

**DOĞRUSAL OLMAYAN PEKLEŞME DAVRANIŞI GÖSTEREN EĞRİ
EKSENLİ KİRİŞİN BASİT EĞİLME ALTINDA ANALİTİK ÇÖZÜMÜ:
KISMEN PLASTİK VE ARTIK GERİLME HALLERİ**

Eray Arslan ve Ahmet N. Eraslan
Mühendislik Bilimleri Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
06531, Ankara

Özet

Bu çalışmada, doğrusal olmayan pekleşme davranışı gösteren ve basit eğilme uygulanan eğri eksenli dikdörtgen kesitli kiriş için elastik-plastik analitik çözüm türetilmektedir. Küçük deformasyonlar ve düzlem şekil değiştirme durumu varsayılmıştır. Kirişin plastik davranışı Tresca akma kriteri, ilgili akma kuralı ve Swift tipinde doğrusal olmayan pekleşme yasası yardımıyla formüle edilmiştir. Bu koşullar altında kirişin kısmen plastik davranışını tarif eden genel bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Elastik ve plastik bölge alan denklemleri bu genel denklemlerden türetilmiştir. Elastik ve plastik bölgeler için gerilme, şekil değiştirme ve yerdeğiştirmeler alan denklemlerinin analitik çözümlenmesiyle çıkarılmıştır. Yükleme kaldırıldıktan sonra kalan artık gerilmeler, kısmen plastik çözüm ile elastik çözümün farkı alınarak elde edilmiştir.

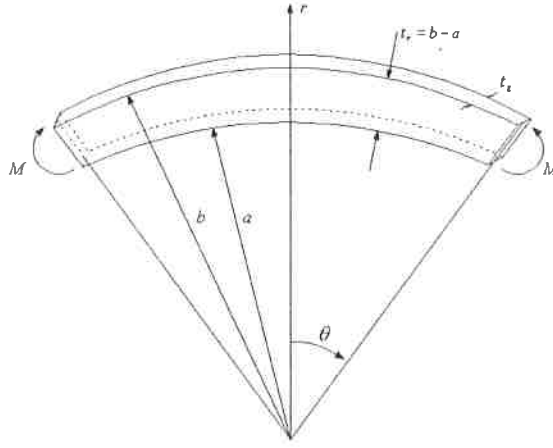
Abstract

In this study, elastic-plastic analytical solution of a nonlinearly hardening rectangular cross sectional curved beam subjected to pure bending is derived. Small deformations and plane strain conditions are assumed. Plastic behavior of the beam is formulated with Tresca's yield criterion, associated flow rule with it and a Swift-type nonlinearly hardening law. Under these conditions, a general differential equation that describes elastic-plastic behavior of the beam is obtained. This equation leads to derivation of field equations for elastic and plastic regions. Stresses, plastic strains and displacements are calculated for elastic and plastic regions by analytical integration of the field equations. Residual stresses that occur after unloading are obtained by taking difference between partial plastic solution and elastic solution.

1 Giriş

Şekil 1'de eğri eksenli kiriş geometrisi, yükleme şekli ve kullanılan koordinat sistemi gösterilmektedir. Kirişin $r = a$, $\theta = 0$ konumunda sabit tutulduğu varsayılmaktadır. Elastik kiriş, yavaşça arttırılan M eğilme momenti kritik bir değere ulaştığı anda ($M = M_c$) iç yüzeyinden ($r = a$)

plastikleşmeye başlar. Bu plastik bölge artan moment değerleri ile pozitif radyal koordinat yönünde ilerler. Moment, diğer bir kritik değere ulaştığı anda ($M = M_I$) kirişin dış yüzeyinde yeni bir plastik akma gerçekleşir. Bu çalışma için, $M = M_I$ değerine ulaşıldığı anda yükleme durdurulmaktadır. Böylece iç yüzeyinde plastik ve dış yüzeyinde elastik bölgeler oluşan kirişin kısmen plastik davranışı incelenmiştir.



Şekil 1: Eğri eksenli kiriş

Eğri eksenli kiriş problemi için detaylı bir elastik analiz Timoshenko ve Goodier [1] tarafından verilmiştir. Problemin ideal plastik malzemeler için elastik limit ötesi deformasyon davranışı ilk olarak Shaffer ve Goodier [2-4] tarafından incelenmiştir. Dadras, aynı problemin doğrusal pekleşen malzeme için elastoplastik analitik çözümünü, düzlem şekil değiştirme durumunu gözönünde bulundurarak elde etmiştir [5]. Doğrusal pekleşen malzeme ve düzlem gerilme durumu için elastik-plastik analitik çözüm ise yazarlar tarafından türetilmiştir [6, 7]. Yazarların bir diğer çalışmasında doğrusal olmayan pekleşme davranışı gösteren eğri eksenli kiriş için sayısal bir model geliştirilmiştir [8]. Bu model Von mises akma kriteri ve genelleştirilmiş Swift tipinde pekleşme yasası kullanılarak elde edilmiştir. Literatürde, doğrusal olmayan pekleşme davranışı gösteren basit eğilme altındaki eğri eksenli kiriş problemi için analitik bir çözüm bulunmamaktadır. $0 \leq M \leq M_I$ aralığı için söz konusu çözüm, bu çalışmada türetilmiştir.

2 Formülasyon

Formülasyonda Timoshenko ve Goodier [1] notasyonu kullanılmaktadır. Böylece σ normal gerilmeyi, u radyal yerdeğiştirme bileşenini ve ϵ birim şekil değiştirmeyi ifade eder. İç ve dış yüzeylerinin serbest yüzey olduğu kabul edilen kiriş için sınır koşulları

$$\sigma_r(a) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_r(b) = 0, \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca kirişin $r = a, \theta = 0$ noktasında sabitlendiği varsayıldığı için

$$u(a, 0) = 0, \quad (3)$$

koşulu geçerlidir. Kirişe uç noktalarından uygulanan M momenti ise bir diğer sınır koşulunu oluşturur

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = -M. \quad (4)$$

Çözümde, düzlem şekil değiştirme ($\epsilon_z = 0$) ve küçük deformasyonlar durumları varsayılmaktadır. Genelleştirilmiş Hooke yasası,

$$\epsilon_r = \epsilon_r^p + \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)], \quad (5)$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_\theta^p + \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)], \quad (6)$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z^p + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)], \quad (7)$$

radyal yönde denge denklemi

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr} (r\sigma_r), \quad (8)$$

ve integre edilmiş uygunluk bağıntısı [6-8]

$$\frac{d}{dr} (r\epsilon_\theta) - \epsilon_r = \phi, \quad (9)$$

temel denklemleri oluşturmaktadır. Burada ϕ keyfi bir integrasyon sabitidir ve ϵ_i^p plastik birim şekil değiştirme bileşenini ifade eder. Genelleştirilmiş Hooke yasası (7) yardımıyla eksenel gerilme bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) - E\epsilon_z^p. \quad (10)$$

Denklem (8) ve denklem (10), Hooke yasasının (5, 6) içine yerleştirilerek radyal gerilme, türevi ve plastic şekil değiştirme bileşenleri cinsinden ifade edilebilir

$$\epsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - 2\nu) \sigma_r - r\nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right] + \epsilon_r^p + \nu\epsilon_z^p, \quad (11)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - 2\nu) \sigma_r + r(1 - \nu) \frac{d\sigma_r}{dr} \right] + \epsilon_\theta^p + \nu\epsilon_z^p. \quad (12)$$

Bu iki denklem, uygunluk bağıntısında (9) yerlerine konularak aşağıdaki genel denkleme ulaşılır

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\epsilon_r^p - \epsilon_\theta^p - r \left(\nu \frac{d\epsilon_z^p}{dr} + \frac{d\epsilon_\theta^p}{dr} \right) + \phi \right] = 0. \quad (13)$$

Bu genel denklem elastik ve plastik bölgelerin çözümü için kullanılacaktır. Ayrıca radyal yerdeğiştirme bileşeni için, kaynak [6] yardımıyla

$$u = r\epsilon_\theta - \phi r - A \cos \theta, \quad (14)$$

ifadesi yazılır. Burada A bir sabittir.

3 Elastik Çözüm

Elastik çözüm için, $\epsilon_i^p = 0$ alınır ve böylece denklem (13) aşağıda verilen denkleme indirgenir

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{E\phi}{1-\nu^2} = 0. \quad (15)$$

Bu denklemin çözümüyle radyal gerilme bileşeni için

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 + \frac{E\phi \ln r}{2(1-\nu^2)}, \quad (16)$$

çözümüne ulaşılır. Burada C_1 ve C_2 keyfi integrasyon sabitleridir. Elastik bölge için teğetsel gerilme ve radyal yerdeğiştirme bileşenleri, (8) ve (14) yardımıyla elde edilir

$$\sigma_\theta = -\frac{C_1}{r^2} + C_2 + \frac{E\phi(1+\ln r)}{2(1-\nu^2)}, \quad (17)$$

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_1}{r} + (1+\nu)(1-2\nu)C_2 r \right] - \frac{\phi[1-\nu-(1-2\nu)\ln r]r}{2(1-\nu)} - A \cos \theta. \quad (18)$$

Tümüyle elastik davranışa karşılık gelen çözümü elde etmek için gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerindeki sabitlerin hesaplanması amacıyla, (1 - 4) kullanılır. Böylece bilinmeyen sabitler için aşağıdaki analitik ifadelere ulaşılır

$$C_1 = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln(b/a), \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{4M}{N} (b^2 \ln b - a^2 \ln a), \quad (20)$$

$$\phi = \frac{8M}{EN} (a^2 - b^2)(1-\nu^2), \quad (21)$$

$$A = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_1}{a} + (1+\nu)(1-2\nu)aC_2 \right] - \frac{\phi[1-\nu-(1-2\nu)\ln a]a}{2(1-\nu)}. \quad (22)$$

Yukarıdaki denklemlerde N ise

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 [\ln(b/a)]^2, \quad (23)$$

olarak tanımlanmıştır. Elastik çözüm, plastikleşmenin ilk olarak kirişin iç yüzeyinde gerçekleştiğini ve bu bölgede gerilmelerin $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ şeklinde sıralanacağını gösterir [6-8]. Tresca akma kriteri gereğince kirişin iç yüzeyinde ($r = a$) $\sigma_y = \sigma_\theta - \sigma_r$ eşitliği sağlandığı anda plastik akma başlar. Burada σ_y malzemenin akma gerilimidir ve akmanın başladığı anda uygulanan moment, $M = M_e$, elastik limit momenti olarak adlandırılır. Bu moment değerini hesaplamak için $\sigma_\theta(a) - \sigma_r(a) = \sigma_0$ denkliği kullanılır ve

$$M_e = \frac{\sigma_0 [4a^2 b^2 \ln^2(b/a) - (b^2 - a^2)^2]}{4 \{b^2 [1 - 2 \ln(b/a)] - a^2\}}, \quad (24)$$

elde edilir. Burada ki σ_0 malzemenin elastik limit gerilimini ifade etmektedir. Eğilme momentinin $M > M_e$ değerlerinde kiriş elastik-plastik davranmaktadır.

4 Plastik Bölge

Kirişin iç yüzeyinde oluşan plastik bölge için, Tresca akma kriteri $\sigma_Y = \sigma_\theta - \sigma_r$ ve ilgili akma kuralı $\epsilon_\theta^p = -\epsilon_r^p$ ve $\epsilon_z^p = 0$ şeklindedir. Ayrıca plastik iş arttırımı sayesinde $\epsilon_{EQ} = \epsilon_\theta^p$ eşitliği elde edilir. Burada ϵ_{EQ} eşdeğer plastik birim şekil değiştirme bileşenidir ve Swift tipinde doğrusal olmayan pekleşme yasası gereğince

$$\epsilon_{EQ} = \left[\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{\eta}, \quad (25)$$

olarak tanımlanır. Bu denklemdeki η malzemenin sertleşme parametrisidir ve bu parametrenin normalize edilmiş hali $H = \eta\sigma_0/E$ şeklindedir. Denklem (25) ve akma kuralı yardımıyla gerilmeler cinsinden ifade edilen plastik birim şekil değiştirme bileşenleri genel denklemde (13) yerlerine konularak, plastik bölge için alan denklemi aşağıdaki gibi elde edilir

$$3Hr(1-\nu^2)\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{4r^2}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma_r}{dr} \right)^2 + r^2 \left[H(1-\nu^2) + \frac{2r}{\sigma_0} \frac{d\sigma_r}{dr} \right] \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} - 2\sigma_0 - EH\phi = 0. \quad (26)$$

$V = d\sigma_r/dr$ tanımı kullanılarak, doğrusal olmayan bu diferansiyel denklemin derecesi düşürülür ve böylece aşağıdaki doğrusal olmayan Abel diferansiyel denklemine ulaşılır

$$3Hr(1-\nu^2)V + \frac{4r^2}{\sigma_0} V^2 + r^2 \left[H(1-\nu^2) + \frac{2rV}{\sigma_0} \right] \frac{dV}{dr} - 2\sigma_0 - EH\phi = 0. \quad (27)$$

V değişkeni için elde edilen çözümlerden

$$\lim_{H \rightarrow 0} \sigma_Y = \lim_{H \rightarrow 0} (r\sigma_r') = \lim_{H \rightarrow 0} (rV) = \sigma_0, \quad (28)$$

koşulunu sağlayan doğru çözüm aşağıda verildiği gibidir

$$V = \frac{1}{r} \left[-\frac{H\sigma_0}{2}(1-\nu^2) + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} \right]. \quad (29)$$

Bu denklemdeki C_3 keyfi bir sabittir ve D_1 ise

$$D_1 = \frac{\sigma_0}{4} \{ [4 + H^2(1-\nu^2)^2] \sigma_0 + 2EH\phi \}, \quad (30)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (29)'un integrali alınarak aşağıdaki radyal gerilme ifadesine ulaşılır

$$\begin{aligned} \sigma_r = \int_a^r V(\xi) d\xi = & -\frac{1}{2} H\sigma_0(1-\nu^2) \ln(r/a) - \sqrt{D_1} \left\{ \ln \left[a \left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1} \right) \right] \right. \\ & \left. - \ln \left[\left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} \right) r \right] \right\} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1} - \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1}. \quad (31) \end{aligned}$$

Bu bölge için teğetsel gerilme; denge denklemi (8) yardımıyla, radyal yerdeğiştirme bileşeni; genelleştirilmiş Hooke yasası ve (14) denklikleri yardımıyla, plastik birim şekil değiştirme

bileşenleri ise; (25) denkliği ve Tresca akma kuralı yardımıyla, elde edilir. Sonuçlar aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_{\theta} = -\frac{1}{2}H\sigma_0(1-\nu^2)[1+\ln(r/a)] - \sqrt{D_1} \left\{ \ln \left[a \left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1} \right) \right] - \ln \left[\left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} \right) r \right] \right\} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1}, \quad (32)$$

$$u = \frac{\sigma_0 C_3}{Er} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)r}{E} \left\{ \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} - \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1} + \frac{1}{2}H\sigma_0(1-\nu^2)\ln(r/a) + \sqrt{D_1} \left\{ \ln \left[a \left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{a^2} + D_1} \right) \right] - \ln \left[\left(\sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} \right) r \right] \right\} \right\} - \frac{\phi r}{2} - A \cos \theta. \quad (33)$$

$$\epsilon_{\theta}^p = -\epsilon_r^p = \frac{1}{E} \left\{ \frac{\sigma_0 C_3}{r^2} + \frac{1}{2} [H(1-\nu^2)^2 \sigma_0 + E\phi] - (1-\nu^2) \sqrt{\frac{H\sigma_0^2 C_3}{r^2} + D_1} \right\}. \quad (34)$$

5 Elastik-Plastik Çözüm

Kirişin iç yüzeyinin ($a \leq r \leq r_{ep}$) plastik, dış yüzeyinin ($r_{ep} \leq r \leq b$) elastik davrandığı kısmen plastik çözüm, $M_e < M < M_l$ moment aralığı için geçerlidir. Burada M_l kirişin dış yüzeyinde akmanın başladığı andaki moment değerini, r_{ep} elastik-plastik arayüz koordinatını ifade etmektedir. Kısmen plastik çözüm için C_1 , C_2 , C_3 , ϕ , A ve r_{ep} sabitlerinin bulunması gerekmektedir. Bu nedenle

$$u^p(a, 0) = 0, \quad (35)$$

$$\sigma_r^p(r_{ep}) = \sigma_r^e(r_{ep}), \quad (36)$$

$$u^p(r_{ep}, \theta) = u^e(r_{ep}, \theta), \quad (37)$$

$$\sigma_{\theta}^e(r_{ep}) - \sigma_r^e(r_{ep}) = \sigma_0, \quad (38)$$

$$\sigma_r^e(b) = 0, \quad (39)$$

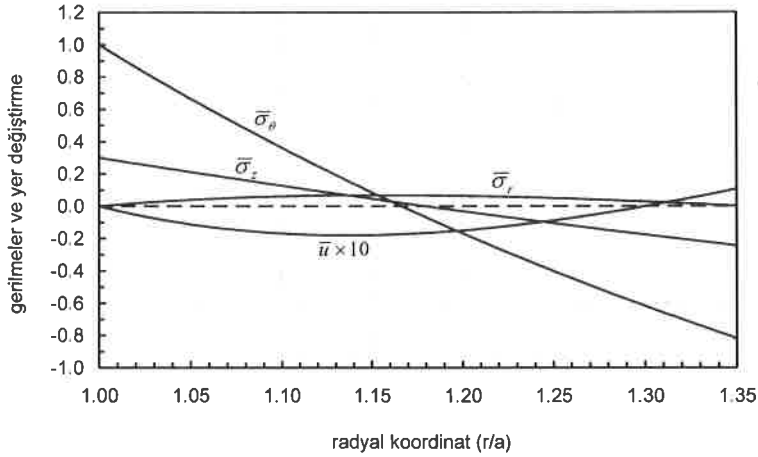
$$\int_a^{r_{ep}} \sigma_{\theta}^p r dr + \int_{r_{ep}}^b \sigma_{\theta}^e r dr = -M \quad (40)$$

sınır ve arayüz koşulları kullanılır. Burada üstlü ifadelerde kullanılan e elastik, p plastik bölgeyi ifade etmektedir.

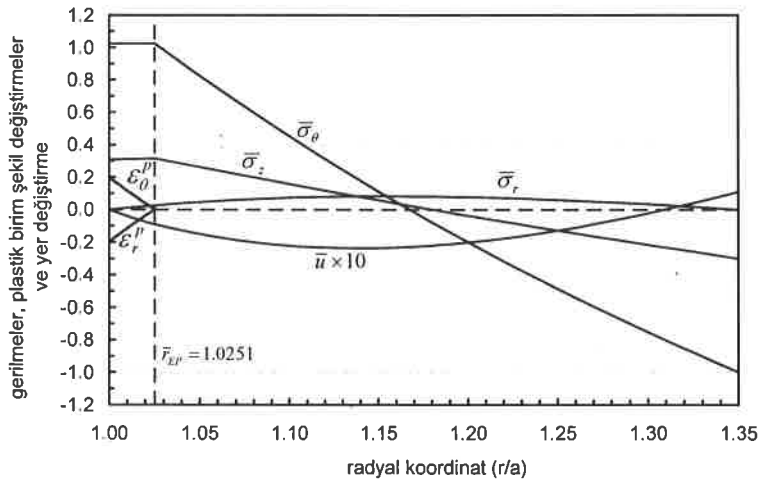
6 Sayısal Sonuçlar

Sayısal sonuçların sunumu sırasında boyutsuz büyüklükler kullanılmıştır. Bu büyüklükler $\bar{b} = b/a$, $\bar{r} = r/a$, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0$, $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i E/\sigma_0$, $\bar{M} = M/(\sigma_0 b^2 t_z)$, şeklinde tanımlanmıştır. Örnek çözüm için $\bar{b} = 1.35$, $H = 0.25$ ve $\nu = 0.3$ alınmıştır. Böylece denklem (24) yardımıyla $\bar{M}_e =$

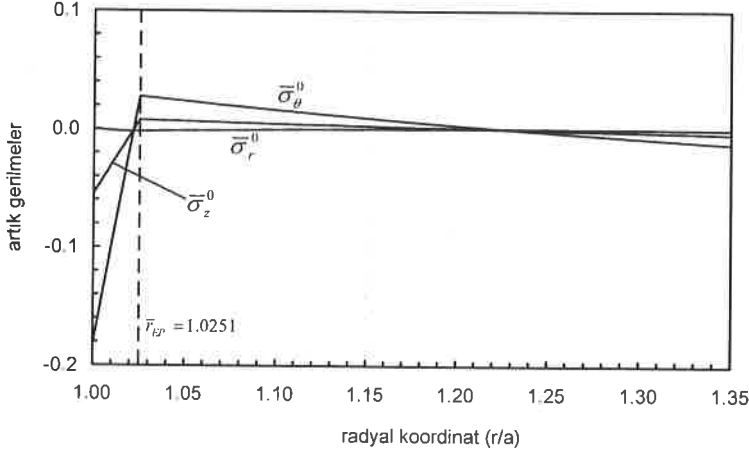
1.0083×10^{-2} hesaplanır. Bu yüklemeye karşılık gelen gerilmelerin kirişteki dağılımları Şekil 2'de gösterilmektedir. Şekilde görüldüğü üzere, iç yüzeyde ($\bar{r} = 1$) $\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r = 1$ koşulu sağlanmıştır. Bu da o bölgede akmanın başladığını ve uygulanan \bar{M} değerinden büyük moment değerleri için elastoplastik çözümün kullanılması gerektiğini işaret eder.



Şekil 2. $\bar{b} = 1.35$, $H = 0.25$ ve $\bar{M} = \bar{M}_e = 1.0083 \times 10^{-2}$ için gerilme ve yer değiştirme.



Şekil 3: $\bar{b} = 1.35$, $H = 0.25$ ve $\bar{M}_l = 1.2161 \times 10^{-2}$ için gerilmeler, plastik birim şekil değiştirmeler ve yer değiştirme.



Şekil 4: $\bar{b} = 1.5$, $H = 0.25$ için kirişe uygulanan $\bar{M}_l = 1.2161 \times 10^{-2}$ momentinin kaldırılması sonucu oluşan artık gerilmeler.

Örneğimizdeki kısmen plastik kiriş için limit moment değeri $\bar{M}_l = 1.2161 \times 10^{-2}$ olarak hesaplanır ve bu yüke karşılık, kirişte oluşan gerilme, plastik şekil değiştirme ve yerdeğiştirme bileşenleri Şekil 3'de gösterilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi elastik-plastik arayüz koordinatı $\bar{r}_{EP} = 1.0251$ olarak bulunur. Bu nedenle $1 < \bar{r} < 1.0251$ aralığında plastik bölge, $1.0251 < \bar{r} < 1.35$ aralığında ise elastik bölge geçerlidir. Ayrıca bu moment değerinde kirişin dış yüzeyinde ($\bar{r} = 1.35$) $\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta = 1$ koşulunun sağlandığı gözlenmektedir. Bu da, $\bar{M} > \bar{M}_l$ moment değerleri için dış yüzeyde farklı akma kriterine sahip bir plastik bölgenin oluşacağını işaret eder. Şekil 4'de ise yükün ($\bar{M}_l = 1.2161 \times 10^{-2}$) kaldırılması sonucu kirişte oluşan artık gerilmeler gösterilmektedir.

Kaynakça

1. Timoshenko S.P ve Goodier J.N., "Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Company-1970.
2. Shaffer, B.W., House Jr, R.N., "The elastic-plastic stress distribution within a wide curved bar subjected to pure bending" Journal of Applied Mechanics, the Transactions of the ASME 22, 305-310, 1955.
3. Shaffer, B.W., House Jr, R.N., "The significance of zero shear stress in the pure bending of a wide curved bar" Journal of the Aeronautical Sciences 24, 307-308, 1957.

4. Shaffer, B.W., House Jr, R.N., "Displacements in a wide curved bar subjected to pure elastic-plastic bending" *Journal of Applied Mechanics, the Transactions of the ASME* 24, 447-452, 1957.
5. Dadras P., "Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam" *International Journal of Mechanical Sciences* 43 39-56, 2001.
6. Eraslan, A.N., Arslan E., "A Concise Analytical Treatment of Elastic-plastic Bending of a Strain Hardening Curved Beam" *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* 88 (8) 600-616, 2008.
7. Arslan E., Eraslan, A. N., "Kısmen Plastik Eğri Eksenli Kiriş Probleminin Basit Eğilme için Analitik Çözümü" *15nci Ulusal Mekanik Kongresi Bildiri Kitabı, Isparta*, 117-124, 2007.
8. Eraslan, A.N., Arslan E., "A Computational Study on the Nonlinear Hardening Curved Beam Problem" *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 43 129-143, 2008.

