),(2.25) ve (2.26) kullanılarak yazıldığında ;

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{k}{b^2} = 8\pi G\rho + \Lambda \quad (5.5)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{k}{b^2} = -8\pi Gp + \Lambda \quad (5.6)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} = -8\pi Gp + \Lambda \quad (5.7)$$

olarak hesaplanır. Burada $k = -\frac{f''}{f}$ ve $f' = \frac{df}{d\theta}$ 'dir. (5.6) denkleminde $p = w_i \rho_i$ şeklinde bir düzenleme yapılır ve $w_i = -1, 0, 1/3$ olmak üzere sırasıyla kozmolojik sabit, madde ve ışımayı gösterirse, (5.6) denklemi bu yeni hali ile integre edilirse,

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} = -\frac{8\pi G \sum_i w_i}{b^3} \int \rho_i b^2 db + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{b^2} + \frac{M_1}{b^3} \quad (5.8)$$

ifadesi elde edilir. Friedmann denklemi (2.31) denkleminde hesaplanırsa,

$$\dot{\rho} = -(H_a + 2H_b)(\rho + p) \quad (5.9)$$

burada $H_a = \dot{a}/a$ ve $H_b = \dot{b}/b$ ile yönlere göre Hubble parametreleri olarak tanımlanmaktadır. Farklı madde türlerine karşı gelen sırasıyla $\omega = 0, 1/3, -1$ için enerji yoğunlukları hesaplanırsa

$$\rho_m = \rho_{m_0} \left(\frac{a_0 b_0^2}{ab^2} \right), \quad \rho_r = \rho_{r_0} \left(\frac{a_0 b_0^2}{ab^2} \right)^{4/3}, \quad \rho_{dm} = \text{sabit} \quad (5.10)$$

bulunur. $\omega = -1$ değeri zamandan bağımsız sabit bir yoğunluk verdiği için bu ifadeden gelen katkılar kozmolojik sabitin içine atılacaktır. Ancak madde ($p = 0$) ve kozmolojik sabit çözümlerini incelediğimizde

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{b^2} + \frac{M_1}{b^3} \quad (5.11)$$

elde edilir. Buradan korunum denklemi

$$1 = \Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_M \quad (5.12)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{1}{3H_b^2}\Lambda, \quad \Omega_k = -\frac{k}{b^2H_b^2}, \quad \Omega_M = \frac{M_1}{b^3H_b^2} \quad (5.13)$$

olacak şekilde yazılır.

5.2 Kinematik

(5.1) metriği ve (4.28) denklemi kullanılarak arka plan ve pertürbe uzay-zamanda kinematik denklemler elde etmeye çalışacağız. Arka plan metriği konformal zaman koordinatlarında yeniden ifade edilirse

$$d\tilde{s}^2 = a^2 d\bar{s}^2 \quad (5.14)$$

$$d\bar{s}^2 = -d\eta^2 + dr^2 + \frac{b^2}{a^2}(d\theta^2 + f(\theta)^2 d\phi^2) \quad (5.15)$$

yazılır. Pertürbe uzay-zaman için (5.1) metriği

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (5.16)$$

olur. Pertürbe uzay-zamanda geodezik denklemini yazmadan önce KS,BT-I ve BT-III arka plan momentum bileşenlerini hesaplayalım. (4.35) denlemi yardımıyla

$$\frac{d\bar{P}_3}{d\lambda} = \frac{1}{2} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta \bar{g}_{\alpha\beta,3} \Rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta,3} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{P}_3}{d\lambda} = 0 \quad (5.17)$$

$$\bar{P}_3 = \text{sabit} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \bar{P}_3 = 0 \quad (5.18)$$

$\bar{P}_3 = 0$ seçelim. Diğer bileşenler hesaplanırsa,

$$\bar{P}_2 = \sqrt{\beta}, \quad \bar{P}^2 = \frac{a^2 \sqrt{\beta}}{b^2} \quad (5.19)$$

$$\bar{P}_1 = \sqrt{\alpha}, \quad \bar{P}^1 = \sqrt{\alpha} \quad (5.20)$$

elde ederiz. Foton için $\bar{P}^\mu \bar{P}_\mu = 0$ olduğundan

$$\bar{P}_0 = \sqrt{\alpha + \frac{a^2 \beta}{b^2}} = -\bar{P}^0 \quad (5.21)$$

şeklinde yazılır. Şimdi (4.37) denklemini kullanılır

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1}{2} \int g_{\alpha\beta,0} P^\alpha P^\beta d\lambda - \frac{1}{4} h_{00} \int g_{\alpha\beta,0} P^\alpha P^\beta d\lambda \\ &+ \bar{P}_{(0)} - \frac{1}{2} h_{00} \bar{P}_{(0)} + \bar{P}_i V^i + \frac{1}{2} V^i \int g_{\alpha\beta,i} P^\alpha P^\beta d\lambda \end{aligned} \quad (5.22)$$

ve birinci dereceden katkılar gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1}{2} \int g_{\alpha\beta,0} (P_{(0)}^\alpha P_{(0)}^\beta + P_{(1)}^\alpha P_{(0)}^\beta + P_{(0)}^\alpha P_{(1)}^\beta) d\lambda \\ &- \frac{1}{4} h_{00} \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} P_{(0)}^\alpha P_{(0)}^\beta d\lambda + \bar{P}_{(0)} \\ &- \frac{1}{2} h_{00} \bar{P}_{(0)} + \bar{P}_i V^i + \frac{1}{2} V^i \int \bar{g}_{\alpha\beta,i} P^\alpha P^\beta d\lambda \end{aligned} \quad (5.23)$$

bulunur. Fotonlar için momentum koşulu yerine yazılırsa (5.23)

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1}{2} \int (g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta + \bar{g}_{\alpha\beta,0} (P_{(1)}^\alpha \bar{P}^\beta + \bar{P}^\alpha P_{(1)}^\beta)) d\lambda \\ &- \frac{1}{4} h_{00} \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda + \bar{P}_0 \\ &- \frac{1}{2} h_{00} \bar{P}_0 + \bar{P}_i V^i + \frac{1}{2} V^i \int \bar{g}_{\alpha\beta,i} P^\alpha P^\beta d\lambda \end{aligned} \quad (5.24)$$

haline gelir. Burada

$$g_{00,0} = -\dot{h}_{00} \quad (5.25)$$

$$g_{11,0} = \dot{h}_{11}$$

$$g_{22,0} = 2\left(\frac{b\dot{b}}{a^2} - \frac{b^2\dot{a}}{a^3}\right) + \dot{h}_{22}$$

$$g_{33,0} = 2\left(\frac{b\dot{b}}{a^2} - \frac{b^2\dot{a}}{a^3}\right) f^2 + \dot{h}_{33}$$

$i = r$ ve $i = \phi$ için $\bar{g}_{\alpha\beta,i} = 0$ ve $\bar{P}^3 = 0$ seçildiğinden (5.24) denklemindeki son terim düşer.

Sonuç olarak (5.23)-(5.24) ifadesi

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1}{2} \int (g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta + \bar{g}_{\alpha\beta,0} (P_{(1)}^\alpha \bar{P}^\beta + \bar{P}^\alpha P_{(1)}^\beta)) d\lambda \\ &- \frac{1}{4} h_{00} \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda + \bar{P}_0 \\ &- \frac{1}{2} h_{00} \bar{P}_0 + \bar{P}_i V^i \end{aligned} \quad (5.26)$$

şeklini alır. (5.26) da 2. terimi ele alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}h_{00} \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda &= \frac{1}{4}h_{00} \int \bar{g}_{22,0}(\bar{P}^2) d\lambda \\ \frac{1}{4}h_{00} \int 2\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a}\right) (\bar{P}^2) d\lambda, \end{aligned} \quad (5.27)$$

bu ifadenin LSS den beri $a/\dot{a} \sim b/\dot{b}$ yaklaşımından kaynaklı ikinci dereceden bir terim olduğu görülür. Bu nedenle bu terim ve benzeri terimler hesaplarımızda bundan sonra ihmal edilecektir. (5.26) denklemindeki integralin içerisindeki ikinci terimi alırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} (P_{(1)}^\alpha \bar{P}^\beta + \bar{P}^\alpha P_{(1)}^\beta) d\lambda &= \int \bar{g}_{\alpha\beta,0} P_{(1)}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda \\ &= \int 2\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a}\right) \bar{P}_{(1)}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda \end{aligned} \quad (5.28)$$

olarak yazılabilir ve benzer nedenlerle ihmal edilir. Böylece

$$E \propto \frac{1}{2} \int g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda + \bar{P}_0 - \frac{1}{2}h_{00}\bar{P}_0 + \bar{P}_i V^i \quad (5.29)$$

bizim için oldukça kullanışlı olacak olan eşitlik bulunmuş olur. Fotonun başlangıç anında (emission instant) enerjisi E_e , gözlem anında (reception instant) enerjisi ise E_r olsun. Böylece bu iki an arasında enerjileri oranlarsak

$$\frac{E_e}{E_r} = \frac{\bar{P}_0 - \frac{1}{2}h_{00}\bar{P}_0|_e + (\bar{P}_i V^i)|_e}{\int_e^r g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda + \bar{P}_0 - \frac{1}{2}h_{00}\bar{P}_0|_r + (\bar{P}_i V^i)|_r} \quad (5.30)$$

ifadesi elde edilir. $\bar{P}_0 = -1$ seçildiği için ve $(1+x)^{-1} \simeq 1-x$ yaklaşımından dolayı yukarıdaki ifade,

$$\frac{E_e}{E_r} = 1 + \frac{1}{2}h_{00}|_e + (\bar{P}_i V^i)|_e + \frac{1}{2} \int_e^r g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda \quad (5.31)$$

haline gelir. Enerjiyi eşhareketli koordinatlarda yazmak için,

$$E(t) = \frac{1}{a} E \quad (5.32)$$

bağıntısı kullanılır. Böylece kıvrıma kayma miktarı ifadesi elde edilir.

$$1+z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{E(t_e)}{E(t_r)} = \frac{a_r E_e}{a_e E_r} \quad (5.33)$$

Aynı zamanda sıcaklık oranları ile ilgili ise

$$\frac{T_e}{T_r} = 1+z \quad (5.34)$$

eşitliği yazılabilir. (5.29),(5.31) ve (5.34) eşitlikleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} T_r &\simeq \frac{a_e}{a_r} T_e \left[1 - \frac{1}{2}h_{00}|_e - \vec{P} \cdot \vec{V}|_e - \frac{1}{2} \int_e^r g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda \right], \\ T_r &\simeq \frac{a_e}{a_r} T_e \left(1 + \frac{\delta T}{T} \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\frac{\delta T_r}{T_r} = \frac{\delta T_e}{T_e} - \frac{1}{2} h_{00}|_e^r - \vec{P} \cdot \vec{V}|_e^r - \frac{1}{2} \int_e^r g_{\alpha\beta,0} \bar{P}^\alpha \bar{P}^\beta d\lambda. \quad (5.36)$$

Sıcaklık pertürbasyonları metrik pertürbasyonları cinsinden yazılmış olur. Yukarıdaki ifadeye bakıldığında pertürbasyon teriminin seçilen koordinata bağlı olduğu (ayar bağımlı) açıkça görülür. Skaler pertürbasyonların etkisini görmek için en kullanışlı ayar seçimlerden biri olan skaler ayar seçilirse

$$h_{00} = 2\Psi \quad h_{ii} = 2\Phi \quad (5.37)$$

ve özel olarak Newtonian Gauge kullanılırsa

$$\Psi = \Phi \quad (5.38)$$

(5.39) sıcaklık dalgalanmaları (temperature fluctuations)

$$\frac{\delta T_r}{T_r} = \frac{\delta T_e}{T_e} - \Psi|_e^r - \vec{P} \cdot \vec{V}|_e^r + 2 \int_e^r \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\lambda \quad (5.39)$$

ile ifade edilir. Burada $\vec{P} \cdot \vec{V}|_e^r$ ihmal edilebilir. Stefan-Boltzmann yasası kullanılarak varyasyonu alınırse sıcaklık ve yoğunluk dalgalanmaları arasında

$$\rho_\gamma = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{1}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \quad (5.40)$$

bağıntısı yazılır. Toplam enerji yoğunluğu ışınım ve madde kaynaklı olduğundan ve adyabatik pertürbasyon yaklaşımı kullanılırsa (Bkz:Bölüm 3, Başlık 3.7),

$$\frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_m}{\rho_m} \quad (5.41)$$

$$\frac{\delta \rho_m}{\rho_m} \simeq -2\Psi + \mathcal{O}(k\mathcal{H}) \quad (5.42)$$

bulunur ve (4.28)deki sonuç kullanıldı.

$$\frac{\delta T_e}{T_e} \simeq -\frac{2}{3} \Psi_e \quad (5.43)$$

elde edilir. Sonuç olarak Sachs-Wolfe etkisi

$$\frac{\delta T_r}{T_r} = \frac{1}{3} \Psi_e + 2 \int_e^r \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\lambda \quad (5.44)$$

şeklinde yazılır. Günümüzde yöne bağlı Hubble genişleme parametreleri aynı olduğundan ($H_a \approx H_b$) (5.47) ile (4.56) aynı sonuçları verir. Böylece FRW metriği ile karşılaştırıldığında elde edilen Sachs-Wolfe etkisi KS,BT-I ve BT-III için hesaplanan etki ile aynıdır.

5.3 Anizotropi Ölçümü

(5.11) denklemi yeniden yazılır ve her iki taraf $y = \frac{\dot{b}^2}{b_o^2}$ ile çarpılırsa

$$\dot{y}^2 = \frac{\dot{b}^2}{b_o^2}(\Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_M) \quad (5.45)$$

elde edilir. $b_o = b(t_o)$ içinde bulunduğumuz zaman dilimini yani günümüzü temsil etmektedir.

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \frac{\Omega_{M0}H_{b0}^2}{y^3H_b^2}, & \Omega_k &= \Omega_{k0}\frac{b_0^2H_{b0}^2}{b^2H_b^2} \\ \Omega_\Lambda &= \Omega_{\Lambda0}\frac{H_{b0}^2}{H_b^2}, & \Omega_\rho &= \frac{8\pi G\rho}{H_b^2} = \frac{M_\rho}{ab^2H_b^2} \\ \Omega_{\rho0} &= \frac{M_\rho}{a_0b_o^2H_{b0}^2}, & \Omega_\rho &= \Omega_{\rho0}\frac{a_0b_0^2H_{b0}^2}{ab^2H_b^2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

eşitlikleri ve (5.11) denklemi kullanılarak Ω_k diğer elemanlar cinsinden yazılırsa (5.45) denklemi parametreleri cinsinden

$$\dot{y}^2 = H_{b0}^2[\Omega_{M0}(\frac{1}{y} - 1) + \Omega_{\Lambda0}(y^2 - 1) + 1] \quad (5.47)$$

elde edilir. (5.5), (5.11) ve (5.13) kullanılarak,

$$\Omega_\rho - \Omega_M + 2\Omega_\Lambda = 2\frac{H_a}{H_b} \quad (5.48)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade ise (5.46) tanımlar yardımıyla ve $x = \frac{\dot{a}^2}{a_o^2}$ seçildiğinde

$$\dot{x} = \frac{H_{b0}}{2y} \frac{[\Omega_{M0}(1 - \frac{x}{y}) + 2\Omega_{\Lambda0}(xy^2 - 1) + 2\frac{H_{a0}}{H_{b0}}]}{(\Omega_{M0}(\frac{1}{y} - 1) + \Omega_{\Lambda0}(y^2 - 1) + 1)^{1/2}} \quad (5.49)$$

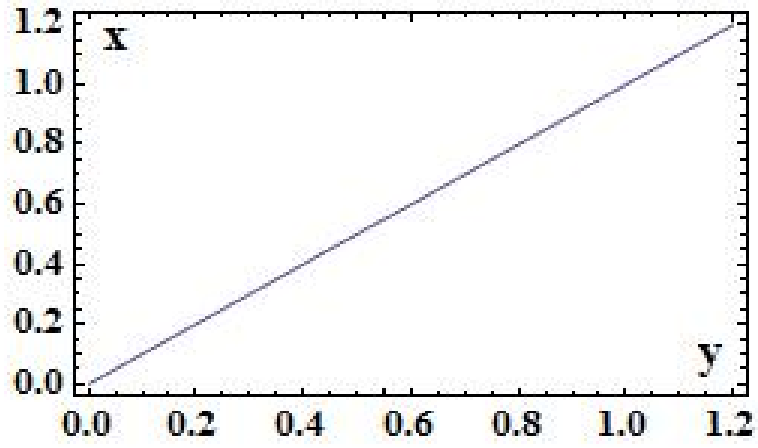
elde edilir. Sonuç olarak,

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{[\Omega_{M0}(1 - \frac{x}{y}) + 2\Omega_{\Lambda0}(xy^2 - 1) + 2\frac{H_{a0}}{H_{b0}}]}{2[\Omega_{M0}(1 - y) + \Omega_{\Lambda0}(y^3 - y) + y]} \quad (5.50)$$

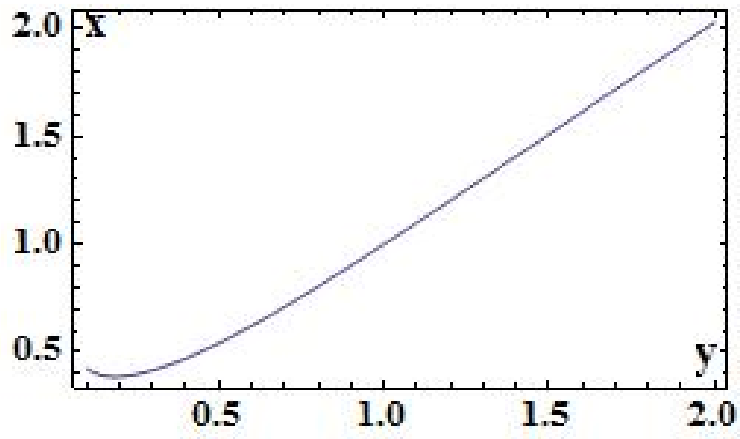
ifadesi elde edilir.

(5.47), (5.49) ve (5.50) denklemlerinin sayısal yöntemler ile çözüm grafikleri aşağıda verilmektedir. BI, BIII ve KS modelleri çeşitli Ω_M , Ω_Λ değerleri için incelenerek genişleme parametreleri \dot{a}/a ve \dot{b}/b değerleri karşılaştırılmıştır.

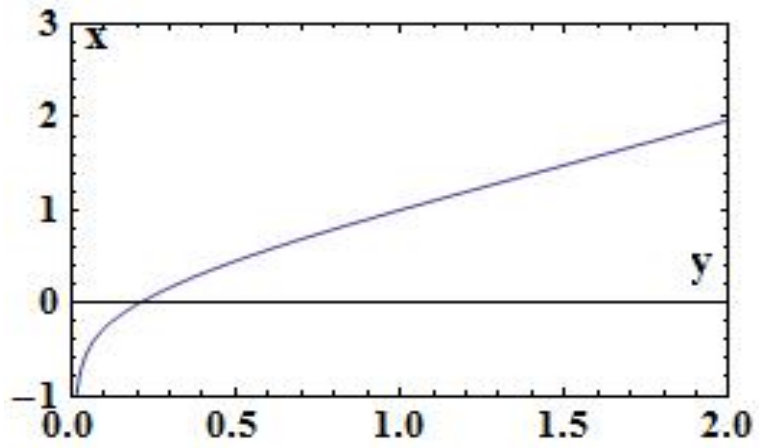
5.4 Grafikler



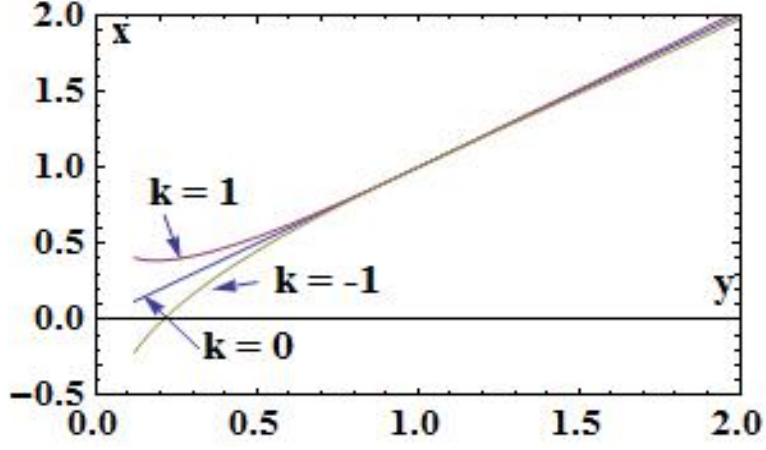
Şekil 5.1: $k = 0$, BT-I. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} = 1$.



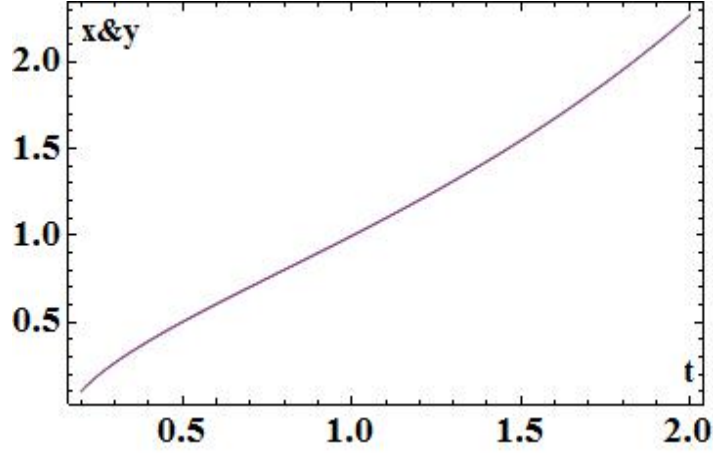
Şekil 5.2: $k = 1$, K-S. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} > 1$.



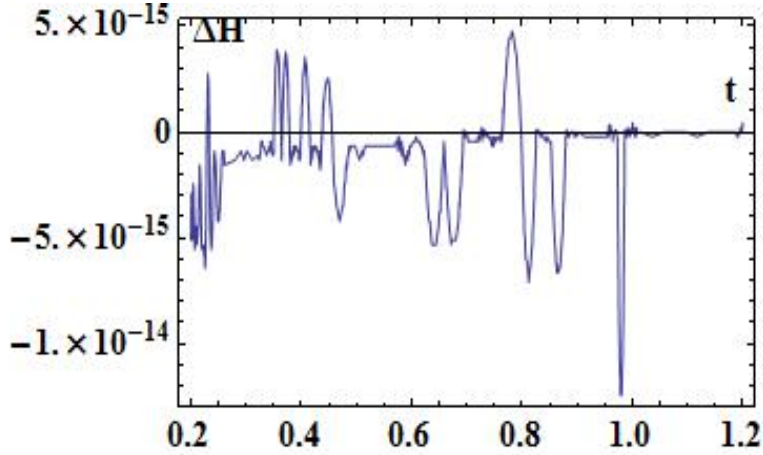
Şekil 5.3: $k = -1$, BT-III. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} < 1$.



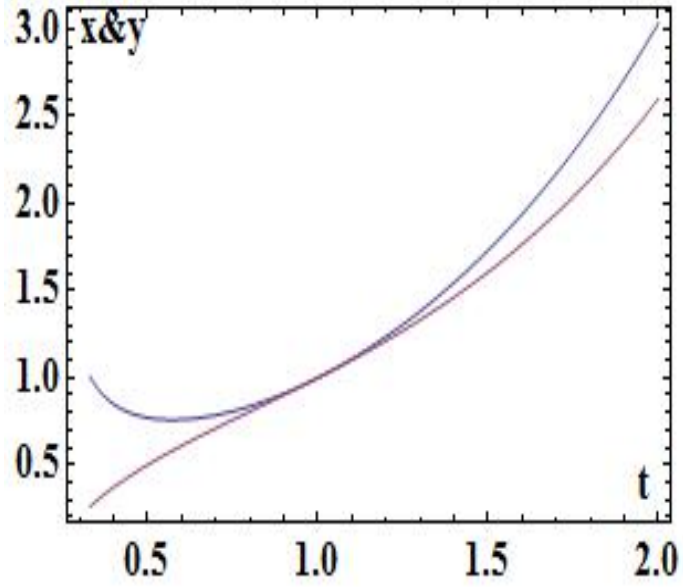
Şekil 5.4: Tüm k değerleri için grafik.



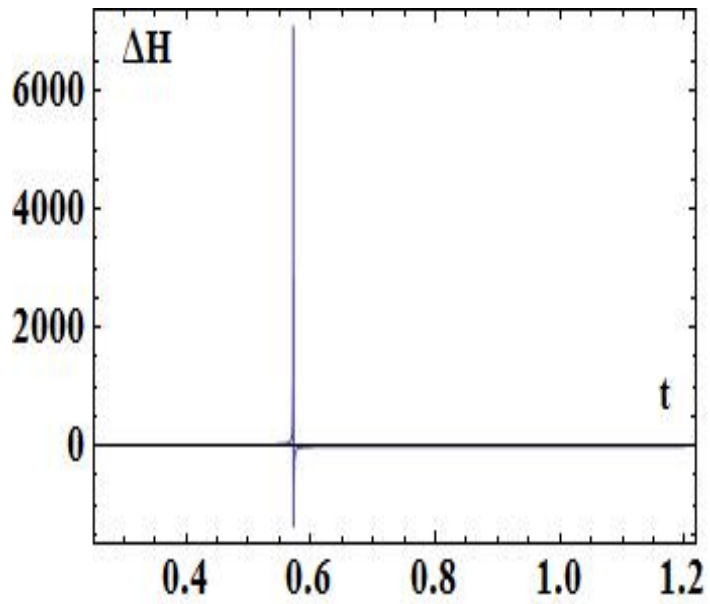
Şekil 5.5: $k = 0$, BT-I. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} = 1$.



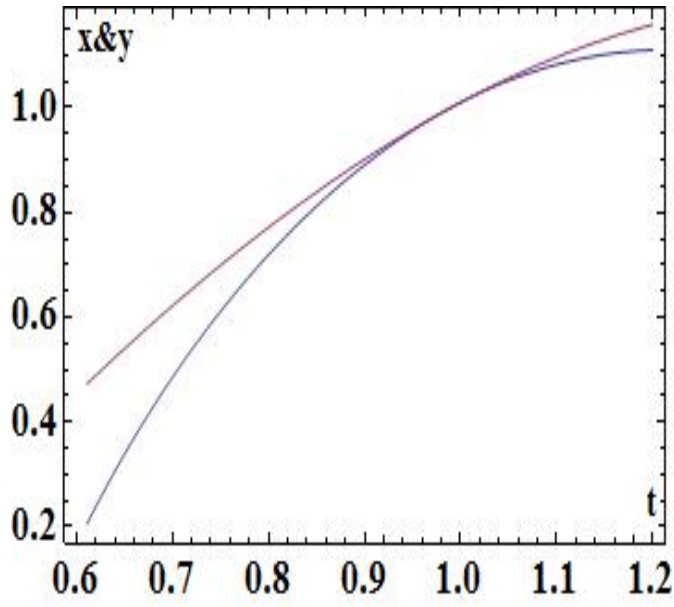
Şekil 5.6: $\delta H = \frac{H_a - H_b}{H_a}$. $k = 0$, BT-I. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} = 1$.



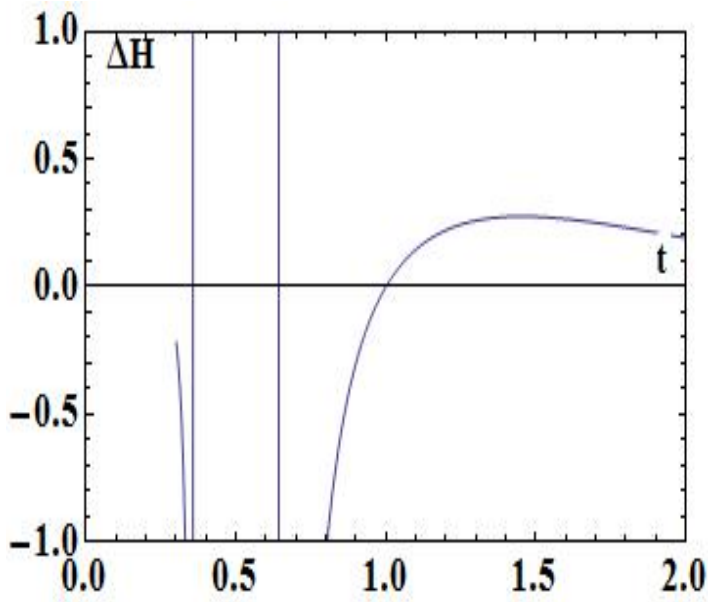
Şekil 5.7: $k = 1$, K-S. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} > 1$.



Şekil 5.8: δH . $k = 1$, K-S. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} > 1$.



Şekil 5.9: $k = -1$, BT-III. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} < 1$.



Şekil 5.10: $\delta H, k = -1$, BT-III. $\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{M 0} < 1$.

KAYNAKLAR

- [1] **Aguiar, P. Crawford, P.**, 1999. Dust-filled axially symmetric universes with a cosmological constant.
- [2] **Aguiar, P. Crawford, P.**, 1998. Axially Symmetric Cosmological Models with Perfect Fluid and Cosmological Constant.
- [3] **Guth, A.**, 1981. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Physical Review D* 23, 347.
- [4] **S. Byland, D.S.**, 1998. Evolution of the Bianchi type I, Bianchi type III, and the Kantowski-Sachs universe: Isotropization and Inflation, *Physical Review D* 57, 10.
- [5] **Özgür Akarsu**, 2010. BIANCHI TİPİ EVRENLERİN KOZMOLOJİK ÇÖZÜMLERİ, *Doktora Tezi*, Uzay ve Astronomi Bilimleri Ana Bilim Dalı, Ege Üniversitesi.
- [6] **Carroll, S.**, 2004. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison-Wesley Longman, Incorporated.
- [7] **M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A.N.L.**, 2006. General Relativity: An Introduction for Physicists, Cambridge University Press.
- [8] **Belusevic, R.**, 2008. Relativity, Astrophysics and Cosmology, 2 Volume Set, Wiley.
- [9] **O.Grön ve S.Hervik**, 2007. Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology, Springer.
- [10] **Perlmutter S., e.**, 1998. Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe, *Nature* 391, 51.
- [11] **Kurki-Suonio, H.**, 2012. Cosmological Perturbation Theory, <http://www.helsinki.fi/hkurkis/CosPer.pdf>.
- [12] **Mukhanov, V.**, 2005. Physical Foundations of Cosmology, Cambridge University Press.
- [13] **Bardeen, J.**, 1980. Gauge Invariant Cosmological Perturbations, *Phys.Rev.D*, 22, 1882.
- [14] **Amarzguoi, M.**, 2003. Cosmological Perturbation Theory and Gravitational Entropy, *Doktora Tezi*, Department of Physics, University of Oslo.
- [15] **Dodelson, S.**, 2003. Modern Cosmology, Elsevier.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Utku ZORBA

Doğum Yeri ve Tarihi : Elbistan, 06/01/1985

Lisans : Yıldız Teknik Üniversitesi,

Y. Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi,