İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DEVİRSEL VE ÇİFT BASİT YARIGRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ORHAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DEVİRSEL VE ÇİFT BASİT YARIGRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ORHAN
(509091015)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. RECEP KORMAZ

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509091015 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Özlem Orhan, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ÇİFT DEVİRSEL VE ÇİFT BASİT YARIGRUPLAR"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Yrd. Doç. Recep KORKMAZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Emanullah HIZEL** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT Yıldız Teknik Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **19 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **26 Ocak 2012**

Ailem’e,

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamada geçirdiğim süreç içerisinde, zamanını bana ayırarak tezimle ilgilinen, benimle bilgilerini paylaşan değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Recep Korkmaz'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.
Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca maddi yönden destekleri için TÜBİTAK BİDEB'e teşekkürlerimi sunarım.
Son olarak bu günlere gelmemi sağlayan, her an yanımda olan ve beni her konuda destekleyen sevgili aileme sonsuz teşekkürler…

Ocak 2012 Özlem Orhan
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİFT DEVİRSEL VE ÇİFT BASİT YARIGRUPLAR

ÖZET

Bu çalışmada cebirsel bir yapı olan yarıgruplar; tanımı, sunuşu ve özellikleri ile ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonra önemli bir yarıgrup çeşidi olan devirsel (monogenic) yarıgruplar ve devirsel yarıgrupların özel bir çeşidi olan çift devirsel (bicyclic) yarıgruplar detaylı olarak ele alınmıştır. Ayrıca bunlara ek olarak yine önemli bir yarıgrup çeşidi olan basit yarıgruplar ve basit yarıgrupların özel bir çeşidi olan çift basit (bisimple) yarıgruplar ve bu yarıgrupların özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yarıgrup teorisinin öneminden ve kaç yılında kimin tarafından çalışılmaya başlanıldığından bahsedilmiş, daha sonraki yıllarda bu teoriye önemli katkılarda bulunarak yarıgrup teorisinin temelini oluşturan önemli matematikçilerin makalelerinden ve bu makalelerde geçen önemli tanımlardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı yarıgrup çeşitleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde yarıgrup teorisinin yaygın çalışma konularından olan Green denklik bağıntıları verilmiş ve ayrıca düzgün yarıgruplar ve ters yarıgrupların tanımları yapılıp bu kavramlar örneklerle birlikte açıklanmıştır. Green yarıgrup teorisinde sıkça kullanılan beş önemli denklik bağıntısı L, R, H, D, J şu şekilde

$$
\begin{aligned}
&L=\{(a,b)\in S\times S : S^1a=S^1b\}\\
&R=\{(a,b)\in S\times S : aS^1=bS^1\}\\
&H=L\cap R\\
&D=\{(a,b)\in S\times S : (\exists c\in S)(a,c)\in L \text{ ve } (c,b)\in R\}\\
&J=\{(a,b)\in S\times S : S^1aS^1=S^1bS^1\}
\end{aligned}
$$

tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde devirsel yarıgruplar ele alınmıştır. Öncelikle devirsel bir yarıgrubun tanımı verilmiş ve bu yarıgrubun elemanları incelenmiştir. S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. $\langle A \rangle = S$ ise, A kümesine S yarıgrubunun üretici denir. Ayrıca $|A| = 1$ yani A tek elemana sahip ise S yarıgrubuna devirsel yarıgrup denir. Sonraki kısımlarda ise devirsel yarıgruplara ait özellikler incelenip, bu yarıgrupların üçüncü bölümde verilen yarıgrup sınıflarına hangi koşullar tarafından dahil olabileceği incelenmiştir. En son alt bölümde çift devirsel yarıgrupların tanımı ve özellikleri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde basit yarıgruplar olarak bilinen ve kendisi dışında alt ideali olmayan yarıgruplar ele alınmıştır. Basit yarıgrup tanımı örneklerle birlikte ayrıntılı olarak incelenmiş daha sonraki alt bölümler de basit yarıgrupların özel çeşitleri olan 0-basit yarıgrup, tam basit yarıgrup ve 0-tam basit yarıgrup incelenmiştir. S yarıgrubu hem basit hem de minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba tam basit (completely simple) denir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir. S bir yarıgrup olmak üzere,

(i) $\forall a \in S$ için $SaS = S$ ise ($SaS = \{xay : x, y \in S\}$)

(ii) $ef = fe = e$ olacak şekilde $e, f \in S$ idempotentler ise $e = f$

koşulları sağlanıyorsa S ye tam basit yarıgruptur denir. S sıfırlı bir yarıgrup olmak üzere $S^2 \neq 0$ iken S yarıgrubu $\{0\}$ 'dan ve kendisinden başka hiçbir öz ideale sahip değil ise bu yarıgruba 0-basit yarıgrup denir. S yarıgrubu hem 0-basit hem de 0-minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba tam 0-basit (completely 0-simple) denir. Bu tanımlar verildikten sonra Rees Matris yarıgrubu tanımlanmış ve ardından önemli bir teorem olan Rees-Suschkewitsch Teoremi ve Rees Teoremi verilmiştir. Son olarak çift basit (bisimple) yarıgrup tanımı yapılmış ve bu tanım örneklerle birlikte açıklanmıştır.

Son bölümde ise her bir bölümde incelenen konuların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

BİCYCLİC SEMİGROUPS AND BİSİMPLE SEMİGROUPS

SUMMARY

At the beginning of this work, it has been given the special algebraic structures semigroups with their general meanings, presentations and properties. Moreover, it has been studied in the different part the special type of semigroups, namely “monogenic semigroups”, that are placed in an important part of these algebraic structures and the special type of monogenic semigroups, namely “bicyclic semigroups”. Furthermore, it has been studied in the different part the special type of semigroups, namely “simple semigroups”, that are placed in an important part of these algebraic structures and the special type of simple semigroups, namely “bisimple semigroups”.

This thesis contains five main chapters.

In the first chapter, it has been mentioned the importance of the theory of semigroup and by whom in what year is studied. Also it has been mentioned the important mathematician’s articles which create the basic of the theory of the semigroup and the important definitions which are in these articles.

In the second chapter it has beeen defined semigroups, investigated emphatically in the remaining chapters of this thesis. It has been also mentioned basic definitions, theorems and properties (which will be used for the remaining parts of this thesis) about some different types of semigroups. A groupoid (S,μ) is defined as a non-empty set S on which a binary operation μ-by which we mean a map

$$\mu : S \times S \to S$$

is defined. We say that (S,μ) is a semigroup if the operation μ is associative, that is to say, if , for all x, y and z in S ,

$$((x,y)\mu, z)\mu = (x,(y,z)\mu)\mu$$

Also, it has been given the concepts, which we will use in the future by dealing with the definitions of cyclic and simple semigroup, of zero semigroup, semigroup with the identity known as monoid, commutative semigroup, idempotent, subsemigroup, ideal, prime ideal, morphism, homomorphism, endomorphism, monomorphism, otomorphism, isomorphism, rectangular band and the proof of Theorem 2.1.30 related to rectangular band. In 2.2 , it has been given the concepts of ordered sets, partially ordered sets, lattices and semilattices, complete ordered relation, minimal element, well ordered set, lattices, semilattices, sublattices, subsemilattices and the

proof of Proposition 2.1.8 with the help of these concepts. In the section 2.3 of relations and equivalences, it has been explained the inverse of a relation, and partial transformation relation and it has been given the proof of the Proposition 2.3.8 related to these concepts. Then transformations, whole transformations semigroup, equivalence relation, separation of a set, conjugacy classes, quotient set are defined. In the section 2.4 of congruences, it has been given the definitions of the concepts compatible relation and congruence and the proof of Theorem 2.4.6 related to these concepts.

In the third chapter it has been given Green Equivalence Relations which are a common subject of study of the semigroup theory, regular semigroups and inverse semigroups. In the section 3.1 of Green Equivalences, five important equivalence relations that are frequently used in Green Semigroup Theory have been expressed. Green Equivalences consist of five equivalence relations characterized the elements of the semigroup. These relations are described as follows:

$$L=\{(a,b)\in S\times S : S^1a=S^1b\}$$
$$R=\{(a,b)\in S\times S : aS^1=bS^1\}$$
$$H=L\cap R$$
$$D=\{(a,b)\in S\times S : (\exists c\in S)(a,c)\in L \text{ ve } (c,b)\in R\}$$
$$J=\{(a,b)\in S\times S : S^1aS^1=S^1bS^1\}$$

It has been given in the Proposition 3.1.4 that L equivalence relation is right congruence and R equivalence relation is left congruence and in the Proposition 3.1.6 that the relations L and R can be commuted, that is, for the right and left congruence relations, it has given $L\circ R=R\circ L$. It has been examined that R is equivalence relation. In the Definition 3.1.8 that intersection of L ve R is H and intersection of L ve R is D. These equivalence relation is very important.

Each equivalence relation gives the definition of another kind of semigroup. Especially, it has been used these equivalence relations examining the simple semigroup. Let be a semigroup and R_a, L_a, D_a are Green Equivalences Relations containing a. If $R_a=S$, then S is called right simple semigroup. If $L_a=S$, then S is called left simple semigroup and if $D_a=S$, then S is called bisimple semigroup. Bisimple semigroup is also called D-simple semigroup. It has been expressed in the section 3.2 of the structure of D-classes that how the D equivalence class can be shown in the table. The important thoerem , Green Theorem, has been given later. Regular element and regular semigroup are defined and these definitions have been explained by giving examples. In the Proposition 3.3.3, it has been examined that if S is a semigroup and a is an element of S, then each element of in D_a class is regular. After more, regular D-class is defined. Let D be a D-class. Then either each element of D is regular or none of the element of D is regular. If each element of the D-class is regular, then D-class is called regular D-class. Then Lallement Lemma has been examined. The concepts of inverse element and inverse semigroup are defined in the seciton 3.4 of inverse semigroups. Let S be a semigroup. If each element of S has a unique inverse, then S is called inverse semigroup. In Theorem 3.4.3 it has been expressed that the following are equivalent:

(1) S is an inverse semigroup;
(2) S is a regular semigroup and its idempotents commute;
(3) In a semigroup S, every L-class and every R-class contains exactly one idempotent;
(4) every element of S has a unique inverse.

Chapter four is one of the main goals of this thesis. In other words, the monogenic semigroups have been largely studied in here. To do that, at first, it has been given definition of an monogenic semigroup and then has been investigated the elements of this semigroup. Let S be a semigroup and $\varnothing \neq A \subseteq S$. If $\langle A \rangle = S$, then A is called the generators of the semigroup S. Also, if $|A| = 1$, then S is called the cyclic semigroup. Let S be a semigroup and $a \in S$. Then,

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in N\} = \{a, a^2, a^3, ..., a^n, ...\}$$

Let S be a semigroup genetared by $\langle a \rangle$. Then, the following set has at least one element and this element is the smallest element and is denoted by m called the index of the element a.

$$\{x \in N : (\exists y \in N)\ a^x = a^y,\ x \neq y\}$$

In this case, the set

$$\{x \in N : a^{m+x} = a^m\}$$

has at least one element and this element is the smallest and is denoted by r called the period of the element a. This concept has been detailly expressed by the definitions and examples later. Let $\langle a \rangle$ be a cyclic semigroup generated by the element a and let m and r be the index and period of $\langle a \rangle$ respectively. The definition of the kernel of a cyclic group $\langle a \rangle$ by the following: The set

$$K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$$

is a subgroup of the semigroup $\langle a \rangle$ and this semigroup is called the kernel of $\langle a \rangle$. Also Theorem 4.2.2 is proved related to this definition and this theorem is expressed by an example. In the remaining part of this chapter, by mentioning the properties of monogenic semigroups, it has been studied and then obtained some results that are about what kind of semigroup classes (that are introduced in the third chapter) include monogenic semigroups. In the last section, bicyclic semigroup is defined and it has been examined the properties of this semigroup.

In the fifth chapter, it has been studied the semigroups known as simple semigroup and which has no proper ideal. The definition of simple semigroup has been detailly examined by examples and Theorem 5.1.2 has been expressed by the following: Let S be a semigroup. Then the followings are equivalent:

(i) S is a simple semigroup,
(ii) For all a in S, $SaS = S$
(iii) For any $a,b \in S$ and $s,t \in S$, there is $sat = b$
(iv) S has a unique J-class.

It has been examined a special kinds of simple semigroups, 0-simple semigroup, completely simple semigroup, 0-completely simple semigroup in the section 5.2 of completely simple semigroups and 0-simple semigroups. If a semigroup S both simple and contains left minimal and right minimal ideal, then this semigroup is called completely simple semigroup. This definition can be expressed by follows:

Let S be a semigroup. If the conditions,

(i) For $\forall a \in S$, if $SaS = S$, then ($SaS = \{xay : x, y \in S\}$)
(ii) For $e, f \in S$, if $ef = fe = e$ and e, f is idempotent, then $e = f$

are satisfied, then S is called completely simple semigroup. Let S be a semigroup with zero element. If whenever $S^2 \neq 0$, the semigroup has no proper ideal (that is except for $\{0\}$ and S) then it is called the 0-simple semigroup. If S is both 0-simple and contains 0-minimal left and right ideals then this semigroup is called completely 0-simple semigroup. After giving these definitions, Rees Matrix Semigroup is defined. Then Rees-Suschkewitsch Theorem that is important and Rees Theorem are given. The definition of bisimple semigroup has been examined by examples. The definition of bisimple semigroup has been examined by examples.

The final chapter can be thought as a general summarized the results achieved whole of this thesis.

1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi cebirin en temel dallarından biridir. Yarıgruplar ile ilgili çalışmalar 1920'li yıllarda rus matematikçi Anton Kazimirovich Suschkewitsch'in $[1]$ de bir sonlu yarıgrubun minimal idealinin yapısını belirlemesi ve böylece öz ideali olmayan herhangi bir sonlu yarıgrubun yapısını belirlemesine kadar dayanır. Bu sonuç daha sonraları D. Rees tarafından $[2]$ de herhangi tam basit yarıgruplar için genelleştirilmiştir. Yarıgruplara ilginin arttığı 1940'lı yıllarda Clifford $[3]$ de ve Dubreil $[4]$ de yayımladıkları makalelerle yarıgrup teorisine önemli katkılar sağlamışlardır.

Bu tezin ikinci bölümünde yarıgruplarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bir yarıgrup temel olarak üzerinde birleşme özelliğinin sağlandığı bir ikili işlem tanımlı boş olmayan bir S kümesidir. S bir yarıgrup ve $b \in S$ olmak üzere $b^2 = b$ koşulunu sağlayan b elemanına idempotent denir. Ayrıca bu bölümde ideal, monomorfizm, izomorfizm, endomorfizm kavramlarını inceleyeceğiz sonra band kavramını ele alacağız. Band, her elemanı idempotent olan yarıgruptur ve idempotent yarıgrup olarak da adlandırılır. Band kavramı ilk defa 1954 yılında A.H. Clifford tarafından $[5]$ de tanımlandı. Yarılatis ve dikdörtgensel bandlar, bandların özel sınıflarıdır. S bir yarıgrup ve her $a,b \in S$ için $aba = a$ oluyorsa S yarıgrubuna dikdörtgensel band denir.

Üçüncü bölümde 1951 yılında Green tarafından $[6]$ da çalışılan ve günümüzde yarıgrup teorisinin yaygın çalışma konularından olan Green denklik bağıntıları, düzgün yarıgruplar ve ters yarıgruplar verilmiştir. Green yarıgrup teorisinde sıkça kullanılan beş önemli denklik bağıntısı tanımlanmıştır.

$$L = \{(a,b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$R = \{(a,b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$

$$H = L \cap R$$

$$D = \{(a,b) \in S \times S : (\exists c \in S)(a,c) \in L \text{ ve } (c,b) \in R\}$$

$$J = \{(a,b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

Burada tanımlanan denklik bağıntılarında 1 birim eleman olmak üzere,

$$S^1 = \begin{cases} S & S \text{ birimli yarıgrup ise} \\ S \cup \{1\} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Bir S yarıgrubunda her $a \in S$ için, $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa, S yarıgrubuna düzgün yarıgrup denir. Ters yarıgrup kavramı ilk defa birbirlerinden bağımsız olarak 1952 de Sovyet matematikçi Viktor Vladimirovich Wagner tarafından $[7]$ de ve 1954 yılında İngiliz matematikçi Gordon Preston tarafından $[8]$ de yapılmıştır. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere $axa = a$ ve $xax = x$ denklemleri sağlanıyorsa x elemanına a'nın ters elemanıdır denir.

Dördüncü bölümde, devirsel yarıgruplar ve çift devirsel yarıgruplar ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Howie $[9]$ da devirsel yarıgrubu tek eleman içeren bir küme tarafından üretilen bir yarıgrup olarak tanımlamış ve bunu "monogenic" yarıgrup olarak adlandırmıştır. "Monogenic" yarıgrup Clifford ve Preston tarafından $[10]$ da "cyclic" yarıgrup olarak da adlandırılmıştır. Çift devirsel yarıgrup tanımı ilk defa 1953 de Evgenii Lyapin tarafından $[11]$ de yapılmıştır. Fakat Alfred H. Clifford ve Gordon Preston birbirlerinden bağımsız olarak 1943 den önce bu kavramı bulduklarını fakat yayımlamadıklarını iddia etmişlerdir.

Beşinci bölümde, basit yarıgruplar ve çift basit yarıgruplar ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Basit ve çift basit yarıgruplar, yarıgruplar teorisinin önemli yapılarıdır. Aslında monoid olmalarına rağmen daha çok yarıgrup olarak adlandırılırlar. Basit yarıgrup tanımı [12] de şu şekilde verilmiştir.

S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun kendisinden başka sol ideali yoksa S yarıgrubuna sol basit yarıgrup, S yarıgrubunun kendisinden başka sağ ideali yoksa S yarıgrubuna sağ basit yarıgrup ve S hem sağ hem sol basit ise S ye basit yarıgrup denir. Herhangi bir S yarıgrubu kendisinden başka hiçbir (öz) ikiyanlı ideale sahip değil ise bu yarıgruba basit yarıgrup denir. Beşinci bölümün alt bölümlerinde tam basit yarıgrup, 0-basit yarıgrup, 0-tam basit yarıgrup kavramları ayrıntılı bir şekilde verilmiş ve çift basit yarıgrup tanımı verilip özellikleri incelenmiştir. Çift basit yarıgrup tanımı ilk kez Clifford ve Preston tarafından [13] de yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Ön Bilgiler

Bu bölümde yarıgrup teorisinin temel tanımları ve sıkça kullanılan bazı teoremlerin ispatları verilecektir.

Tanım 2.1.1 [14] $S \neq \emptyset$ olmak üzere $*: S \times S \to S$ şeklinde bir ikili işlem tanımlayalım. Eğer $*$ işlemi birleşmeli ise yani; her $x, y, z \in S$ için $((x,y)*, z) = (x,(y,z)*)$ ise $(S,*)$ ikilisine bir yarıgrup denir.

Bu çalışma boyunca $(x,y)*$ yerine xy yazılıp $(S,*)$ yerine de S kullanılacaktır. Ayrıca $*$ işlemi hep sağdan uygulanacaktır.

Örnek 2.1.2 [15] $(\mathbb{Z},.)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},.)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},.)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},.)$, $(\mathbb{C},+)$, tam, rasyonel, reel ve kompleks sayılar $(+)$ ve $(.)$ işlemleri ile birer yarıgruptur.

Örnek 2.1.3 [15] N üzerinde bir $*$ işlemini $m*n = \max\{m,n\}$ olacak şekilde tanımlayalım. O halde $(N,*)$ üzerinde birleşme özelliğini incelersek,

$$m*(n*k) = \max\{m, \max\{n,k\}\} = \max\{m,n,k\} = \max\{\max\{m,n\},k\} = (m*n)*k$$

olduğundan $(N,*)$ bir yarıgruptur. Çünkü $*$ işlemi, N üzerinde birleşme özelliğini sağlar.

Örnek 2.1.4 [15] Monoid, birim elemana sahip bir yarıgruptur. Her grup bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.5 [15] Üst üçgensel tamsayı matrisi,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \geq 1 \right\}$$

S , olağan matris çarpımına göre yarıgruptur.

Tanım 2.1.6 [14] Bir S yarıgrubunda her $x \in S$ için $x1 = 1x = x$ olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa S yarıgrubuna birimli yarıgrup denir. Benzer şekilde bir S yarıgrubunda her $x \in S$ için $x0 = 0x = 0$ olacak şekilde bir $0 \in S$ varsa S yarıgrubuna sıfırlı yarıgrup denir.

Örnek 2.1.7 [14] $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar ve $\mathbb{R}$ reel sayılar çarpma işlemi altında birimli yarıgruplardır yani monoiddirler. (grup değiller çünkü 0'ın tersi yok). Aynı şekilde $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$, çarpma işlemi altında sıfırlı yarıgruptur. Bir $x \in \mathbb{Q}$ için $x0 = 0x = 0$ olacak şekilde $0 \in \mathbb{Q}$ vardır, bu elemana sıfır eleman denir ve bu durumda $\mathbb{Q}$ da sıfırlı yarıgrup olur.

Tanım 2.1.8 [14] Bir S yarıgrubunda her $x, y \in S$ için $xy = yx$ ise S yarıgrubuna değişmeli yarıgrup denir.

Bir S yarıgrubu her zaman birim eleman içermek zorunda değildir. Bir yarıgrupta en fazla bir tane birim eleman bulunabilir. Birim eleman içermeyen S yarıgrubuna 1 eklenip bu yarıgrup üzerinde ikili işlem her $s \in S$ için, $1s = s1 = s$ ve $11 = 1$ şeklinde genişletilerek birimli bir S yarıgrubu elde edilebilir. Böylece buradan elde ettiğimiz bilgiyi kullanarak aşağıdaki gibi bir yarıgrup tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.9 [14]

$$S^1 = \begin{cases} S & S \text{ birimli yarıgrup ise} \\ S \cup \{1\} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

S^1 yarıgrubuna, gerekirse S yarıgrubuna birim eleman eklenerek elde edilen birimli yarıgrup denir.

Benzer düşünce ile;

$$S^0 = \begin{cases} S & S\text{'nin sıfır elemanı varsa} \\ S \cup \{0\} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

tanımlanabilir. S^0 yarıgrubuna, gerekirse S yarıgrubuna 0 elemanı eklenerek elde edilen sıfırlı yarıgrup denir. Ekstra elemanlar eklemek için bazen yarıgrubun önemli özelliklerini feda edebiliriz. Örnek olarak; grup olan bir yarıgruba 0 elemanını eklersek, grup olmayan bir yarıgrup elde ederiz.

Örnek 2.1.10 [15] $\langle \mathbb{Q}/0,. \rangle$ grup olan bir yarıgruptur. Bu gruba 0 (sıfır) elemanını eklersek grup olmayan bir yarıgrup elde ederiz. Çünkü 0'ın rasyonel sayılarda çarpma işlemine göre tersi yoktur ve bu yüzden grup olmanın ters eleman olma şartını sağlamaz.

Tanım 2.1.11 [16] S bir yarıgrup ve $e,a,b \in S$ olsun. O zaman,

(i) Her $x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ elemanı varsa e'ye sol birim,

(ii) Her $x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ elemanı varsa e'ye sağ birim,

(iii) $e \in S$ elemanı hem sol birim hem sağ birim ise e'ye birim eleman,

(iv) Her $x \in S$ için $ax = a$ olacak şekilde bir $a \in S$ elemanı varsa a'ya sol sıfır,

(v) Her $x \in S$ için $xa = a$ olacak şekilde bir $a \in S$ varsa a'ya sağ sıfır,

(vi) $a \in S$ elemanı hem sol sıfır hem sağ sıfır ise a'ya sıfır eleman,

(vii) $b^2 = b$ koşulunu sağlayan b elamanına idempotent denir.

Örnek 2.1.12 [16] $S \neq \varnothing$ herhangi bir küme olmak üzere, S üzerindeki ikili işlem her $a,b \in S$ için $ab = a$ $(ab = b)$ olarak tanımlansın. S kümesi bu işlemle bir yarıgrup olup bu yarıgruba sol sıfır (sağ sıfır) yarıgrup denir.

Örnek 2.1.13 [17] $I = [0,1] \subseteq R$ alalım. I kapalı aralığı üzerindeki ikili işlemi $\forall x, y \in \mathrm{I}$ için, $x * y = \min(x, y)$ olarak tanımlarsak, I kümesi bu işlemle birim elemanı 1 ve sıfır elemanı 0 olan bir yarıgrup olur. Aynı ikili işlemi $\mathrm{I} = (0,1] \subseteq R$ kümesi üzerinde tanımlarsak, sıfır elemanı olmayan ve birim elemanı 1 olan bir yarıgrup; $\mathrm{I} = [0,1) \subseteq R$ üzerinde tanımlarsak, birim elemanı olmayan ve sıfır elemanı 0 olan bir yarıgrup ve $S = (0,1) \subseteq R$ üzerinde tanımlarsak birim elemanı ve 0 elemanı olmayan bir yarıgrup elde edilir.

I bir yarıgrup ve $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathrm{I}$ olsun. Bu durumda $\{ab \in \mathrm{I} \mid a \in A,\ b \in B\} \subseteq \mathrm{I}$ alt kümesi AB ile gösterilir. Yani, $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ dir. Ayrıca $A = B$ ise AB yerine A^2 ve $A = \{a\}$ ise AB yerine aB yazılır.

Örnek 2.1.14 [15] $\mathbb{Z}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \text{a, b, c, d} \in \mathbb{Z} \right\}$ matris yarıgrubudur.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matrisi, $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ nin birimidir ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sıfır matrisi $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ nin sıfırıdır.

Bu monoid bazı idempotentlere sahiptir. Örnek olarak, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ bu monoidin bir idempotentidir.

Tanım 2.1.15 [14] S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için $Sa = S$ ve $aS = S$ koşulları sağlanıyorsa S 'ye grup denir.

Bu tanım grubun genel bir tanımı değildir fakat bu tanımın grubun genel tanımına eşit olduğunu göstermek zor değildir.

$$\left.\begin{array}{lll} (\exists e \in S) & (\forall a \in S) & ea = a \\ (\forall a \in S) & (\exists a^{-1} \in S) & a^{-1}a = e \end{array}\right\}$$

Yarıgrubun kapalılık ve birleşme özelliklerine ek olarak birim elemana ve ters elemana sahip olduğunuda gösterdik böylece grup olmanın tüm özellikleri sağlandı.

Tanım 2.1.16 [14] G bir grup ise $G^0 = G \cup \{0\}$ yarıgruptur. Bu gruba 0-grup yada sıfırlı grup denir.

Önerme 2.1.17 [14] Sıfır elemanına sahip olan bir yarıgrup ancak ve ancak $(\forall a \in S \setminus \{0\})$ için $aS = S$ ve $Sa = S$ özelliklerini sağlıyor ise bir 0-gruptur.

Tanım 2.1.18 [14] S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq \mathrm{T} \subseteq S$ olsun. $\mathrm{T}^2 \subseteq \mathrm{T}$ ise T alt kümesine S yarıgrubunun alt yarıgrubu denir. T de bir yarıgruptur.

*Örnek 2.1.*19 [15] S bir alt yarıgruptur. $\{0\}$ ve $\{1\}$ bir elemanlı alt yarıgruplardır.

Tanım 2.1.20 [15] S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun.

(i) $SA \subseteq A$ ise A alt kümesine sol ideal,

(ii) $AS \subseteq A$ ise A alt kümesine sağ ideal,

(iii) A hem sağ ideal hem de sol ideal ise A alt kümesine ideal denir.

Her ideal bir yarıgruptur fakat tersi doğru değildir. $\{0\} \subset \mathrm{I} \subset S$ ise I idealine asal ideal denir.

Tanım 2.1.21 [17] $(S,.)$ ve $(T,.)$ iki yarıgrup olmak üzere $\phi : S \to T$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in S$ için $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$ oluyorsa ϕ dönüşümüne S yarıgrubundan T yarıgrubuna bir homomorfizm (morfizm) denir. S ve T birimli yarıgruplar ise yukarıdaki özelliğe ek olarak, 1_S ve 1_T sırasıyla S ve T 'nin birim elemanları olmak üzere $(1_S)\phi = 1_T$ dir.

Tanım 2.1.22 [14] $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. ϕ birebir ise ϕ 'ye monomorfizm denir yani $\phi : S \to T$ monomorfizm ise $\alpha,\ \beta$ homomorfizmleri için $\alpha\phi = \beta\phi \Rightarrow \alpha = \beta$ olur.

Tanım 2.1.23 [14] $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. ϕ birebir ve örten ise ϕ dönüşümüne izomorfizm denir. S ve T yarıgrupları arasında böyle bir izomorfizm varsa S ve T yarıgrupları izomorfiktir denir ve $S \simeq \mathrm{T}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.24 [18] $S = \langle x \rangle$ sonsuz devirsel bir yarıgrup ve $\phi : \mathbb{Z} \to S,\ \phi(n) = x^n$ ile tanımlanan bir dönüşüm olsun. $i, j \in \mathbb{Z}$ ve $i \neq j$ ise $x^i \neq x^j$ olduğundan ϕ birebirdir. ϕ 'nin örten olduğu açık ve her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$\phi(n+m) = x^{n+m} = x^n.x^m = \phi(n)\phi(m)$$

dır. Dolayısıyla $\mathbb{Z} \simeq S$ dir.

Tanım 2.1.25 [14] $\phi : S \to S$ bir homomorfizm ise ϕ 'ye S 'nin endomorfizmi denir. $\phi : S \to S$ izomorfizmine ise otomorfizm denir.

Örnek 2.1.26 [18] S bir yarıgrup ise, $\phi : S \to S,\ \ \phi(x) = x^{-1}$ ile tanımlanan bir dönüşüm olsun. ϕ , S nin bir otomorfizmidir. Gerçekten $x, y \in S$ için,

$$\phi(x) = \phi(y) = x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y, \quad \phi(y^{-1}) = y$$

olduğundan, ϕ birebir, örtendir ve

$$\phi(xy) = \phi(xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x) = \phi(y)$$

dir.

Tanım 2.1.27 [14] $\phi : S \to T$ herhangi bir homomorfizm ise, ϕ dönüşümünün görüntü kümesi,

$$im\phi = \{s\phi :\ s \in S\} = S\phi \subseteq T$$

şeklindedir. Ayrıca ϕ dönüşümünün çekirdeği,

$$\ker\phi = \{(a,b):\ a\phi = b\phi\} \subseteq S \times S$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.28 [14] S bir yarıgrup olsun. S nin her elemanı idempotent ise bu yarıgruba band denir, band aynı zamanda idempotent yarıgrup olarak da adlandırılır. Her $a,b \in S$ için $aba = a$ oluyorsa S yarıgrubuna dikdörtgensel band denir.

Örnek 2.1.29 [19] I ve J boş olmayan kümeler olsun. $I \times J$ yarıgrup işlemini

$$(i,j).(k,l) = (i,l)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu yarıgrup bir dikdörtgensel band' tır çünkü

(i) herhangi bir (i,j) çifti için,

$$(i,j).(i,j) = (i,j)$$

(ii) herhangi (i_x, j_x) ve (i_y, j_y) çiftleri için,

$$(i_x, j_x)(i_y, j_y)(i_x, j_x) = (i_x, j_x)$$

dir.

Herhangi bir dikdörtgensel band tam olarak aşağıdaki verilen teoremle karakterize edilebilir:

Teorem 2.1.30 [14] S bir yarıgrup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) S bir dikdörtgensel banttır.

(2) S nin her elemanı idempotenttir ve her $a,b,c \in S$ için $abc = ac$ şeklindedir.

(3) $S \simeq L \times R$ olacak şekilde bir L sol sıfır ve bir R sağ sıfır yarıgrubu vardır.

(4) $S \simeq A \times B$ olacak şekilde boş olmayan iki küme A ve B olmak üzere, $a,b,c,d \in S$ için $(a,b)(c,d) = (a,d)$ işlemiyle tanımlı bir $A \times B$ yarıgrubu vardır.

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$ Bir $a \in S$ alalım. S dikdörtgensel bir band olup $aaa = a$ yani $a^3 = a$ elde edilir. Bu eşitliğin her tarafını a elemanı ile çarparsak $a^4 = a^2$ elde edilir. S yarıgrubunun dikdörtgensel band olma özelliğini tekrar kullanırsak $a(a^2)a = a$ şeklindedir yani $a^4 = a$ elde edilir. Sonuç olarak $a^2 = a$ olup her elaman bir idempotenttir. Şimdi $a,b,c \in S$ alalım. S dikdörtgensel band olduğundan dolayı $a = aba$, $c = cbc$ ve $b = b(ac)b$ yazılabilir. Böylece,

$$ac = (aba)(cbc) = a(bacb)c = abc \qquad \textbf{(2.1)}$$

olup istenen elde edilir.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sabit bir $c \in S$ seçelim. $L = Sc$ ve $R = cS$ olsun. O zaman her $x = zc$, $y = tc \in L$ için,

$$xy = zctc = zc^2 = zc = x \quad \textbf{(2.2)}$$

olup bu ise L yarıgrubunun bir sol sıfır yarıgrup olduğunu gösterir. Benzer şekilde R yarıgrubunun da bir sağ sıfır yarıgrup olduğu gösterilebilir. Şimdi

$$\phi : S \to L \times R$$

dönüşümünü, her $x \in S$ için $x\phi = (xc, cx)$ olarak tanımlayalım. Buradan ϕ birebirdir. $(xc, cx) = (yc, cy)$ ise o zaman,

$$x = x^2 = xcx = ycx = ycy = y^2 = y$$

şeklindedir. Ayrıca ϕ örtendir. Çünkü, her $(ac, cb) \in L \times R$ için,

$$(ac, cb) = (abc, cab) = (ab)\phi$$

şeklindedir. Son olarak ϕ bir homomorfizmadir.

Her $x, y \in S$ için,

$$(xy)\phi = (xyc, cxy) = (xc, cy) = (xcyc, cxcy) = (xc, cx)(yc, cy) = (x\phi)(y\phi)$$

elde edilir.

$(3 \Rightarrow 4)$ L sol sıfır yarıgrup ve R sağ sıfır yarıgrup olmak üzere $S = L \times R$ olsun. O zaman $(a, b), (c, d) \in S$ gibi iki elemanın çarpımı,

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd) = (a, d) \quad \textbf{(2.3)}$$

şeklinde verilir. Burada $A = L$ ve $B = R$ alınırsa istenen elde edilir.

$(4 \Rightarrow 1)$ $S = A \times B$ ve bu yarıgrup üzerindeki çarpım,

$$(a, b)(c, d) = (a, d)$$

şeklinde verilsin. O zaman her $a = (x, y)$, $b = (z, t) \in S$ için,

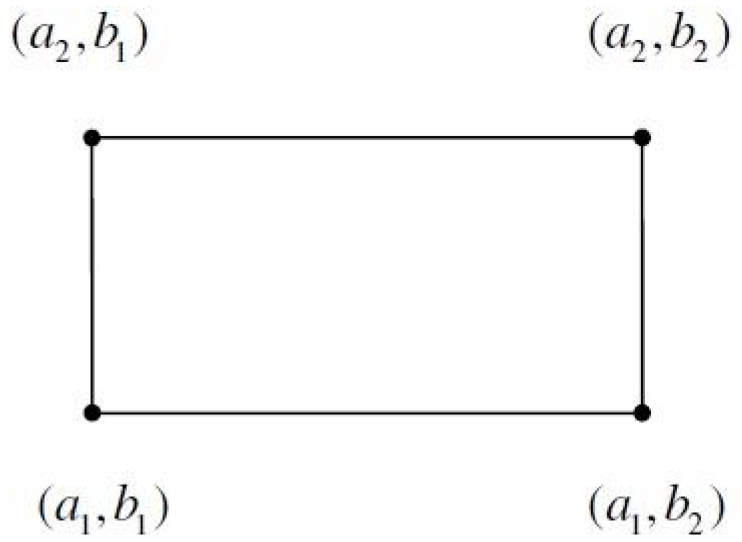
$$aba = (x, y)(z, t)(x, y) = (x, t)(x, y) = (x, y) = a \quad \textbf{(2.4)}$$

şeklinde olur. Böylece S yarıgrubu dikdörtgensel band olur.

Not 2.1.31 [20] Tanım 2.1.28 de verilen "dikdörtgensel band" tanımındaki "dikdörtgensel" kelimesi Teorem 2.1.30 un (4) ifadesinden gelmektedir. (4)'de verilen (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) kartezyen düzlemde iki nokta olarak düşünülürse

$(a_1,b_1)(a_2,b_2)$ ve $(a_2,b_2)(a_1,b_1)$ çarpımları ile bu noktalar şekil 2.1 deki gibi bir dikdörtgenin köşelerini oluştururlar.

Tanımdaki "band" kelimesi ise genellikle idempotent elemanları içeren bir yarıgrup için kullanılmaktadır.



Şekil 2.1 : Dikdörtgensel Band.

Örnek 2.1.32 [21] $S=\{a,b,c,d\}$ elemanlarından oluşan bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrup üzerindeki ikili işlem şekildeki gibi olsun. O zaman S yarıgrubundaki her eleman idempotent olup Teorem 2.1.30'a göre bir dikdörtgensel band olur.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

2.2 Sıralı Kümeler, Latisler ve Yarılatisler

Tanım 2.2.1 [17] X bir küme ve w ise X üzerinde herhangibi bir bağıntı olsun. w bağıntısı yansımalı, ters simetrik ve geçişmeli ise w bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. $x, y \in X$ elemanları w sıralama bağıntısına göre bağlı iseler $(x, y) \in w$, $x \leq_w y$ veya $x \leq y$ gösterimlerinden biri kullanılabilir. X kümesine w sıralama bağıntısı ile kısmi sıralı küme denir ve $(X, \leq)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki özelliklere ek olarak her $x, y \in X$ için $x \leq_w y$ ise, w bağıntısına X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı, X kümesine ise tam sıralı küme veya zincir denir.

Tanım 2.2.2 [17] X sıralı bir küme ve $Y \subseteq X$ olsun. Bir $a \in Y$ için,

$$(\forall y \in Y)\, y \leq a \Rightarrow y = a \tag{2.5}$$

oluyorsa, a elemanına Y kümesinin minimal elemanı denir. Ayrıca bir $b \in Y$ için,

$$(\forall y \in Y)\, b \leq y \tag{2.6}$$

oluyorsa, b elemanına Y kümesinin minimum elemanı denir.

Herhangi kısmi sıralı bir kümede her minimum eleman minimaldir ama tersi doğru değildir. Tersinin doğru olması için kümenin tam sıralı olması gerekir.

Tanım 2.2.3 [17] $(X, \leq)$ kümesi kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı varsa X kümesine minimallik koşulunu sağlıyor denir. X kümesi tam sıralı ve minimallik koşulunu sağlıyor ise X kümesine iyi sıralı küme denir.

Benzer şekilde maksimum eleman, maksimal eleman ve maksimallik koşulu tanımı da yapılabilir.

Tanım 2.2.4 [14] $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $\varnothing \neq Y \subseteq X$ ve $c \in X$ olsun. $\forall y \in Y$ için $c \leq y$ ise c elemanına Y kümesinin bir alt sınırı denir. Y'nin alt sınırlarının kümesinin d gibi bir maksimum elemanı varsa d elemanına Y kümesinin en büyük alt sınırı denir ve

$$d = \wedge\{y : y \in Y\} \tag{2.7}$$

şeklinde gösterilir. $Y = \{a, b\}$ şeklinde ise o zaman $d = a \wedge b$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.5 [22] Reel sayılar kümesi bilinen " küçük eşit" bağıntısına göre tam sıralıdır. Fakat iyi sıralı değildir. $(0,1)\subset R$ kümesi $(0,1)\neq\varnothing$ olduğu halde minimumu yoktur. Benzer şekilde tamsayılar kümesi de tam sıralı fakat iyi sıralı değildir. Çünkü tamsayılar kümesinin kendisinin minimumu yoktur.

Örnek 2.2.6 [22] Doğal sayılar kümesi iyi sıralıdır. Ayrıca bir $(X,\leq)$ kümesi iyi sıralı ise onun her alt kümesi de iyi sıralıdır.

Örnek 2.2.7 [22] E bir küme, $X=P(E)$ olsun. Bu takdirde içerme bağıntısına göre $(X,\subset)$ kısmi sıralı bir kümedir. İçerme bağıntısı her küme kendisinin alt kümesi olduğundan yansıyan, $A\subset B\wedge B\subset A\Rightarrow A=B$ olduğundan ters simetrik ve farklı iki a ve b elemanlarına sahip olsun. $A=\{a\}$, $B=\{b\}$ olarak alırsak $A\not\subseteq B$ ve $B\not\subseteq A$ olduğundan $(P(E),C)$ tam sıralı değildir. Yani, E kümesinin iki yada daha fazla elemanı varsa $(P(E),C)$ de karşılaştırılamayan elemanlar vardır. Ayrıca $(P(E),C)$ tam sıralıdır $\Leftrightarrow |E|\leq 1$, $E=N$ olsun. N sonsuz elemanlı olduğundan $(P(N),C)$ tam sıralı değildir. Fakat burada bir zincir örneği verebiliriz.

$A_0=\varnothing$, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{1,2\}$, $A_3=\{1,2,3\},\ldots,$ $A_n=\{1,2,\ldots,n\}$ olsun. $F=\{A_n\,|\,n\in N\}$ olarak alırsak $A_n\subset A_m\Leftrightarrow n\leq m$ olduğundan F ,$(P(N),C)$'nin bir zinciridir.

Önerme 2.2.8 [14] X kısmi sıralı bir küme ve $\varnothing\neq Y\subset X$ olsun.

(i) Y, en fazla bir tane minimum elemana sahiptir

(ii) Y, tam sıralı ise minimal ve minimum terimleri birbirine eşittir.

Tanım 2.2.9 [14] $(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $\forall a,b\in X$ için $a\wedge b$ mevcut ise, $(X,\leq)$ kümesine bir alt yarılatis denir. Ayrıca X kümesinin boştan farklı her Y alt kümesi için $\wedge\{y:y\in Y\}$ mevcut ise o zaman $(X,\leq)$ kümesine tam alt yarılatis denir.

Benzer şekilde üst yarılatis ve tam üst yarılatis tanımlanabilir.

Tanım 2.2.10 [14] $(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $(X,\leq)$ hem (tam) alt yarılatis hem de üst yarılatis ise o zaman $(X,\leq)$ kümesine (tam) latis denir.

Önerme 2.2.11 [17] $(E,\leq)$ bir alt yarılatis olsun. O zaman $(E,\wedge)$ kümesi tüm elemanları idempotentler olan değişmeli bir yarıgruptur. Ayrıca $a,b\in E$ olmak üzere, $a\leq b$ olması için gerek ve yeter koşul $a\wedge b=a$ olmasıdır.

Tersine $(E,\cdot)$ idempotentlerden oluşan değişmeli bir yarıgrup olsun. E üzerinde her $a,b\in E$ için $a\leq b \Rightarrow a\cdot b=a$ olacak şekilde $\leq$ bağıntısını tanımlayalım. O zaman $(E,\leq)$ bir alt yarılatis olup her $a,b\in E$ için $a\wedge b=a\cdot b$ şeklindedir.

İspat: (i) $(E,\leq)$ bir alt yarıtalis olsun. O zaman her $a,b,c\in E$ için $(a\wedge b)\wedge c=d_1$ ve $a\wedge(b\wedge c)=d_2$ olsun. Buradan $d_1\leq(a\wedge b)$ ve $d_1\leq c$ şeklindedir. Böylece $d_1\leq a$, $d_1\leq b$, $d_1\leq c$ elde edilir. Buradan da $d_1\leq a$ ve $d_1\leq(b\wedge c)$ ve dolayısıyla $d_1\leq a\wedge(b\wedge c)=d_2$ elde edilir. Yani $d_1\leq d_2$ şeklindedir. Benzer şekilde $d_2\leq d_1$ elde edilir. Böylece $d_1=d_2$ olup $(E,\wedge)$ bir yarıgruptur. Her $a,b\in E$ için $a\wedge a=a$ ve $a\wedge b=b\wedge a$ olduğundan $(E,\wedge)$ idempotentlerden oluşan değişmeli bir yarıgruptur. Her $a,b\in E$ için $a\leq b$ ise $a\wedge b=a$ olduğu aşikardır. Tersine, $a\wedge b=a$ olsun. O zaman $a\leq a$ ve $a\leq b$ olup $a\leq b$ şeklindedir.

(ii) $(E,\cdot)$ idempotentlerin oluşturduğu değişmeli bir yarıgrup olsun. $a,b,c\in E$ olsun. $a^2=a$ olup $a\leq a$ dır. Yani $\leq$ bağıntısı yansımalıdır. Şimdi $a\leq b$ ve $b\leq a$ olsun. O zaman $a\cdot b=a$ ve $b\cdot a=b$ olur. E değişmeli olduğundan $a\cdot b=b\cdot a$ olup bu ise $a=b$ olduğunu gösterir. Yani $\leq$ bağıntısı ters simetriktir. Son olarak $a\leq b$ ve $b\leq a$ olsun. O zaman $a\cdot b=a$ ve $b\cdot c=b$ olup

$$a\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b=a \tag{2.8}$$

şeklindedir. Buradan $a\leq c$ olup $\leq$ bağıntısı geçişmelidir. Böylece $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Şimdi $a,b\in E$ olsun. O zaman

$$(a\cdot b)\cdot a=a\cdot(b\cdot a)=a\cdot(a\cdot b)=a^2\cdot b=a\cdot b\Rightarrow a\cdot b\leq a \tag{2.9}$$

$$(a\cdot b)\cdot b=a\cdot(b\cdot b)=a\cdot b^2=a\cdot b\Rightarrow a\cdot b\leq b \tag{2.10}$$

olur. Yani $a\cdot b$ hem a için hem de b için bir alt sınırdır. $c\in E$, a ile b için başka bir alt sınır ise, $c\leq a$ olup $c\cdot a=c$ ve $c\leq b$ olduğundan $c\cdot b=c$ elde edilir.

Buradan,

$$c = c^2 = (c \cdot a) \cdot (c \cdot b) = c \cdot (a \cdot c) \cdot b = c^2 \cdot (a \cdot b) = c \cdot (a \cdot b) \qquad \textbf{(2.11)}$$

olup $c \leq a \cdot b$ elde edilir. Böylece $a \wedge b = a \cdot b$ olur.

2.3 Bağıntılar ve Denklikler

Tanım 2.3.1 [23] X boştan farklı herhangi bir küme olsun. $X \times X$ kümesinin herhangi bir β alt kümesine bir bağıntı denir. $x, y \in X$ elemanları β bağıntısı ile bağlı iseler bunu $(x, y) \in \beta$ ile göstereceğiz.

X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_x ile gösterelim. B_x bağıntılar kümesi üzerinde boş küme bağıntısı $\varnothing$ ile, evrensel bağıntı $X \times X$ ile gösterilir. B_x üzerinde $\circ$ bileşke işlemini her $\beta, \sigma \in B_x$ için,

$$\beta \circ \sigma = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : (\exists z \in \mathrm{X})(x, z) \in \beta \text{ ve } (z, y) \in \sigma\} \qquad \textbf{(2.12)}$$

ile tanımlayalım. B_x kümesi, tanımlanan bu işlemle bir yarıgrup olup bu yarıgruba bağıntılar yarıgrubu denir.

Önerme 2.3.2 [23] B_x kümesi (2.12) ile tanımlanan $\circ$ işlemiyle bir yarıgruptur.

İspat: (2.12) ile tanımlanan bağıntıların bileşke işlemi,

$$\beta \circ \sigma = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : (\exists z \in \mathrm{X})(x, z) \in \beta \text{ ve } (z, y) \in \sigma\} \qquad \textbf{(2.13)}$$

şeklinde olup $\beta \circ \sigma \in B_x$ elde edilir. Bu küme üzerinde birleşme özelliğinin sağlandığını yani; her $\beta, \sigma, \tau \in B_x$ için, $(\beta \circ \sigma) \circ \tau = \beta \circ (\sigma \circ \tau)$ olduğunu gösterelim: $(x, y) \in (\beta \circ \sigma) \circ \tau$ için,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\exists z \in X)(x, z) \in \beta \circ \sigma \text{ ve } (z, y) \in \tau \\
&\Leftrightarrow (\exists z \in X)\left[(\exists u \in X)(x, u) \in \beta,\ (u, z) \in \sigma\right] \text{ ve } (z, y) \in \tau \\
&\Leftrightarrow (\exists u \in X)(x, u) \in \beta \text{ ve } (u, y) \in \sigma \circ \tau \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \beta \circ (\sigma \circ \tau)
\end{aligned}$$

olup istenen elde edilir. Yani $(B_x, \circ)$ bir yarıgruptur.

Tanım 2.3.3 [14] B_x bağıntılar yarıgrubundaki herhangi bir β elemanı için,

$$dom\,\beta = \{x \in \mathrm{X} : (\exists y \in \mathrm{X})(x, y) \in \beta\} \qquad \textbf{(2.14)}$$

$$im\,\beta = \{y \in \mathrm{X} : (\exists x \in \mathrm{X})(x, y) \in \beta\} \qquad \textbf{(2.15)}$$

kümelerine sırasıyla β bağıntısının tanım kümesi ve görüntü kümesi denir.

Tanım 2.3.4 [14] B_x bağıntılar yarıgrubundaki bir β bağıntısının tersi

$$\beta^{-1} = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : (y, x) \in \beta\} \qquad \textbf{(2.16)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5 [14] X boştan farklı bir küme ve β, X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x \in X$ için,

$$x\beta = \{y \in \mathrm{X} : (x, y) \in \beta\} \qquad \textbf{(2.17)}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.6 [17] $\beta \in B_x$ olsun. Her $x \in dom\beta$ için $(x, y) \in \beta$ olacak şekilde bir tek $y \in \mathrm{X}$ varsa β bağıntısına kısmi dönüşüm denir.

Tanım 2.3.7 [17] X kümesi boştan farklı bir küme ve $(B_x, \circ)$ bağıntılar yarıgrubu olmak üzere,

$$P_x = \{\beta \in \mathrm{B}_x : \beta \;\text{ bir kısmi dönüşüm}\}$$

kümesi B_x yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgruba tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

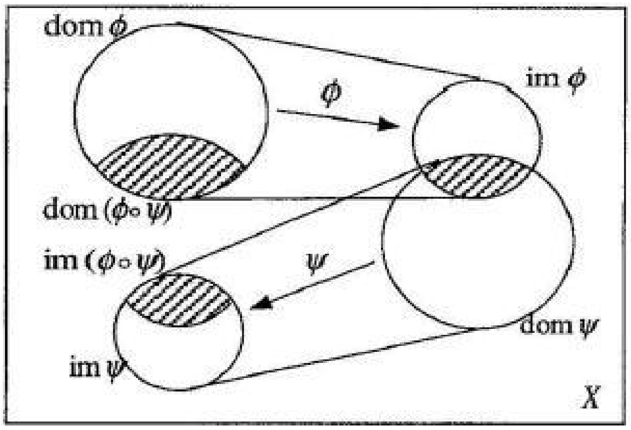
Önerme 2.3.8 [14] Her ϕ, $\psi \in P_x$ için,

$$dom(\phi \circ \psi) = [im\phi \cap dom\psi]\phi^{-1} \qquad \textbf{(2.18)}$$

$$im(\phi \circ \psi) = [im\phi \cap dom\psi]\psi \qquad \textbf{(2.19)}$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle verilen dönüşümleri ve bileşkesini şekil 2.2’deki gibi gösterelim.



Şekil 2.2 : İki dönüşümün bileşkesinin tanım ve değer kümesi.

$dom(\phi\circ\psi)=[im\phi\cap dom\psi]\phi^{-1}$ oluşu:

$$\begin{aligned}\forall x\in dom(\phi\circ\psi) &\Leftrightarrow (\exists y\in X),\ (x,y)\in\phi\circ\psi\\ &\Leftrightarrow (\exists z\in \mathrm{X}),\ (x,z)\in\phi \text{ ve } (z,y)\in\psi\\ &\Leftrightarrow z\in im\phi\cap dom\psi \text{ ve } x\in z\phi^{-1}\\ &\Leftrightarrow x\in[im\phi\cap dom\psi]\phi^{-1}\end{aligned}$$

şeklinde olup istenen elde edilir.

$im(\phi\circ\psi)=[im\phi\cap dom\psi]$ oluşu:

$$\begin{aligned}\forall x\in im(\phi\circ\psi) &\Leftrightarrow (\exists y\in \mathrm{X}),\ (y,x)\in\phi\circ\psi\\ &\Leftrightarrow (\exists z\in \mathrm{X}),\ (y,z)\in\phi \text{ ve } (z,x)\in\psi\\ &\Leftrightarrow z\in im\,\phi\cap dom\,\psi\ \ ve\ \ x\in z\psi\\ &\Leftrightarrow x\in[im\,\phi\cap dom\psi]\psi\end{aligned}$$

Tanım 2.3.9 [17] X boştan farklı bir küme ve $\beta\in \mathrm{B}_x$ kısmi bir dönüşüm olsun. β bağıntısının tanım kümesi X ise yani $dom\beta=X$ ise β bağıntısına tam dönüşüm veya dönüşüm denir.

Tanım 2.3.10 [17] X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere X kümesinden yine X kümesine olan tüm tam dönüşümlerin kümesini T_x ile gösterelim. T_x kümesi üzerinde $\circ$ bileşke işlemi tanımlanırsa, T_x bu işlemle bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba tam dönüşümler yarıgrubu denir.

Tanım 2.3.11 [23] X boştan farklı herhangi bir küme ve β, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman,

(i) Her $x \in \mathrm{X}$ için $(x,x) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısına yansımalıdır denir.

(ii) Her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısına simetriktir denir.

(iii) Her $x,y \in X$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta$ iken $x = y$ oluyorsa, β bağıntısına ters simetrik denir.

(iv) Her $x,y,z \in X$ için$(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ oluyorsa, β bağıntısına geçişmelidir denir.

Tanım 2.3.12 [23] X boştan farklı bir küme ve β, X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli ise β bağıntısına denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.3.13 [14] $X \neq \varnothing$ ve $\pi = \{A_i : i \in I\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir kümesi olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanırsa π kümesine X kümesinin bir parçalanışı denir:

(i) Her $i \in I$ *için* $A_i \neq \varnothing$

(ii) Her $i \neq j$ *için* $A_i \cap A_j = \varnothing$

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

Önerme 2.3.14 [14] Boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir β denklik bağıntısı tanımlanmış olsun. O zaman $\Phi(\beta) = \{x\beta : x \in X\}$ kümesi X için parçalanıştır. Tersine, $\pi = \{A_i : i \in I\}$ kümesi X in bir parçalanışı olsun. O zaman,

$$\psi(\pi) = \{(x,y) \in X \times X : (\exists i \in I) x, y \in A_i\}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.3.15 [14] Önerme 2.3.14 ile verilen $\Phi(\beta)$ kümesinin elemanlarına β bağıntısının denklik sınıfları denir. $\Phi(\beta)$ kümesine, X kümesinin β denklik bağıntısına göre bölüm kümesi denir ve $\Phi(\beta) = X/\beta$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\beta^{\mu} : X \to X / \beta \tag{2.20}$$

için $x\beta^{\mu} = x\beta$ şeklinde tanımlanan dönüşüme doğal β **-** dönüşümü denir.

Önerme 2.3.16 [17] $\phi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. O zaman $\phi \circ \phi^{-1}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $\phi \circ \phi^{-1}$ bağıntısına ϕ dönüşümünün çekirdeği denir ve $\ker \phi = \phi \circ \phi^{-1}$ olarak yazılır.

İspat: $\phi \circ \phi^{-1}$ bağıntısını daha açık yazalım:

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi^{-1} &= \{(x, y) \in X \times X : (\exists z \in X)(x, z) \in \phi, (y, z) \in \phi\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X : x\phi = y\phi\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Böylece $\phi \circ \phi^{-1}$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğu açıktır.

2.4 Kongrüanslar

Tanım 2.4.1 [14] S bir yarıgrup ve R de S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Her $a \in S$ ve her $(x, y) \in R$ için $(ax, ay) \in R$ ve $(xa, ya) \in R$ oluyorsa R bağıntısına sırasıyla sol uyumlu ve sağ uyumlu bağıntı denir. Bir R bağıntısı hem sol uyumlu hem de sağ uyumlu ise bu bağıntıya uyumlu bağıntı denir.

Tanım 2.4.2 [14] Verilen herhangi bir S yarıgrubu üzerinde bir R denklik bağıntısı tanımlayalım. R sol uyumlu ise R denklik bağıntısına sol kongrüans, sağ uyumlu ise R denklik bağıntısına sağ kongrüans denir. Bir R denklik bağıntısı hem sol uyumlu hem de sağ uyumlu ise bu bağıntıya kongrüans denir.

Önerme 2.4.3 [14] S bir yarıgrup olsun. S üzerindeki ρ bağıntısının kongrüans olması için gerek ve yeter şart sağ ve sol kongrüans olmasıdır.

İspat: ρ bir kongrüans olsun. $(s, t) \in \rho$ *ve* $a \in S$ ise yansımadan $(a, a) \in \rho$ uyumluluktan (as, at) ve $(sa, ta) \in \rho$ olur. Böylece ρ hem sol uyumludur hem de sağ uyumludur.

Tersine, ρ hem sol kongrüans hem de sağ kongrüans ve $(s, t), (s', t') \in \rho$ olsun. Sağ uyumluluktan $(ss', ts') \in \rho$ ve sol uyumluluktan $(ts', tt') \in \rho$ olur. Böylece ρ kongrüanstır.

Tanım 2.4.4 [17] S bir yarıgrup ve ρ bir kongrüans olsun. S/ρ üzerinde ikili işlemi $a\rho,\ b\rho \in S/\rho$ olmak üzere,

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho \qquad \textbf{(2.22)}$$

şeklinde tanımlarsak, S/ρ bu işlemle bir yarıgrup olup bu yarıgruba S yarıgrubunun ρ ile bölüm yarıgrubu denir.

Örnek 2.4.5 [17] $S = (\mathbb{N}, +)$ bir yarıgrup ve $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: 3|(x-y)\}$ şeklinde olsun. O zaman her $x, y, z \in \mathbb{N}$ için,

(i) $3 | (x-x) = 0$ olup ρ bağıntısı yansımalı,

(ii) $3 | (x-y) \Rightarrow 3 | (y-x)$ olup ρ bağıntısı simetrik,

(iii) $3 / (x-y)$ ve $3 | (y-z) \Rightarrow 3 | ((x-y)+(y-z)) \Rightarrow 3 | (x-z)$ olup ρ bağıntısı geçişmelidir. Böylece verilen ρ bağıntısı denklik bağıntısıdır. Ayrıca her $a \in S$ için, $3 | (x-y) \Rightarrow 3 | a(x-y)$ olup ρ bağıntısı sol uyumlu ve S yarıgrubu değişmeli olduğundan ρ bağıntısı aynı zamanda sağ uyumludur. Böylece ρ bağıntısı bir kongrüanstır.

Teorem 2.4.6 [14] S ve T iki yarıgrup olmak üzere $\phi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. O zaman,

$$\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(x, y) \in S \times S: x\phi = y\phi\} \qquad \textbf{(2.23)}$$

bağıntısı S yarıgrubu üzerinde bir kongrüanstır. Ayrıca $im\alpha = im\phi$ olacak şekilde bir $\alpha : S/\ker\phi \to T$ monomorfizmi vardır.

İspat: Önerme 2.4.3 kullanılırsa $\ker\phi$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu biliniyor. Şimdi bu bağıntının bir kongrüans olduğunu gösterelim: Kabul edelim ki (a, a'), $(b, b') \in \ker\phi$ olsun. O zaman $a\phi = a'\phi$ ve $b\phi = b'\phi$ olup,

$$(ab)\phi = (a\phi)(b\phi) = (a'\phi)(b'\phi) = (a'b')\phi \qquad \textbf{(2.24)}$$

elde edilir. Böylece $(ab, a'b') \in \ker\phi$ olup $\ker\phi$ bir kongrüanstır. Şimdi kolaylık açısından $\ker\phi = \kappa$ diyelim. Ayrıca $\alpha : S/\kappa \to T$ dönüşümünü,

$$(a\kappa)\alpha = a\phi \ \ (a \in S) \qquad \textbf{(2.25)}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan,

$$a\kappa = b\kappa \Leftrightarrow (a,b) \in \kappa \Rightarrow a\phi = b\phi \qquad \textbf{(2.26)}$$

olup α dönüşümü hem iyi tanımlı hem de birebirdir. Her $a,b \in S$ için,

$$\begin{aligned} \left[(a\kappa)(b\kappa)\right]\alpha &= \left[(ab)\kappa\right]\alpha = (ab)\phi \\ &= (a\phi)(b\phi) = \left[(a\kappa)\alpha\right]\left[(b\kappa)\alpha\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(2.27)}$$

şeklinde olup α dönüşümü bir monomorfizmdir. Ayrıca α dönüşümünün tanımından $im\alpha = im\phi$ olduğu açıktır.

3. GREEN DENKLİK BAĞINTILARI VE DÜZGÜN YARIGRUPLAR

3.1 L, R, D, H, J Green Denklik Bağıntıları

Tanım 3.1.1 [14] S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a tarafından üretilen esas sol ideal $S^1a = Sa \cup \{a\}$, esas sağ ideal $aS^1 = aS \cup \{a\}$ ve esas ideal $S^1aS^1 = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}$ şeklinde tanımlanır.

Green denklikleri, yarıgrubun elemanlarını karakterize eden beş tane denklik bağıntısından oluşur. Bu bağıntıları ilk kez James Alaxender Green, 1951 yılında tanımlamıştır. Bunlar L, R, D, H, J dir.

Tanım 3.1.2 [14] S bir yarıgrup olsun. $L = \{(a,b) \in SxS = S^1a = S^1b\}$ bağıntısına sol Green denklik bağıntısı ve $R = \{(a,b) \in SxS : aS^1 = bS^1\}$ bağıntısına sağ Green denklik bağıntısı denir. Burada L *ve* R bağıntılarının birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 3.1.3 [17] S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olsun. O zaman,

(i) $a,b \in L \Leftrightarrow xa = b,\ yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.

(ii) $a,b \in R \Leftrightarrow au = b,\ bv = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ vardır.

İspat: (i) Kabul edelim ki $(a,b) \in L$ olsun. O zaman $a \in S^1a = S^1b$ şeklinde olup $a \in S^1b$ olur. Yani $a = yb$ olacak şekilde bir $y \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $b \in S^1b = S^1a$ olup $b \in S^1a$ olur. Yani $b = xa$ olacak şekilde bir $x \in S^1$ vardır. Tersine kabul edelim ki $x, y \in S^1$ için $xa = b$ ve $yb = a$ olsun. $t \in S^1a$ ise $t = sa$ olacak şekilde bir $s \in S^1$ vardır. Dolayısıyla,

$$t = sa = s(yb) = (sy)b \in S^1b \qquad \textbf{(3.1)}$$

olup $S^1a \subseteq S^1b$ elde edilir. Benzer şekilde $S^1b \subseteq S^1a$ olacağından $S^1a = S^1b$ olup $a,b \in L$ elde edilir.

(ii) Benzer şekilde elde edilir.

Önerme 3.1.4 [14] L denklik bağıntısı sağ kongrüans ve R denklik bağıntısı sol kongrüanstır.

İspat: Kabul edelim ki $a,b \in L$ ve $s \in S$ olsun. O halde $xa = b$ ve $yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. Bu eşitlikleri sağdan s elemanı ile çarparsak $xas = bs$ ve $ybs = as$ olup $(as, bs) \in L$ olur. Böylece L denklik bağıntısı sağ uyumlu olup bir sağ kongrüanstır.

Şimdi $(a,b) \in R$ ve $s \in S$ alalım. O zaman $at = b$ ve $br = a$ olacak şekilde $t, r \in S^1$ vardır. Bu eşitlikleri soldan s elemanı ile çarparsak $sat = sb$ ve $sbr = sa$ olup $(sa, sb) \in R$ olur. Yani R denklik bağıntısı sol uyumlu olup bir sol kongrüanstır.

Örnek 3.1.5 [24] $X = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere T_X transformasyon yarıgrubunu alalım. T_X içindeki iki eleman,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. $im\,\alpha = im\,\beta$ dır. Dolayısıyla $\alpha L \beta$ olur. Diğer yandan,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in T_X \quad \text{için}$$

$$\gamma\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \gamma\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan bu iki fonksiyonun L- bağlantılı olmadığı sonucuna varılır. O halde L bağıntısı sol kongrüans değildir.

Önerme 3.1.6 [14] Sağ ve sol Green denklik bağıntıları için $L \circ R = R \circ L$ geçerlidir. Yani L *ve* R bağıntıları değişmelidir.

İspat: S bir yarıgrup, $a,\ b \in S$ ve $(a,b) \in L \circ R$ olsun. aLc ve cRb olacak şekilde S de bir c vardır. Yani,

$$xa = c, \ \ cu = b \qquad \text{ve} \qquad yc = a, \ \ bv = c \tag{3.2}$$

olacak şekilde S^1 de x, y, u, v elemanları vardır. S nin ycu elemanının yerine d yazarsak,

$$au = ycu = d\ ,\ dv = ycuv = ybv = yc = a \qquad \textbf{(3.3)}$$

elde edilir ve böylece $a\,R\,d$ olur.

Yine aynı işlemi uygularsak,

$$yb = ycu = d\ ,\ \ xd = xycu = xau = cu = b \qquad \textbf{(3.4)}$$

olup böylce $d\,L\,b$ dir. Buradan $(a,b) \in R \circ L$ elde edilir. $L \circ R \subseteq R \circ L$ olduğunu göstermiş olduk. Terside benzer şekilde kolaylıkla gösterilir. Böylece $L \circ R = R \circ L$ elde edilir.

Tanım 3.1.7 [14] S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. J denklik bağıntısını şöyle tanımlayabiliriz: aJb olması için gerek ve yeter şart $S^1aS^1 = S^1bS^1$ olmasıdır yani $xay = b$, $ubv = a$ olacak şekilde S^1 de x, y, u, v elemanları vardır.

Tanım 3.1.8 [25] S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. L ve R nin kesişimleri H denkliğini ve L *ve* R nin birleşimleri D denkliğini verir. Yani,

$$aHb \Leftrightarrow aLb \text{ ve } aRb \quad (a,b \in S) \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$aDb \Leftrightarrow aLc \text{ ve } cRb \qquad (a,b,c \in S)$$

Örnek 3.1.9 [14] G herhangi bir grup olmak üzere, $L = R = H = D = J = G \times G$ şeklindedir. Herhangi bir değişmeli S yarıgrubu üzerinde, Green denklik bağıntıları arasında $L = R = H = D = J$ şeklinde bir ilşki vardır.

Örnek 3.1.10 [15] $X = \{1,2,3,...,7\}$ olmak üzere, S yarıgrubu ise,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

elemanları tarafından üretilen T_X tam dönüşümler yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olsun.

O zaman S yarıgrubundaki elemanlardan bazıları $\alpha,\ \beta,\ \alpha\beta,\ \beta\alpha\ ,\alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha\beta$ şeklindedir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa, $\beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha$ olup $\beta\alpha\, R\, \beta\alpha\beta$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\alpha\beta\, R\, \alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha\, L\, \alpha\beta\alpha,\ \alpha\beta\, L\, \beta\alpha\beta$ olduğu görülür.

Tanım 3.1.11 [14] S bir yarıgrup olsun. S nin her elemanı sonlu mertebeli ise bu yarıgruba periyodik yarıgrup denir. Buradan anlaşılıyor ki sonlu bir yarıgrup periyodiktir.

Önerme 3.1.12 [14] S periyodik bir yarıgrup ise $D = J$ dir.

İspat: S bir yarıgrup, $(a,b \in S)$ ve aJb olsun. $xay = b$, $ubv = a$ olacak şekilde $x,y,u,v \in S^1$ vardır. $a\,L\,c$, $c\,R\,b$ olacak şekilde bir $c \in S$ alalım. Buradan,

$$a = (ux)a(yv) = (ux)^2 a(yv)^2 = (ux)^3 a(yv)^3 = \ldots$$

$$b = (xu)b(vy) = (xu)^2 b(vy)^2 = (xu)^3 b(vy)^3 = \ldots$$

denklemleri elde edilir.

S periyodik olduğundan, $(ux)^m$ yi idempotent yapan bir m vardır. $c = xa$ alırsak,

$$a = (ux)^m a(yv)^m = (ux)^m (ux)^m a(yv)^m = (ux)^m a = (ux)^{m-1} uc \qquad \textbf{(3.6)}$$

ve böylece $a\,L\,c$ elde edilir. $cy = xay = b$ ve $(vy)^n$ idempotent olacak şekilde bir n seçersek,

$$c = xa = x(ux)^{n+1} a(yv)^{n+1} = (xu)^{n+1} xay(vy)^n v$$

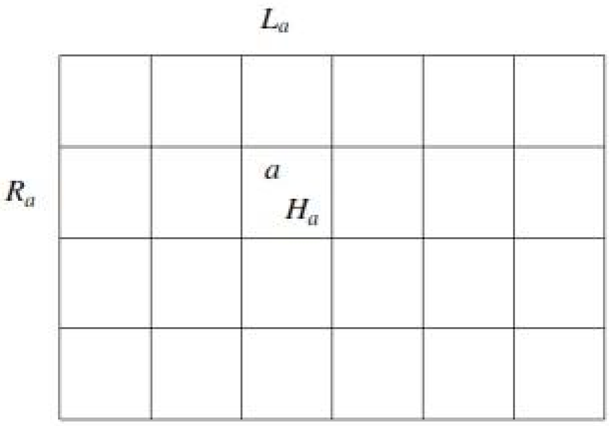
$$= (xu)^{n+1} b(vy)^{2n} v = (xu)^{n+1} b(vy)^{n+1} (vy)^{n-1} v$$

$$= b(vy)^{n-1} v$$

olur. Böylece $c\,R\,b$ sağlanır.

3.2 D-Sınıflarının Yapısı

Bir denklik sınıfı $D = L \circ R$ şeklinde olup, L ve R denklik sınıflarının birleşimidir. Ayrıca $H = L \cap R$ olduğundan, bir H denklik sınıfı ise L ve R denklik sınıflarının kesişimidir. Dolayısıyla bir D denklik sınıfı şekil 3.1'deki gibi gösterilebilir:



Şekil 3.1 : Bir D-sınıfının yumurta kutusu tablosu.

Teorem 3.2.1 (Green) [16] (i) S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olmak üzere $(a,b) \in R$ olsun. Ayrıca $s,t \in S^1$ olmak üzere $as = b$ ve $bt = a$ olsun. O zaman,

$$\rho_s : \ L_a \to L_b, \qquad x \to xs \tag{3.7}$$

$$\rho_t : \ L_b \to L_a, \qquad x \to xt \tag{3.8}$$

olarak tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi olup bir H sınıfını yine bir H sınıfına götürürler.

(ii) S bir yarıgrup ve $a,b \in S$ olmak üzere $(a,b) \in L$ olsun. Ayrıca $s,t \in S^1$ olmak üzere $sa = b$ ve $tb = a$ olsun.

$$\lambda_s : R_a \to R_b, \quad x \to sx \tag{3.9}$$

$$\lambda_t : R_b \to R_a, \quad x \to tx \qquad \textbf{(3.10)}$$

olarak tanımlanan λ_s ve λ_t dönüşümleri birbirinin tersi olup bir H sınıfını yine bir H sınıfına götürürler.

İspat: (i) $x \in L_a$ alalım. Buradan $(x,a) \in L$ olur. Her $s \in S$ için L denklik bağıntısı sağ kongrüans olup $(xs, as) \in L$ şeklindedir. Buradan $as = b$ olup $xs = x\rho_s \in L_b$ olduğu görülür. Böylece ρ_s dönüşümü L_a'daki elemanları L_b'ye götürür. Benzer şekilde ρ_t dönüşümü de L_b'deki elemanları L_a'ya götürür. Şimdi herhangi $x \in L_a$ alalım. Dolayısıyla $(x,a) \in L$ olup, bir $u \in S^1$ için $x = ua$ şeklindedir. Buradan,

$$x\rho_s\rho_t = xst = uast = ubt = ua = x \qquad \textbf{(3.11)}$$

elde edilir. Benzer şekilde her $x \in L_b$ için $x\rho_t\rho_s = x$ şeklindedir. Dolayısıyla ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birbirinin tersi dönüşümlerdir. Böylece ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birebir ve örten dönüşümlerdir. Ayrıca, $x \in L_a$ olmak üzere $xst = x$ şeklinde olup $xR(x\rho_s)$ elde edilir. Şimdi $x, y \in L_a$ olmak üzere $(x,y) \in H$ alalım. Buradan, $(x\rho_s) R\, x\, R\, y\, R (y\rho_s)$ elde edilir. Ayrıca $x\rho_s, y\rho_s \in L_a$ olup $(x\rho_s, y\rho_s) \in L$ elde edilir. Sonuç olarak $(x\rho_s) H (y\rho_s)$ şeklindedir.

(ii)Benzer şekilde yapılır.

3.3 Düzgün Yarıgruplar

Düzgün yarıgruplar ilk defa 1951 de J.A. Green tarafından [26] da yayınlandı. Yarıgruplarda düzgünlük kavramı halkalardaki düzgünlük kavramından uyarlandığı J. Von Neumann tarafından [27] de farkedildi.

Tanım 3.3.1 [15] S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Bir $x \in S$ için $axa = a$ oluyor ise, a elemanına düzgün eleman denir.

S yarıgrubunun her elemanı düzgün ise S ye düzgün yarıgrup denir.

Örnek 3.3.2 [15] 1) $x = xx^{-1}x$ olduğundan tüm gruplar düzgündür.

2) Tüm T_x tam dönüşüm yarıgrupları düzgündür.

3) Tüm bandlar düzgündür.

4) Rees matris yarıgrupları düzgündür.

Önerme 3.3.3 [14] S bir yarıgrup ve $a \in S$ düzgün bir eleman olsun. O zaman D_a sınıfındaki her elemanı düzgündür.

İspat: $a \in S$ düzgün bir eleman olsun. O zaman bir $x \in S$ için $axa = a$ geçerlidir. Ayrıca $b \in L_a$ ise o zaman $u, v \in S^1$ olmak üzere $ua = b$ ve $vb = a$ şeklindedir. Böylece,

$$b = ua = uaxa = bxa = b(xv)b$$

olup $b \in L_a$ düzgündür. Benzer şekilde $b \in R_a$ ise o zaman $s, t \in S^1$ olmak üzere

$$as = b \text{ ve } bt = a$$

şeklindedir. Böylece,

$$b = as = axas = axb = b(tx)b \qquad \textbf{(3.12)}$$

olup $b \in R_a$ düzgündür. Sonuç olarak D_a sınıfındaki her eleman düzgündür.

Tanım 3.3.4 [15] D bir D-sınıfı olsun. O zaman ya D nin her elemanı düzgündür ya da D nin hiçbir elemanı düzgün değildir. Her elemanı düzgün olan D-sınıfına düzgün D-sınıfı denir.

Lemma 3.3.5 [15] S düzgün bir yarıgrup ve $\phi : S \to T$ örten bir homomorfizm olsun. $e \in T$ bir idempotent ise o zaman $f\phi = e$ olacak şekilde bir $f \in S$ idempotenti vardır.

İspat: $x \in S$ ve $x\phi = e$ olsun. y ise x^2 elemanının S yarıgrubundaki tersi olsun. Yani $x^2yx^2 = x^2$ ve $yx^2y = y$ sağlansın. O zaman $f = xyx$ olmak üzere,

$$f\phi = (x\phi)(y\phi)(x\phi) = (x\phi)^2\, y\phi (x\phi)^2 = \left(x^2yx^2\right)\phi = \left(x^2\right)\phi = e^2e$$

şeklindedir. Dolayısıyla $f\phi = e$ elde edilir. Ayrıca,

$(xyx)(xyx) = x\left(yx^2y\right)x = xyx$ olup f bir idempotentdir.

3.4 Ters Yarıgruplar

Tanım 3.4.1 [14] Bir S yarıgrubunun herhangi iki a ve b elemanı için $aba = a$ ve $bab = b$ sağlanıyor ise a ve b elemanlarına birbirinin tersidir denir.
Herhangi bir yarıgrupta bir elemanın tersi tek olmayabilir. Örneğin bir dikdörtgensel bantta her eleman birbirinin tersidir. Yani bir yarıgrupta bir elemanın birden fazla tersi olabilir. Bir S yarıgrubunda bir a elemanının terslerinin kümesi $V(a)$ ile gösterilecektir.
Tanım 3.4.2 [15] S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubundaki her elemanın bir tek tersi varsa S yarıgrubuna ters yarıgrup denir.
Böylece bir ters yarıgrubun herhangi bir a elemanı için, $V(a)$ kümesi tek elemana sahiptir.
Teorem 3.4.3 [16] S bir yarıgrup olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) S bir ters yarıgruptur.

(2) S düzgün bir yarıgruptur ve idempotentler değişmelidir.

(3) S yarıgrubundaki her L-sınıfı ve her R-sınıfı tam olarak bir tane idempotent içerir.

İspat : Teoremin ispatı için Ruskuc, N. (2001) e bakınız.

Tanım 3.4.4 [14] S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun idempotentlerinin oluşturduğu küme S nin değişmeli bir alt grubudur. Bu alt gruba idempotentlerin yarılatisi denir. Bu kümeyi E_S veya E ile göstereceğiz.
Önerme 3.4.5 [17] S bir ters yarıgrup ve E ise S nin idempotentlerinin oluşturduğu yarılatis olsun. O zaman,

(1) Her $a,b \in S$ için $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ şeklindedir.

(2) Her $a \in S$ için ve her $e \in E$ için aea^{-1} ve $a^{-1}ea$ elemanları idempotentdir.

(3) $aLb \Leftrightarrow (a^{-1}a) = b^{-1}b$ ve $aRb \Leftrightarrow aa^{-1} = bb^{-1}$ şeklindedir.

(4) $e, f \in E$ olsun. O zaman $e\,D\,f$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists a \in S$ için $aa^{-1} = e$ ve $a^{-1}a = f$ olmasıdır.

İspat: (1) aa^{-1} ve bb^{-1} idempotent olduğundan,

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = a\left(bb^{-1}\right)\left(a^{-1}a\right)b = a\left(a^{-1}a\right)\left(bb^{-1}\right)b = ab \tag{3.13}$$

$$\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = b^{-1}\left(a^{-1}a\right)\left(bb^{-1}\right)a^{-1} = \left(b^{-1}bb^{-1}\right)\left(a^{-1}aa^{-1}\right) = b^{-1}a^{-1} \tag{3.14}$$

denklemleri sağlanır ve böylece $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ olduğu gösterilmiş olur.

(2) İdempotentler değişmeli olduğundan

$$\left(aea^{-1}\right)^2 = ae\left(a^{-1}a\right)ea^{-1} = aa^{-1}aeea^{-1} = aea^{-1}$$

$$\left(a^{-1}ea\right)^2 = a^{-1}e\left(aa^{-1}\right)ea = a^{-1}aa^{-1}eea = a^{-1}ea$$

olup aea^{-1} ve $a^{-1}ea$ elemanaları idempotenttir.

(3) Kabul edelim ki $a\,L\,b$ olsun. Ayrıca a elemanının tersi a^{-1} olsun. O zaman $a^{-1}a$ elemanı $L_a = L_b$ sınıfında bir idempotenttir. Diğer taraftan $b^{-1}b$ elemanı $L_b = L_a$ sınıfında bir idempotenttir. Teorem 3.4.3 'den her L sınıfı tam olarak bir idempotent içerir. Dolayısıyla $a^{-1}a = b^{-1}b$ elde edilir.

Tersine, $a^{-1}a = b^{-1}b$ olsun. O zaman $a\left(a^{-1}a\right) = a\left(b^{-1}b\right) \Rightarrow a = \left(ab^{-1}\right)b$ ve aynı zamanda $b\left(b^{-1}b\right) = b\left(a^{-1}a\right) \Rightarrow b = \left(ba^{-1}\right)a$ şeklinde olup sonuç olarak $a\,L\,b$ elde edilir. Diğer kısım tamamen benzer şekilde yapılır.

(4) $e, f \in E$ olmak üzere $e\,D\,f$ olsun. O zaman bir $a \in S$ için $e\,R\,a$ ve $a\,L\,f$ şeklindedir. Buradan da $aa^{-1} = e$ ve $a^{-1}a = f$ elde edilir.

Örnek 3.4.6 [14] 1) Her grup bir ters yarıgruptur.

2)Tüm yarılatisler ters yarıgruptur.

3) Munn yarıgrupları ters yarıgruptur.

4) Çift devirsel yarıgruplar ters yarıgruptur.

Teorem 3.4.7 [14] S bir ters yarıgrup, T herhangi bir yarıgrup ve $\phi : S \to T$ örten bir yarıgrup homomorfizm olsun. O zaman T bir ters yarıgrup ve ϕ bir ters yarıgrup homomorfizmidir.

İspat: Howie (1976)'ya bakınız.

Sonuç 3.4.8 [14] S herhangi bir ters yarıgrup ve ρ ise S üzerinde tanımlanan bir kongrüans olsun. O zaman $S \setminus \rho$ yarıgrubu bir ters yarıgruptur.

Tanım 3.4.9 [14] Boş olmayan bir X kümesinden X kümesine olan birebir kısmi dönüşümlerin oluşturduğu I_x yarıgrubuna simetrik ters yarıgrup denir.

Lemma 3.4.10 [14] V herhangi bir yarıgrup ve S de V yarıgrubunun bir ters alt yarıgrubu olsun. O zaman,

1. S yarıgrubundaki her e, f idempotent çifti için $Ve = Vf \Rightarrow e = f$ ve $eV = fV \Rightarrow e = f$ 'dir.

2. S yarıgrubundaki her e, f idempotent çifti için $Ve \cap Vf = Vef$ ve $eV \cap fV$ 'dir.

3. Her $a \in S$ için $Vaa^{-1} = Va^{-1}$, $Va^{-1}a = Va$, $aa^{-1}V = aV$, $a^{-1}aV = a^{-1}V$ 'dir.

İspat: (1) $e, f \in S$ idempotentler olsun. Eğer $Ve = Vf$ ise, $e = ee = xf$ olacak şekilde bir $x \in V$ vardır. Buradan $ef = xf^2 = xf = e$ elde edilir. Benzer şekilde $f = f\,f = ye$ olacak şekilde bir $y \in V$ vardır. Buradan $fe = ye^2 = ye = f$ elde edilir. İdempotentler değişmeli olduğundan $ef = e = fe = f$ olup $e = f$ elde edilir. $eV = fV \Rightarrow e = f$ kısmı da benzer şekilde ispatlanabilir.

(2) $Vef \subseteq Vf$, $Vef = Vfe \subseteq Ve$ olduğu açıktır. Buradan $Vef \subseteq Ve \cap Vf$ elde edilir.

Ayrıca $x, y, z \in V$ olmak üzere,

$$zef = xe^2 f = xef = yf^2 = yf = z \qquad \textbf{(3.15)}$$

elde edilir. Böylece $z = zef \in Vef$ olur. Dolayısıyla $Vef = Ve \cap Vf$ şeklindedir.

$eV \cap fV = e\,f\,V$ kısmı da benzer şekilde ispatlanır.

(3) Her $a \in S$ için,

$$Vaa^{-1} \subseteq Va^{-1} = Va^{-1}aa^{-1} \subseteq Vaa^{-1} \Rightarrow Vaa^{-1} = Va^{-1} \qquad \textbf{(3.16)}$$

$$Va^{-1}a \subseteq Va = Vaa^{-1}a \subseteq Va^{-1}a \Rightarrow Va^{-1}a = Va$$

olduğu kolayca görülür. Diğer kısmı yine benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.4.11 [17]: S bir yarıgrup olsun. O zaman $\phi : S \to I_x$ dönüşümü bir monomorfizm olacak şekilde bir I_x simetrik ters yarıgrubu vardır.

İspat: İspat için Howie, 1976 bakınız.

Tanım 3.4.12 [14]: S bir ters yarıgrup ve $H \subseteq S$ olsun. H alt kümesinin S yarıgrubundaki kapanışı

$$Hw = \{s \in S : \left(\exists h \in H\right)\ h \leq s\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $Hw = H$ ise H alt kümesine kapalıdır denir.

Bir ters yarıgrubun her alt yarıgrubu ters olmayabilir. Bir S ters yarıgrubunda bir H alt yarıgrubunun ters olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in S$ için $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ olmasıdır.

Tanım 3.4.13 [14] : S bir ters yarıgrup ve ρ, S üzerinde herhangi bir kongrüans olsun. S yarıgrubunda idempotentlerin oluşturduğu yarılatisi E ile gösterelim. ρ kongrüansını E yarılatisine kısıtlarsak yine bir kongrüans elde ederiz. Elde edilen bu yeni kongrüansa ρ kongrüansının izi denir ve $\tau = tr\rho$ ile gösterilir. Burada $e\tau$, herhangi bir τ -sınıfı olmak üzere, $e\tau = e\rho \cap E$ şeklindedir.

Tanım 3.4.14 [14]: S bir ters yarıgrup olmak üzere ρ kongrüansı S üzerinde tanımlansın ve E, S yarıgrubunun idempotentlerinin oluşturduğu yarılatis olsun. Her $e, f \in E$ için,

$$e\tau f \Rightarrow \left(\forall a \in s\right) a^{-1}ea\tau a^{-1}fa \tag{3.17}$$

ise, τ kongrüansına normaldir.

4. ÇİFT DEVİRSEL YARIGRUPLAR

4.1 Devirsel Yarıgruplar

S bir yarıgrup ve $\{U_i : i \in I\}$ kümesi de I indeks kümesi ile indekslenmiş S'nin alt yarıgruplarından oluşan bir küme olsun. S yarıgrubunun tüm alt yarıgruplarının arakesiti boştan farklı ise bu arakesit kümesi S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olur. Devirsel yarıgrup tanımının temelini bu düşünce oluşturmaktadır.

Bu bölümde, bu belirtilen noktadan hareketle, yarıgruplar için özellikler incelenecektir. Diğer bir deyişle, bir yarıgrubun alt yarıgruplarının bir ailesinin kesişiminin yarıgrup olmasından bahsedilecektir. Ardından kesişimin tek elemanlı olması durumunda bölümün asıl amacı olan devirsel yarıgrup yapısı tanımlanacak ve bu özel yarıgrubun önemli özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1 [14] S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. S yarıgrubunun A kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının arakesitine A kümesi ile üretilen alt yarıgrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.

$\langle A \rangle$ yarıgrubu, aşağıdaki iki özelliği sağlar:

- $A \subseteq \langle A \rangle$
- U kümesi S'nin A yı içeren bir alt yarıgrubu ise $\langle A \rangle \subseteq U$ dir.

  Ayrıca $\langle A \rangle$ alt yarıgrubu S nin tüm elemanlarını içeriyorsa, yani $\langle A \rangle = S$ ise S deki elemanlar A nın elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilirler. Bu durumda A kümesine S yarıgrubunun üreteç kümesi denir.

Tanım 4.1.2 [14] S bir yarıgrup ve $\varnothing \neq A \subseteq S$ olsun. O zaman

$$\langle A \rangle = \{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n : n \in N \text{ ve } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A\} \quad \textbf{(4.1)}$$

şeklindedir. Yani $\langle A \rangle$ yarıgrubu, A üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

Kabul edelim ki X kümesi tek elemandan oluşsun. O zaman $A=\{a\}$ şeklinde olup $\langle a\rangle$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.3 [14] $|A|=1$ ise yani A kümesi $A=\{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise $A=\langle a\rangle$ yarıgrubuna S nin a ile üretilen devirsel alt yarıgrubu denir. S yarıgrubu a ile üretiliyorsa bu durumda S ye devirsel (monogenic) yarıgrup denir. S bir yarıgrup ve $a\in S$ olsun. O zaman,

$$\langle a\rangle=\{a^n : n\in N\}=\{a,a^2,a^3,...,a^n,...\}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.4 [14] S bir yarıgrup ve a , S yarıgrubunun bir elemanı olmak üzere,

$$\langle a\rangle=\{a,a^2,a^3,...\}$$

a ile üretilen devirsel bir yarıgrup olsun. $a,a^2,a^3,...$ sıralamasında tekrarlanan elaman yoksa yani

$$a^m=a^n \Rightarrow m=n \qquad (m,n\in Z^+)$$

oluyor ise, $(\langle a\rangle,.)$ yarıgrubu $(N,+)$ doğal sayılar yarıgrubuna izomorf olur. Bu durumda $\langle a\rangle$ ya sonsuz devirsel yarıgrup adı verilir. Dolayısıyla a elemanına da S içinde sonsuz mertebelidir denir.

Tanım 4.1.5 [14] $a\in S$ olmak üzere, S , $\langle a\rangle$ tarafından üretilen sonlu bir yarıgrup olsun ve bu yarıgrupta a nın kuvvetlerinden oluşan bazı elemanlar tekrarlanıyor olsun. Bu durumda,

$$\{x\in N : (\exists y\in N)\ a^x=a^y,\ x\neq y\} \qquad \textbf{(4.2)}$$

kümesinde en az bir tane eleman vardır ve bu eleman en küçüktür. Bu eleman m ile gösterilir ve a elemanının indeksi adını alır. Bu durumda

$$\{x\in N : a^{m+x}=a^m\} \qquad \textbf{(4.3)}$$

kümesi de en az bir tane elemana sahip olur ve bu eleman en küçüktür. Bu eleman da r ile gösterelir ve a elemanının periyodu adını alır.

Aşağıdaki Tanımdan da anlaşılacağı gibi, Tanım 4.1.5 ile sonlu devirsel bir yarıgrup meydana gelir. Şimdi bu yarıgrubun tanımı ve a elemanının, dolayısıyla $\langle a \rangle$ yarıgrubunun mertebesi verilmektedir.

Tanım 4.1.6 [14] İndeksi m ve periyodu r olan bir a elemanı alalım. O halde,

$$a^m = a^{m+r} \tag{4.4}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$a^m = a^{m+r} = a^m a^r = a^{m+r} a^r = a^{m+2r}$$

elde edilir. Bu eşitliğe benzer şekilde devam edildiğinde $\forall q \in N$ için,

$$a^m = a^{m+qr} \tag{4.5}$$

şeklinde bir genellemeye ulaşılır. Böylece, m ve r nin en küçük olması ve (4.1) eşitliği ile, a nın

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}$$

biçiminde her biri farklı olan kuvvetleri elde edilir. Bu durum şu şekilde gösterilebilir:

$s \geq m$ koşulunu sağlayan her s sayısı için bölme algoritması ile

$s = m + qr + u$ olup $q \geq 0$ ve $0 \leq u \leq r-1$

şeklindedir. Buradan,

$$a^s = a^{m+qr} a^u = a^m a^u = a^{m+u} \tag{4.6}$$

elde edilir. O halde indeksi m ve periyodu r olan a elemanı ile üretilen $\langle a \rangle$ yarıgrubu sonludur. Bu yarıgruba sonlu devirsel (monogenic) yarıgrup denir ve bu yarıgrubun mertebesi $|\langle a \rangle| = m + r - 1$ dir. Yani $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^{m+r-1}\}$ şeklindedir. Dolayısıyla a elemanına da sonlu mertebelidir denir ve mertebesi yine $m + r - 1$ dir.

Örnek 4.1.7 [15] S sonsuz devirsel yarıgrup yani $S = [x] = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$ şeklinde tek eleman tarafından üretilen bir yarıgruptur. $\alpha : S \to (N_+, +)$ yı $\alpha(x^n) = n$ ile tanımlayalım.

$$\alpha\left(x^n x^m\right)=\alpha\left(x^{n+m}\right)=n+m=\alpha\left(x^n\right)+\alpha\left(x^m\right)$$

olduğundan α bir homomorfizmdir. Dahası α birebir ve örten olduğundan izmorfizmdir. Bundan dolayı, $S \cong \left(N_+,+\right)$ dır. Sonuçta her sonsuz devirsel yarıgrup, pozitif tamsayıların toplamsal yarıgrubuna izomorftur.

4.2 Devirsel Yarıgrupların Çekirdek Kavramı İle İlgili Bazı Özellikleri

Devirsel yarıgruplara ait bazı tanım ve özellikler vardır. Burada bunlardan biri olan bir devirsel yarıgrubun "çekirdeği" kavramı tanımlanıp sağladığı özellikler verilecektir. Ayrıca devirsel yarıgrupların hangi koşul altında grup tanımladığından ve bir devirsel yarıgrupta idempotent elemanın kesinlikle varlığı için gerekli olan ön koşuldan bahsedilecektir.

Tanım 4.2.1 [14] Tanım 4.1.6 daki gibi verilen indeksi m ve periyodu r olan a elemanının ürettiği $\langle a\rangle$ devirsel yarıgrubunu alalım.

$$K_a=\left\{a^m,a^{m+1},...,a^{m+r-1}\right\} \qquad \textbf{(4.7)}$$

kümesi $\langle a\rangle$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgruba $\langle a\rangle$ nın çekirdeği adı verilir.

Teorem 4.2.2 [14] Tanım 4.2.1 de verilen K_a kümesi $\langle a\rangle$ nın bir alt grubudur.

İspat : Öncelikle K_a nın kapalılık özelliğini sağladığını gösterelim. Bunun için,

$$a^{m+u},\ a^{m+v}\in K_a \quad \left(0\le u,\ v\le r-1\right) \qquad \textbf{(4.8)}$$

elemanlarını alalım. Bu durumda,

$$x\equiv v-u-m \ \left(\operatorname{mod} r\right) \ \text{ ve } \ 0\le \text{x} \le \text{r-1}$$

olacak şekilde bir x sayısı seçildiğinde K_a içinde

$$a^{m+u}\,a^{m+x}=a^{m+v} \qquad \textbf{(4.9)}$$

eşitliğini sağlayan bir a^{m+x} elemanı bulunabilir. Şimdi $m,m+1,...,m+r-1$ göz önüne alınırsa bu sayıların içinde

$$0\le g\le \text{r-1} \quad \text{ve} \quad m+g\equiv 1\left(\operatorname{mod} r\right) \qquad \textbf{(4.10)}$$

koşulunu sağlayan bir g sayısı vardır. Buradan $\forall k \in N$ için,

$$k\left(m+g\right) \equiv k\left(\text{mod } r\right)$$

elde edilir. Böylece $k=1,2,...,r$ için, a^{m+g} nun kuvvetleri olan $a^{(m+g)k}$ elemanları K_a kümesinin içindedir. Dolayısıyla K_a devirseldir. Ayrıca,

$$0 \leq z \leq \text{r-1} \quad \text{ve} \quad m+z \equiv 0 \left(\text{mod}\, r\right) \qquad \textbf{(4.11)}$$

koşulunu sağlayan z sayısı için, a^{m+z} birim elemandır. Son olarak (4.9) den her elemanın tersinin var olduğu da söylenebilir. O halde K_a kümesi $a^{(m+g)}$ $\left(0 \leq g \leq \text{r-1 ve } m+g \equiv 1\left(\text{mod}\, r\right)\right)$ ile üretilen r elemanlı devirsel bir yarıgruptur.

Örnek 4.2.3 [14] $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi için, T_x tam transformasyon yarıgrubunun bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

elemanını düşünelim. Şimdi bu elemanın kuvvetlerini hesaplayalım.

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $\langle \alpha \rangle = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7\}$ olup $\alpha^7 = \alpha^{4+3} = \alpha^4$ olduğundan α elemanının indeksi 4, periyodu 3 elde edilir. Ayrıca tanım 4.2.1 dan $\langle \alpha \rangle$ nın çekirdeği, $K_\alpha = \{\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ biçimindedir ve $K_\alpha = \{\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ bir grup olup α^4 elemanı bu grup için üreteçtir. K_α ya ait Cayley Tablosu'nu oluşturalım.

	α^4	α^5	α^6
α^4	α^5	α^6	α^4
α^5	α^6	α^4	α^5
α^6	α^4	α^5	α^6

Tablodan görüldüğü gibi K_α nın birimi ve $6 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan α^6 dır. Ayrıca (4.5)' den $4 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan K_α nın üreteç elemanı olarak α^4 ü alırız. Gerçekten tablodan da görülebileceği gibi $(\alpha^4)^2 = \alpha^5$ ve $(\alpha^4)^3 = \alpha^6$ dır.

Yukarıdaki bütün yazılanlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem 4.2.4 [28] Herhangi bir S yarıgrubundaki bir a elemanı için aşağıdaki ifadelerden herhangi biri sağlanır.

(i) a nın tüm kuvvetleri birbirinden farklıdır ve $\langle a \rangle$ devirsel yarıgrubu $(\mathbb{N},+)$ doğal sayılar yarıgrubuna izomorftur.

(ii) Aşağıdaki özellikleri sağlayan m $(a$ nın indeksi$)$ ve r $(a$ nın periyodu$)$ pozitif tamsayıları vardır.

- $a^m = a^{m+r}$ dir.
- $\forall u, v \in \mathbb{N}$ için, $a^{m+u} = a^{m+v}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $u \equiv v \pmod r$ olmasıdır.
- $\langle a \rangle = \{a, a^2, ..., a^{m+r-1}\}$ dir.
- $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesi $\langle a \rangle$ devirsel yarıgrubunun devirsel bir alt grubudur.

Buraya kadar verilenlerden her (m,r) pozitif tamsayı çifti için indeksi m ve periyodu r olan bir a elemanını içeren bir S yarıgrubunun kesinlikle bulunabileceği söylenebilir. Çünkü $T_{\{1,2,\dots,m+r\}}$ tam transformasyon yarıgrubunun

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m & m+1 & \dots & m+r-1 & m+r \\ 2 & 3 & 4 & \dots & m+1 & m+2 & \dots & m+r & m+1 \end{pmatrix}$$

biçimindeki elemanı indeksi m ve periyodu r olan bir dönüşümdür. Örneğin

$T_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ yarıgrubundaki

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

elemanı için, $\alpha^6 = \alpha^4$ dür, yani α nın indeksi 4 ve periyodu 2 dir.

Not 4.2.5 [28] Farklı ya da aynı yarıgrupların a ve b gibi iki elemanı için, kolayca görülebileceği gibi, $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ olması için gerekli ve yeterli koşul a ve b elemanlarının aynı indeks ve periyoda sahip olmasıdır. O halde aslında (m,r) pozitif tamsayı çifti için indeksi m ve periyodu r olan sadece bir tane devirsel yarıgrup vardır. Bu yarıgrup genellikle $M(m,r)$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.2 ve Not 4.2.5 ile elde edilen önemli bir sonuç şöyledir:

Sonuç 4.2.6 [28] İndeksi 1 ve periyodu r olan $M(1,r)$ devirsel yarıgrubu, r mertebeli devirsel bir gruptur.

Teorem 4.2.7 [28] Periyodik bir yarıgrupta her elemanın idempotent olan bir kuvveti vardır. Sonuç olarak her periyodik yarıgrup (özel olarak sonlu her yarıgrup) en az bir tane idempotent elemana sahiptir.

İspat: S periyodik bir yarıgrup olsun ve $a \in S$ alalım. Bu durumda Tanım 4.1.6 gereği, $\langle a \rangle$ sonlu bir yarıgrup olur. Buradan a için (m,r) pozitif tamsayı çiftinin (m indeks , r periyot) bulunabileceğini söyleyebiliriz. Ayrıca Teorem 4.2.2 gereği $\langle a \rangle$ nın çekirdeği olan $K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$ kümesi bir gruptur ve dolayısıyla bu kümenin a^n $(m \le n \le m+r-1)$ şeklinde bir birim elemanı vardır.

Buradan $a^n \in K_a \subseteq \langle a \rangle$ elemanının idempotent olduğu elde edilir. Seçilen S yarıgrubu ve bu yarıgruptan alınan a elemanı keyfi olduğundan sonuç açıktır.

Not 4.2.9 [28] Teorem 4.2.8 de yarıgrubun periyodik olması önkoşulu ortadan kaldırılırsa idempotent elemanın varlığından kesin olarak söz edilemez. Örneğin $(\mathbb{Z}^+,+)$ yarıgrubu (ki bu yarıgrup periyodik değildir) idompotent eleman içermez.

4.3 Devirsel Yarıgrupların İdealller İle İlgili Bazı Özellikleri

4.2 Alt Bölümde devirsel yarıgrupların çekirdeği tanımlanarak bu çekirdeğin bir grup oluşturduğu gösterilip, buna ek olarak, devirsel bir yarıgrupta hangi koşul altında en az bir tane idempotent elemanın var olacağı ispatlanmıştı. Bu alt bölümde ise devirsel yarıgrupların idealleri incelenecektir. Böylece devirsel yarıgrupların sınıflandırılmasında bir adım daha ileriye gidilmiş olacaktır.

Teorem 4.3.1 [28] $S = \langle a \rangle$ sonsuz devirsel bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrubun her öz ideali Sa^m $\left(m \in \mathbb{Z}^+\right)$ formunda olup bu idealler arasında,

$$S \supset Sa \supset Sa^2 \supset \ldots$$

şeklinde bir sıralama vardır ve dolayısıyla S nin minimal ideali yoktur.

İspat : Öncelikle $a^k \in S$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere , $a^l \in S\,a^m$ elemanını alalım. S sonsuz devirsel olduğundan , $l > m$ olur. O halde alınan bu iki elemanın çarpımı

$$a^k a^l = a^{k+l} = a^{k+l-m}\,a^m$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $a^k a^l \in Sa^m$ olduğundan, Sa^m kümesi S nin sol idealidir. Devirsel yarıgruplar değişmeli olduğundan, Sa^m kümesi S için aynı zamanda bir sağ ideal olacaktır. O halde Sa^m $\left(m \in \mathbb{Z}^+\right)$ kümesi S nin bir idealidir.

Ayrıca S sonsuz devirsel olup birim eleman da içermediğinden, $a \notin Sa^m$ olacaktır. Dolayısıyla S yarıgrubunun Sa^m ideali öz idealdir.

Şimdi S nin başka bir I öz idealini alalım. $\forall a^k \in S$ ve $\forall a^1 \in I$ için, $a^k a^l \in I$ olur.

Ayrıca buradaki k ve l sayıları pozitif tam sayı oldukları için, $k > m$ veya $l > m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısı bulunabilir. O halde I idealinin her bir elemanı

$$a^k a^l = a^{k+l} = a^{k+l-m} a^m$$

biçiminde yazılabilir .Buradan da I idealinin aslında Sa^m şeklinde olduğu sonucu elde edilir. O halde S nin tüm öz idealleri Sa^m $\left(m \in \mathbb{Z}^+\right)$ formundadır.

Bir $t \in \mathbb{Z}^+$ için, S nin Sa^t biçimindeki bir idealini alalım. Bu durumda Sa^{t+1} kümesinin de S için bir ideali olacağı açıktır. Herhangi bir $a^l \in Sa^{t+1}$ elemanı için,

$$a^l = a^k a^{t+1} = a^{k+t+l} = a^{k+l} a^t \qquad \left(a^k \in S\right)$$

olur, ki bu durumda $a^l \in Sa^t$ dir ve $Sa^t \supset Sa^{t+1}$ $\left(t \in \mathbb{Z}^+\right)$ kapsaması elde edilir.

O halde S ve S nin öz idealleri arasında

$$S \supset Sa \supset Sa^2 \supset ...$$

şeklinde bir sıralama yapılabilir.Buradan, S içinde hiçbir minimal idealin olamayacağı sonucu elde edilir.

Teorem 4.3.1 ile sonsuz devirsel bir yarıgrubun idealleri belirlendi. Sonlu devirsel yarıgruplar için de öz idealler benzer şekilde belirlenir. Ancak bu durumda bazı idealller birbirinin aynısı olabilir. Çünkü aşağıda belirtileceği gibi, sonlu devirsel yarıgruplar bir minimal ideale sahiptir.

Teorem 4.3.2 [28] $S = \langle a \rangle = M(m,r)$ indeksi m ve periyodu r olan devirsel bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrup için tanım 4.2.1 de verilen, $K_a = \left\{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\right\}$ kümesi minimal idealdir.

İspat : $K_a = \left\{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\right\}$ kümesinin S için bir ideal olduğu hemen görülür. Şimdi bu idealin minimal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için, S nin başka bir I idealini alalım ve $I \subseteq K_a$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde I idealinin K_a nın da bir ideali olacağı açıktır. Ancak K_a kümesi basittir. Dolayısıyla $I = K_a$ dır.

Örnek 4.3.3 [28] $S=\langle a\rangle = M(3,2)$ indeksi 3 ve periyodu 2 olan devirsel bir yarıgrup olsun. Bu durumda $a^5=a^3$ ve $S=\{a,a^2,a^3,a^4\}$ olur.

Şimdi S nin öz ideallerini belirlersek, karşımıza

$$Sa=\{a^2,a^3,a^4\}$$

$$Sa^2=\{a^3,a^4\}=Sa^3=Sa^4$$

çıkar. Buradan

$$Sa\supset Sa^2=Sa^3=Sa^4$$

olduğu görülmektedir. Tanım 4.2.1 gereği, $K_a=\{a^3,a^4\}$ olur. O halde $S=\langle a\rangle = M(3,2)$ devirsel yarıgrubu minimal ideale sahiptir ve bu ideal $K_a=\{a^3,a^4\}$ dir.

4.4 Devirsel Yarıgrupların Düzgünlük Kavramı İle İlgili Bazı Özellikleri

3.3 Alt Bölümdeki yarıgrupların düzgünlüğünü göz önünde bulundurarak, devirsel bir yarıgrubun düzgünlüğü ile ilgili şunları söyleyebiliriz:

Tanım 4.1.3 ile verilen sonsuz devirsel bir yarıgrup için, Tanım 3.3.1 ile verilen düzgünlük tanımı göz önüne alındığında, bu yarıgrupların düzgün olamayacağı ve de hiçbir düzgün eleman içermeyeceği kolayca görülür.

Peki, sonlu devirsel yarıgruplar düzgün müdir? Bu sorunun yanıtı indeksi 1 olan sonlu devirsel yarıgruplar için "evet", indeksi 1 den farklı olan sonlu devirsel yarıgruplar için "hayır"dır. Çünkü indeksi 1 olan devirsel yarıgruplar, grup yapısı oluşturur ve bir grupta her elemanın tersi var olduğu için düzgünlük koşulu doğal olarak sağlanır. İndeksin 1 den farklı olması durumunu ise aşağıdaki teorem ve örnek açıklamaktadır.

Teorem 4.4.1 [28] $m>1$ olmak üzere, $S=\langle a\rangle = M(m,r)$ sonlu devirsel yarıgrubunun düzgün elemanlarının oluşturduğu küme, aslında S nin çekirdeği olan $K_a=\{a^m,a^{m+1},\ldots,a^{m+r-1}\}$ kümesidir.

İspat: Burada öncelikle S yarıgrubunun çekirdeğinde yer almayan elemanların düzgün olmadığını gösterip ardından S nin çekirdeğindeki tüm elemanların düzgün olduğunu ispatlayacağız.

- $1 \le s < m$ olmak üzere, $a^s \in S$ elemanı düzgün bir eleman olsun. Bu durumda,

$$a^s a^k a^s = a^s$$

olacak şekilde bir $a^k \in S \quad (1 \le k \le m + r - 1)$ elemanı vardır. O halde

$$a^s a^k a^s = a^s \Rightarrow a^{2s+k} = a^s$$

yazılabilir. Burada iki durum söz konusudur.

<u>1.Durum: </u> $2s + k \ge m$ ise, bölme algoritmasından,

$$2s + k = m + qr + u \qquad (q \ge 0 \text{ ve } 0 \le u \le r - 1)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} a^{2s+k} = a^s &\Rightarrow a^{m+qr}\, a^u = a^s \\ &\Rightarrow a^m\, a^u = a^s \\ &\Rightarrow a^{m+u} = a^s \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu durum $s < m$ oluşu ile çelişir. O halde $a^s \in S$ düzgün değildir.

<u>2.Durum: </u> $2s + k < m$ ise $a^{2s+k} = a^s$ eşitliğinin var olması için gerek ve yeter şart $2s + k = s$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Böyle bir eşitliğin sağlanması k ve s nin pozitif tamsayı olmaları ile çelişir. O halde $a^s \in S$ düzgün değildir.

$m \le s \le m + r - 1$ olmak üzere, $a^s \in S$ elemanını alalım. Bu durumda, Tanım 4.2.1 gereği, $a^s \in K_a$ olur. Ayrıca, Teorem 4.2.2 den, K_a nın grup olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla a^s nin K_a içinde,

$a^s a^{-s} = a^{-s} a^s = 1_{K_a}$ olacak şekilde bir tersi vardır. Buradan

$$a^s a^{-s} a^s = 1_{K_a} a^s = a^s$$

eşitliği elde edilir. O halde , $a^s \in K_a \subset S$ elemanı düzgündür ve böylece S nin düzgün elemanlarının oluşturduğu küme

$$K_a = \left\{ a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1} \right\}$$

şeklindedir.

Örnek 4.4.2 [28] Örnek 4.3.3 de $S = \langle a \rangle = M(3,2)$ yarıgrubunun tüm elemanlarının düzgünlüğünü araştıralım.

İlk olarak
$a \in S$ elemanı için, $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ elemanı var mıdır sorusunu göz önünde bulundurmalıyız.
S yarıgrubu değişmeli olduğundan

$$aba = a = a^2b = a \quad \textbf{(4.12)}$$

yazılabilir. Ancak S nin indeksi 3 olduğundan, bu eşitliği sağlayacak olan bir b elemanı bulunamaz. O halde $a \in S$ düzgün değildir.
İkinci olarak, $a^2 \in S$ elemanı için, $a^2ba^2 = a^2$ olacak şekilde $b \in S$ elemanı varmıdır sorusuna cevap ararsak,
(4.12)'da belirtilen duruma benzer olarak, $a^4b = a^2$ eşitliğini sağlayacak bir b elemanı bulunamaz. O halde $a^2 \in S$ elemanı da düzgün değildir.
S nin elemanlarının düzgünlüğünü araştırmaya devam ettiğimizde,
$a^3 \in S$ elemanı için,

$$a^3ba^3 = a^3 \Rightarrow a^6b \Rightarrow a^3 \Rightarrow a^4b = a^3$$

olduğundan $b = a \in S$ elemanı alındığında $a^3ba^3 = a^3$ eşitliği sağlanır. Böylece $a^3 \in S$ elemanının düzgünlüğünü elde ederiz.
Son olarak
$a^4 \in S$ elemanı için,

$$a^4ba^4 = a^4 \Rightarrow a^8b \Rightarrow a^4 \Rightarrow a^4b = a^4 \quad \textbf{(4.13)}$$

olduğundan $b = a^2 \in S$ elemanı alındığında $a^4ba^4 = a^4$ eşitliği sağlanır. O halde $a^4 \in S$ elemanı düzgündür.
Yapılan işlemlerden görülebileceği gibi S yarıgrubunun düzgün elemanlarının oluşturduğu küme $\{a^3, a^4\}$ dir. Örnek 4.3.3 ten hatırlanacağı gibi bu küme S yarıgrubunun çekirdeğidir.

4.5 Çift Devirsel Yarıgruplar

Çift devirsel (bicyclic) yarıgrubun farklı notasyonları vardır, çift devirsel yarıgrup tanımını ilk veren kişi olan Lyapin bu yarıgrubu P ile, Clifford ve Preston ise C ile göstermişlerdir, son zamanlardaki makalelerde ise B ile gösterilmeye başlanmıştır. Biz bu çalışmada çift devirsel yarıgrubu B ile göstereceğiz. Çift devirsel yarıgruplar aslında monoiddirler ama daha çok yarıgrup olarak adlandırılırlar.

Tanım 4.5.1 [29] $1 \in B$ olmak üzere $p.q = 1$ koşulu ile p ve q tarafından üretilen B yarıgrubu çift devirsel yarıgrup olarak adlandırılır.

Teorem 4.5.2 [29] Çift devirsel yarıgruplar üç farklı şekilde üretilebilir:

1) Çift devirsel yarıgruplar serbest (free) yarıgruplardan üretilebilirler.

$pq = 1$ bağıntısı altında p ve q gibi iki üreteç tarafından üretilen serbest yarıgruplar çift devirsel yarıgruplardır. Yani bu yarıgrubun her elemanı "pq" alt dizisinin olmaması şartıyla bu iki harfin dizileri yani bu iki harfin oluşturduğu elemanlar, bu yarıgrubun elemanlarıdır. Bu dizilerin birleşimi yarıgrup olmanın birleşme sartını sağlar, a ve b doğal sayılar olmak üzere bu yarıgrubun tüm elemanları $q^a p^b$ şeklindedir.

Bu yarıgrup üzerinde işlem şu şekilde tanımlanır:

$$\left(q^a p^b\right)\left(q^c p^d\right) = q^{a-b+\max\{b,c\}} p^{d-c+\max\{b,c\}} .$$

2) Çift devirsel yarıgruplar sıralı doğal sayı ikililerden üretilebilir. Bu üsleri sınırlayabilmenin yolu, $\left(q^a p^b\right) \Leftrightarrow (a,\, b)$ eşlemesini yapmaktır.

Böylece B,

$$(a,b)(c,d) = \left(a-b+\max\{b,c\}, d-c+\max\{b,c\}\right)$$

işlemi ile doğal sayıların ikili çiftlerinin yarıgrubu olur. Bu orjinal yapı olarak aynı nesne olduğu için B yi tanımlamak için yeterlidir. Monoidin birimi olan $(0,0)$ ile B yarıgrubunu tıpkı p ve q nun ürettiği orjinal B yarıgrubu gibi oluşturabiliriz. B nin bu yeni yapısının üreteçleri $(1,0)$ ve $(0,1)$ olur.

3) Çift devirsel yarıgruplar fonksiyonlardan üretilebilir.

S yarıgrubu e, a ve b elemanları ile üretilen herhangi bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu,

- $ae = ea = a$
- $be = eb = b$
- $ab = e$
- $ba \neq e$

koşullarını sağlıyorsa, S yarıgrubu çift devirsel yarıgruba izomorftur denir. Bunun böyle olması gerektiği açık değildir bu durumda en zor olanı S yarıgrubunun sonsuz olması gerektiğini anlamaktır. Bunu görmek için, varsayalım ki a sonlu mertebeli bir eleman olsun öyleyse bazı h ve k 'lar için $a^{k+h} = a^h$ olur. Sonra $a^k = e$, ve $b = eb = a^k b = a^{k-1} e = a^{k-1}$, böylece $ba = a^k = e$ olur ve bu durumun a nın sonlu olması ile sağlanmayacağını görebiliriz böylece a nın farklı kuvvetlerinin sayısı sonsuzdur.

Bu ispatın tamamı için Clifford ve Preston Volume I e bakınız.

Önerme 4.5.3 [30] B çift devirsel bir yarıgrup olsun. x herhangi bir doğal sayı olmak üzere B nin idempotentleri (x,x) çiftleridir. Bunlar değişebildiğinden B çift devirsel yarıgrubu düzgündür çünkü her x için $xyx = x$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Çift devirsel yarıgrup ters yarıgruptur çünkü B nin her x elemanı $yxy = y$ olacak şekilde y gibi bir ters elemana sahiptir ve bu ters eleman tektir.

Çift devirsel bir B yarıgrubunun elemanları $a,b \geq 0$ olmak üzere $q^a p^b$ şeklindedir. $a = 0$ ve $b = 0$ olduğunda $q^0 p^0 = 1$ dir bu yüzden çift devirsel yarıgrupların tanımını verirken 1 elemanına sahiptir deriz. Çift devirsel yarıgrupların elemanları şu şekilde oluşturulur:

$$q^b p^a q^k q^l = \begin{cases} q^{b+k-a} p^l & , \quad a \leq k \text{ ise} \\ q^b p^{l+a-k} & , \quad a \geq k \text{ ise} \end{cases}$$

Çift devirsel yarıgruplar aynı zamanda basit yarıgruplardır. Çünkü, B yarıgrubunun herhangi bir elemanı $q^a p^b$ ise

$$1 = p^b \left(q^b p^a\right) q^a$$

olur ve böylece $S^1 q^b p^a S^1 = S$ dir. Bu sonuç altında Tanım 3.1.2 den J Green denkliğinin sağlandığını görebiliriz. İlerleyen basit yarıgruplar bölümünde vereceğimiz tanımda bir grup tek bir J sınıfına sahip ise basit yarıgruptur şeklinde tanımlayacağız bu tanınmı da kullanırsak aldığımız B yarıgrubu basit yarıgrup olur.

Örnek 4.5.4 [30] Şimdi aşağıdaki tabloya bakarak B yarıgrubunun bazı özelliklerini inceleyelim.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & p^4 & \cdots \\
q & pq & p^2q & p^3q & p^4q & \cdots \\
q^2 & pq^2 & p^2q^2 & p^3q^2 & p^4q^2 & \cdots \\
q^3 & pq^3 & p^2q^3 & p^3q^3 & p^4q^3 & \cdots \\
q^4 & pq^4 & p^2q^4 & p^3q^4 & p^4q^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Bu tabloda yatay doğru üzerinde bulunan elemanlar sağ ideal, düşey doğru üzerinde bulunan elemanlar sol idealdir. Bu tablodaki her bir girdi tek bir H sınıfını gösterir, satırlar R sınıfları, sütunlarda L sınıflarıdır. B yarıgrubunun idempotentleri köşegen üzerinde bulunan elemanlardır. Daha önce Green denkliklerinde vermiş olduğumuz her L ve R sınıfının bir idempotenti olmak zorundadır önermesinin doğru olduğunu bu örnek üzerinde görebiliriz. Tablodan da gördüğümüz gibi çift devirsel yarıgrubun tüm elemanları p ve q dan üretilirler.

Örnek 4.5.5 [29] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, B çift devirsel yarıgrubu $(m,n)\cdot(p,q)=\left(m-n+\max\{n,p\},\ q-p+\max\{n,p\}\right)$ şeklinde tanımlanan $(\cdot)$ işlemi ile $(N\times N,\ \cdot)$ ya izomorftur.

Teorem 4.5.6 [29] B çift devirsel bir yarıgrup ve B^0, B ye sıfır eklenerek elde edilen çift devirsel yarıgrup olsun. B ve B^0 değişmeli olmayan birebir monoidlerdir.

İspat: B, $(N\times N,\cdot)$ kümesinin sıralı ikilileri (m,n) lerin çarpımı ile elde edilir. bu çarpım şu şekildedir:

$$(m,n)(p,q)=\begin{cases}(p,q-m+n) & ,\quad q\geq m \ \text{ ise}\\ (p+m-q,n) & ,\quad q<m \ \text{ ise}\end{cases}$$

olur.

B nin her ideali esas (principal) idealdir bu yüzden B sol minimal yada sağ minimal ideale sahip değildir. (m,n) sıralı ikililerinin sağ ve sol esas idealleri şu şekildedir:

$$(m,n)B=\{(s,t):s\geq m\}$$

$$B(m,n)=\{(s,t):t\geq n\}$$

Önerme 4.5.7 [29] B çift devirsel yarıgrup ise, aşağıdaki aksiyomların hepsi sağlanır.

(i) $(\mathrm{a,b})R(c,d)\Leftrightarrow a=c$

(ii) $(\mathrm{a,b})L(c,d)\Leftrightarrow b=d$

(iii) $(\mathrm{a,b})H(c,d)\Leftrightarrow(\mathrm{a,b})=(c,d)$

(iv) B deki herhangi iki eleman D-bağlantılıdır

(v) $E_c=\{(a,a):a\in I^0\}$

5. BASİT YARIGRUPLAR

5.1 Basit Yarıgrupların Önemli Özellikleri

Basit yarıgruplar, yarıgrup teorisinde önemli rol oynayan bir yarıgrup çeşididir. Bu tip yarıgruplar, tanımında açıklanacağı gibi ideal içermezler. Bir yarıgrupta idealin varlığı ile ne gibi özelliklerin incelebileceğini önceki bölümlerde incelemiştik. Burada ise hiçbir ideali var olmayan bir yarıgrubun hangi özellikleri sağlayabileceği araştırılacaktır. Ayrıca sıfır elemanını içeren yarıgruplar için basitlik kavramının farklı şekilde ele alınması gerektiğinden, bu yarıgruplar için biraz daha farklı özelliklerden ve tanımlardan bahsedilecektir. Tüm bunların yanısıra bu bölümde sonlu basit yarıgrupların karakterini belirlemede çok önemli bir yeri olan Rees-Suschkewitsch Teoremi verilecektir.

Tanım 5.1.1 [31] S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun kendisinden başka sol ideali yoksa S yarıgrubuna sol basit yarıgrup, S yarıgrubunun kendisinden başka sağ ideali yoksa S yarıgrubuna sağ basit yarıgrup ve S hem sağ hem sol basit ise S ye basit yarıgrup denir. Herhangi bir yarıgrup kendisinden başka bir ideale sahip değil ise bu yarıgruba basit yarıgrup denir.

Teorem 5.1.2 [32] S bir yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) S yarıgrubu basittir;

(ii) $\forall a \in S$ için $SaS = S$ dir;

(iii) Herhangi bir $a, b \in S$ için $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır;

(iv) S tek bir J-sınıfına sahiptir.

İspat (i)$\Rightarrow$(ii) Herhangi bir $a \in S$ için, SaS kümesinin S nin bir ideali olacağı açıktır. Ancak S yarıgrubu basit olduğu için Tanım 5.1.1 den $SaS = S$ elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $SaS = S$ olduğundan ispat açıkca görülmektedir.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $a,b\in S$ alalım. (iii)'den $sat=b$ olacak şekilde $s,t\in S$ ve ayrıca $ubv=a$ olacak şekilde $u,v\in S$ elemanları vardır. O halde aJb olduğu elde edilir. Böylece $S\times S\subseteq J$ olur. Ayrıca J bağıntısının $J\subseteq S\times S$ olacağı açıktır. Sonuç olarak S yarıgrubunun $J=S\times S$ şeklinde tek bir J-sınıfı vardır.

(iv)$\Rightarrow$(i) I kümesi, S yarıgrubunun bir ideali olsun. $a\in I$ ve $b\in S$ şeklindeki herhangi iki elemanı alalım. (iv) gereği aJb olur. Bu durumda $sat=b$ olacak şekilde $s,t\in S^1$ vardır. I bir ideal ve $a\in I$ olduğundan $sat=b\in I$ olur. O halde $S\subseteq I$ ve buradan da $S=I$ elde edilir. Sonuç olarak S yarıgrubu basittir.

Örnek 5.1.3 [32] G herhangi bir grup olmak üzere, $\forall a,b\in G$ için, $baa^{-1}=b$ olduğundan Teorem 5.1.1 (iii) sağlanır. O halde G grubu basit bir yarıgruptur.

Örnek 5.1.4 [32] Her dikdörtgensel band $S=I\times\Lambda$ basittir. Herhangi bir $(i,\lambda),(j,\mu)\in S$ için $(j,\mu)(i,\lambda)(j,\mu)=(j,\mu)$ dir.

Örnek 5.1.5 [32] S yarıgrubunun sıfırı varsa basit yarıgrup olamaz, çünkü $\{0\}$ asal idealdir.

Tanım 5.1.6 [32] S bir yarıgrup ve I kümesi, S nin başka hiçbir (sağ,sol ve iki yanlı) idealini içermiyorsa minimal ideal adını alır. Örneğin S bir sol sıfır yarıgrup olmak üzere, $\forall x\in S$ için, $\{x\}$ kümesi S yarıgrubunun bir minimal sağ ideailidir.

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi her sonlu yarıgrup bir minimal sağ, sol ve iki yanlı ideale sahip iken, sonsuz bir yarıgrup bir minimal sağ, sol ve iki yanlı ideale sahip olmayabilir. Örneğin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi minimal ideale sahip değildir. Bir yarıgrup bir çok sağ ve sol minimal ideallere sahip olabilir. Sol ve sağ sıfır yarıgrup göz önüne alındığında minimal sağ veya sol idealin birden fazla olabileceği görülür. Ancak herhangi bir yarıgrupta minimal iki yanlı ideal en fazla bir tane olur. Bu durum şu şekilde ifade edilebilir: Bir yarıgrubun I ve J gibi iki tane minimal iki yanlı ideali var olsun. Bu durumda $I\cap J$ de bir idealdir ve Tanım 5.1.6 dan $I=I\cap J=J$ olduğu söylenir.

Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.6 ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.1.7 [32] I ideali S yarıgrubunun minimal ideali ise I basit bir yarıgruptur.

İspat: I nın basit olduğunu gösterebilmek için Teorem 5.1.2 (ii)'nin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Bunun için bir $a \in I$ alalım. I bir ideal olduğundan $IaI \subseteq I$ da bir idealdir. Ancak I minimal olduğundan $IaI = I$ elde edilir. O halde I basittir.

Bölümün girişinde de bahsedildiği gibi sonlu basit yarıgrupların karakterini belirlememizi sağlayan önemli bir teorem vardır. Şimdi bu teoremde geçecek olan Rees Matrisi ve Rees Matris Yarıgrubunun tanımlarını verelim.

Tanım 5.1.8 [33] T herhangi bir yarıgrup, I ve Λ iki indeks kümesi olsun. ayrıca T deki elemanlar ile $\Lambda \times I$ boyutlu $P = \left(p_{\lambda i}\right)_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ i\in I}}$, biçimindeki matris tanımlansın.

Bu matrise Rees Matrisi denir.

$I \times T \times \Lambda$ kümesi üzerinde

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = \left(i, gp_{\lambda j}h, \mu\right) \tag{5.1}$$

işlemi tanımlansın.

$I \times T \times \Lambda$ kümesi, üzerinde tanımlanan (5.1) şeklindeki işleme göre, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba (P matrisine bağlı olarak T ile oluşturulan) Rees Matris Yarıgrubu denir ve bu yarıgrup $M\left[T; I, \Lambda; P\right]$ ile gösterilir.

İspatı [33] de bulunabilecek olan bölümün asıl teoremi Tanım 5.1.8 yardımı ile aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.1.9 (Rees-Suschkewitsch Teoremi) [34] I ve Λ sonlu indeks kümeleri ve G sonlu bir küme olmak üzere, sonlu bir S yarıgrubunun basit olması için gerekli ve yeterli koşul, S yarıgrubunun bir $M\left[G; I, \Lambda; P\right]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

Teorem 5.1.9 ifadesinde yarıgrubun "sonlu olması" ön koşuldur. Buradan da anlaşılacağı gibi sonsuz yarıgruplar için teorem geçerliliğini yitirebilir. Sonluluk koşulu kaldırıldığında Teorem 5.1.19 un daha genel halinin elde edilebilmesi için yarıgrup, basitlikten daha kuvvetli özelliğe sahip olmalıdır. Bir sonraki alt bölümde bu özellik incelenecektir.

5.2 Tam Basit Yarıgruplar ve 0-Basit Yarıgruplar

Tanım 5.2.1 [14] Bir S yarıgrubu hem basit ise hem de minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba tam basit (completely simple) denir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir:

S bir yarıgrup olsun.

(i) $\forall a \in S$ için $SaS = S$ ise ($SaS = \{xay : x, y \in S\}$)

(ii) $ef = fe = e$ olacak şekilde $e, f \in S$ idempotentler ise $e = f$

koşulları sağlanıyorsa S ye tam basit yarıgrup denir.

Teorem 5.2.2 (Rees Teoremi) [33] I ve Λ indeks kümeleri ve G bir grup olmak üzere, bir S yarıgrubunun tam basit olması için gerekli ve yeterli koşul, S yarıgrubunun bir $M[G; I, \Lambda; P]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

Teorem 5.1.9 ve 5.2.2 ile her sonlu basit yarıgrubun tam basit olduğu sonucuna varırız. O halde Teorem 5.1.9 , Teorem 5.2.2 nin bir sonucudur.

Tanım 5.2.3 [35] S tam basit bir yarıgrup ve A da onun boştan farklı bir alt kümesi olsun. A kümesi S nin ikili işlemlerine göre tam basit yarıgrup oluyorsa A kümesine tam basit alt yarıgrup denir.

Teorem 5.2.4 [35] G tam basit bir yarıgrup ve H onun boştan farklı bir alt kümesi olsun. H nın G nin tam basit bir alt yarıgrubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

İspat: H tam basit bir alt yarıgrup ve $ab^{-1} \in H$ ise tam basit yarıgrup tanımından $b^{-1} \in H$ ve böylece $ab^{-1} \in H$ olur.

Tersine $H \neq 0$ ve $a, b \in H$ ise

$$bb^{-1} = e(b) \in H\ , \qquad e(b)b^{-1} = b^{-1} \in H \qquad \text{ve} \qquad ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

olur.

Buraya kadar olan kısımda alınan S yarıgrubu sıfır eleman içermemekteydi. S yarıgrubu sıfır eleman içeriyor ise Tanım 5.1.1 sağlanmaz, yani S yarıgrubu basit bir yarıgrup olamaz. Çünkü sıfır elemanı içeren bir yarıgrupta $\{0\}$ kümesi öz idealdir. Şimdi $\{0\}$ elemanını içeren ve $\{0\}$'dan başka hiçbir öz ideali olmayan yarıgrup sınıfını inceleyelim.

Tanım 5.2.5 [36] S sıfırlı bir yarıgrup olsun. $S^2 \neq 0$ iken S yarıgrubu $\{0\}$'dan ve kendisinden başka hiçbir öz ideale sahip değil ise bu yarıgruba 0-basit yarıgrup denir.

Basit yarıgruplarda önemli bir yeri olan Rees Matris Yarıgrubu 0-basit yarıgruplar için şu şekilde tanımlanır.

Tanım 5.2.6 [36] T (0 elemanını içermeyen) herhangi bir yarıgrup, I ve Λ iki indeks kümesi olsun. Ayrıca $T \cup \{0\}$ kümesindeki elemanlar ile $\Lambda \times I$ boyutlu $P = \left(p_{\lambda i}\right)_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ i \in I}}$, biçimindeki matris tanımlansın. $(I \times T \times \Lambda) \cup \{0\}$ kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(i,g,\lambda)(j,h,\mu) = \begin{cases} \left(i, g p_{\lambda j} h, \mu\right), & p_{\lambda j} \neq 0 \text{ ise} \\ 0 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$0(i,g,\lambda) = (i,g,\lambda)0 = 00 = 0$$

işlemine göre, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba (P matrisine bağlı olarak T ile oluşturulan) sıfırlı Rees Matris Yarıgrubu denir ve bu yarıgrup $M^0[T; I, \Lambda; P]$ ile gösterilir.

Önerme 5.2.7 [14] S bir yarıgrup ve a onun sıfırdan farklı bir elemanı olsun. $\forall a \in S$ için $SaS = S$ oluyorsa S yarıgrubu 0-basittir yani $\forall a, b \in S / \{0\}$ için $xay = b$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır.

İspat: S bir 0-basit yarıgrup olsun. S^2, S nin ideali olsun. tanımdan $S^2 \neq 0$ olur. Böylece $S^2 \neq S$ ve buradan $S^3 = S^2.S = S.S = S$ olur. $a \neq 0 \in S$ alalım. SaS, S nin ideali olur. Böylece $SaS = S$ yada $SaS = \{0\}$ dır. $SaS = \{0\}$ ise $I = \{x \in S : S \times S = \{0\}\}$ kümesi sıfır olmayan a elemanı içerir. I, S nin ideali olduğundan $I = S$ dir. Böylece, $\forall x \in S$ için $S \times S = \{0\}$ dır. Fakat bu gösterir ki $S^3 \neq 0$ bu da $S^3 = S$ gerçeğiyle çelişir. Buradan $SaS = S$ olur.

Tersine, $0 \neq a \in S$ için SaS olduğunu varsayalım. $S^2 \neq 0$ dır. Sıfır olmayan a elemanını içeren S nin ideali A ise

$$S = SaS \subseteq SaS \subseteq A \qquad \textbf{(5.2)}$$

ve buradan $A = S$ dir ve böylece S, 0-basit yarıgruptur.

Tanım 5.2.8 [14] S sıfırlı bir yarıgrup ve I kümesi S nin bir ideali olsun. $I \neq 0$ ve I kümesi S nin sadece $I \neq 0$ ideallerini içeriyorsa 0-minimal ideal adını alır.

Teorem 5.2.9 [14] I ideali S yarıgrubunun 0-minimal ideali olsun. Bu durumda ya $I^2 = \{0\}$ dır veya I ideali 0-basit yarıgruptur.

İspat: I kümesi S nin bir ideali olduğundan I^2 kümesi de S nin I tarafından içerilen bir ideali olur. Ancak I ideali 0-minimal olduğundan, Tanım 5.2.8 gereği, ya $I^2 = I$ yada $I^2 = \{0\}$ olur.

İlk olarak $I^2 = I$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda $I^3 = I$ eşitliğinin varlığı açıktır. Ayrıca bir $a \in I - \{0\}$ elemanı için, $S^1 a S^1$ kümesi S nin I tarafından içerilen ideali olur ve dolayısıyla I ya eşittir. Buradan

$$IaI \subseteq S^1 a S^1 = I = I^3 = I\left(S^1 a S^1\right) I = (IS^1)a(S^1 I) \subseteq IaI \Rightarrow IaI = I$$

eşitliği elde edilir. O halde I ideali 0-basit yarıgruptur.

$I^2 = \{0\}$ eşitliğinin sağlanması durumunda ispat açıktır.

Tanım 5.2.10 [37] S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu hem 0-basit hem de 0-minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba tam 0-basit (completely 0-simple) denir.

Teorem 5.2.11 (Rees Teoremi) [33] I ve Λ indeks kümeleri, G grup ve P de düzgün matris olmak üzere, bir S yarıgrubunun tam 0-basit olması için gerekli ve yeter koşul, S yarıgrubunun bir $M^0[T; I, \Lambda; P]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

Not: Teorem 5.2.11 de geçen düzgün matrisin anlamı, alınan matrisin her bir satırında ve sütununda en az bir tane sıfırdan farklı elemanın olmasıdır.

5.3 Çift Basit Yarıgruplar (Bisimple Semigroup)

Tanım 5.3.1 [38] S bir yarıgrup olsun. S tek bir D denklik sınıfına sahip ise S yarıgrubuna çift basit (bisimple) yarıgrup denir. Çift basit yarıgruplar D-basit yarıgrup olarak da adlandırılırlar.

Her çift basit yarıgrup, basit yarıgruptur. Fakat her basit yarıgrup çift basit yarıgrup değildir.

Örnek 5.3.2 [39] G aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleri ile tanımlı bir küme olsun.

I. $G(+)$ bir yarıgrup ve $G(\cdot)$ bir gruptur.

II. $(a+b)c = ac+bc$

Sonra,

a) $G+G=G$

b) $G(+)$ bir idempotente sahip ise $G(+)$ nın her elemanı idempotent dir.

G, pozitif reel sayılar kümesi üzerinde $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleri ile tanımlansın.

Şimdi $A = G \times G$ ve A üzerinde bir işlem $a,b,c,d \in G$ olmak üzere $(a,b)(c,d) = (ac, bc+d)$ şeklinde tanımlansın. A nın basit yarıgrup olduğunu gösterelim.

Basit yarıgrup olmanın tanımından A nın basit olması için kendisinden başka ideale sahip olmaması gerektiğini biliyoruz. Bunu çelişki oluşturarak gösterelim.

$(k_1, k_2) \in d \neq A$ alalım yani A nın kendisinden ve biriminden farklı d gibi bir ideali olsun. A nın elemanları sıralı ikililerden oluştuğu için $d = (d_1, d_2)$ şeklindedir. Şimdi A üzerindeki işlemi uygularsak,

$$(k_1, k_2)(d_1, d_2) = (k_1 d_1,\ k_2 d_1 + d_2) \neq (k_1, k_2)$$

olması gerekir ama gerekli işlemleri yaparsak $\left(d_1, d_2\right)$ nin $\left(1,0\right)$ olduğunu görürüz bu da A nın birimidir ve bu baştaki varsayımımızla çelişir çünkü başta d esas ideal olmasın yani A dan ve birimden farklı olsun demiştik. Buradan A nın basit yarıgrup olduğunu görürüz.

A üzerindeki D-sınıflarını incelersek birden fazla D-sınıfı olduğunu görürüz bu sonuçtan da anlıyoruz ki A çift basit yarıgrup değildir. O zaman A basit bir yarıgruptur fakat çift basit yarıgrup değildir.

Örnek 5.3.3 [38] Her sol (sağ) basit yarıgrup çift basit yarıgruptur.

Örnek 5.3.4 [39] S bir dikdörtgensel band ise çift basit yarıgruptur. Çünkü dikdörtgensel band değişmelidir dolayısıyla $ab = ba$ eşitliği $a = b$ gerektirir. Şimdi bir dikdörtgensel bantın a ve b gibi herhangi iki elemanının aynı J denklik sınıfında bulunduklarını gösterelim:

S bir dikdörtgensel band ve dikdörtgensel band değişmeli olduğundan, S den alacağımız herhangi iki eleman için $ab = ba$ eşitliği gerçeklenecektir. Bu eşitliği ve dikdörtgensel band tanımlarını kullanırsak;

$$aba = a \text{ ve } ab = ba \Rightarrow aba = baa \Rightarrow aba = ba \text{ ve} \qquad \textbf{(5.3)}$$

$$bab = bba \Rightarrow bab = ba$$

eşitliklerini ve buradan da $a = b$ eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği sağdan ve soldan S^1 ile çarparsak,

$$S^1 a S^1 = S^1 b S^1 \qquad \textbf{(5.4)}$$

elde ederiz . Buradan dikdörtgensel band basit yarıgruptur.

Aynı şekilde dikdörtgensel band tanımından $a,b,c,d \in S$ için $a = c$ ve $b = d$ eşitliklerini elde edebilirsek, Önerme 4.5.7 den L ve R denklik sınıflarının sağlandığı görülür. Bu da D denklik sınıfının tanımıdır buradan dikdörtgensel band tek bir D-sınıfını içerir ve böylece çift basit yarıgrup olur. Dikdörtgensel bandın J-sınıfını da içerdiğini gösterdik buradan dikdörtgensel band hem basit yarıgrup hem de çift basit yarıgrup olur. Aslında basit diyebilmek için J sınıflarını göstermemize de gerek yok çünkü daha önce her çift basit yarıgrubun basit yarıgrup olduğunu vermiştik.

Örnek 5.3.5 [39] Çift devirsel yarıgrup çift basit yarıgruptur. Şimdi bu örneği de biraz açalım. $B(p,q)$ çift devirsel yarıgrubunun elemanlarını aşağıdaki gibi yazarsak,

$$\begin{array}{cccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & p^4 & \cdots \\
q & pq & p^2q & p^3q & p^4q & \cdots \\
q^2 & pq^2 & p^2q^2 & p^3q^2 & p^4q^2 & \cdots \\
q^3 & pq^3 & p^2q^3 & p^3q^3 & p^4q^3 & \cdots \\
q^4 & pq^4 & p^2q^4 & p^3q^4 & p^4q^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Bu tabloda yatay doğru üzerinde bulunan elemanlar sağ ideal, düşey doğru üzerinde bulunan elemanlar sol idealdir. Bu tablodaki her bir girdi tek bir H sınıfını gösterir, R sınıfları, sütunlarda L sınıflarıdır. B yarıgrubunun idempotentleri köşegen üzerinde bulunan elemanlardır. B çift devirsel yarıgrubu tek bir D - sınıfı içerir ve o halde Tanım 5.3.1 den bu yarıgrup çift basit yarıgrup olur.

S ters bir yarıgup olsun. Bir ters yarıgrup idempotent içerdiğinden, bir yönlü minimal ideal içeren basit ters (simple inverse) bir yarıgrup, tam basit (completely simple) yarıgrup olur. Ters yarıgrubun idempotentleri değişmeli olduğundan, tam basit yarıgrup tek bir primitive (ilkel) idempotent içerir ve buradan tek bir idempotente sahip olduğunu anlarız. Bu yüzden tam basit ters (completely simple inverse) bir yarıgrup gruptur. Şimdi basit ters yarıgrupların karakterini inceleyelim. Bu sınıflandırmada basit yarıgrupları çift devirsel yarıgruplara sınırlandıralım.

Önerme 5.3.6 [40] S ters bir yarıgrup ve D, S ters yarıgrubunun D-sınıfı olsun. D denklik sınıfı ancak ve ancak $E(D)$, S nin alt yarıgrubu ise; S nin alt yarıgrubu olur.

D, S nin alt yarıgrubu ise çift basit yarıgruptur.

İspat: Varsayalım ki $E(D)$, S yarıgrubunun alt yarıgrubu olsun. $a,b \in D$ alalım. O halde

$$bb^{-1} = g,\ aa^{-1} = f \quad \text{ve} \quad gf \in D$$

olur. Buradan $ag \in L_{gf}$ olur. Böylece $ag(ag)^{-1} \in D$ yani $aga^{-1} = ab(ab)^{-1} \in D$ ve $ab \in D$ olur. Bu gösterir ki D alt yarıgruptur.

Tersine D alt yarıgrup olsun. O halde $E(D)$ nin alt yarıgrup olduğu açıktır.

Son olarak, D denklik sınıfı S nin bir alt yarıgrubu olsun, $a,b \in D$ ve $a\,R\,b$ olsun. Sonra $a^{-1}b,\ b^{-1}a \in D$ ile $a(a^{-1}b) = b$ ve $b(b^{-1}a) = a$ olur. Böylece $a\,R\,b$, D nin içindedir. Benzer şekilde $a\,L\,b$ nin de D nin içinde olduğunu gösterebiliriz. Böylece D denkliği L ve R denkliklerini içerdiğinden tek bir D sınıfını içerir ve buradan D çift basit yarıgrup olur.

Bu önermeyi kullanarak aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 5.3.7 [40] S ters bir yarıgrup ve D, S ters yarıgrubunun D-sınıfı; R, S yarıgrubunun D tarafından içerilen R-sınıfı olsun. D ancak ve ancak $a,b \in R$ iken $Sa \cap Sb = Sc$ olacak şekilde R de bir c varsa S nin alt yarıgrubudur.

İspat: D, S nin alt yarıgrubu ve $a,b \in R$ olsun. $aa^{-1} = f$, $bb^{-1} = g$ olur. $R \cap L_{gf}$ içinde bir c seçelim, $Sfg = Sc$ olur.

Tersine, f ve g idempotentleri D nin herhangi iki idempotenti olsun. $aa^{-1} = f$ ve $bb^{-1} = g$ olacak şekilde $a,b \in R$ vardır. $Sa \cap Sb = Sc$ olacak şekilde bir $c \in R$ alalım. Sonra $c^{-1}c = fg$ olur. Sonuç olarak, $fg \in D$ olur. İstenen sonuç bir önceki önermenin ifadesinden elde edilir. Yani D, S nin alt yarıgrubu olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez beş ana bölüm altında toplanmış olup bu bölümlerde aşağıda özet olarak belirteceğimiz sonuçlar incelenmiştir.

Birinci bölümde yarıgrup teorisinin kimin tarafından kaç yılında çalışılmaya başlanıldığından bahsedilmiş, yarıgrup teorisindeki önemli kavramların ilk kez kimin tarafından yapıldığı açıklanmıştır.

İkinci bölümde, bir S yarıgrubunun yapısı tanımlanarak, tüm çalışmaya bir giriş yapılmıştır. Bununla birlikte bazı yarıgrup çeşitleri ile ilgili temel tanım, özellik ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarıgrup teorisinde bir çok önemli kavramı açıklamada kullandığımız ve günümüzde de yaygın bir çalışma alanı olan Green denklik bağıntıları verilmiş ve denklik bağıntıların ne olduğu tanım, örnek ve teoremlerle açıklanmıştır. Daha sonra beşinci bölümde çift basit yarıgrupları ele alırken kullanacağımız D-sınıfları incelenmiştir. Yarıgrup teorisinde önemli bir yere sahip olan Green Teoremi verilmiştir. Düzgün yarıgrup ve ters yarıgrup kavramları çalışılmıştır.

Dördüncü bölümün tamamı önemli bir yarıgrup çeşidi olan devirsel yarıgruplara ve devirsel yarıgrupların özel bir çeşidi olan çift devirsel yarıgruplara ayrılmıştır. Burada ilk olarak devirsel yarıgrup tanımı verilerek, elemanlarının nasıl belirlendiği açıklanmıştır. Diğer kısımlarda ise devirsel yarıgrupların daha önce verilen yarıgrup sınıflarına dahil olup olmadığı ve hangi şartlarda dahil olabileceği tarafımızdan incelenmiştir. Bununla birlikte son alt bölümde çift devirsel yarıgrup tanım, teorem ve örnekler ile incelenmiştir.

Beşinci bölümde, başka bir önemli yarıgrup çeşidi olan basit yarıgrup ve basit yarıgrupların özel bir çeşidi olan çift basit yarıgruplar ele alınmıştır. Basit yarıgruplar sağladıkları özelliklere göre sınıflandırılmş ve her bir sınıf ayrıntılı şekilde incelenmiş ve ayrıca yarıgrup teoride önemli bir yere sahip olan Rees Teoremleri verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Suschkewitsch, A. K.**(1926).Über die Darstellung der Eindeuting Nicht Umkehrbaren Gruppen Mittelst der Verallgemeinerten Substitutionen. Matematicheskii Sbornik, Vol.33, No.4, p.p. 371-374.

[2] **Rees, D.**(1940).On Semi-groups, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.36, No.4, p.p. 387-400.

[3] **Clifford, A.H.(**1941).Semigroups Admitting Relative İnverses, Annals of Mathematics, Vol.42, No.2, p.p. 1037-1049.

[4] **Dubreil, P.(**1941).Contribution a la therie des Demi-groupes, Mem. Acad. Sci. Inst. France, Vol.63, No.3, p.p. 1-52.

[5] **Clifford, A.H.(**1954).Bands of Semigroups. Proceedings of the American Mathematical Society, p.p. 499-504

[6] **Green, J.A.**(1951).On the Structure of Semigroups. Annals of Mathematics, Vol.54, p.p. 1119-1122.

[7] Wagner, V.V.(1952).Generalized Groups, Doklady Akad. Nauk SSSR. Vol.84, p.p. 1119-1122.

[8] **Preston, G.B.(**1954).Inverse Semigroups, Journal of the London Mathematical Society, Vol.29, No.4, p.p. 396-403.

[9**] Howie, J.M.(**1976).An İntroduction to Semigroup Theory, L.M.S. Momographs Academic Press, p.p. 7-11.

[10] **Clifford, A.H., ve Preston G.B.(**1961).The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, Mathematical Surveys Vol 1 No.7, p.p. 19-20.

[11] **Lyapin, E.S.**(1953).Canonical Form of an Associative System Given by Defining Relations, Leningrand Gos. Ped. Inst. Uch. Zap., Vol.89, p.p. 45-54.

[12] **Clifford, A.H., ve Preston G.B.(**1964).The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, p.p. 5, Mathematical Surveys. American Mathematical Society.

[13] **Clifford, A.H., ve Preston G.B.(**1953).The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, Mathematical Surveys. American Mathematical Society.

[14**] Howie, J.M.(**1995).Fundementals of Semigroups Theory Clarendon Press, Oxford.

[15] **Harju, T.(**1996).Lecture Notes on Semigroups. University of Turku, Finland.

[16] **Ruskuc, N.(**2001).Semigroups, Scotland.

[17] **Howie, J.M.(**1976).An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, Newyork.

[18] **Karakaş, H.İ.**(1998).Soyut Cebire Giriş. ODTÜ Matematik Vakfı Yayın, No.10, Ankara.

[19] **Miyuki, Y.**(1971)Note on Exclusive Semigroup Form, p.p. 160-167.

[20] **Clifford, A.H.**(1954).Bands of Semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society, p.p. 499-504.

[21] **Howie, J.M.**(1987).Why Study Semigroups ?, Mathematical Chronicle. Vol.16, no.2, p.p.1-14.

[22] **Çallıalp, F**.(1994).Cebir.Sakarya Üniversitesi.

[23] **Clifford, A.H., ve Preston G.B.(**1961).The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, AMS., No.7 Providence, R.I.

[24] **Rees, D.(**1940).On Semigroups, Proc. Cambridge Phil. Society 36, p.p. 387-400, MR 2, 127.

[25] **Gomes, Pin&Silva,** (2002).Semigroups, Algorithms, Automoto and Languages, p.94. Coimbra, Portugal.

[26] **Green, J.A.(**1951).On the Structure of Semigroups, Annals of Mathematics, Vol.54, p.p.163-172.

[27] **Neumann, J.V.(**1936).On regular Rings, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA Vol.22, p.p. 707-713.

[28] **Dales, H.G. ve Neumann P.M.(**1995).LMS monographs New Series, Clarendon Press, Oxford.

[29] **Hollings, C.D.(**2007).Some First Tantalizing Steps into Semigroup Theory.Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, Volume 80, p.p. 331-344.

[30] **Grillet, P.A.**(1995).İntroduction to Sturucture Theory

[31] **Petrich, M.(**1973).Introduction to Semigroups,Merill Publishing Company

[32] **Ruskuc, N.(**2003).Semigroups.

[33] **Ruskuc, N.**(1995).Semigroups Presentations, Ph. D. Thesis, University of St. Andrews.

[34] **Rotmann, J.J.(**1988).An Introduction to the Theory of Groups, Wm. C. Brown Publisher, Third Edition, Iowa.

[35] **Molaei, M.R.**(2000).*Completely Simple Semigroups and Their Topological Viewpoints.*

[36] **Ruskuc, N.**(1994).On the Rank of Completely 0-simple Semigroups.Math. Proc. Cambridge Philos Soc., Vol.116, p.p.325-338.

[37] **Gray, R. ve Ruskuc, N.**(2005).Generating Sets of Completely 0-simple Semigroups, Algebra, Vol.33, p.p.4657-4678.

[38] **Vasillevic A. ve Günterpilz M.**(2002).*The Coincise Handbook of Algebra.*

[39] **Clifford A.H. ve Preston G.B.**(1967). The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, AMS., No.7 Providence, R.I.

[40] **Clifford A.H. ve Preston G.B.**(1967). The Algebraic Theory of Semigroups Vol I, AMS., No.7 Providence, R.I.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Özlem Orhan

Doğum Yeri ve Tarihi: İzmir, 20.09.1984

Adres: İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Ayazağa Kampüsü, Maslak

E-Posta: orhanozlem@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Ticaret Üniversitesi, Matematik (Burslu) 2005-2009

Mesleki Deneyim ve Ödüller: İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi (Şubat 2010- Halen)