



HOMOJEN OLMAYAN ÖNGERİLME İÇEREN İÇİ BOŞ KÜRENİN TORSİYONEL TİTREŞİMİ

Surkay D. Akbarov^{1,2}, Nazmiye Yahnioğlu¹ ve Hatam H. Guliyev²

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

²Azerbaycan Ulusal Bilimler Akademisi, Bakü

ABSTRACT

In this study, an investigation of free vibration of hollow sphere with non-homogeneous initial stresses are made within the scope of the exact equations of three dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies[1]. Corresponding eigenvalue problem for the non-homogeneous initial stressed hollow sphere is solved with employing the discrete-analytical solution method proposed in [2, 3]. Numerical results on the natural frequency for the torsional vibration mode are presented and discussed. In particular, it is established that the non-homogeneous initial stresses caused by the external compression of the hollow sphere with uniformly distributed normal forces causes a decrease of the values of the natural frequencies of the hollow sphere under consideration

ÖZET

Ele alınan çalışmada, homojen olmayan öngerilme içeren içi boş kürenin serbest titreşimi, öngerilmeli cisimlerde elastik dalgaların üç boyutlu lineerize edilmiş kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır [1]. Uygun özdeğer problemleri, [2, 3]'de geliştirilen diskrit (ayrık) analitik metot yardımıyla çözülerek, kürenin torsiyonel titreşimine ait doğal frekansların sayısal değerleri bulunmuş ve bu değerlere homojen olmayan öngerilmelerin etkisi incelenmiştir. Özel olarak, kürenin dış yüzeyinden etki eden normal basınç kuvvetlerinin sebep olduğu ön gerilmelerin, doğal frekansların değerini azalttığı tespit edilmiştir.

GİRİŞ

İçerisinde b yarıçaplı boşluk olan a yarıçaplı küre için (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarda verilmiş çözüm bölgesi (Şekil 1)

$$\Omega = \{a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \quad (1)$$

olsun. Bu bölgede sağlanan lineerize edilmiş üç boyutlu elastodinamik hareket denklemleri

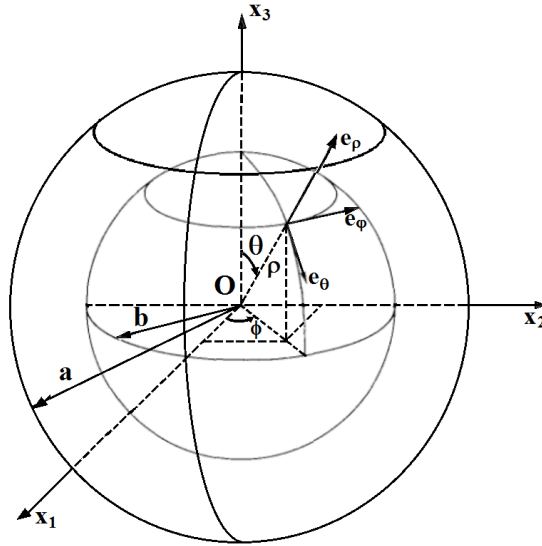
$$\frac{\partial t_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\phi r}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial t_{\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(2t_{rr}^{(k)} - t_{\phi\phi}^{(k)} - t_{\theta\theta}^{(k)} + t_{\phi r}^{(k)} \cot \phi \right) = \rho \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{r\phi}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\phi\phi}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial t_{\theta\phi}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(2t_{r\phi}^{(k)} + t_{\phi r}^{(k)} + (t_{\phi\phi}^{(k)} - t_{\theta\theta}^{(k)}) \cot \phi \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_{\phi}^{(k)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial t_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\phi\theta}^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial t_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(2t_{r\theta}^{(k)} + t_{\theta r}^{(k)} + (t_{\phi\theta}^{(k)} + t_{\theta\phi}^{(k)}) \cot \phi \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

burada

$$\begin{aligned} t_{rr} &= \sigma_{rr} + \sigma_{rr}^{(0)} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad t_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{\phi\phi}^{(0)} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{\phi}}{r \partial \phi} \right), \quad t_{r\phi} = \sigma_{r\phi} + \sigma_{rr}^{(0)} \frac{\partial u_{\phi}}{\partial r}, \\ t_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \left(\frac{u_r}{r} + \cot \phi \frac{u_{\phi}}{r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right), \quad t_{\phi r} = \sigma_{\phi r} + \sigma_{\phi\phi}^{(0)} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \phi} - \frac{u_{\phi}}{r} \right), \\ t_{r\theta} &= \sigma_{r\theta} + \sigma_{rr}^{(0)} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}, \quad t_{\theta r} = \sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta}}{r} \right), \quad t_{\phi\theta} = \sigma_{\phi\theta} + \sigma_{\phi\phi}^{(0)} \frac{\partial u_{\theta}}{r \partial \phi}, \\ t_{\theta\phi} &= \sigma_{\theta\phi} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_{\phi}}{\partial \theta} - \cot \phi \frac{u_{\theta}}{r} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

dir. (3)'de $\sigma_{rr}, \dots, \sigma_{\phi\theta}$ küresel koordinatlarda gerilme tansörü bileşenlerini, u_r, u_{θ} ve u_{ϕ} küresel koordinatlarda yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini ve $\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)}(r)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r)$ ile $\sigma_{\phi\phi}^{(0)} = \sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r)$ kürenin yapısında bulunan öngerilmeyi gösteren fonksiyonlardır.



Şekil 1. Çözüm bölgesi

Ele alınan küre için bünye denklemleri,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) + 2\mu\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) + 2\mu\varepsilon_{\phi\phi}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \\ \sigma_{\theta\phi} &= 2\mu\varepsilon_{\theta\phi}, \quad \sigma_{r\phi} = 2\mu\varepsilon_{r\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağıntıları,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_\theta \cot \theta, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \cot \theta \right), \\ \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

olarak verilebilir. (1)-(4) denklem takımı, homojen olmayan öngerilme içeren, içerisinde b yarıçaplı boşluk olan a yarıçaplı kürenin hareketini temsil eden denklemler takımı olur. Bu değişken katsayılı denklemler takımının ele alınan sınır koşulları çerçevesinde çözümü, diskrit-analitik metod yardımıyla yapılacaktır [2, 3]. Bu metoda göre ele alınan çözüm bölgesi sonlu sayıda alt bölgeye (katmana) ayrılır. Her bir katmanda öngerilmelerin değeri sabit kabul edilecektir. Dolayısıyla sonlu N adet katmandan oluşan ve her katmanda sabit öngerilmesi olan çok katlı küre olarak problem modellenecektir. Katmanlar arası ideal temas koşulları koşullarının sağlandığı varsayılır. Buna göre çözüm bölgesi

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k \quad \text{için} \quad \Omega_k = \left\{ r_{k-1} \leq r \leq r_k, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}, \quad (r_0 = b \text{ ve } r_N = a) \quad (6)$$

olan k. katmandaki öngerilmeler

$$\sigma_{rr}^{(0)}(r_k^0), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k^0) \text{ ve } \sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k^0), \quad r_k^0 = (r_k - r_{k-1})/2 \quad (7)$$

şeklinde aranır. Dolayısıyla, değişken katsayılı (2) ve (3) denklemler takımı, (6) ve (7) yardımıyla ayrıklaştırılarak, her katman için sabit katsayılı kısmi türevli denklemler takımına, dönüştürülür. Katmanlar arası ideal temas koşulları ile kürenin dış ve iç yüzeylerinde verilen yükleme durumu çerçevesinde, her k. katman için elde edilen sabit katsayılı kısmi türevli bu denklemler takımının çözümü, her biri dalga denklemini sağlayan $\Phi(r, \theta, \phi), \Psi(r, \theta, \phi)$ ve $\chi(r, \theta, \phi)$ Helmholtz potansiyelleri yardımıyla [4],

$$\begin{aligned}u_r^{(k)} &= \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial r^2} - r\nabla^2 \chi^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial \theta \partial r} \\ u_\phi^{(k)} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \phi} - \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial \phi \partial r},\end{aligned}\quad (8)$$

şeklinde analitik olarak belirlenir. Özel olarak $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k) = \sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k) (\neq \sigma_{rr}^{(0)}(r_k))$ için (8) denklemleri (2)-(3) de yerine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, $\Phi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$ potansiyelleri için

$$\mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} \Psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} \Psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} \right) \right] +$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k) \left[\frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \begin{matrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left\{ \begin{matrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left\{ \begin{matrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{matrix} \right\} \right] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{matrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{matrix} \right\},$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi^{(k)} + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi^{(k)} \right) \right] +$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k) \left[\frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Phi^{(k)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi^{(k)} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi^{(k)} \right] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi^{(k)} \quad (9)$$

denklemleri elde edilir. Burada,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta,\phi}, \quad \Delta_{\theta,\phi} = \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (10)$$

işaretlemeleri kullanılmıştır. Belirtelim ki, $\sigma_{rr}^{(0)}(r_k) = \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k) = \sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k) = 0$ durumunda (9) denklemleri klasik lineer elastodinamik'in, örneğin [4]'de verilen uygun denklemleri ile çakışmaktadır. Dolayısıyla, tarafımızca elde edilen (9) denklemleri uygun klasik denklemlerin genelleştirilmiş halidir.

(9) denklemlerinin çözümü, değişkenlerine ayırma metodu yardımıyla, yani farklı değişkenlere bağlı üç ayrı fonksiyonun çarpımı şeklinde aranır. Bu fonksiyonların θ - ya bağlı olanı $P_n^m(\cos \theta)$ ile işaret edilen m. dereceden Asosiye Legendre polinomu, ϕ -ye bağlı olanı ise $\cos m\phi$ ve $\sin m\phi$ biçiminde elde edilir ve sonuçta $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ ve $\chi^{(k)}$ potansiyelleri için aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\varphi^{(k)} = (\lambda^{(k)} r)^{-1/2} F_{\Phi}^{(k)}(\alpha^{(k)} r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi e^{i\omega t}$$

$$\psi^{(k)} = (\beta^{(k)} r)^{-1/2} F_{\Psi}^{(k)}(\beta^{(k)} r) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi e^{i\omega t},$$

$$\chi^{(k)} = (\beta^{(k)} r)^{-1/2} F_{\chi}^{(k)}(\beta^{(k)} r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi e^{i\omega t} \quad (11)$$

(9) ve (11)'den $F_{\Phi}^{(k)}(n, r)$, $F_{\Psi}^{(k)}(n, r)$ ve $F_{\chi}^{(k)}(n, r)$ fonksiyonları için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{d^2 F_{\Psi;\chi}^{(k)}(n, r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_{\Psi;\chi}^{(k)}(n, r)}{dr} + \left((\lambda^{(k)})^2 - \frac{v_n^{(k)}(v_n^{(k)} + 1)}{r^2} \right) F_{\Psi;\chi}^{(k)}(n, r) = 0,$$

$$\frac{d^2 F_{\Phi}^{(k)}(n, r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_{\Phi}^{(k)}(n, r)}{dr} + \left((\gamma^{(k)})^2 - \frac{\eta_n^{(k)}(\eta_n^{(k)} + 1)}{r^2} \right) F_{\Phi}^{(k)}(n, r) = 0,$$

$$(\lambda^{(k)})^2 = \rho \omega^2 / (\mu + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k)), \quad v_n^{(k)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^{(k)} n(n+1)}, \quad \alpha^{(k)} = \frac{(\mu + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k))}{(\mu + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k))},$$

$$(\gamma^{(k)})^2 = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k)), \quad \eta_n^{(k)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \beta^{(k)} n(n+1)},$$

$$\beta^{(k)} = \frac{(\lambda + 2\mu + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k))}{(\lambda + 2\mu + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k))}. \quad (12)$$

(12) denklemlerinin çözümü küresel Bessel fonksiyonları ile

$$\begin{aligned} F_{\Psi}^{(k)}(n, r) &= C^{(k)} j_{\nu_n^{(k)}}(\lambda^{(k)} r) + D^{(k)} y_{\nu_n^{(k)}}(\lambda^{(k)} r), \\ F_{\chi}^{(k)}(n, r) &= E^{(k)} j_{\nu_n^{(k)}}(\lambda^{(k)} r) + G^{(k)} y_{\nu_n^{(k)}}(\lambda^{(k)} r), \\ F_{\Phi}^{(k)}(n, r) &= A^{(k)} j_{\eta_n^{(k)}}(\gamma^{(k)} r) + B^{(k)} y_{\eta_n^{(k)}}(\gamma^{(k)} r), \end{aligned} \quad (13)$$

biçiminde bulunur. Burada,

$$j_{\alpha}(cr) = \left(\frac{\pi}{2cr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\alpha+1/2}(cr), \quad y_{\alpha}(cr) = \left(\frac{\pi}{2cr}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{\alpha+1/2}(cr), \quad (14)$$

ve $J_{\alpha+1/2}(cr)$, $Y_{\alpha+1/2}(cr)$ sırasıyla birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır.

(11)-(14) denklem ve ifadeleri (8)'de yerine yazılır ve düzenlenirse, küresel yerdeğiştirme fonksiyonları, bu yerdeğiştirme fonksiyonları (5) ve (4) denklemlerinde yerine yazılarak, küresel gerilme tansörünün bileşenleri elde edilir. Belirtelim ki, yerdeğiştirme ve gerilme fonksiyonlarının ifadeleri çok uzun olduğu için burada yer verilmemiştir.

Bu çalışmada, küredeki öngerilmelerin $\sigma_{rr}^{(0)}\Big|_{r=a} = -q$ ve $\sigma_{rr}^{(0)}\Big|_{r=b} = -p$ şeklinde verilen dış kuvvetlerin etkisi ile oluştuğu kabul edilmektedir. Bu kuvvetlerin oluşturduğu öngerilmeler ise

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= -p \frac{a^3(r^3 - b^3)}{(a^3 - b^3)r^3} - q \frac{b^3(a^3 - r^3)}{(a^3 - b^3)r^3}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \sigma_{r\phi}^{(0)} = \sigma_{\theta\phi}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \sigma_{\phi\phi}^{(0)} = -p \frac{a^3(2r^3 + b^3)}{2(a^3 - b^3)r^3} + q \frac{b^3(2r^3 + a^3)}{2(a^3 - b^3)r^3}, \end{aligned} \quad (15)$$

biçiminde belirlenir [5]. Dolayısıyla, (7)'deki $\sigma_{rr}^{(0)}(r_k^0)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k^0)$ ve $\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k^0)$ gerilme değerleri (15)'den belirlenecektir.

Yukarıda söylenenler çerçevesinde, katmanlar arasındaki ideal temas koşullarından ve uygun sınır koşullarından (14)'deki ifadelerle dahil olan bilinmeyen sabitler için bir birinden bağımsız iki grup homojen cebirsel denklemler takımı elde edilir. Bu gruplardan birincisi $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $E^{(k)}$ ve $G^{(k)}$ bilinmeyenlerini, ikincisi ise $C^{(k)}$ and $D^{(k)}$ bilinmeyenlerini içermektedir. Birinci grup denklemlerin çözümü sferik titreşim modunu, ikinci grup denklemler ise torsiyonel titreşim modunu belirlemektedir. Birinci grup denklem takımının katsayılar matrisinin determinantını sıfırlayarak sferik titreşim moduna ait doğal frekans denklemi, ikinci grup denklem takımının katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eşitleyerek torsiyonel titreşim moduna ait doğal frekans denklemi elde edilir. Bu denklemler uygun sayısal yöntemlerle çözümlenerek doğal frekanslar elde edilir. Bu makalede sadece torsiyonel titreşim moduna ait sayısal sonuçlar ve bu sonuçların incelenmesi verilmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Uygun frekans denkleminin çözümü MATLAB’de tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar yardımıyla sayısal olarak yapılmış ve ele alınan homojen olmayan öngerilmeli içi boş kürenin torsiyonel titreşimine ait fundamental frekansları elde edilmiştir. Belirtelim ki, tarafımızdan yapılan algoritma ve programların doğruluğu, yapıda öngerilme olmadığı durumlarda içi boş veya dolu kürenin temel frekanslarına ait sayısal sonuçlar ile test edilmiş ve tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar yardımıyla bulunan sayısal sonuçlarımıza güven sağlanmıştır [3,4].

Çizelge 1. Boşluk içeren homojen kürede alınan küresel alt bölgelerin (kabukların) sayısı N ’nin fundamental doğal frekans değerine etkisi ($b/a = 0,2$; $q/\mu = 0$ ve $p/\mu = 0,1$).

n	N	$\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)} / \mu^{(1)}}$				
		1.Kök	2.Kök	3.Kök	4.Kök	5.Kök
0	3	3,5965	6,4255	9,2395	12,0765	14,9325
	5	3,5925	6,4175	9,2265	12,0585	14,9105
	7	4,3015	6,9105	9,5785	12,3215	15,1175
	11	3,5875	6,4075	9,2115	12,0365	14,8825
	15	3,5865	6,4045	9,2065	12,0295	14,8735
	21	3,5845	6,4015	9,2025	12,0235	14,8655
1	3	4,3035	6,9155	9,5875	12,3375	15,1395
	5	4,3015	6,9125	9,5815	12,3275	15,1255
	7	3,5905	6,4125	9,2195	12,0485	14,8975
	11	4,3005	6,9095	9,5755	12,3155	15,1085
	15	4,3005	6,9085	9,5735	12,3125	15,1035
	21	4,3005	6,9085	9,5715	12,3095	15,0995

Yapıda homojen olmayan öngerilme içeren kürenin doğal titreşim probleminin çözümünde ortaya çıkan değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümü; ele alınan çözüm bölgesinin (7)’de verildiği gibi sonlu N adet alt katmana (kabuklara) ayrılmış ve her alt bölgede öngerilme fonksiyonu yerine uygun sabit bir değeri alınmıştır. Bu sayede değişken katsayılı kısmi türevli denklemler takımı, sabit katsayılı kısmi türevli denklemler takımına dönüştürülmüş olunur. Yeni durumda, N katmandan oluşan çözüm bölgesi için N ’nin sayısal değeri, sayısal sonuçların belirli bir asimtoda yakınsamasından belirlenmiştir. Katman sayısına göre belirlenen Torsiyonel doğal frekans değerleri Çizelge 1’de, sadece $n = 0$ ve 1 harmonikleri için verilmiştir; $n = 2-5$ harmonikleri için de benzeri bir durum tespit edilmiştir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlardan farklı kökler, farklı N değerleri için asimtoda gitmektedir. Bununla beraber çalışmanın bundan sonraki yapılacak hesaplamalarında katman sayısı $N = 21$ olarak alınacaktır.

Çizelge 2 (Çizelge 3)’de yapıda öngerilmeye neden olan p/μ dış basınç (q/μ iç basınç) değerinin, ele alınan öngerilmeli içi boş kürenin torsiyonel doğal frekanslarına etkisi ilk 5 harmoniğin ilk beş kökü için doğal frekanslar verilmiştir. Her iki çizelgede n büyüdükçe köklerde monotonluk yoktur, bununla beraber p/μ değerinin artması doğal frekansları

düşürürken, q/μ değerinin artması, doğal frekansların değerini büyötmektedir. Bununla beraber, p/μ dış basınç yoğunluğunun doğal frekans değerlerine etkisi, q/μ iç basınç yoğunluğundan daha fazla olduğu tespit edilmiştir.

Çizelge 3’de farklı p/μ ve q/μ için torsiyonel doğal titreşim frekansları belirlenmiştir. Çizelgeden görüldüğü üzere, bu iki parametrenin birlikte yapı elemanına etki etmeleri durumunda $\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$ değerine ortak etkileri, bu iki parametrenin ayrı ayrı $\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$ değerine etkilerinin süperpozisi olduğu görölmektedir.

Çizelge 2. Dış basınç p/μ ’nün fundamental doğal frekans $\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$,ya etkisi
($b/a = 0,2$ ve $q/\mu = 0$)

p/μ	n	$\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$				
		1.Kök	2.Kök	3.Kök	4.Kök	5.Kök
0	0	4,8375	8,6425	12,4285	16,2445	20,0885
	1	5,7995	9,3105	12,9015	16,5985	20,3665
	2	2,5005	7,1175	10,4795	13,8275	17,3105
	3	3,8645	8,4385	11,8435	15,0935	18,3715
	4	5,0945	9,7115	13,1975	16,4895	19,6965
0,001	0	4,8245	8,6195	12,3965	16,2025	20,0365
	1	5,7845	9,2865	12,8685	16,5555	20,3135
	2	2,4935	7,0995	10,4525	13,7915	17,2655
	3	3,8545	8,4165	11,8125	15,0545	18,3245
	4	5,0815	9,6855	13,1625	16,4465	19,6455
0,005	0	4,7745	8,5305	12,2675	16,0335	19,8275
	1	5,7245	9,1905	12,7355	16,3835	20,1025
	2	2,4675	7,0255	10,3435	13,6485	17,0865
	3	3,8145	8,3285	11,6895	14,8985	18,1345
	4	5,0285	9,5845	13,0265	16,2755	19,4415
0,01	0	4,7115	8,4185	12,1055	15,8225	19,5655
	1	5,6495	9,0705	12,5685	16,1695	19,8395
	2	2,4355	6,9325	10,2085	13,4695	16,8635
	3	3,7645	8,2185	11,5355	14,7035	17,8965
	4	4,9625	9,4585	12,8545	16,0625	19,1865

	5	6,1025	10,6655	14,1305	17,4025	20,5665
0,03	0	4,4615	7,9705	11,4605	14,9785	18,5215
	1	5,3495	8,5895	11,9025	15,3115	18,7855
	2	2,3055	6,5635	9,6655	12,7555	15,9695
	3	3,5625	7,7805	10,9215	13,9215	16,9465
	4	4,6965	8,9535	12,1705	15,2075	18,1655
	5	5,7765	10,0955	13,3775	16,4765	19,4725
0,05	0	4,2105	7,5215	10,8145	14,1335	17,4765
	1	5,0505	8,1095	11,2365	14,4535	17,7325
	2	2,1755	6,1935	9,1235	12,0405	15,0755
	3	3,3615	7,3415	10,3075	13,1395	15,9965
	4	4,4315	8,4485	11,4855	14,3525	17,1455
	5	5,4505	9,5265	12,6245	15,5495	18,3775

Çizelge 3. İç basınç q / μ 'nün Torsiyonel fundamental doğal frekans

$$\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)} / \mu^{(1)}} \text{ ,ya etkisi } (b/a = 0,2 \text{ ve } p/\mu = 0)$$

q / μ	n	$\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)} / \mu^{(1)}}$				
		1.Kök	2.Kök	3.Kök	4.Kök	5.Kök
0	0	4,8375	8,6425	12,4285	16,2445	20,0885
	1	5,7995	9,3105	12,9015	16,5985	20,3665
	2	2,5005	7,1175	10,4795	13,8275	17,3105
	3	3,8645	8,4385	11,8435	15,0935	18,3715
	4	5,0945	9,7115	13,1975	16,4895	19,6965
	5	6,2655	10,9505	14,5075	17,8655	21,1135
0,01	0	4,8375	8,6435	12,4305	16,2475	20,0915
	1	5,8005	9,3115	12,9035	16,6005	20,3695
	2	2,5005	7,1185	10,4815	13,8285	17,3125
	3	3,8655	8,4395	11,8445	15,0965	18,3745
	4	5,0955	9,7125	13,1995	16,4925	19,6995
	5	6,2665	10,9525	14,5095	17,8685	21,1165
0,02	0	4,8385	8,6455	12,4325	16,2495	20,0955
	1	5,8015	9,3125	12,9055	16,6025	20,3715
	2	2,5005	7,1195	10,4825	13,8305	17,3145
	3	3,8655	8,4405	11,8465	15,0985	18,3765

	4	5,0965	9,7145	13,2015	16,4945	19,7025
	5	6,2675	10,9545	14,5125	17,8715	21,1195
0,03	0	4,8395	8,6465	12,4345	16,2525	20,0985
	1	5,8025	9,3145	12,9075	16,6045	20,3745
	2	2,5015	7,1205	10,4845	13,8325	17,3165
	3	3,8665	8,4425	11,8485	15,1005	18,3795
	4	5,0975	9,7155	13,2035	16,4975	19,7055
	5	6,2695	10,9555	14,5145	16,2495	20,0955
0,05	0	4,8375	8,6435	12,4305	16,2475	20,0925
	1	5,8015	9,3115	12,9035	16,5995	20,3685
	2	2,5015	7,1205	10,4825	13,8295	17,3125
	3	3,8665	8,4415	11,8475	15,0985	18,3755
	4	5,0975	9,7155	13,2025	16,4955	19,7025
	5	6,2685	10,9555	14,5135	17,8725	21,1205

Çizelge 4. İç basınç q/μ ve dış basınç p/μ 'nün birlikte olması durumunda Torsiyonel fundamental doğal frekans $\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$,ya etkisi ($b/a = 0,2$)

p/μ	q/μ	n	$\Omega = \omega a \sqrt{\rho^{(1)}/\mu^{(1)}}$				
			1.Kök	2.Kök	3.Kök	4.Kök	5.Kök
0,01	0,01	0	4,7125	8,4195	12,1075	15,8255	19,5695
		1	5,6505	9,0715	12,5705	16,1715	19,8425
		2	2,4355	6,9345	10,2095	13,4715	16,8655
		3	3,7645	8,2205	11,5375	14,7055	17,8995
		4	4,9625	9,4605	12,8565	16,0645	19,1895
		5	6,1035	10,6675	14,1335	17,4055	20,5695
0,01	0,02	0	4,7135	8,4205	12,1095	15,8275	19,5725
		1	5,6515	9,0725	12,5725	16,1735	19,8455
		2	2,4355	6,9355	10,2115	13,4735	16,8675
		3	3,7655	8,2215	11,5395	14,7075	17,9015
		4	4,9635	9,4615	12,8585	16,0675	19,1925
		5	6,1045	10,6695	14,1355	17,4085	20,5725
0,01	0,03	0	4,7125	8,4195	12,1085	15,8265	19,5715
		1	5,6495	9,0695	12,5685	16,1685	19,8405
		2	2,4355	6,9335	10,2085	13,4695	16,8615

		3	3,7645	8,2205	11,5365	14,7035	17,8955
		4	4,9635	9,4605	12,8565	16,0635	19,1865
		5	6,1045	10,6675	14,1325	17,4035	20,5675
0,03	0,01	0	4,4625	7,9715	11,4625	14,9805	18,5245
		1	5,3505	8,5905	11,9045	15,3135	18,7885
		2	2,3055	6,5645	9,6675	12,7575	15,9715
		3	3,5635	7,7815	10,9235	13,9235	16,9485
		4	4,6975	8,9555	12,1725	15,2095	18,1685
		5	5,7775	10,0975	13,3805	16,4795	19,4755
0,03	0,02	0	4,4625	7,9725	11,4645	14,9835	18,5275
		1	5,3515	8,5925	11,9065	15,3155	18,7915
		2	2,3055	6,5655	9,6685	12,7595	15,9745
		3	3,5645	7,7835	10,9255	13,9255	16,9515
		4	4,6985	8,9565	12,1745	15,2125	18,1715
		5	5,7785	10,0995	13,3825	16,4815	19,4785
0,03	0,03	0	4,4635	7,9735	11,4665	14,9865	18,5315
		1	5,3525	8,5935	11,9075	15,3185	18,7945
		2	2,3065	6,5665	9,6705	12,7605	15,9765
		3	3,5645	7,7845	10,9275	13,9275	16,9545
		4	4,6995	8,9585	12,1765	15,2145	18,1745
		5	5,7795	10,1015	13,3845	16,4845	19,4815

KAYNAKLAR

- [1] A.N. Guz, *Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses*, “A.S.K.”, Kiev, 2004
- [2] S.D. Akbarov, *Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach*, Springer – Heidelberg, New York, 2015.
- [3] S.D. Akbarov, H.H. Guliyev and N. Yahniođlu, *Natural vibration of the three-layered solid sphere with middle layer made of FGM: three-dimensional approach*, SEM: Struct.Eng. Mech, 57 (2016) 239–263.
- [4] A.C. Eringen and E.S. Şuhubi, *Elastodynamics Vol II: Linear Theory*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [5] S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.