

İKİ BOYUTLU ELASTOSTATİK PROBLEMLER İÇİN EĞRİ EKSENLİ SÜREKSİZ KUADRATİK SINIR ELEMAN FORMÜLASYONU

İbrahim Ö. DENEME ve Hüseyin R. YERLİ

Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, ADANA
e-mail: ideneme@cukurova.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, iki boyutlu elastostatik problemlerin çözümü için eğri eksenli süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu gerçekleştirilmiştir. İntegral denklemlerin çözümü Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile yapılmaktadır. P sabit ve Q hareketli noktalarının aynı eleman üzerinde olması halinde ortaya çıkan, $1/r$ tekilliği kaldırılarak, $\ln(1/r)$ tekilliği ise uygun logaritmik ve standart Gauss yöntemlerinin kullanılmasıyla giderilmiştir. Ele alınan formülasyon kullanılarak, düğüm noktalarının farklı konumları için çözüm yapabilen, Fortran77 dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan program ile çözülen iki adet elastostatik problemin sonuçları, literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

ABSTRACT

In this study, a discontinuous curved quadratic boundary element formulation for the solution of two dimensional elastostatic problems is presented. The integral equations are solved numerically by Gaussian quadratures. $1/r$ and $\ln(1/r)$ singularities that exist when source point P and varied point Q are within same element either removed or manipulated by using logarithmic and standard Gauss quadrature. A computer program, which allows to determine the location of boundary element nodes within an element, is developed for solving the formulation by using Fortran77 codes. The results of two elastostatic problems obtained using the program are compared with those in the literature.

1. GİRİŞ

Mekanik problemlerinin geometrisinin ve malzeme özelliklerinin karmaşık bir yapıya sahip olması nedeniyle çoğu zaman problemlerin analitik çözümünü yapmak mümkün olamamaktadır. Bu tip problemlerle karşılaşıldığında yaklaşık bir çözüm elde etmek amacıyla çeşitli sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden biri olan sınır eleman yöntemi, sınır değer problemlerini, çözüm bölgesinin sınırında tanımlanan integral denklemler yardımıyla çözen sayısal bir yöntemdir [1-5]. İntegral ifadelerinin içinde yer alan temel çözümler analitik olarak hesaplandığından yarı analitik bir yöntemdir. Yarı analitik bir

yöntem olmasından dolayı, diğer sayısal yöntemlere göre daha doğru sonuçlar elde edilebilmektedir. Sınır eleman yönteminin yaygın kullanımına sebep olarak, bu yöntemin kullanılması ile problemin boyutlarının indirgenmesi, sonuçlardaki yüksek kesinlik ve sonsuzda yayılma şartlarının dolaylı olarak hesaba katılması gösterilmektedir [6].

İki boyutlu haldeki integrallerin çözümü için değişik yöntemler kullanılmıştır. Kane [7]'in yaklaşımında sabit nokta elemanın hemen dışında alınarak hazırlanan integrasyon yöntemi yardımıyla sayısal zorluklar önlenmiştir. Bakır [8] ise simetrik olmayan problemler için uygun logaritmik hesaplamalarla $\ln(1/r)$ tekilliğini hesaplamıştır. Fakat $1/r$ tekilliği olan ifade kaldırılmamıştır. Mengi ve ark. [9] tarafından sabit eleman kullanılarak integral denklemlerinin içinde yer alan temel çözümler, sonsuz ortamda birim yükleme yöntemiyle analitik olarak elde edilmiştir. Severcan ve ark. [10] sınır elemanı üzerinde gerilme vektörü bileşenlerinin sabit, deplasman vektörü bileşenlerinin lineer değiştiği ve gerilme vektörü bileşenlerinin lineer, deplasman vektörü bileşenlerinin kuadratik değişim gösterdiği süreksiz karma sınır elemanlar kullanarak elastostatik problemler için sınır eleman formülasyonu yapmıştır. Severcan ve ark. [11] doğrusal izoparametrik süreksiz kuadratik sınır eleman kullanarak sabit nokta ile integrasyon noktasının aynı sınır elemanı üzerinde bulunmasından kaynaklanan tekillik durumlarını standart sayısal yaklaşımlar kullanarak hesaplamıştır.

Bu çalışmada, iki boyutlu elastostatik problemler için eğri eksenli süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu eleman modeli kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümün hassasiyeti artırılmaya çalışılmıştır. P sabit ile Q hareketli noktalarının aynı eleman üzerinde olması halinde ortaya çıkan, $1/r$ tekilliği ortadan kaldırılarak, $\ln(1/r)$ tekilliği ise değişken dönüşümü yapıldıktan sonra uygun logaritmik ve standart Gauss sayısal integrasyon yöntemlerinin kullanılmasıyla giderilmiştir. Bu çalışmada önerilen formülasyon kullanılarak çözülen problemlerden bulunan sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. FORMÜLASYON

2.1. Elastostatik Problemler için Sınır Eleman Formülasyonu

Elastostatik problemler için sınır eleman formülasyonunun temel bağıntıları literatürde geniş bir şekilde verilmektedir [1-6, 9-11]. İki boyutlu bir cismin elastostatik analizi için sınır eleman denklemi, hacim kuvvetleri ihmal edilerek, matris formunda,

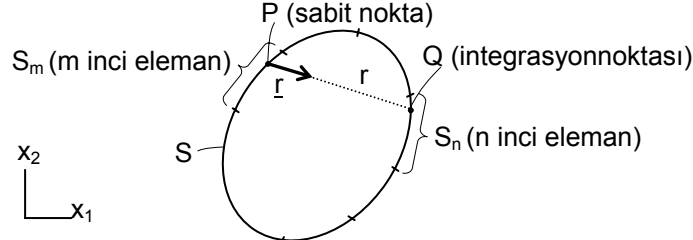
$$\underline{c} \underline{u}(P) = \int_S \underline{G}(P, Q) \underline{t}(Q) dS - \int_S \underline{H}(P, Q) \underline{u}(Q) dS \quad (1)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada S, cismin sınır yüzeyini göstermektedir. İntegralli terimlerde görülen \underline{G} ve \underline{H} (2×2) boyutunda matrisler olup sırasıyla, elastostatik problemler için elde edilmiş olan birinci ve ikinci temel çözümleri temsil etmektedir. \underline{u} ve \underline{t} sırasıyla, (2×1) boyutunda, deplasman ve gerilme vektörlerini göstermektedir. P ve Q ise sırasıyla, integral işlemlerinde kullanılan sabit noktayı ve integrasyon noktasını temsil etmektedir.

(1) denklemi yardımıyla, sınırda ya da cismin iç bölgesinde yer alan noktalardaki deplasman veya gerilme değerleri bulunabilmektedir. \underline{c} matrisi P noktasının bulunduğu konuma göre eşitlik (2)'de verilen değerleri almaktadır. Eğer P noktası S üzerinde bir köşe noktası ise, \underline{c} matrisi, P noktasındaki köşe açılara bağlı olarak verilmektedir [1].

$$\underline{c} = \begin{cases} \underline{I} & \text{P noktası cismin dışında ise,} \\ \underline{0} & \text{P noktası cismin içinde ise,} \\ \frac{1}{2} \underline{I} & \text{P noktası cismin sınırında ise,} \end{cases} \quad (2)$$

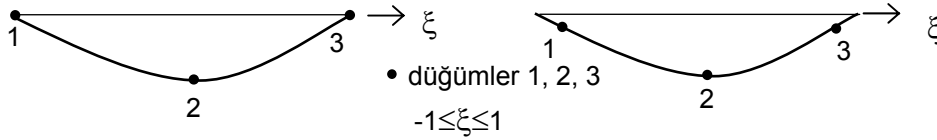
P noktasının sınır yüzeyinde seçilmesi halinde (1) denklemi, sadece sınır büyüklüklerini içeren bir denklem haline dönüşmektedir. Bu durumda denkleme indirgenmiş sınır eleman denklemi adı verilmektedir. (1) denklemine yer alan integraller, cismin sınır yüzeyi (S) elemanlara bölünerek (Şekil 1) sayısal olarak hesaplanmaktadır.



Şekil 1. Sınır yüzeyinin elemanlara bölünmesi

2.2. Süreksiz Kuadratik Sınır Eleman Formülasyonu

Sınır eleman formülasyonunda, seçilen düğüm noktalarının konumuna göre sınır elemanları, sürekli veya süreksiz sınır eleman olarak adlandırılmaktadır. Düğüm noktalarının, elemanın uç noktalarında seçilmesi halinde sürekli sınır elemanı söz konusu olmaktadır (Şekil 2). Uç noktalarında seçilen düğüm noktaları, komşu elemanlar için ortak düğüm noktaları olduğundan, bu noktalarda, sınır büyüklükleri için süreklilik şartlarının sağlanması gerekmektedir. Düğüm noktalarının elemanın iç bölgesinde seçilmesi halinde ise elemana süreksiz sınır elemanı denilmekte ve elemanlar arası süreklilik koşullarına ihtiyaç kalmamaktadır (Şekil 2). Kuadratik elemanlardaki bir uçtan diğer uca oluşan uyum genelde bu eleman tipinin seçilme nedeni olarak görülmektedir. Fakat bu tip elemanların eğrisel bir geometriye sahip olması sebebiyle P sabit ve Q hareketli noktalarının aynı elemanda olması halinde elemanların integrasyonunda ilave zorluklar oluşmaktadır.



Şekil 2. İki boyutlu sürekli ve süreksiz kuadratik eleman

Bu çalışmada, süreksiz sınır elemanı ve şekil fonksiyonları kullanılarak, süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu elde edilmiştir. Bu amaçla, Şekil 1’de görüldüğü gibi, cisim sınırı (S) N adet sınır elemanına bölünmektedir.

Sınır eleman formülasyonunda, eleman üzerinde yer alan bir Q noktasının koordinatları,

$$x_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) x_i^k \quad (3)$$

denklemleri ile, sınır elemanı üzerindeki sınır büyüklükleri ise,

$$u_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) u_i^k \quad ; \quad t_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) t_i^k \quad (4)$$

ifadeleri ile verilmektedir. Bu ifadelerde; x_i , Q integrasyon noktasının koordinatlarını; x_i^k , elemana ait k. düğüm noktasının koordinatlarını; (u_i^k, t_i^k) , k düğüm noktasındaki sınır büyüklüklerinin değerlerini; ϕ_k , şekil fonksiyonlarını; (ξ) ise Q noktasının boyutsuz koordinatını temsil etmektedir.

(3) ve (4) ifadelerinde verilen şekil fonksiyonları süreksiz kuadratik eleman için,

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\xi}{\alpha} - 1 \right); \quad \phi_2(\xi) = 1 - \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^2; \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\xi}{\alpha} + 1 \right) \quad (5)$$

şeklinde belirlenmiştir ($-1 \leq \xi \leq 1$ ve $0 < \alpha < 1$).

Süreksiz eleman için 1 ve 3 no'lu düğümlerin konumları simetrik olarak değişmektedir. Bu simetriklik α parametresi ile belirlenmektedir. Burada α parametresi düğüm noktaları arası mesafenin eleman boyuna oranını temsil etmektedir. $\alpha=0.5$ olduğunda düğüm noktasının eleman orta noktası ile eleman son noktasının ortasında olması anlamını taşımaktadır. $\alpha=1.0$ ise eleman sürekli elemandır. Parametrik değişken olan ξ koordinatı α yardımıyla değişken konumlardaki düğüm noktalarına bölünür.

Şekil 1'de görülmekte olan S_m 'inci elemanın P_m^k sabit noktası için (1) denklemi,

$$c_m^k \underline{u}(P_m^k) = \int_S \underline{G}(P_m^k, Q) \underline{t}(Q) dS - \int_S \underline{H}(P_m^k, Q) \underline{u}(Q) dS \quad (6)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada, P_m^k köşe noktası ise c_m^k 'nin değeri köşe açısına bağlı olarak değişmektedir. Aksi halde $c_m^k = 1/2$ dir.

Sınır yüzeyinin Şekil 1'de görüldüğü gibi, N adet elemana bölünmesi halinde (6) denklemi,

$$c_m^k \underline{u}(P_m^k) = \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \underline{G}(P_m^k, Q) \underline{t}(Q) dS - \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \underline{H}(P_m^k, Q) \underline{u}(Q) dS \quad (7)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Eleman üzerindeki sınır büyüklüklerinin şekil fonksiyonlarına bağlı olarak değişim gösterdiği kabulüne göre, (4) eşitliklerinde verilen sınır büyüklükleri, (7) denklemine yerine yazılır ve $dS = J(\xi) d\xi$ eşitliği kullanılarak, integrasyon parametresi (dS), $(-1, +1)$ aralığında değişen $d\xi$ 'ye dönüştürülüp,

$$\underline{G}_{ks}^{mn} = \int_{-1}^1 J(\xi) \underline{G}(P_m^k, Q) \underline{\phi}_s d\xi; \quad \underline{H}_{ks}^{mn} = \int_{-1}^1 J(\xi) \underline{H}(P_m^k, Q) \underline{\phi}_s d\xi \quad (8)$$

tanımlamaları kullanılırsa, (7) denklemi,

$$c_m^k \underline{u}(P_m^k) = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 \underline{G}_{ks}^{mn} \underline{t}(Q_n^s) - \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 \underline{H}_{ks}^{mn} \underline{u}(Q_n^s) \quad (9)$$

şeklinde elde edilmektedir. (8) eşitliğinde verilen $J(\xi)$, Jacobian matrisinin determinantını göstermektedir. (9) denklemi, P_m^k ($k=1, 2, 3$) sabit noktaları için birleştirilirse,

$$\underline{c}^m \underline{u}^m = \sum_{n=1}^N \underline{G}^{mn} \underline{t}^n - \sum_{n=1}^N \underline{H}^{mn} \underline{u}^n \quad (10)$$

ifadesi elde edilir. (10) denklemlerinde görülen \underline{G}^{mn} ve \underline{H}^{mn} matrisleri (6×6) boyutundadır. (10) denklemi N adet sınır elemanı için yazılırsa, elde edilen denklemler matris formunda,

$$\underline{\tilde{H}} \underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{G}} \underline{\tilde{t}} \quad (11)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\underline{\tilde{G}} = \left(\underline{G}^{mn} \right); \quad \underline{\tilde{H}} = \left(\underline{H}^{mn} + \frac{1}{2} \underline{I} \delta_{mn} \right); \quad \underline{\tilde{u}} = \left(\underline{u}^n \right); \quad \underline{\tilde{t}} = \left(\underline{t}^n \right) \quad (m, n=1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

(11) sistem denklemi $6N$ adet denklem içermektedir. Cisim sınırının N adet süreksiz kuadratik sınır elemanına bölünmesinden dolayı, toplam $12N$ adet sınır büyüklüğü (\underline{u} , \underline{t}) olduğu için, $6N$ adet sınır büyüklüğünün sınır şartı olarak verilmesi gerekmektedir. Sınır şartları olarak, her bir düğüm noktası üzerinde x_i ($i=1, 2$) doğrultusunda t_i veya u_i

bileşenlerinden birinin bilinmesi gerekmektedir. Bilinen sınır şartları (11) sistem denkleminde yerine konularak bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanırsa,

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \underline{Y} \quad (13)$$

formunda elde edilmektedir. Burada, \underline{X} ve \underline{Y} sırasıyla, bilinmeyen ve bilinen sınır büyüklüklerini temsil etmektedir. \underline{A} ve \underline{B} ise, tüm bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanacak şekilde $\underline{\tilde{H}}$ ve $\underline{\tilde{G}}$ matrislerinin ilgili kolonlarının yer değiştirilmesiyle elde edilmektedir. (13) denklemi çözülerek, cisim sınırı üzerindeki sınır büyüklükleri hesaplanır.

2.3. Tekillik

Tekillik hali, P sabit noktası ile Q hareketli noktasının aynı elemanda (m=n) olması durumunda ortaya çıktığı için, eleman formundaki düğüm noktaları yerel koordinatların (ξ) fonksiyonu olarak eşitlik (14)'de verilmektedir.

$$x = L_x (1 - \xi^2) \quad ; \quad y = \frac{L_y}{2} (1 + \xi) \quad (14)$$

Yerel birim teğet “t” ve birim normal “n” ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$t(\xi) = \frac{dx(\xi)}{ds} = \frac{dx}{d\xi} \frac{1}{J(\xi)} \quad ; \quad n = t \times k \quad (15)$$

Burada J(ξ) Jacobian olup, $(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ ifadesi ile tanımlanmaktadır.

(11) sistem denkleminde bulunan $\underline{\tilde{G}}$ ve $\underline{\tilde{H}}$ sistem matrislerinin köşegen elemanlarını oluşturan \underline{G}_{ks}^{mm} ve \underline{H}_{ks}^{mm} matrisleri,

$$G^{PQ} = \int G_{\ell k}(r^p(\xi)) \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad ; \quad H^{PQ} = \int H_{\ell k}(r^p(\xi)) \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (16)$$

ifadelerinden bulunacak olan alt matrislerin birleştirilmesiyle oluşturulmaktadır. Burada iki boyutlu hal için $\ell = 1, 2$ ve $k = 1, 2$ değerlerini alacaktır. $G_{\ell k}$ ve $H_{\ell k}$ ise birinci ve ikinci temel çözümleri, P ve Q ise sırasıyla sabit ve hareketli düğüm noktası numaralarını, r^p ise sabit nokta ile hareketli nokta arasındaki mesafeyi temsil etmektedir. Şekil fonksiyonu numarası olan Q hareketli nokta numarası ile eşit olacaktır. Bu eşitlikler, Cauchy kuralına göre yazıldığından, P ve Q noktalarının çakışmadığı kabul edilmektedir [9].

(16) ifadelerinde yer alan $G_{\ell k}$ ve $H_{\ell k}$ birinci ve ikinci temel çözümleri eşitlik (17) ve (18)'de verilmektedir.

$$G_{\ell k} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r^p}\right) \delta_{\ell k} + \frac{r_\ell}{r^p} \frac{r_k}{r^p} \right] \quad (17)$$

$$H_{\ell k} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^p} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{\ell k} + 2 \frac{r_\ell}{r^p} \frac{r_k}{r^p} \right\} + (1-2\nu) \left(\frac{r_k}{r^p} n_\ell - \frac{r_\ell}{r^p} n_k \right) \right] \quad (18)$$

Yukarıdaki denklemlerde görülen, $G_{\ell k}$ ve $H_{\ell k}$ sırasıyla, ℓ yönündeki birim yüklemeye bağlı olarak k yönünde oluşan deplasman ve gerilme vektörü bileşenlerini göstermektedir. Burada $\delta_{\ell k}$ Kronecker delta, ν Poisson oranı ve μ ise kayma modülünü, n_k ve n_ℓ ise birim normalleri temsil etmektedir.

Tekillik durumunda r^p ifadesi sifıra yaklaşacağından, \underline{G} ve \underline{H} ifadelerinin hesaplanabilmesi için özel teknikler gerekmektedir. İlk olarak, (17) denklemindeki integrall ifade, $\ln(1/r)$ ve $(1/r)$ tekilliklerini içeren iki ayrı integrale bölünmektedir. P ve Q noktalarının aynı eleman

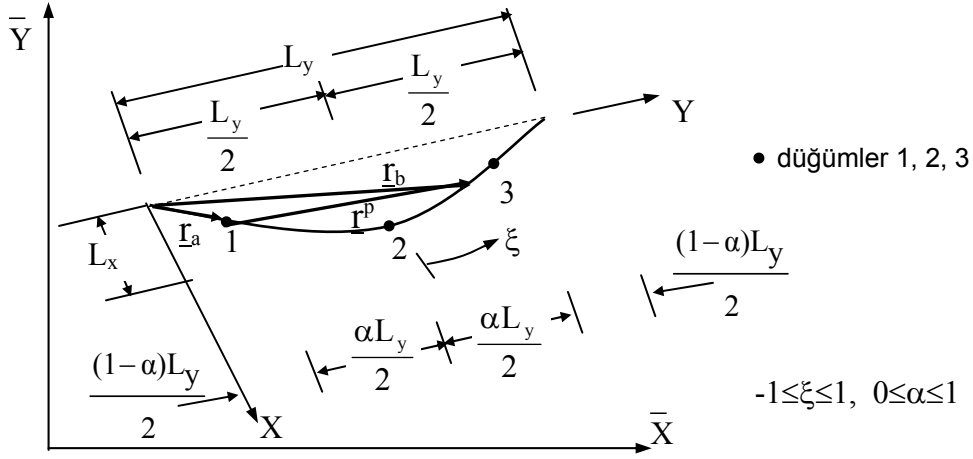
üzerinde olması durumunda Şekil 3'te gösterildiği gibi r^p ifadesi $r^p=r_b-r_a$ ifadesinden hesaplanır. Eşitlik (14) kullanılarak,

$$r_b = L_x (1-\xi^2)\mathbf{i} + L_y/2 (1+\xi)\mathbf{j} \quad (19)$$

$$r_a = L_x (1-\alpha^2)\mathbf{i} + L_y/2 (1-\alpha)\mathbf{j} \quad (20)$$

$$r^p = L_x (\alpha^2-\xi^2)\mathbf{i} + L_y/2 (\alpha+\xi)\mathbf{j} \quad (21)$$

ifadeleri bulunur. Benzer yöntem kullanılarak sabit noktanın 2. ve 3. düğümde olduğu hallerdeki r^p ifadeleri bulunur. Sabit noktanın 1., 2. ve 3. düğümde olduğu hallerdeki r^p ifadeleri (22a), (22b) ve (22c) eşitliklerinde verilmektedir.



Şekil 3. Kuadratik eleman için r^p ifadesinin çıkarılması

$$r^p(\xi) = (\alpha+\xi) ((\alpha-\xi)^2 L_x^2 + L_y^2 / 4)^{1/2} \quad p=1 \quad (22a)$$

$$r^p(\xi) = (\xi) (\xi^2 L_x^2 + L_y^2 / 4)^{1/2} \quad p=2 \quad (22b)$$

$$r^p(\xi) = (\alpha-\xi) ((\alpha+\xi)^2 L_x^2 + L_y^2 / 4)^{1/2} \quad p=3 \quad (22c)$$

Aynı eleman üzerinde integral işlemi yapılırken $(\alpha+\xi)$, (ξ) ve $(\alpha-\xi)$ büyüklükleri sıfıra yaklaştığında tekillik problemi ortaya çıkar. G^{PQ} ifadesi eşitlik (17)'de verilen temel çözümü gösteren G_{ek} ifadesinden dolayı doğal logaritma formunda zayıf tekillik içermektedir. (16) ifadesi eşitlik (23) formuna dönüştürülerek logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılabilir.

$$\int \ln(1/\eta) f(\eta) d\eta = \sum f(\eta_i) w_i \quad (23)$$

Burada η bağımsız değişken, $f(\eta)$ η nin fonksiyonu ve w_i ağırlık fonksiyonudur. (17) ifadesi eşitlik (16)'da yerine yazılırsa,

$$G^{PQ} = \int \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r^p}\right) \delta_{ek} + \frac{r_\ell}{r^p} \frac{r_k}{r^p} \right] \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (24)$$

ifadesi bulunur. (24) eşitliğinde yer alan $\ln(1/r^p(\xi))$ ifadesini içeren terim eşitlik (23)'deki forma dönüştürülerek logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemiyle hesaplama yapılabilir. Eşitlik (23)'deki forma dönüştürme işlemi, eşitlik (22)'deki $r^p(\xi)$ ifadeleri kullanılarak ve uygun değişken dönüşümleri yapılarak gerçekleştirilmiştir. Bulunan ifadeler; G^{PQ} için, P sabit nokta olmak üzere düğümlerin ($0 \leq \alpha \leq 1$) herhangi bir konumu için kapalı formda yazılırsa,

$$G^{1Q} = (1 + \alpha) \int \ln(1/\rho) \phi_Q(\rho(\xi)) J(\rho(\xi)) d\rho \quad (25a)$$

$$+ (1 - \alpha) \int \ln(1/t) \phi_Q(t(\xi)) J(t(\xi)) dt \quad (25b)$$

$$+ \int [-\ln(1 + \alpha) - 1/2 \ln\{((\alpha - \xi)^2 L_x^2 + L_y^2 / 4)\}] \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (25c)$$

$$+ 1/2(1 - \alpha) \ln\{(1 + \alpha)/(1 - \alpha)\} \int \phi_Q(z(\xi)) J(z(\xi)) dz \quad (25d)$$

Burada,

$$\rho = \frac{(\alpha - \xi)}{(-1 - \alpha)} ; t = \frac{(\alpha - \xi)}{(\alpha - 1)} ; z = 2 \frac{(\alpha - \xi)}{(\alpha - 1)} - 1$$

$$G^{2Q} = \int \ln(1/\xi) [\phi_Q(\xi) + \phi_Q(-\xi)] J(\xi) d\xi \quad (26a)$$

$$- 1/2 \int \ln(\xi^2 L_x^2 + L_y^2 / 4) \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (26b)$$

$$G^{3Q} = (1 + \alpha) \int \ln(1/\rho) \phi_Q(\rho(\xi)) J(\rho(\xi)) d\rho \quad (27a)$$

$$+ (1 - \alpha) \int \ln(1/t) \phi_Q(t(\xi)) J(t(\xi)) dt \quad (27b)$$

$$+ \int [-\ln(1 + \alpha) - 1/2 \ln\{((\alpha + \xi)^2 L_x^2 + L_y^2 / 4)\}] \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (27c)$$

$$+ 1/2(1 - \alpha) \ln\{(1 + \alpha)/(1 - \alpha)\} \int \phi_Q(z(\xi)) J(z(\xi)) dz \quad (27d)$$

Burada,

$$\rho = \frac{(\alpha + \xi)}{(1 + \alpha)} ; t = \frac{(\alpha + \xi)}{(1 - \alpha)} ; z = 2 \frac{(\alpha + \xi)}{(1 - \alpha)} - 1$$

Eşitlik (5)'de verilen şekil fonksiyonları ve Jacobian terimleri ρ , t veya z ye bağlı integrasyon parametreleri olarak değerlendirilmelidir.

(25a), (25b), (26a), (27a) ve (27b) integralleri tekil integraller olup logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanabilir. (25c), (25d), (26b), (27c) ve (27d) integralleri ise standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanabilir. Eşitlik (22)'deki ifadeler eşitlik (24)'de yer alan r_r/r^p ve r_k/r^p ifadelerinde yazılırsa ilave bir işleme gerek kalmadan bu terimlerdeki tekillik sorunu çözülür ve bu terimler standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanabilir. Böylece G^{PQ} ifadesi α 'nın herhangi bir değeri için hesaplanabilir.

(18) ifadesindeki ikinci temel çözümleri içeren \underline{H}_{PQ}^{mm} matrisinin elemanları, sabit nokta ve hareketli nokta aynı düğüm noktası olması ($P=Q$) durumunda rijit cisim hareketi yardımıyla,

$$\underline{H}_{PP}^{mm} = - \sum_{n=1}^N \sum_{Q=1}^3 \underline{H}_{PQ}^{mn} \quad (m \neq n \text{ ve } P \neq Q \text{ için}) \quad (28)$$

eşitliği kullanılarak çözülmektedir [1].

3. SAYISAL UYGULAMALAR

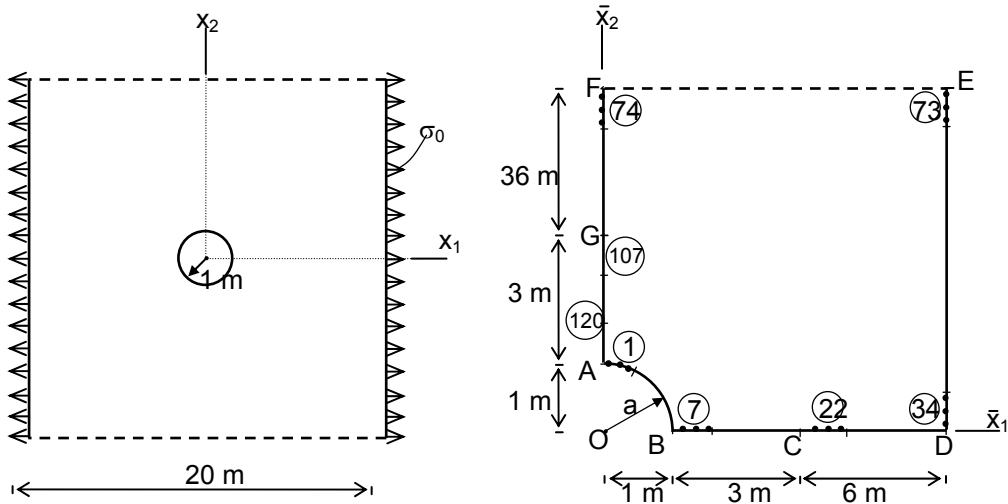
Bu çalışmada, süreksiz kuadratik sınır elemanı için geliştirilen formülasyon kullanılarak, Fortran77 dilinde düğüm noktalarının farklı konumları için çözüm yapabilen bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Analizlerde, süreksizliğin sağlanması için boyutsuz düğüm noktası koordinatları ($\xi_1=|0.75$, $\xi_2=0$ ve $\xi_3=0.75$), $\alpha=0.75$ değerleri ve sayısal integrasyon işleminde

ise 10 noktalı standart ve logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Aşağıda anlatılan iki adet statik problem sayısal uygulama olarak ele alınmıştır.

3.1. Dairesel Boşluklu Plak Problemi

Bu örnekte, Şekil 4'te görülen içerisinde 1m yarıçaplı daireel boşluk bulunan bir plak gözönüne alınmıştır. İzotropik elastik malzemeden oluşan plak, orijini daireel boşluğun merkezi ile çakışan x_1 - x_2 koordinat sistemine kıyaslanmaktadır. Plak x_2 doğrultusunda sonsuz uzunlukta ve x_1 doğrultusunda ise 20 m uzunluğundadır. Plak x_1 yönünde σ_0 büyüklüğünde üniform çekme gerilmesine maruz bırakılmıştır. Üniform çekme gerilmesinin bulunduğu kısım dışında kalan sınırlarda gerilme yoktur. Simetriden dolayı plağın dörtte biri ele alınarak plak içerisinde bulunan daireel boşluğa yakın bölgelerde x_2 eksenini boyunca meydana gelen gerilmelerdeki değişim ve x_1 eksenini boyunca oluşan deplasman dağılımını incelenmiştir.

Şekil 4'te görüldüğü gibi AB noktaları arasında kalan yay sınırı 6 adet, BC sınırı 15 adet, CD sınırı 12 adet, DE sınırı 40 adet, FG sınırı 32 adet ve gerilme değişiminin hızlı olması beklenen GA sınırı 15 adet olmak üzere toplam 120 adet sınır elemanı kullanılarak sınır eleman ağı oluşturulmuştur. Şekil 4'te daire içerisinde görülen rakamlar formülasyonda kullanılan eleman numaralarını göstermektedir.



Şekil 4. σ_0 çekme gerilmesine maruz daireel boşluklu plak ve kullanılan sınır eleman ağı

Problemde malzeme özellikleri olarak Poisson oranı $\nu=0.3$ ve kayma modülü ise $\mu=0.3846$ N/m² alınmaktadır. x_1 yönünde uygulanan üniform çekme gerilmesi $\sigma_0=1$ N/m² dir.

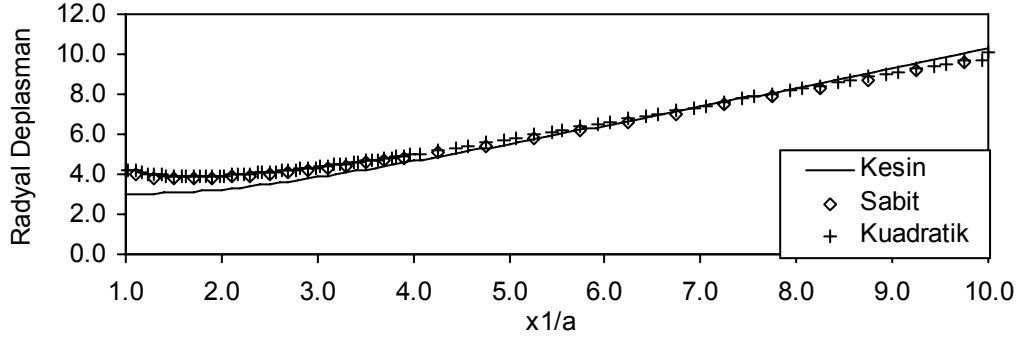
Dairesel boşluklu plak problemi çözülerek, GA düşey sınırı boyunca teğetsel gerilme ve BD yatay sınırı boyunca radyal deplasman değerleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler, Mengi ve ark. [9] tarafından geliştirilen sabit eleman formülasyonu kullanılarak elde edilen değerler ve kesin sonuçlar ile Şekil 5 ve Şekil 6'da karşılaştırılmıştır. Radyal deplasmanın kesin sonuçları Timoshenko ve Goodier [12] tarafından verilen gerilme ve şekil değiştirme ifadeleri yardımıyla elde edilen (29) ifadesi, teğetsel gerilmenin kesin sonuçları ise Timoshenko ve Goodier [12] tarafından verilen (30) ifadesi kullanılarak elde edilmiştir.

$$u = \frac{-a^4(1+\nu) + a^2(5+\nu)x^2 + 2x^4}{2Ex^3} \quad (29)$$

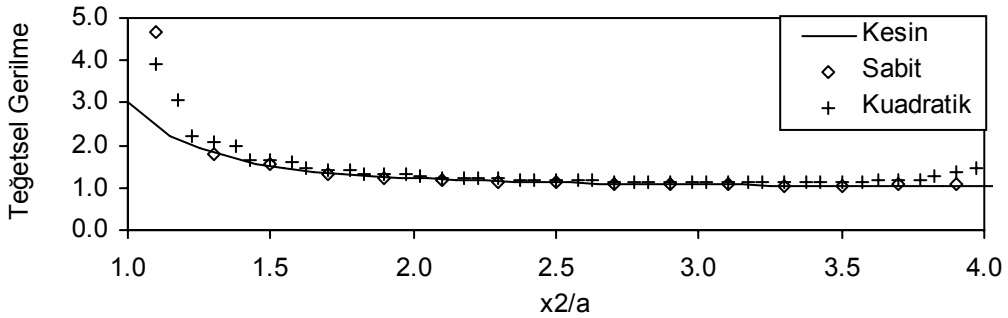
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \quad (30)$$

Burada, a dairesel boşluğun yarıçapını, ν Poisson oranını, x orijinden olan yatay mesafeyi ve r ise orijinden olan x_2 yönündeki uzaklığı belirtmektedir. Elastisite modülü $E=1 \text{ N/m}^2$ dir.

Şekil 5 ve Şekil 6 incelendiğinde elde edilen radyal deplasman ve teğetsel gerilme değerlerinin sabit eleman formülasyonu ile elde edilen değerlerle ve kesin sonuçlarla uyum içerisinde oldukları görülmektedir.



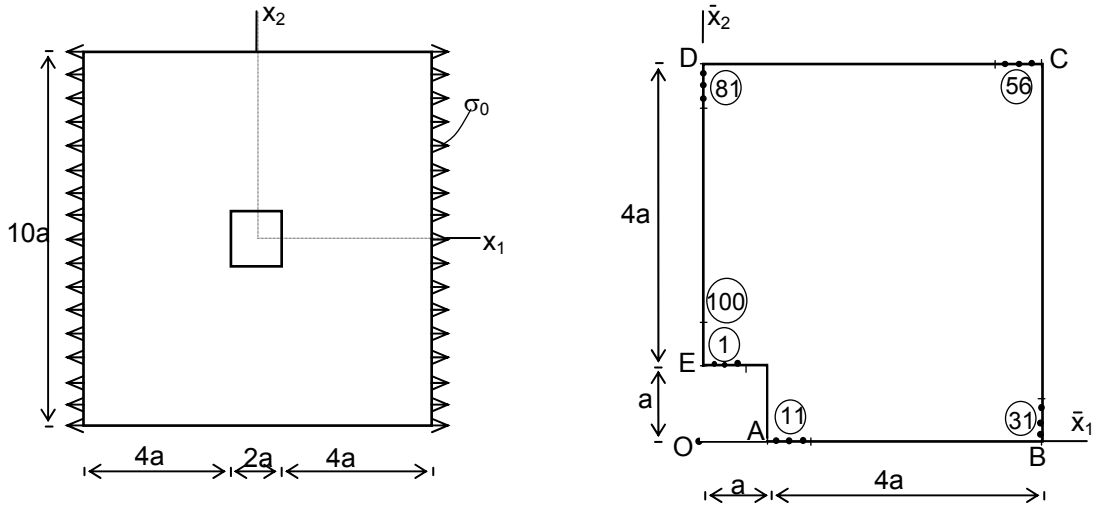
Şekil 5. BD yatay sınırı boyunca elde edilen radyal deplasman dağılımı



Şekil 6. GA düşey sınırı boyunca teğetsel gerilme dağılımı

3.2. Kare Boşluklu Plak Problemi

Şekil 7'de görülen örnekte, içerisinde $2a \times 2a$ boyutlu kare boşluk bulunan ve kenar uzunluğu $10a$ olan kare plak gözönüne alınmıştır. Plak düşey kenarları boyunca x_1 yönünde σ_0 üniform çekme gerilmeleri etkisi altında kalmaktadır. DE kenarı boyunca yatay gerilme ve AB kenarı boyunca yatay deplasman dağılımları incelenmiştir. Simetriden dolayı kare boşluklu kare plağın dörtte biri alınmıştır. Şekil 7'de görülen EA noktaları arasında kalan kare boşluğa ait sınır 10 adet, AB yatay sınırı ve DE düşey sınırı 20'şer adet, BC ve CD sınırları 25'er adet olmak üzere toplam 100 adet sınır elemanına bölünmüştür. Şekil 7'de daire içerisinde verilen rakamlar eleman numaralarını göstermektedir.

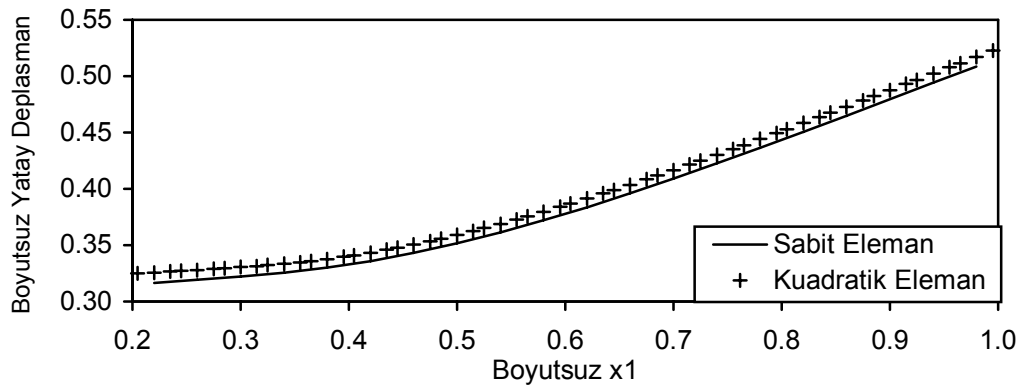


Şekil 7. σ_0 çekme gerilmesine maruz kare boşluklu plak ve kullanılan sınır eleman ağı

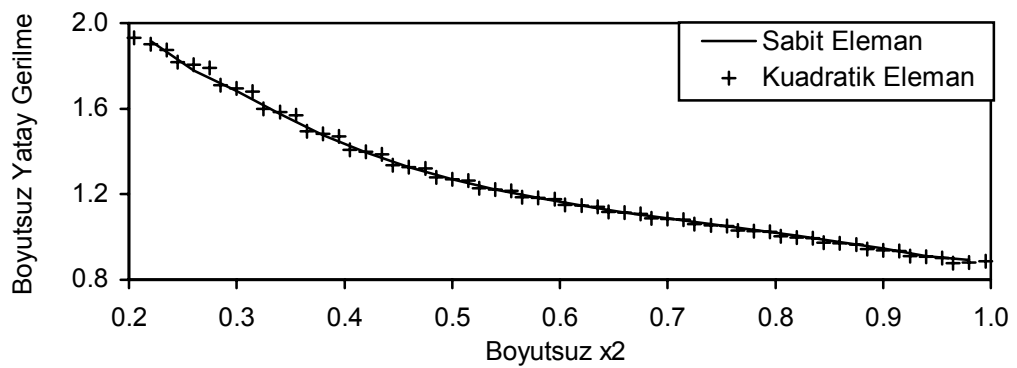
Analizde (31) ifadesinde verilen boyutsuz değişken ve parametreler kullanılmıştır.

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{d} ; \bar{u}_i = \frac{u_i}{d} ; \bar{t}_i = \frac{t_i}{\mu} \quad (i=1,2) ; \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\mu} ; \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1 ; \bar{d} = \frac{d}{d} = 1 \quad (31)$$

Burada $d=5a$ olmak üzere kare plak kenarının yarı uzunluğunu göstermektedir. Malzeme özellikleri olarak Poisson oranı $\nu=0.25$ ve boyutsuz gerilme değeri $\sigma_0=1$ olarak seçilmiştir.



Şekil 8. AB yatay sınırı boyunca yatay deplasman dağılımı



Şekil 9. DE düşey sınırı boyunca yatay gerilme dağılımı

Yukarıda geometrisi ve yüklemesi tanımlanan kare boşluklu plak problemi çözülerek Şekil 7’de görülen DE düşey sınırı boyunca yatay gerilme ve AB yatay sınırı boyunca yatay deplasman değerleri elde edilmiştir. Elde edilen yatay deplasman ve yatay gerilme değerleri Mengi ve ark. [9] tarafından geliştirilen sabit eleman formülasyonu kullanılarak elde edilen değerler ile Şekil 8 ve Şekil 9’da karşılaştırılarak sonuçların uyumlu oldukları görülmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, iki boyutlu elastostatik problemlerin çözümü için eğri eksenli süreksiz kuadratik sınır eleman yöntemi kullanılarak formülasyon yapılmıştır. Formülasyonda, integral işlemlerinde kullanılan sabit nokta ve integrasyon noktasının aynı sınır elemanı üzerinde bulunmasından kaynaklanan tekillik durumları incelenerek $\ln(1/r)$ tekilliği logaritmik ve standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak önlenmiş ve $1/r$ tekilliği ise standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak giderilmiştir.

Yapılan formülasyona dayalı, iki boyutlu statik analiz için, Fortran77 programlama dili kullanılarak düğüm noktalarının farklı konumlarda bulunması halinde çözüm yapabilen genel amaçlı bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Sayısal uygulamalar kısmında, statik haldeki dairesel boşluklu plak ve kare boşluklu plak örnekleri ele alınarak, yatay sınır boyunca yatay deplasman ve düşey sınır boyunca yatay gerilme dağılımları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılarak bu çalışmada yapılan formülasyonun ve hazırlanan programın güvenle kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Brebbia, C.A., and Dominguez, J., “Boundary Elements An Introductory Course” Computational Mechanics Publications Southampton-1989.
- [2] Becker, A.A., “The Boundary Element Method in Engineering” McGraw-Hill Book Company London-1992.
- [3] Banerjee, P.K., “The Boundary Element Methods in Engineering” McGraw-Hill Company London-1994.
- [4] Aliabadi, M.H., “The Boundary Element Method Applications in Solids and Structures”, John Wiley & Sons Limited West Sussex-2002.
- [5] Beskos, D.E., “Boundary Element Methods in Mechanics” Elsevier Amsterdam-1987.
- [6] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., “Boundary Element Techniques”, Springer New York - 1984.
- [7] Kane, J.H., “Optimization of Continuum Structures Utilizing a Boundary Element Formulation” Ph.D. Dissertation University of Connecticut Storrs Connecticut-1986.
- [8] Bakr, A.A., “The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems” In Lecture Notes and Engineering Springer New York- 1986.
- [9] Mengi, Y., Tanrikulu, A.H. and Tanrikulu, A.K., “Boundary Element Method for Elastic Media, An Introduction” ODTÜ Basım İşliği Ankara-1994.
- [10] Severcan, M.H., Tanrikulu, A.H. ve Tanrikulu, A.K., “İki Boyutlu Elastostatik Problemlerinin Çözümü için Karma Sınır Eleman Formülasyonu”, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi Hatay s. 727-736,12-16 Eylül 2005.

- [11] Severcan, M.H., Tanrikulu, A.H. ve Tanrikulu, A.K., “İki Boyutlu Elastostatik Problemlerinin Süreksiz Kuadratik Sınır Elemanları Kullanılarak Çözümü” Çukurova Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi Cilt 19 Sayı 2 s.135-148, 2004.
- [12] Timoshenko, S., and Goodier, J. N., “Theory of Elasticity” McGraw-Hill New York-1970.