İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EUCLID VE YARI-EUCLID UZAYLARININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Nurettin Cenk TURGAY

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

NİSAN 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EUCLID VE YARI-EUCLID UZAYLARININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Nurettin Cenk TURGAY
(509062002)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Uğur DURSUN

NİSAN 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509062002 numaralı Doktora Öğrencisi **Nurettin Cenk TURGAY**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"EUCLID VE YARI-EUCLID UZAYLARININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLARI"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Uğur DURSUN** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Abdulkadir ÖZDEĞER** Kadir Has Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN Yeni Yüzyıl Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN İstanbul Teknik Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **25 Şubat 2013**
Savunma Tarihi : **17 Nisan 2013**

Dedeme...

ÖNSÖZ

Tez çalışmasında bana yol gösteren, her zaman pozitif yönde motive eden, akademik olarak çok önemli katkılarda bulunan ve ayrıca, çalıştığımız süre içinde her konuda çok güzel fikirler vererek bana hep yardımcı olan Prof. Dr. Uğur Dursun'a tüm özverisi ve bana duyduğu güven için en derin saygılarımı ve en içten teşekkürlerimi sunarım.

Saygıdeğer tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Abdülkadir Özdeğer ve Doç. Dr. Füsun Özen Zengin'e harcadıkları değerli zamanları ve tez ile ilgili yol göstermelerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca, çok uzun süredir tanıma fırsatı bulduğum ve beni yüksek lisans ve doktora öğretimim sırasında motive eden ve her konuda fikirlerini taktir ettiğim ve tatbik etmeye çalıştığım Prof. Dr. Emanullah Hızel ile benden yardımlarını hiç esirgemeyen Doç. Dr. Fatma Özdemir'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Değerli arkadaşlarım Dr. Cihangir Özemir, Ali Demirci, Dr. Sevgi Harman, Serkan Karaçuha ve Tonguç Çağın'a burada anlatmakla bitiremeyeceğim tüm katkıları için teşekkürlerimi sunarım. İTÜ Matematik Bölümünde görev yapan değerli ögretim üyelerinin hepsine ayrıca teşekkür ederim.

Tez çalışmasının son ve en çok motivasyon gerektiren kısmında tanıma fırsatı bulduğum, yakın gelecekteki eşim Rezzan Açar'a tüm olumlu katkılarından dolayı ayrıca teşekkür ederim. Sevgili anneme ve teyzem Türkan Üzel'e herşey için minnettarlığımı sunuyorum.

Bu fırsatla rahmetli dedem Nurettin Üzel'i hayatta olduğu sürece bana yaşattıkları ve beni yetiştirdiği için bir kez daha anıyorum.

I also would like to express my deep gratitude to Prof. Dr. Young Ho Kim and Department of Mathematics of Kyungpook National University for their warm hospitality during my visit to Daegu, Republic of Korea in 2012.

17 Nisan 2013

Nurettin Cenk TURGAY
(Yüksek Matematik Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

EUCLID VE YARI-EUCLID UZAYLARININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLARI

ÖZET

Euclid uzaylarında sonlu tipten alt manifoldlar kavramı 1970'lerin sonlarında B. Y. Chen tarafından tanıtılmıştır. Euclid veya yarı-Euclid uzayında bir alt manifoldun yer vektörü alt manifold üzerinde tanımlı Laplace operatörünün sonlu sayıda özvektörlerinin toplamı olarak yazılabiliyorsa, alt manifolda sonlu tipten alt manifold denir. Eğer bu özvektörler Laplace operatörünün k tane ayrık özdeğerine karşı geliyorsa alt manifolda k-tipindendir denir. Euclid veya yarı-Euclid uzayında sonlu tipten alt manifoldlar, geometri ile uğraşan pek çok kişi tarafından çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Halen de üzerinde uğraşılan pek çok açık problem bulunmaktadır.

Zaman içinde, sonlu tipten alt manifold kavramı Euclid ve yarı-Euclid uzaylarının alt manifoldları üzerinde tanımlı düzgün tasvirlere genişletilmiş ve sonlu tipten tasvir tanımı verilmiştir. Özellikle alt manifoldların Gauss tasvirleri bir çok makalede bu yönüyle incelenmiştir. Euclid veya yarı-Euclid uzayının bir alt manifoldunun ν Gauss tasviri $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ denklemini bir λ sabiti ve bir C sabit vektörü için sağlıyorsa alt manifolda 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Bununla birlikte, 3-boyutlu Euclid uzayında katenoid, helikoid gibi bazı önemli yüzeyler ile daha yüksek boyutlu Euclid ve yarı-Euclid uzaylarında Clifford tor yüzeyi, küresel n-koniler, Enneper hiperyüzeyleri gibi bir çok ilginç alt manifoldun Gauss tasvirlerinin bu denklemi λ sabitinin bir fonksiyon olması durumunda sağladıkları iyi bilinmektedir.

Euclid veya yarı-Euclid uzayının bir alt manifolduna ν Gauss tasviri, $\Delta\nu = f(\nu + C)$ denklemini düzgün bir f fonksiyonu ve bir C sabit vektörü için sağlıyorsa, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Eğer bu denklem $C = 0$ için sağlanıyorsa Gauss tasvirine birinci çeşit noktasal 1-tipinden; aksi taktirde, yani $C \neq 0$ ise ikinci çeşit noktasal 1-tipindendir denir. Diğer taraftan, $\Delta\nu = 0$ ise alt manifolda harmonik Gauss tasvirine sahiptir denir.

Yakın geçmişte Euclid ve yarı-Euclid uzaylarında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yegane düz Vranceanu yüzeyinin Clifford tor yüzeyi olduğu bir çalışmada gösterilmiştir. Ayrıca, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip düz basit dönel yüzeylerin sınıflandırılması başka bir çalışmada elde edilmiştir.

Diğer taraftan, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında minimal olmayan bir yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasının ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasına denk olduğu yakın zamanda bir makalede gösterilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında bir minimal yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine

sahip olması için gerek ve yeter koşulun normal demetinin düz olması olduğu; ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun ise yüzey üzerinde tanımlı, karşı gelen şekil operatörü $A_3 = \mathrm{diag}(\rho, -\rho), A_4 = \mathrm{adiag}(\rho, \rho)$ formunda olan bir $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ çatı alanının mevcut olması olduğu da aynı çalışmada gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında Euclid ve yarı-Euclid uzaylarında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip, karşıt boyutu 2 olan alt manifoldlar ele alınmıştır. İlk olarak keyfi boyuta ve keyfi indekse sahip bir yarı-Euclid uzayının yönlendirilmiş bir alt manifoldunun Gauss tasvirinin Laplasyeni elde edilmiştir. Ayrıca, Euclid ve yarı-Euclid uzaylarında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldların sınıflandırılmasında kullanılabilecek bazı yardımcı teoremler verilmiştir. Daha sonra bu genel sonuçlar kullanılarak aşağıdaki yüzey sınıflarının Gauss tasvirleri incelenmiştir.

İlk olarak $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında meridyen eğrileri düzlemsel olan genel dönel yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerden noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanları elde edilmiştir. $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir basit dönel yüzeyin genelleştirilmiş bir tor yüzeyinin açık bir parçasından ibaret olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yarı-ombilik genel dönel yüzeylerin ve minimal genel dönel yüzeylerin sınıflandırmaları yapılmış, bu tip yüzeylerden ikinci çeşit noktasal 1-tipinden olanları belirlenmiştir.

Daha sonra $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında basit dönel yüzeyler incelenmiştir. Birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin tam sınıflandırması verilmiştir. Ayrıca, bir basit dönel yüzeyin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasının ancak ve ancak koordinat fonksiyonlarından birinin üçüncü mertebeden bir adi diferansiyel denklemi sağlamasıyla mümkün olabileceği gösterilmiştir. Bu karakterizasyon kullanılarak ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine ve sabit Gauss eğriliğine sahip basit dönel yüzeylerin sınıflandırması yapılmıştır.

Son olarak $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında uzaysal yüzeyler çalışılmıştır. Bu yüzeylerden Gauss tasviri harmonik olanlarının bir karakterizasyonu elde edilmiştir. Bu karakterizasyon kullanılarak $\mathbb{S}^3_1(r^2) \subset \mathbb{E}^4_1$ de Sitter uzayında veya $\mathbb{H}^3(-r^2) \subset \mathbb{E}^4_1$ hiperbolik uzayında kalan harmonik Gauss tasvirine sahip yüzeylerin tam sınıflandırmaları verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında uzaysal bir yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması olduğu gösterilmiştir. Diğer taraftan, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırma teoremleri ispatlanmıştır.

SUBMANIFOLDS OF EUCLIDEAN AND PSEUDO-EUCLIDEAN SPACES WITH POINTWISE 1-TYPE GAUSS MAP

SUMMARY

The notion of finite type submanifolds of Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces was introduced by B. Y. Chen in the late 1970's. A submanifold of a Euclidean or a pseudo-Euclidean space is said to be of finite type if its position vector can be expressed as a sum of finitely many eigenvectors of the Laplace operator. If these eigenvectors are corresponding to k distinct eigenvalues of the Laplace operator, then the submanifold is said to be of k-type. Finite type submanifolds of Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces have been extensively studied by several geometers and many results have been published. Even now, there are several open problems on this subject which are currently being dealt with.

In time, the notion of finite type submanifolds has been extended to the differentiable mapping defined on submanifolds of the Euclidean spaces or pseudo-Euclidean spaces. In particular, the Gauss map of oriented submanifolds has been studied in many works.

The Gauss map of a submanifold of a Euclidean space or a pseudo-Euclidean space is said to be of (global) 1-type if its Gauss map ν satisfies the second order differential equation $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ for a constant λ and constant vector C, where Δ denotes the Laplace operator of the submanifold.

However, the Gauss map of several surfaces and hypersurfaces such as helicoids of the 1st, 2nd, and 3rd kind, conjugate Enneper's surface of the second kind and B-scrolls in the 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$, generalized catenoids, spherical n-cones, hyperbolical n-cones and Enneper's hypersurfaces in $\mathbb{E}^{n+1}_1$ satisfies $\Delta\nu = f(\nu + C)$ for some smooth function f and some constant vector C. A submanifold whose Gauss map satisfies that equation is said to have pointwise 1-type Gauss map. In particular, if C is zero, the pointwise 1-type Gauss map is said to be of the first kind. Otherwise, it is said to be of the second kind. Moreover, if f is a non-constant smooth function, then the submanifold is said to have proper pointwise 1-type Gauss map. On the other hand, a submanifold is said to have harmonic Gauss map if Laplacian of its Gauss map vanishes identically.

Rotational surfaces in Euclidean spaces $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map was worked in several papers. For example, it was proved that rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the first kind in Euclid space $\mathbb{E}^3$ coincide with rotational surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{E}^3$ and the right cones are the only rational rotational surfaces in $\mathbb{E}^3$ with pointwise 1-type Gauss map of the second kind. On the other hand, only some partial results has been appeared on the surfaces in $\mathbb{E}^4$. For example, in a paper, it was proved that Cliffors torus is the only flat Vranceanu rotational surface with pointwise 1-type Gauss map. The complete classification of flat simple rotational surfaces was given in another work.

On the other hand, it was proved that a minimal surface in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if its normal bundle is flat, and also it has pointwise 1-type Gauss map of the second kind if it has a local orthonormal frame field $\{e_1,e_2;e_3,e_4\}$ such that the corresponding shape operators are of the form of $A_3 = \operatorname{diag}(\rho,-\rho)$, $A_4 = \operatorname{adiag}(\rho,\rho)$. Furthermore, a non-minimal surface in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if its mean curvature vector is parallel.

In this thesis, the submanifolds of the Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces of codimension 2 are studied in terms of having pointwise 1-type Gauss map. Laplacian of the Gauss map of a submanifold of a pseudo-Euclidean space of arbitrary dimension and arbitrary index is obtained. Some lemmas which are useful to classify submanifolds with pointwise 1-type Gauss map of the second kind are proved. By using these general results, the following type of surfaces are studied in terms of their Gauss map.

First, general rotational surfaces in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ whose meridian curves lie in two dimensional planes are considered. It is proved that such a general rotational surface has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if it is an open part of a generalized torus given by $F(s,t) = \left(r_0\cos\frac{s}{r_0}\cos at, r_0\cos\frac{s}{r_0}\sin at, r_0\sin\frac{s}{r_0}\cos bt, r_0\sin\frac{s}{r_0}\sin bt\right)$. It is also showed that upto congruency the only general rotational surface with proper pointwise 1-type Gauss map of the first kind is the generalized torus given above with $a \neq b$. Note that the generalized torus given above becomes the Clifford Torus if $a = b$. Furthermore, all minimal general rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the second kind are obtained. Finally, it is proved that if a general rotational surface in $\mathbb{E}^4$ has flat normal bundle and proper pointwise 1-type Gauss map of the second kind then it is nothing but a plane. Although it is not directly relevant with the subject of the thesis, the complete classifications of minimal general rotational surfaces in $\mathbb{E}^4$ and pseudo-umbilical general rotational surfaces in $\mathbb{E}^4$ are also obtained. By using this classification, minimal general rotational surfaces and pseudo-umbilical general rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the second kind are determined.

Secondly, simple rotational surfaces in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map are studied in terms of having pointwise 1-type Gauss map. Complete classification of simple rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the first kind is given. A characterization of simple rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the second kind is obtained. It is proved that a simple rotational surface which completely lies in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$ has pointwise 1-type Gauss map of the second kind if and only if one of its coordinate functions satisfies a non-linear ordinary differential equation of order 3. As a consequence of this characterization, it is proved that a simple rotational surface with constant Gauss curvature has pointwise 1-type Gauss map of the second kind if and only if it is an open part of a flat rotational surface whose meridian curve is a special helix.

Next, space-like surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1-type Gauss map of the first kind are considered. Firstly, the complete classification of maximal surfaces with harmonic Gauss map is given. A characterization theorem of non-maximal space-like surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with harmonic Gauss map is obtained.

Furthermore, the complete classification of space-like surfaces with harmonic Gauss map lying in de-Sitter space $\mathbb{S}^3_1(r^2) \subset \mathbb{E}^4_1$ is given. Namely, it is proved that a surface lying in $\mathbb{S}^3_1(r^2) \subset \mathbb{E}^4_1$ has harmonic Gauss map if and only if it is congruent to a surface whose position vector is given by $x(u,v) = \big(r(u^2+v^2)/2 + 1/r, u, v, r(u^2+v^2)/2\big)$. A similar work on the surfaces lying in the hyperbolic space $\mathbb{H}^3(-r^2) \subset \mathbb{E}^4_1$ is also done. Further, the characterization and classification of space-like surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the first kind are given. It is proved that a space-like surface has such Gauss map if and only if its mean curvature vector is parallel. Some explicit examples are also mentioned. It is also proved that a surface with light-like mean curvature vector has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if only if it has harmonic Gauss map.

Finally, space-like surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1-type Gauss map of the second kind are studied. The maximal surfaces and space-like surfaces with constant mean curvature are dealt with. It is proved that there is no non-planar maximal surface in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1-type Gauss map of the second kind. A classification theorem on space-like surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with constant mean curvature and pointwise 1-type Gauss map of the second kind is also given. Namely, it is showed that an oriented space-like surface in the Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with flat normal bundle and non-zero constant mean curvature has pointwise 1-type Gauss map of the second kind if and only if it is congruent to some special helicial cylinders.

1. GİRİŞ

Euclid uzaylarında sonlu tipten alt manifold kavramı B. Y. Chen tarafından 1970'li yılların sonlarında verilmiştir. Bu konuda ilk sonuçlar B. Y. Chen'in [1] numaralı kitabında toparlanmıştır. M, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında n-boyutlu bir alt manifold olsun. M alt manifoldunun $\mathbb{E}^m$ uzayında x yer vektörü, $\Delta x_i = \lambda_i x_i,\ i = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere, $x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ şeklinde ayrıştırılabiliyorsa, M manifolduna sonlu tipten alt manifold denir. Burada x_0 bir sabit vektör, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ M alt manifoldu üzerinde tanımlı bazı düzgün tasvirler, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ ise bazı sabitlerdir. Ayrıca, Δ alt manifold üzerinde indirgenmiş metrikle tanımlanmış Laplace operatörüdür. Buradaki $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ özdeğerlerinin hepsi ayrık ise M alt manifolduna k-tipinden denir.

M alt manifoldunun kompakt olması durumunda, minimal polinom kriteri olarak isimlendirilen bir teorem verilmiştir, [1]. M alt manifoldunun sonlu tipten olması için gerek ve yeter koşul aşikar olmayan bir Q polinomu için $Q(\Delta)(x - x_0) = 0$ denkleminin sağlanmasıdır. Ayrıca M alt manifoldu sonlu tipten ise $P(\Delta)(x - x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan, en küçük dereceli, monik P polinomu vardır ve tektir. Buradaki P polinomuna M alt manifoldunun minimal polinomu denir ve sonlu tipten bir M alt manifoldunun k-tipinden olması için gerek ve yeter koşul $k = \deg(P(t))$ olmasıdır.

Bununla birlikte, M manifoldu kompakt değilse $Q(\Delta)(x - x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan ve aşikar olmayan bir $Q(t)$ polinomunun varlığı, genelde, M manifoldunun sonlu tipten olmasını gerektirmez, [2]. Bununla birlikte [2] numaralı makalede $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında bir β eğrisi için $Q(\Delta)(x - x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir Q polinomunun varlığının eğrinin sonlu tipten olmasını gerektirdiği gösterilmiştir. Burada x, β eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelenmiş yer vektörüdür. Aynı makalede $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında bir M alt manifoldunun x yer vektörünün $l_1,\ l_2,\ \ldots, l_k$ bazı ayrık sabitler olmak üzere, $Q(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - l_i)$ ile verilen bir Q polinomu için $Q(\Delta)(x - x_0) = 0$ denklemini sağlaması durumunda sonlu tipten olduğu gösterilmiştir.

Sonlu tipten alt manifold kavramı daha sonra yarı-Euclid uzaylarının alt manifoldlarına genişletilmiştir. Bu kavram kullanılarak Euclid ve yarı-Euclid uzaylarının alt manifoldları üzerine pek çok karakterizasyon ve sınıflandırma problemi çalışılmıştır, $[1,3,4]$.

1986 yılında ise bu kavram Chen, Morvan ve Nore tarafından Euclid ve yarı-Euclid uzaylarının alt manifoldları üzerinde tanımlı düzgün tasvirlere genişletilmiş ve sonlu tipten tasvir tanımı verilmiştir, [5]. M, $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Euclid uzayında bir alt manifold olsun ve M alt manifoldu üzerinde tanımlı bir $\phi : M \to \mathbb{E}^N_t$ düzgün tasviri göz önüne alınsın. ϕ tasvirine Δ operatörünün k tane ayrık özdeğerine karşı gelen özvektörlerinin toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, k-tipindendir denir.

Chen ve Piccini tarafından [6] numaralı makalede özel olarak sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar çalışılmıştır. Yukarıdaki tanımda ϕ tasviri, özel olarak M alt manifoldunun Gauss tasviri ise, M alt manifolduna k-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. [6] numaralı makalede ayrıca, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında bir M alt manifoldunun 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasının ancak ve ancak M alt manifoldunun sabit skaler eğriliğe, düz normal demete ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olmasıyla mümkün olduğu gösterilmiştir. Aynı makalede $\mathbb{E}^{m+1}$ Euclid uzayında 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yegane kompakt hiperyüzeyin $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ hiperküresi olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt yüzeylerin sınıflandırılması verilmiştir.

Yukarıda anlatılan minimal polinom bulma kriterine benzer bir teorem, sonlu tipten tasvirler için de verilmiştir, $[5,6]$. Euclid ve yarı Euclid uzaylarının sonlu tipten Gauss tasvirine sahip altmanifoldları bir çok geometrici tarafından çalışılmıştır, [7–9]. Ayrıca, sonlu tipten alt manifoldlar ve alt manifoldlar üzerinde tanımlı sonlu tipten tasvirlerle ilgili çalışmaların geniş kapsamlı bir derlemesi yine B. Y. Chen tarafından [4] numaralı raporda yayınlanmıştır. Halen üzerinde çalışılan pek çok açık problem bulunmaktadır, [10].

Sonlu tipten tasvirler için minimal polinom bulma kriterinden, kompakt bir M alt manifoldunun 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun alt manifoldun ν Gauss tasvirinin $\Delta\nu = \lambda(\nu + C)$ diferansiyel denklemini bazı λ

sabitleri ve C sabit vektörleri için sağlaması olduğu elde edilir. Bununla birlikte, $\mathbb{E}_s^m$ uzayında bazı alt manifoldların yukarıdaki eşitliği λ'nın bir fonksiyon olması durumunda sağladığı bilinmektedir. Bu alt manifoldlara örnek olarak $\mathbb{E}^3$ uzayında katenoid ve dik koniler, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında 1., 2. ve 3. tip helikoidler, 2. tip Enneper yüzeylerinin eşleniği ve B-scrolllar ile $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında bazı dönel hiperyüzeyler gösterilebilir, [11–13]. Bu durumdan dolayı noktasal 1-tipinden Gauss tasvirinin tanımının verilmesine gerek duyulmuştur.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Euclid uzayında bir M alt manifoldununun Gauss tasviri (2.47) denklemini düzgün bir f fonksiyonu ve C sabit vektörü için sağlıyorsa, M alt manifolduna noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine ise eğer $C = 0$ ise birinci çeşit, aksi taktirde ikinci çeşittir denir. Ayrıca, (2.47) denklemi sabit olmayan düzgün bir f fonksiyonu için sağlanıyorsa, M alt manifolduna has noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Diğer taraftan, $\Delta\nu = 0$ ise M alt manifolduna harmonik Gauss tasvirine sahiptir denir.

Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar ile ilgili bilinen bir çok sınıflandırma sonucu vardır, [14–22]. Bunlar arasındaki bazı çalışmalarda Euclid ve yarı-Eulid uzaylarında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler incelenmiştir. Örneğin, [11] numaralı çalışmada $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında bir dönel yüzeyin ancak ve ancak bir çembersel dik koninin açık bir paraçası olması veya ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. [18] numaralı makalede $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzaylarının dönel yüzeyleri ele alınmış ve bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun o dönel yüzeyin sabit ortalama eğriliğe sahip olması olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, aynı makalede $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip rasyonel dönel yüzeyleri ele alınmış ve sadece hiperbolik koni ile çembersel dik koninin bu özelliğe sahip olduğu ispatlanmıştır.

Bununla birlikte, 4-boyutlu Euclid ve yarı-Euclid uzaylarının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyleri ile ilgili çalışmalar yapılmış olmakla birlikte, elde edilen sonuçlar halen geliştirilebilir durumdadır. Çünkü bu çalışmalarda çoğunlukla düz dönel yüzeyler ele alınmış olup, bu durum elde edilen sonuçları oldukça kısıtlamıştır. Örneğin, [19] ve [20] numaralı çalışmalarda noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir düz Vranceanu dönel yüzeyinin bir Clifford tor yüzeyinin açık bir parçasından ibaret olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, [23] numaralı çalışmada $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip düz dönel yüzeyler için bir sınıflandırma teoremi verilmiştir. Bununla birlikte, [21] numaralı çalışmada $\mathbb{E}^4_2$ yarı-Euclid uzayında Gauss tasviri (2.47) denklemini sağlayan düz dönel yüzeylerin sınıflandırması yapılmıştır.

Diğer taraftan, [16] numaralı makalede $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler incelenmiştir. Bu makalede, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında bir minimal yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun normal demetinin düz olması olduğu, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun ise yüzey üzerinde tanımlı, karşı gelen şekil operatörü $A_3 = \operatorname{diag}(\rho, -\rho)$, $A_4 = \operatorname{adiag}(\rho, \rho)$ formunda olan bir $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ çatı alanının mevcut olması olduğu gösterilmiştir. Aynı makalede, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının minimal olmayan bir yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasının ancak ve ancak ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıyla mümkün olduğu ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler ile ilgili geniş kapsamlı sonuçların elde edilmesi ve $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler ile ilgili karakterizasyon ve sınıflandırma teoremlerinin verilmesidir. Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan temel notasyon ve alt manifoldlar teorisindeki temel tanımlar, kavramlar ile denklemler verilmiştir. Ayrıca, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar ile ilgili daha ilerideki bölümlerde kullanılacak olan literatürdeki önemli sonuçlar ifade edilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında genel dönel yüzeyler ele alınmış ve noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olan genel dönel yüzeyler ile ilgili çeşitli sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında basit dönel yüzeyler çalışılmış ve bu yüzeylerden noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanları belirlenmiştir. Birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin tam sınıflandırılması elde edilmiş ve ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeyler ile ilgili bir karakterizasyon verilmiştir.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde ise $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler incelenmiş ve bazı karakterizasyon ve sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak temel notasyonlar verilmiştir. Ayrıca, yarı-Euclid uzaylarının alt manifoldları ile ilgili bazı temel kavramlar anlatılmıştır.

$m \geq 3$ olmak üzere, $\mathbb{E}_s^m$ ile metrik tensörü $\widetilde{g} = \langle \ , \ \rangle = -\sum\limits_{i=1}^{s} dx_i^2 + \sum\limits_{j=s+1}^{m} dx_j^2$ şeklinde olan m-boyutlu, s indisli yarı-Euclid uzayı gösterilecektir. Burada, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, E_s^m uzayında bir kartezyan koordinat sistemidir. $s = 0$ olması durumunda $\mathbb{E}_0^m = \mathbb{E}^m$ bir Euclid uzayıdır.

$c_0 \in \mathbb{E}_s^m$ ve $r > 0$ olmak üzere, eğrilikleri sırasıyla r^2 ve $-r^2$ olan $\mathbb{S}_s^{m-1}(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(c_0, -r^2)$ tam uzayları

$$\mathbb{S}_s^{m-1}(c_0, r^2) = \{x \in \mathbb{E}_s^m \mid \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = r^{-2}\}, \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(c_0, -r^2) = \{x \in \mathbb{E}_s^m \mid \langle x - c_0, x - c_0 \rangle = -r^{-2}\} \quad \textbf{(2.2)}$$

şeklinde tanımlanır. Genel görelilik kuramında, $\mathbb{E}_1^m$, $\mathbb{S}_1^m(c_0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_1^m(c_0, r^2)$ uzayları, sırasıyla, Minkowski, de Sitter ve anti-de Sitter uzay-zaman olarak isimlendirilir. $c_0 = 0$ olması durumunda, $\mathbb{S}_s^{m-1}(0, r^2)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(0, -r^2)$ uzayları, kısaca, $\mathbb{S}_s^{m-1}(r^2)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(-r^2)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $s = 1$ olması durumunda

$$\mathbb{H}^{m-1}(-r^2) = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{E}_1^m \mid \langle x, x \rangle = -r^{-2} \text{ ve } x^0 > 0\} \quad \textbf{(2.3)}$$

ile verilen $\mathbb{H}^{m-1}(-r^2)$ uzayına hiperbolik uzay denir.

$\mathbb{E}_s^m$ uzayının $\mathscr{LC}^{n-1}$ ışık konisi,

$$\mathscr{LC}^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}_s^m \mid \langle x, x \rangle = 0\} \quad \textbf{(2.4)}$$

şeklinde tanımlanır. $n = 4$ olması durumunda, $\mathscr{LC}^3$ kısaca $\mathscr{LC}$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{E}_s^m$ uzayında bir v vektörüne, eğer $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise uzaysal, $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise ışıksal, $\langle v, v \rangle < 0$ ise zamansal vektör denir. $\mathbb{E}_s^m$ uzayında bir vektör alanına, eğer tanım kümesinin tamamında uzaysal, ışıksal veya zamansal ise, sırasıyla, uzaysal, ışıksal veya zamansal vektör alanı denir. Aşağıdakiler, $s = 1$ olması durumunda, iyi bilinen özelliklerdir:

$\mathbb{E}_1^m$ uzayında iki ışıksal vektör v_1 ve v_2'nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ olmasıdır. Eğer $\langle v_3, v_4 \rangle = 0$ ve v_3 zamansal ise v_4 uzaysaldır, [24,25].

2.1 Yarı-Euclid Uzaylarının Alt Manifoldları

Bu alt bölümde önce $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Euclid uzayının alt manifoldları ile ilgili kavramlar anlatılarak temel tanım ve denklemler verilmiştir. Daha sonra ise bu denklemlerden sıkça kullanılacak olanları $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski ve $\mathbb{E}^4$ Euclid uzaylarında açık olarak ifade edilmiştir.

M, $\mathbb{E}_s^m$ yarı Euclid uzayının $n < m$ olmak üzere n-boyutlu bir alt manifoldu olsun ve $\mathbb{E}_s^m$ üzerindeki $\widetilde{g}$ metrik tensörünün, M alt manifolduna indirgenmesiyle elde edilen $g = \langle\ ,\ \rangle = \widetilde{g}|_M$ tensörü göz önüne alınsın. Ayrıca, g tensörünün indisinin M üzerindeki her noktada r olduğu varsayılsın. Bu durumda, M alt manifolduna $\mathbb{E}_s^m$ uzayının r indisli, n boyutlu bir (yarı-Riemanniyen) alt manifoldu denir.

M alt manifoldu üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ile verilsin, öyle ki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektör alanları, M manifolduna teğet; $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_m$ ise normal olsun. Bu durumda, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektör alanlarının tam olarak r tanesi ve $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_m$ vektör alanlarının ise tam olarak $s - r$ tanesi zamansal, geri kalanları ise uzaysaldır.

Bütün tez çalışması boyunca ε_A ile o anda söz konusu edilen ortonormal baz takımındaki e_A vektörünün işareti gösterilecektir, yani, $\varepsilon_A = \langle e_A, e_A \rangle = \pm 1$ dir. Ayrıca, bu bölümde, $A, B, \ldots$ indisleri 1'den m'ye kadar; $i,\ j,\ k, \ldots$ indisleri 1'den n'ye kadar ve $\beta,\ \gamma, \ldots$ indisleri $n+1$'den m'ye kadar değişecektir.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Euclid uzayının M alt manifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_{e_k} e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{ij}(e_k) e_j + \sum_{\gamma=n+1}^{m} \varepsilon_\gamma h_{ik}^{\gamma} e_\gamma \tag{2.5}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{e_k} e_\beta = -\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_{jk}^{\beta}(e_k) e_j + \sum_{\gamma=n+1}^{m} \varepsilon_\gamma \omega_{\beta\gamma}(e_k) e_\gamma \tag{2.6}$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{\nabla}$ ile $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Euclid uzayının Riemann konneksiyonu, h^β_{ij} ile M alt manifoldunun h ikinci esas formunun bileşenleri gösterilmiştir. Ayrıca, ω_{AB} konneksiyon formları, $\omega_{AB}(X) = \langle \widetilde{\nabla}_X e_A, e_B\rangle$ şeklinde tanımlanır ve $\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0$ eşitliğini sağlar.

Diğer taraftan, M alt manifoldunun ikinci esas formunun uzunluğunun karesi $\|h\|^2$, ortalama eğrilik vektörü H, ortalama eğriliği α ve skaler eğriliği S, sırasıyla,

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j,\beta} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_\beta h^\beta_{ij} h^\beta_{ji}, \tag{2.7}$$

$$H = \frac{1}{n} \sum_{\beta=n+1}^{m} \varepsilon_\beta \mathrm{tr} A_\beta e_\beta, \tag{2.8}$$

$$\alpha = \langle H, H\rangle \tag{2.9}$$

ve

$$S = n^2 \langle H, H\rangle - \|h\|^2 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\mathrm{tr} A_\beta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h^\beta_{ii}, \tag{2.11}$$

$A_\beta = A_{e_\beta}$ şekil operatörünün izidir.

Bir $f : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonunun gradyenti

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i(f) e_i \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır. M alt manifoldu üzerinde indirgenmiş metriğe göre belirlenen Laplace operatörü ise

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (-e_i e_i + \nabla_{e_i} e_i) \tag{2.13}$$

şeklindedir.

X, Y, Z, W ve ξ, η, M üzerindeki, sırasıyla, teğet ve normal vektör alanları olmak üzere, Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri, sırasıyla,

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle h(Y,Z), h(X,W)\rangle - \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle, \tag{2.14}$$

$$\langle R^D(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle, \tag{2.15}$$

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{2.16}$$

şeklinde olur. Burada A, M alt manifoldunun şekil operatörü, R ve R^D ise, sırasıyla, M alt manifoldunun ∇ indirgenmiş konneksiyonu ve D normal konneksiyonuyla ilişkilendirilmiş eğrilik tensörleridir, yani,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{2.17}$$

$$R^D(X,Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi. \tag{2.18}$$

Ayrıca, ikinci temel formun kovaryant türevi $\bar{\nabla}h$,

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\bar{\nabla}h = 0$ ise M'ye paralel alt manifold denir.

Açıklama 2.1. $r = s = 0$ olması durumunda yukarıda verilen tanımlar, $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının alt manifoldlarına ait tanımları vermektedir. Dolayısıyla, yukarıdaki tanımlar Euclid uzayı için tekrar edilmeyecektir.

2.1.1 $\mathbb{E}^4_s$ yarı-Euclid uzayının uzaysal yüzeyleri

$s \leq 1$ olmak üzere, $\mathbb{E}^4_s$ yarı-Euclid uzayında bir M uzaysal yüzeyi verilsin. Ayrıca, bu yüzey üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ göz önüne alınsın ve $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ bu çatı alanına karşı gelen dual çatı alanı olsun.

Bu durumda, (2.5) Gauss ve (2.6) Weingarten formülleri

$$\widetilde{\nabla}_{e_j} e_i = \sum_{k=1}^{2} \omega_{ik}(e_j)e_k + \varepsilon_3 h^3_{ij} e_3 + \varepsilon_4 h^4_{ij} e_4, \tag{2.20}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\beta = -h^\beta_{1i} e_1 - h^\beta_{i2} e_2 + \sum_{\gamma=3}^{4} \varepsilon_\gamma \omega_{\beta\gamma}(e_k) e_\gamma, \quad i,j = 1,2, \beta = 3,4 \tag{2.21}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, (2.16) ile verilen Codazzi denklemleri

$$h^\beta_{ij,k} = h^\beta_{jk,i}, \quad i,j,k = 1,2,\ \beta = 3,4 \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikteki $h^\beta_{ij,k}$ terimleri, (2.19) göz önüne alındığında,

$$h^\beta_{jk,i} = e_i(h^\beta_{jk}) + \sum_{\gamma=3}^{4} \varepsilon_\gamma h^\gamma_{jk} \omega_{\gamma\beta}(e_i) - \sum_{\ell=1}^{2} \left(\omega_{j\ell}(e_i) h^\beta_{\ell k} + \omega_{k\ell}(e_i) h^\beta_{j\ell}\right) \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
h^3_{11,2} &= e_2(h^3_{11}) - \varepsilon_4 h^4_{11}\omega_{34}(e_2) - 2\omega_{12}(e_2)h^3_{12}, && \textbf{(2.24)}\\
h^3_{12,i} &= e_i(h^3_{12}) - \varepsilon_4 h^4_{12}\omega_{34}(e_i) + \omega_{12}(e_i)(h^3_{11} - h^3_{22}), && \textbf{(2.25)}\\
h^3_{22,1} &= e_1(h^3_{22}) - \varepsilon_4 h^4_{22}\omega_{34}(e_1) + 2\omega_{12}(e_1)h^3_{12}, && \textbf{(2.26)}\\
h^4_{11,2} &= e_2(h^4_{11}) + \varepsilon_3 h^3_{11}\omega_{34}(e_2) - 2\omega_{12}(e_2)h^4_{12}, && \textbf{(2.27)}\\
h^4_{12,i} &= e_i(h^4_{12}) + \varepsilon_3 h^3_{12}\omega_{34}(e_i) + \omega_{12}(e_i)(h^4_{11} - h^4_{22}), && \textbf{(2.28)}\\
h^4_{22,1} &= e_1(h^4_{22}) + \varepsilon_3 h^3_{22}\omega_{34}(e_1) + 2\omega_{12}(e_1)h^4_{12} && \textbf{(2.29)}
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, M yüzeyinin K Gauss eğriliği

$$K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle \qquad \textbf{(2.30)}$$

şeklinde tanımlanır. Yüzeyin S skaler eğriliği ile K Gauss eğriliği, $S = 2K$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla, (2.10) denkleminden

$$\|h\|^2 = 4\langle H, H\rangle - 2K \qquad \textbf{(2.31)}$$

bulunur. Ayrıca, (2.14) ile verilen Gauss denkleminin kullanılmasıyla (2.30) denkleminden $K = \varepsilon_3 \det A_3 + \varepsilon_4 \det A_4$ elde edilir. Gauss eğriliğinin özdeş olarak sıfır olması durumunda M'ye düz yüzey denir.

Açıklama 2.2. $s = 0$ olması durumunda $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ olur ve yukarıda verilen denklemler $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir M yüzeyi için de geçerlidir.

Ayrıca, $H \equiv 0$ eşitliği sağlanıyorsa, M'ye, $s = 1$ olması durumunda, maksimal yüzey; $s = 0$ olması durumunda ise minimal yüzey denir. Eğer yüzeyin ortalama eğrilik vektörü $DH = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, yüzeye paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir denir. Diğer taraftan, M yüzeyinin her X, Y teğet vektör alanı için $\langle h(X,Y), H\rangle = \rho\langle X, Y\rangle$ eşitliğini sağlayan bir ρ düzgün fonksiyonu varsa M'ye yarı-ombilik yüzey denir.

Diğer taraftan, ω_1, ω_2 ve ω_{12} 1-formları

$$dw_1 = w_{12} \wedge w_2, \quad dw_2 = -w_{12} \wedge w_1 \qquad \textbf{(2.32)}$$

ile verilen Cartan'ın birinci yapı denklemlerini sağlar.

2.2 Gauss Tasviri

Bu alt bölümde yarı-Euclid uzayının alt manifoldlarının Gauss tasvirlerinin tanımı verilecektir.

Yardımcı Teorem 2.1. [25, sf. 52] V ve W iç çarpım uzaylarının aynı indise ve aynı boyuta sahip olmaları için gerek ve yeter koşul aralarında bir lineer izometri olmasıdır.

M, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Euclid uzayının, n boyutlu ($n < m$), r indisli ($r \leq s$) yarı-Riemann alt manifoldu olsun ve M üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ortonormal çatı alanı göz önüne alınsın. Ayrıca, $\mathbb{E}_s^m$ Euclid uzayında $(m-n)$-vektörlerin uzayı $\Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m)$ ile gösterilsin. Bu vektör uzayının boyutu, $N = \binom{m}{m-n}$ dir. Bu uzay üzerinde dejenere olmamış bir iç çarpım, X_i, $Y_i \in \mathbb{E}_s^m$, $i = 1, 2, \ldots, m-n$ olmak üzere

$$\langle X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_{m-n}, Y_1 \wedge Y_2 \wedge \cdots \wedge Y_{m-n} \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\{(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m-n}})(p) |\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-n} \leq m\}$ kümesi, $\left(\Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m); \langle\ ,\ \rangle\right)$ iç çarpım uzayı için bir ortonormal baz teşkil eder ve $\langle e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m-n}}, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m-n}} \rangle = \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \ldots \varepsilon_{i_{m-n}} = \pm 1$ olur.

S, $\Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m)$ iç çarpım uzayının indisi olsun. Bu durumda, Yardımcı Teorem 2.1'den $\Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m)$ ve $\mathbb{E}_S^N$ uzayları arasında bir lineer izometrinin olduğu elde edilir. Dolayısıyla, her $p \in M$ için $(e_{n+1} \wedge e_{n+2} \wedge \ldots \wedge e_m)(p)$ ile verilen $(m-n)$-vektörü, $\mathbb{E}_S^N$ uzayında bir vektör olarak düşünülebilir. M alt manifoldu üzerinde

$$\begin{array}{rcl} \nu : M & \rightarrow & \mathbb{E}_S^N \\ p & \mapsto & \nu(p) = (e_{n+1} \wedge e_{n+2} \wedge \ldots \wedge e_m)(p) \end{array} \qquad \textbf{(2.33)}$$

şeklinde tanımlanan ν tasvirine M alt manifoldunun Gauss tasviri denir.

$\mathbb{E}_s^m$ uzayında yönlendirilmiş, orijinden geçen $(m-n)$-düzlemlerin Grassmannian manifoldu $G(m-n, m)$ ile gösterilsin ve $\mathbb{E}_s^m$ uzayının orijininden geçen $(m-n)$-boyutlu bir V düzlemi göz önüne alınsın ve V $(m-n)$-düzleminin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-n}\}$ olsun. Bu durumda, $v = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{m-n} \in \Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m)$ olur ve $\langle v, v \rangle = \pm 1$'dir. Dolayısıyla, her $V \in G(m-n, m)$ $(m-n)$-düzlemine karşı gelen bir v birim $(m-n)$-vektörü vardır. Tersine, verilen bir birim $(m-n)$-vektörü v, $\mathbb{E}_s^m$ uzayı içinde yönlendirilmiş bir $(m-n)$-düzlem belirler. Sonuç olarak, $G(m-n, m)$ Grassmannian manifoldu, doğal bir şekilde $\Lambda^{m-n}(\mathbb{E}_s^m)$ uzayının normu ± 1 olan

n-vektörlerinin alt kümesi olarak tanımlanabilir ve $G(m-n,m) \subset \Lambda^{m-n}(\mathbb{E}^m_s) \cong \mathbb{E}^N_S$ olur. Dolayısıyla, M alt manifoldunun (2.33) ile tanımlanan (normal) Gauss tasviri, M alt manifoldunun her p noktasını, alt manifoldun p noktasındaki normal uzayının, $\mathbb{E}^m_s$ uzayının orijinine taşınmasıyla elde edilen $(m-n)$-boyutlu düzlemin $\mathbb{E}^N_S$ uzayında temsiline götüren tasvirdir, [21].

Ayrıca, $e_{m+1},\ e_{m+2},\ \ldots,\ e_n$ vektör alanlarından $s-r$ tanesi zamansal olacağından, her $p \in M$ için $\langle \nu(p), \nu(p) \rangle = (-1)^{s-r}$ olur. Dolayısıyla, eğer $s-r$ çift ise $\nu(M) \subset \mathbb{S}^{N-1}_S(1) \subset \mathbb{E}^N_S$, tek ise $\nu(M) \subset \mathbb{H}^{N-1}_{S-1}(-1) \subset \mathbb{E}^N_S$ olur. Burada $\nu(M)$, M alt manifoldunun ν Gauss tasviri altında görüntü kümesidir.

Açıklama 2.3. $s=0$ olması durumunda $\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının bir M Riemann alt manifoldunun ν Gauss tasvirinin tanımı, aynı şekilde verilir, $S=0$ ve $\nu(M) \subset \mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{E}^N$ olur. Burada $\mathbb{S}^{N-1}$, $\mathbb{E}^N$ uzayının orijin merkezli birim hiperküresidir.

Şimdi, $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı-Euclid uzayında n-boyutlu bir M alt manifoldu göz önüne alınsın ve bu alt manifold üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n; e_{n+1}, e_{n+2}\}$ ile verilsin. Bu durumda, $N = \binom{n+2}{n}$ olur. Ayrıca, M alt manifoldu üzerinde tanımlı $C : M \to \mathbb{E}^N_S$ vektör değerli fonksiyonu,

$$C_{AB} = \langle C, e_A \wedge e_B \rangle, \quad 1 \leq A, B \leq n+2 \tag{2.34}$$

olmak üzere

$$C = \sum_{1 \leq A < B \leq n+2} \varepsilon_A \varepsilon_B C_{AB} e_A \wedge e_B \tag{2.35}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca, C vektör değerli fonksiyonunun sabit olması için gerek ve yeter koşul $e_i(C) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, olmasıdır. (2.34) eşitliğinden $1 \leq A, B \leq n+2$ için $C_{AB} = -C_{BA}$ ve $C_{AA} = 0$ olduğu görülür.

Bu tanımlar kullanılarak C vektör değerli fonksiyonunun sabit olması ile ilgili aşağıdaki yardımcı teorem verilir:

Yardımcı Teorem 2.2. M, $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı-Euclid uzayının bir n-boyutlu alt manifoldu olsun. Ayrıca M üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ ile verilsin. Bu durumda, $\Lambda^2(\mathbb{E}^{n+2}_s) \cong \mathbb{E}^N_S$ uzayında (2.34) ve (2.35) ile verilen bir C

vektörünün sabit olması için gerek ve yeter koşul, C_{AB} bileşenlerinin

$$
\begin{aligned}
e_m(C_{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\omega_{ik}(e_m)C_{kj} - \omega_{jk}(e_m)C_{ki}\right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=n+1}^{n+2} \varepsilon_\alpha \left(h^\alpha_{jm}C_{i\alpha} - h^\alpha_{im}C_{j\alpha}\right), \qquad (\mathbf{2.36}) \\
e_m(C_{i(n+1)}) &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\omega_{ik}(e_m)C_{k(n+1)} + h^{n+1}_{mk}C_{ki}\right) + \varepsilon_{n+2}\left(\omega_{(n+1)(n+2)}(e_m)C_{i(n+2)}\right. \\
&\quad \left. - h^{n+2}_{im}C_{(n+1)(n+2)}\right), \qquad (\mathbf{2.37}) \\
e_m(C_{i(n+2)}) &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Big(\omega_{ik}(e_m)C_{k(n+2)} + h^{n+2}_{mk}C_{ki}\Big) - \varepsilon_{n+1}\left(\omega_{(n+1)(n+2)}(e_m)C_{i(n+1)}\right. \\
&\quad \left. + h^{n+1}_{im}C_{(n+1)(n+2)}\right), \qquad (\mathbf{2.38}) \\
e_m(C_{(n+1)(n+2)}) &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(h^{n+2}_{mk}C_{k(n+1)} - h^{n+1}_{mk}C_{k(n+2)}\right), \quad 1 \le i < j \le n \qquad (\mathbf{2.39})
\end{aligned}
$$

denklem takımını $m = 1, 2, \ldots, n$ için sağlamasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}^{n+2}_s$ yarı-Euclid uzayının bir n-boyutlu alt manifoldu, C ise (2.34) ve (2.35) ile verilmiş bir vektör alanı olsun. Ayrıca M üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ ile verilsin. (2.34) denkleminden $m = 1, 2, \ldots, n$ ve $1 \le A < B \le n+2$ için

$$
e_m(C_{AB}) = e_m(\langle C, e_A \wedge e_B \rangle) = \langle e_m(C), e_A \wedge e_B \rangle + \langle C, e_m(e_A \wedge e_B) \rangle \qquad (\mathbf{2.40})
$$

elde edilir. Dolayısıyla, C vektör alanının sabit olması için gerek ve yeter koşul,

$$
e_m(C_{AB}) = \langle C, e_m(e_A \wedge e_B) \rangle \quad m = 1, 2, \ldots, n; \quad 1 \le A < B \le n+2 \qquad (\mathbf{2.41})
$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. İspatın bundan sonraki kısmında (2.5) Gauss ve (2.6) Weingarten formülleri kullanılarak (2.41) denklemlerinin sağ tarafındaki ifadeler hesaplanacaktır.

(2.5) Gauss formülü kullanılarak $1 \le i < j \le n$ için

$$
\begin{aligned}
e_m(e_i \wedge e_j) &= (\widetilde{\nabla}_{e_m} e_i) \wedge e_j + e_i \wedge \widetilde{\nabla}_{e_m} e_j \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ik}(e_m) e_k + \sum_{\alpha=n+1}^{n+2} \varepsilon_\alpha h^\alpha_{im} e_\alpha\right) \wedge e_j \\
&\quad + e_i \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{jk}(e_m) e_k + \sum_{\alpha=n+1}^{n+2} \varepsilon_\alpha h^\alpha_{jm} e_\alpha\right)
\end{aligned} \qquad (\mathbf{2.42})
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki terimlerin düzenlenmesiyle

$$
\begin{aligned}
e_m(e_i \wedge e_j) = &\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\omega_{ik}(e_m)e_k \wedge e_j + \omega_{jk}(e_m)e_i \wedge e_k\right) \\
&+ \sum_{\alpha=n+1}^{n+2} \varepsilon_\alpha \left(h^\alpha_{im}e_\alpha \wedge e_j + h^\alpha_{jm}e_i \wedge e_\alpha\right)
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

bulunur. Bu denklem $A = i$ ve $B = j$ için (2.41) denkleminde yerine yazılırsa, (2.36) denklemine ulaşılır. Ayrıca, (2.6) Weingarten formülü kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
e_m(e_{n+1} \wedge e_{n+2}) &= (\widetilde{\nabla}_{e_m} e_{n+1}) \wedge e_{n+2} + e_{n+1} \wedge \widetilde{\nabla}_{e_m} e_{n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(h^{n+2}_{mk} e_k \wedge e_{n+1} - h^{n+1}_{mk} e_k \wedge e_{n+2}\right)
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

bulunur. Bu denklemin $A = n+1$ ve $B = n+2$ için (2.41) denkleminde yerine yazılmasıyla (2.39) denklemine ulaşılır. Benzer şekilde (2.5) Gauss ve (2.6) Weingarten formüllerinin kullanılmasıyla elde edilen

$$
\begin{aligned}
e_m(e_i \wedge e_{n+1}) = &\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(-h^{n+1}_{mk} e_i \wedge e_k + \omega_{ik}(e_m) e_k \wedge e_{n+1}\right) \\
&+ \varepsilon_{n+2} \left(\omega_{(n+1)(n+2)}(e_m) e_i \wedge e_{n+2} - \varepsilon_{n+2} h^{n+2}_{im} e_{n+1} \wedge e_{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
e_m(e_i \wedge e_{n+2}) = &\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(-h^{n+2}_{mk} e_i \wedge e_k + \omega_{ik}(e_m) e_k \wedge e_{n+2}\right) \\
&- \varepsilon_{n+1} \left(\omega_{(n+1)(n+2)}(e_m) e_i \wedge e_{n+1} + \varepsilon_{n+1} h^{n+1}_{im} e_{n+1} \wedge e_{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

denklemleri (2.41) denkleminde yerine yazılırsa, sırasıyla, (2.37) ve (2.38) denklemlerine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tez çalısmasının bundan sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacağı için, Yardımcı Teorem 2.2'nin $n = 2$ özel halindeki durumu aşağıdaki yardımcı teoremde ifade edilecektir.

Yardımcı Teorem 2.3. $s \leq 1$ olmak üzere, M, $\mathbb{E}^4_s$ yarı-Euclid uzayında uzaysal bir yüzey, $\{e_1, e_2; e_3, e_4\}$ ise bu yüzey üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı olsun. Bu durumda,

$$
C = \sum_{1 \leq A < B \leq 4} C_{AB} e_A \wedge e_B \tag{2.45}
$$

ile verilen bir C vektörünün sabit olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned}
e_i(C_{12}) &= \varepsilon_3 h^3_{i2} C_{13} + \varepsilon_4 h^4_{i2} C_{14} - \varepsilon_3 h^3_{i1} C_{23} - \varepsilon_4 h^4_{i1} C_{24}, && (\mathbf{2.46}\text{a})\\
e_i(C_{13}) &= -h^3_{i2} C_{12} + \varepsilon_4 \omega_{34}(e_i) C_{14} + \omega_{12}(e_i) C_{23} - \varepsilon_4 h^4_{i1} C_{34}, && (\mathbf{2.46}\text{b})\\
e_i(C_{14}) &= -h^4_{i2} C_{12} - \varepsilon_3 \omega_{34}(e_i) C_{13} + \omega_{12}(e_i) C_{24} + \varepsilon_3 h^3_{i1} C_{34}, && (\mathbf{2.46}\text{c})\\
e_i(C_{23}) &= h^3_{i1} C_{12} - \omega_{12}(e_i) C_{13} + \varepsilon_4 \omega_{34}(e_i) C_{24} - \varepsilon_4 h^4_{i2} C_{34}, && (\mathbf{2.46}\text{d})\\
e_i(C_{24}) &= h^4_{i1} C_{12} - \omega_{12}(e_i) C_{14} - \varepsilon_3 \omega_{34}(e_i) C_{23} + \varepsilon_3 h^3_{i2} C_{34}, && (\mathbf{2.46}\text{e})\\
e_i(C_{34}) &= h^4_{i1} C_{13} - h^3_{i1} C_{14} + h^4_{i2} C_{23} - h^3_{i2} C_{24} && (\mathbf{2.46}\text{f})
\end{aligned}$$

denklem takımının $i = 1, 2$ için sağlanmasıdır.

2.3 Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasviri

Bu alt bölümde ilk olarak noktasal 1-tipinden Gauss tasviri ve harmonik Gauss tasvirinin tanımı literatürdeki şekilleriyle verilecek, daha sonra ise diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı bilinen önemli sonuçlar ifade edilecektir.

M, $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Euclid uzayının bir alt manifoldu, ν ise bu alt manifoldun Gauss tasviri olsun. ν Gauss tasvirine, $\Delta\nu = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, harmoniktir denir. Bununla birlikte, eğer ν tasviri

$$\Delta\nu = f(\nu + C) \qquad (\mathbf{2.47})$$

denklemini bir $f : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu ve $C \in \mathbb{E}^N_S$ sabit vektörü için sağlıyorsa, M alt manifolduna noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Ayrıca, (2.47) denklemi $C = 0$ için sağlanıyorsa Gauss tasvirine birinci çeşit noktasal 1-tipinden, $f \neq 0$ ve $C \neq 0$ için sağlanıyor ise ikinci çeşit noktasal 1-tipindendir denir. (2.47) denklemi sabit olmayan bir f fonksiyonu için sağlanıyorsa, ν tasvirine has noktasal 1-tipinden Gauss tasviri denir.

[16] numaralı makalede $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeylerin sınıflandırılması yapılmış, ve aşağıdaki teoremler verilmiştir:

Yardımcı Teorem 2.4. [16] $\mathbb{E}^{n+2}$ Euclid uzayının n-boyutlu bir M alt manifoldunun $\nu = e_{n+1} \wedge e_{n+2}$ Gauss tasvirinin Laplasyeni

$$\begin{aligned}\Delta\nu =& ||h||^2\nu + 2\sum_{1\le j<k\le n} R^D(e_j, e_k; e_{n+1}, e_{n+2})e_j \wedge e_k \\ &+ n\sum_{j=1}^{n} \omega_{n+2}^{n+1}(e_j)e_j \wedge H + \nabla(\mathrm{tr}A_{n+1}) \wedge e_{n+2} - \nabla(\mathrm{tr}A_{n+2}) \wedge e_{n+1},\end{aligned} \quad \textbf{(2.48)}$$

olur. Burada $||h||^2$ fonksiyonu, H vektör alanı ve R^D tensör alanı, M alt manifoldunun, sırasıyla, ikinci temel formunun uzunluğunun karesi, ortalama eğrilik vektörü ve normal eğrilik tensörüdür, $\nabla(\mathrm{tr}A_\beta)$ ise e_β normal vektörü doğrultusundaki şekil operatörünün izinin gradyentidir.

Teorem 2.5. [16] $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir yönlendirilmiş, minimal M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, normal konneksiyonunun düz olmasıdır.

Teorem 2.6. [16] $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir yönlendirilmiş, minimal olmayan M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır.

Yine [16] numaralı makalede $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip minimal yüzeylerin aşağıdaki karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 2.7. [16] $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının düzlemsel olmayan, yönlendirilmiş bir M minimal yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul uygun seçilmiş bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanına karşı gelen şekil operatörlerinin

$$A_3 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\rho \\ \varepsilon\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(2.49)}$$

formunda olmasıdır. Burada ρ, M yüzeyi üzerinde tanımlı düzgün bir fonksiyondur.

2.4 $\mathbb{E}^4$ Euclid Uzayının Dönel Yüzeyleri

Bu alt bölümde $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının dönel yüzeylerinin tanımı verilmiştir. Bu tanımın verilebilmesi için öncelikle $\mathbb{E}^4$ uzayında dönme kavramı anlatılmıştır.

2.4.1 $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönmeler

$\mathbb{E}^4$ uzayında uzaklığı koruyan ve bir noktayı sabit bırakan pozitif determinantlı lineer dönüşüme dönme denir. Dört boyutlu dönmelerin kümesi, $\mathbb{R}^4$ uzayından $\mathbb{R}^4$ uzayına tanımlı lineer dönüşümler grubunun bir alt grubudur ve $SO(4)$ ile gösterilir. $SO(4)$ grubunun elemanları ile ilgili ilk çalışmalar [26–28] nolu makalelerde verilmiş ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Orijin dışındaki bazı noktaları da sabit bırakan dönmelere basit dönme denir. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ uzayında kesişimi tek bir nokta olan iki düzleme tamamiyle dik düzlemler denir, [26]. Bununla birlikte, bir basit dönme $\mathbb{E}^4$ uzayında bir düzlemin bütün noktalarını sabit bırakır, ayrıca bu düzleme tamamiyle dik olan bir düzlem ise aynı basit dönme altında değişmez kalır. $\mathbb{R}^4$ uzayının bir noktasının basit dönmeler altında yörüngesi, bir çemberdir. Bu çemberin merkezi, basit dönme altında noktası noktasına sabit kalan düzlemin içindedir.

Örneğin, dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

olan dönüşüm bir basit dönmedir ve X_1X_2 düzlemini noktası noktasına sabit bırakırken, X_3X_4 düzlemini ise bir küme olarak değişmez bırakmaktadır. $\mathbb{R}^4$ uzayında verilen bir (p_1, p_2, p_3, p_4) noktasının bu dönme altında yörüngesi

$$\gamma(t) = (p_1, p_2, p_3\cos t + p_4\sin t, p_3\sin t - p_4\cos t) \tag{2.51}$$

şeklindedir. Bu eğri, merkezi $(p_1, p_2, 0, 0)$ noktasında olan bir

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3^2 + X_4^2 = p_3^2 + p_4^2 \tag{2.52}$$

çemberidir.

İki basit dönmenin bileşkesi, genelde, yine bir basit dönme değildir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremin ispatı [26] numaralı makalede verilmiştir:

Teorem 2.8. [26] Basit dönmeler dışındaki bütün dört boyutlu dönmeler, sabit bıraktığı düzlemler birbirine tamamiyle dik olan iki basit dönmenin bileşkesi olarak yazılabilir.

Bu yüzden, basit dönmeler dışında kalan dönmelere çift dönme veya genel dönme denir. Dolayısıyla, bir çift dönme birbirine tamamiyle dik iki düzlemi ayrı ayrı (birer küme olarak) değişmez bırakır. Bununla birlikte, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir noktanın bir çift dönme altında yörüngesi, genelde bir çember değildir, ancak bazı özel durumlarda, merkezi orijinde bir çember olur.

Örneğin, dönüşüm matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos bt & -\sin bt \\ 0 & 0 & \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

olan tek parametreli dönüşüm, X_1X_2 ve X_3X_4 düzlemlerini değişmez bırakan iki basit dönmenin bileşkesinden ibarettir. $\mathbb{R}^4$ uzayında verilen bir (p_1, p_2, p_3, p_4) noktasının bu dönme altında yörüngesi

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \Big(& p_1 \cos at + p_2 \sin at, p_1 \sin at - p_2 \cos at, p_3 \cos bt + p_4 \sin bt, \\ & p_3 \sin bt - p_4 \cos bt\Big) \end{aligned} \tag{2.54}$$

şeklinde olduğu görülür. Özel olarak $a = b$ olması durumunda bu eğri merkezi orijinde, yarıçapı ise $r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$ olan bir çember olur.

2.4.2 $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında basit dönel yüzeyler ve çift dönel yüzeyler

[28] nolu makalede C. Moore, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının dönel yüzeylerinin tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir:

Tanım 2.9. [28] $\mathbb{E}^4$ uzayının bir dönmesi altında değişmez kalan bir yüzeye, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir dönel yüzey denir.

Bu bölümün başında anlatılan dört boyutlu dönme kavramı ve Tanim 2.9 göz önüne alındığında, $\mathbb{E}^4$ uzayının bir M dönel yüzeyinin yer vektörü,

$$X_1(s,t) = x(s)\cos at - y(s)\sin at, \tag{2.55a}$$

$$X_2(s,t) = x(s)\sin at + y(s)\cos at, \tag{2.55b}$$

$$X_3(s,t) = z(s)\cos bt - w(s)\sin bt, \tag{2.55c}$$

$$X_4(s,t) = z(s)\sin bt + w(s)\cos bt, \qquad s \in I_s, \quad t \in I_t. \tag{2.55d}$$

olmak üzere

$$F(s,t) = (X_1(s,t), X_2(s,t), X_3(s,t), X_4(s,t)) \quad \textbf{(2.56)}$$

şeklindedir. Burada, I_s ve I_t, $\mathbb{R}$'de bazı açık aralıklar, $a^2+b^2 \neq 0$ olmak üzere, a, b bazı sabitler ve $x,\ y,\ z,\ w$ ise $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında

$$\beta(s) = \big(x(s), y(s), z(s), w(s)\big) \quad \textbf{(2.57)}$$

ile verilen düzgün ve regüler bir eğrinin koordinat fonksiyonlarıdır. Buradaki $\beta(s)$ eğrisine M dönel yüzeyinin profil eğrisi denir.

Özel olarak (2.55)-(2.56) denklemlerinde $a = 0$, $b = 1$ ve $w(s) = 0$ alınarak

$$F(s,t) = (x(s), y(s), z(s)\cos t, z(s)\sin t), \quad s \in I_s, \quad t \in (0, 2\pi) \quad \textbf{(2.58)}$$

elde edilen dönel yüzey, (2.50) ile verilen basit dönme tarafından değişmez kalır. Bu yüzden yer vektörü (2.58) ile verilen yüzeye, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında bir basit dönel yüzey denir.

Diğer taraftan, (2.55)-(2.56) denklemlerinde $y(s) = w(s) = 0$ alınarak elde edilen

$$F(s,t) = (x(s)\cos at, x(s)\sin at, z(s)\cos bt, z(s)\sin bt), \quad s \in I_s, \quad t \in I_t \quad \textbf{(2.59)}$$

dönel yüzey ise (2.53) ile verilen genel dönme tarafından değişmez bırakılır. Bu yüzden profil eğrisi düzlemsel olan ve yer vektörü (2.59) ile verilen yüzeye, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında bir genel dönel yüzey denilmektedir. Ayrıca (2.59) denkleminde özel olarak $a = b = 1$, $x(s) = u(s)\cos s$ ve $z(s) = u(s)\sin s$ alınırsa elde edilen dönel yüzeye Vranceanu dönel yüzeyi denir, [29].

3. GENEL DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip genel dönel yüzeyleri incelenmiştir. Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip genel dönel yüzeylerle ilgili bazı sınıflandırma teoremleri verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının minimal genel dönel yüzeyleri ile yarı-ombilik genel dönel yüzeylerin sınıflandırılmaları elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar [30] ve [31] numaralı makalelerde yayınlanmıştır.

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında profil eğrisi $\beta = (x(s), 0, z(s), 0)$ olan, yer vektörü (2.59) ile verilmiş, genel dönel yüzey olsun. Bu bölümde "$'$" ile β profil eğrisinin s parametresine göre adi türevi gösterilecektir.

Doğrudan hesapla M yüzeyinin koordinat vektör alanları

$$F_s = (x'(s)\cos at, x'(s)\sin at, z'(s)\cos bt, z'(s)\sin bt), \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$F_t = (-ax(s)\sin at, ax(s)\cos at, -bz(s)\sin bt, bz(s)\cos bt) \qquad \textbf{(3.2)}$$

bulunur ve M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş metrik

$$g = \begin{pmatrix} x'^2 + z'^2 & 0 \\ 0 & a^2x^2 + b^2z^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.3)}$$

şeklinde olur. Dolayısıyla, F tasvirinin bir daldırma olması ancak ve ancak

$$\det g = (x'^2 + z'^2)(a^2x^2 + b^2z^2) \neq 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

koşulunun sağlanmasıyla mümkündür. Dolayısıyla, β eğrisi regülerdir ve $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının orijininden geçmez. Ayrıca, β profil eğrisi regüler olduğu için, genellik bozulmaksızın

$$x'^2 + z'^2 = 1 \qquad \textbf{(3.5)}$$

eşitliğinin sağlandığı, yani β eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği varsayılacaktır. Bu durumda, $\mathbb{E}^2$ uzayının $\tilde{\beta}(s) = (x(s), z(s))$ eğrisinin $\kappa = \kappa(s)$ eğrilik fonksiyonu

$$\kappa \;=\; x'z'' - z'x'' \tag{3.6}$$

olur.

Bununla birlikte, bir $J \subset I$ açık aralığı üzerinde $x \equiv 0$ veya $z \equiv 0$ olması durumunda dönel yüzey, bir düzlem parçasına dönüşür. Dolayısıyla, $\mathscr{U}_1 = \{s \in I | x(s) = 0\}$ ve $\mathscr{U}_2 = \{s \in I | z(s) = 0\}$ olmak üzere $\mathrm{int}(\mathscr{U}_1) = \mathrm{int}(\mathscr{U}_2) = \varnothing$ olduğu varsayılacaktır.

Diğer taraftan, a ve b sabitlerinden birinin sıfır olması durumunda, M yüzeyi $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperdüzleminin içinde kalır. Dolayısıyla, a ve b sabitlerinin sıfırdan farklı olduğu durum incelenecektir.

Açıklama 3.1. β eğrisinin orijinden geçen bir doğrunun açık bir parçası olması ve dönme oranları a ve b'nin $a^2 = b^2$ eşitliğini sağlaması durumunda, M dönel yüzeyinin bir parametrelenişi, p_0 bir sabit ve $\varepsilon = \frac{a}{b} = \pm 1$ olmak üzere,

$$\tilde{F}(x,t) = (x\cos t, x\sin t, p_0 x\cos t, \varepsilon p_0 x\sin t), \quad x > 0 \tag{3.7}$$

şeklindedir. Bu durumda, $\xi_1 = (p_0, 0, -1, 0)$ ve $\xi_2 = (0, \varepsilon p_0, 0, -1)$ vektörlerinin M yüzeyinin normal demetini gerdiği hemen görülür. Dolayısıyla, M yüzeyi bir düzlemin açık bir parçası olur.

3.1 Konneksiyon Formları ve Şekil Operatörleri

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey olsun. Bu durumda, M yüzeyi üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı,

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2z^2}}\frac{\partial}{\partial t}, && \text{(3.8a)}\\
e_3 &= (-z'\cos at, -z'\sin at, x'\cos bt, x'\sin bt), && \text{(3.8b)}\\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2z^2}}(-bz\sin at, bz\cos at, ax\sin bt, -ax\cos bt) && \text{(3.8c)}
\end{aligned}$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir. Doğrudan hesapla Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \kappa e_3, && \text{(3.9)}\\
\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \frac{ab(zx' - xz')}{a^2x^2 + b^2z^2} e_4, && \text{(3.10)}\\
\widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 &= \frac{a^2xx' + b^2zz'}{a^2x^2 + b^2z^2} e_2 + \frac{ab(zx' - xz')}{a^2x^2 + b^2z^2} e_4, && \text{(3.11)}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_2 = -\frac{a^2xx'+b^2zz'}{a^2x^2+b^2z^2}e_1+\frac{a^2xz'-b^2zx'}{a^2x^2+b^2z^2}e_3, \quad \textbf{(3.12)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3 = -\kappa e_1, \quad \textbf{(3.13)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}e_4 = -\frac{ab(zx'-xz')}{a^2x^2+b^2z^2}e_2, \quad \textbf{(3.14)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_3 = -\frac{a^2xz'-b^2zx'}{a^2x^2+b^2z^2}e_2-\frac{ab(xx'+zz')}{a^2x^2+b^2z^2}e_4, \quad \textbf{(3.15)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2}e_4 = -\frac{ab(zx'-xz')}{a^2x^2+b^2z^2}e_1+\frac{ab(xx'+zz')}{a^2x^2+b^2z^2}e_3 \quad \textbf{(3.16)}$$

elde edilir. Burada κ, β profil eğrisinin (3.6) denklemiyle verilen eğriliğidir. Bu eşitliklerden, M yüzeyinin konneksiyon formlarının ve ikinci esas formunun bileşenleri

$$h^3_{11}=\kappa, \qquad h^3_{22}=\frac{a^2xz'-b^2zx'}{a^2x^2+b^2z^2}, \quad h^3_{12}=0, \quad \textbf{(3.17)}$$

$$h^4_{12}=\frac{ab(zx'-xz')}{a^2x^2+b^2z^2}, \qquad h^4_{11}=h^4_{22}=0, \quad \textbf{(3.18)}$$

$$\omega_{12}(e_1)=0, \qquad \omega_{12}(e_2)=\frac{a^2xx'+b^2zz'}{a^2x^2+b^2z^2}, \quad \textbf{(3.19)}$$

$$\omega_{43}(e_1)=0, \qquad \omega_{43}(e_2)=\frac{ab(xx'+zz')}{a^2x^2+b^2z^2} \quad \textbf{(3.20)}$$

bulunur. Dolayısıyla, M dönel yüzeyinin şekil operatörleri $A_3=A_{e_3}$ ve $A_4=A_{e_4}$ olmak üzere

$$A_3=\begin{pmatrix} h^3_{11} & 0 \\ 0 & h^3_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_4=\begin{pmatrix} 0 & h^4_{12} \\ h^4_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.21)}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü, K Gauss eğriliği ve R^D normal eğrilik tansörü ise

$$H = \frac{1}{2}(h^3_{11}+h^3_{22})e_3, \quad \textbf{(3.22)}$$

$$K = h^3_{11}h^3_{22}-(h^4_{12})^2, \quad \textbf{(3.23)}$$

$$R^D(e_1,e_2;e_3,e_4) = h^4_{12}(h^3_{22}-h^3_{11}) \quad \textbf{(3.24)}$$

olarak bulunur. (3.17) - (3.20) denklemleri göz önüne alındığında, (2.22) Codazzi denklemlerinin

$$e_1(h^3_{22}) = \omega_{21}(e_2)\left(h^3_{22}-h^3_{11}\right)+h^4_{12}\omega_{43}(e_2), \quad \textbf{(3.25)}$$

$$e_1(h^4_{12}) = 2\omega_{21}(e_2)h^4_{12}-h^3_{11}\omega_{43}(e_2) \quad \textbf{(3.26)}$$

halini aldığı görülür.

3.2 Birinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Genel Dönel Yüzeyler

Bu alt bölümde $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerin sınıflandırılması yapılacaktır. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.1. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey olsun. M yüzeyinin minimal ve normal demetinin düz olması için gerek ve yeter koşul, bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ise M yüzeyi üzerinde tanımlı (3.8) denklemleriyle verilen ortonormal çatı alanı olsun. Bu çatı alanına karşı gelen şekil operatörleri A_3 ve A_4 (3.21) denklemiyle verilen formdadır.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin minimal olduğu ve normal demetinin düz olduğu varsayılsın. Bu durumda, (3.22) ve (3.24) denklemlerinden, $h^3_{11} = \kappa$ olmasından dolayı,

$$\kappa + h^3_{22} = 0, \tag{3.27}$$

$$h^4_{12}(h^3_{22} - \kappa) = 0 \tag{3.28}$$

eşitlikleri elde edilir ve bu iki denklemden

$$h^4_{12}\kappa = 0 \tag{3.29}$$

bulunur.

İlk olarak, M üzerinde $\kappa \equiv 0$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Bir $p \in M$ noktasında $\kappa \neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda κ fonksiyonunun sürekli olmasından dolayı p noktasının M üzerindeki bir $\mathcal{N}_p$ komşuluğu üzerinde $\kappa \neq 0$ olur ve (3.29) eşitliğinden $\mathcal{N}_p$ kümesi üzerinde $h^4_{12} = 0$ olduğu elde edilir. Bu eşitlik ve (3.18) in birinci denkleminden $\mathcal{N}_p$ açık kümesi üzerinde $zx' - xz' = 0$ elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle, $\mathcal{N}_p$ kümesi üzerinde, bir c sabiti için $z = cx$ bulunur. Dolayısıyla, $\mathcal{N}_p$ kümesi üzerinde $\kappa = 0$ olur ki bu durum bir çelişkidir. Sonuç olarak M üzerinde $\kappa = 0$

olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla, M yüzeyinin β profil eğrisi bir doğru parçasından ibaret olur ve x_1, x_2, z_1 ve z_2 bazı sabitler olmak üzere

$$x(s) = x_1 s + x_2, \quad z(s) = z_1 s + z_2, \quad x_1^2 + z_1^2 = 1 \tag{3.30}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (3.27) denkleminden $\kappa = 0$ olmasından dolayı $h_{22}^3 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, (3.17) ve (3.30) denklemlerinden

$$\frac{(a^2 - b^2)x_1 z_1 s + (a^2 x_2 z_1 - b^2 x_1 z_2)}{a^2(x_1 s + x_2)^2 + b^2(z_1 s + z_2)} = 0$$

bulunur ve bu eşitlikten

$$(a^2 - b^2)x_1 z_1 = 0, \tag{3.31}$$

$$a^2 x_2 z_1 - b^2 x_1 z_2 = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.31) denkleminden dolayı, $x_1 = 0$ veya $z_1 = 0$ veya $a^2 = b^2$ olmalıdır. $x_1 = 0$ olması durumunda $z_1 = \pm 1 \neq 0$ olur ve (3.32) denkleminden dolayı $x_2 = 0$ bulunur. Bu durumda, $x \equiv 0$ olacağından M yüzeyi zw-düzleminin açık bir parçası olur. Aynı şekilde, $z_1 = 0$ olması durumunda ise M yüzeyinin xy-düzleminin açık bir parçası olacağı görülür.

Şimdi, $x_1 z_1 \neq 0$ ve $a^2 = b^2$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (3.32) denkleminden $x_2 z_1 = x_1 z_2$ bulunur. Bu eşitlik ve (3.30) denkleminden ise $x_1 z = z_1 x$ elde edilir. Dolayısıyla, β eğrisi, orijinden geçen bir doğrunun açık bir parçasıdır. Açıklama 3.1 göz önüne alındığında M yüzeyinin bir düzlemin açık bir parçası olduğu görülür. Böylece gerek koşulun ispatı tamamlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı açıktır. □

Teorem 2.5 ve Teorem 3.1 kullanılarak aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.2. $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayı içinde birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip düzlemsel olmayan minimal bir genel dönel yüzey yoktur.

Bu bölümün geri kalan kısmında $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının minimal olmayan, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeylerinin elde edilmesi için $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip dönel yüzeyleri belirlenecektir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının (2.59) ile verilen, minimal olmayan bir genel dönel yüzeyi olsun. Bu durumda, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin yer vektörü

$$F(s,t)=\left(r_0\cos\frac{s}{r_0}\ \cos at, r_0\cos\frac{s}{r_0}\ \sin at, r_0\sin\frac{s}{r_0}\ \cos bt, r_0\sin\frac{s}{r_0}\ \sin bt\right) \quad \textbf{(3.33)}$$

ile verilen yüzeyin açık bir parçası olmasıdır. Bu yüzey $\mathbb{S}^3(r_0^2)\subset\mathbb{E}^4$ küresi içinde minimaldir.

İspat. M, (2.59) ile verilen, minimal olmayan bir yüzey, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ise (3.8) ile verilen ortonormal çatı alanı olsun. Bu durumda M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü (3.22) ile verilen yapıdadır. Şimdi gerek koşulun ispatı için H ortalama vektörünün paralel olduğu, yani $DH=0$ eşitliğinin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda, (3.20) ve (3.22) eşitliklerinden,

$$D_{e_1}(h_{11}^3+h_{22}^3)e_3 = e_1(h_{11}^3+h_{22}^3)e_3=0, \quad \textbf{(3.34)}$$
$$D_{e_2}(h_{11}^3+h_{22}^3)e_3 = -(h_{11}^3+h_{22}^3)\frac{ab(xx'+zz')}{a^2x^2+b^2z^2}e_4=0 \quad \textbf{(3.35)}$$

elde edilir. M yüzeyinin minimal olmamasından dolayı (3.34) denkleminden, $c_0\neq 0$ bir sabit olmak üzere, $\kappa+h_{22}^3=c_0$ bulunur. Bu eşitlik ve (3.35) denkleminden ise $xx'+zz'=0$ elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle, M yüzeyinin profil eğrisinin $r_0>0$ bir sabit olmak üzere $x^2+z^2=r_0^2$ çemberinin açık bir parçası olduğu görülür. Dolayısıyla, M, (3.33) ile verilen yüzeyin açık bir parçası olur.

Yeter koşulun ispatı için, M yüzeyinin (3.33) ile verilen ve $\mathbb{S}^3(r_0^2)$ küresinin içinde kalan yüzeyin bir açık parçası olduğu varsayılsın. Bu durumda, yüzeyin profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelenişi,

$$x(s)=r_0\cos(\frac{s}{r_0}),\quad z(s)=r_0\sin(\frac{s}{r_0}) \quad \textbf{(3.36)}$$

şeklinde olur ve e_3 vektör alanı, yüzeyin yer vektörü ile aynı doğrultudadır. Dolayısıyla, M yüzeyinin $\tilde{\alpha}$ küresel ortalama eğriliği,

$$\tilde{\alpha}=\langle H,e_4\rangle \quad \textbf{(3.37)}$$

olur.

Ayrıca, doğrudan hesapla,

$$
\begin{aligned}
h_{11}^3 &= \kappa = \frac{1}{r_0}, & \textbf{(3.38)}\\
h_{22}^3 &= \frac{a^2 r_0 \cos\left(\frac{s}{r_0}\right)\cos\left(\frac{s}{r_0}\right) + b^2 r_0 \sin\left(\frac{s}{r_0}\right)\sin\left(\frac{s}{r_0}\right)}{a^2\left(r_0\cos\left(\frac{s}{r_0}\right)\right)^2 + b^2\left(r_0\sin\left(\frac{s}{r_0}\right)\right)^2} = \frac{1}{r_0} & \textbf{(3.39)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{r_0} e_3 \qquad \textbf{(3.40)}$$

olur. (3.20), (3.40) ve

$$\omega_{34}(e_2) = -\frac{ab(xx' + zz')}{a^2x^2 + b^2z^2} = 0 \qquad \textbf{(3.41)}$$

eşitliklerinden ise $DH = 0$ bulunur. Yani M yüzeyinin ortalama eğriliği paraleldir.

Diğer taraftan, (3.37) ve (3.40) denklemlerinden $\tilde{\alpha} = 0$ bulunur, yani, M yüzeyi küresel minimaldir. □

(3.33) ile verilen bir M dönel yüzeyinin ikinci temel formunun normunun karesi,

$$||h||^2 = (h_{11}^3)^2 + (h_{22}^3)^2 + 2(h_{12}^4)^2 = \frac{2}{r_0^2} + \frac{2a^2b^2}{r_0^2\left(a^2\cos^2\left(\frac{s}{r_0}\right) + b^2\sin^2\left(\frac{s}{r_0}\right)\right)^2}$$

olarak bulunur.

Bu bölümde verilen sonuçların birleştirilmesi ile aşağıdaki sınıflandırma teoremi verilir.

Teorem 3.4. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzeyi olsun. M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bir düzlemin veya (3.33) ile verilen bir yüzeyin açık bir parçası olmasıdır.*

Ayrıca, (3.33) ile verilen dönel yüzeyin, $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri

$$f = \frac{2}{r_0^2}\left(1 + \frac{a^2b^2}{\left(a^2\cos^2\left(\frac{s}{r_0}\right) + b^2\sin^2\left(\frac{s}{r_0}\right)\right)^2}\right) \qquad \textbf{(3.42)}$$

fonksiyonu için $\Delta\nu = f\nu$ denklemini sağlar.

$a = b$ olması durumunda, (3.33) ile verilen dönel yüzey bir Clifford tor yüzeyi olur. Clifford tor yüzeyinin global 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu bilinmektedir,

[20]. Dolayısıyla, Teorem 3.4 $a = b$ için [20] numaralı makalede verilen ilgili teoremin bir genelleştirmesidir. Bununla birlikte, $a \neq b$ durumunda, (3.33) ile birinci çeşit has noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler elde edilir.

3.3 İkinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Genel Dönel Yüzeyler

3.3.1 Minimal genel dönel yüzeyler

[28] numaralı makalede, $a = b = 1$ durumunda (2.59) ile verilen minimal genel dönel yüzeyler çalışılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 3.5. [28] M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey olsun. $a^2 = b^2$ olması durumunda, M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin

$$x^2 + c_0 xz - z^2 = d_0 \qquad \textbf{(3.43)}$$

ile verilen bir hiperbol olmasıdır. Burada c_0 ve d_0 bazı sabitlerdir.

Bu bölümde ilk olarak $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının $a^2 \neq b^2$ olması durumunda (2.59) ile verilen minimal genel dönel yüzeyleri elde edilecektir.

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey olsun. Ayrıca $a^2 \neq b^2$ olduğu varsayılsın. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, (3.8) ile verilen vektör alanları olmak üzere, yüzeyin H ortalama vektör alanı (3.22) denklemiyle verilir. Dolayısıyla, M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul, (3.27) denkleminin sağlanmasıdır. (3.6), (3.17) ve (3.27) denklemlerinden M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşulun

$$x'(s)z''(s) - z'(s)x''(s) + \frac{a^2 x(s) z'(s) - b^2 z(s) x'(s)}{a^2 x^2(s) + b^2 z^2(s)} = 0. \qquad \textbf{(3.44)}$$

diferansiyel denkleminin sağlanması olduğu elde edilir. İlk olarak, aşağıdaki yardımcı teorem ile (3.44) denkleminin birinci integrali elde edilecektir.

Yardımcı Teorem 3.6. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. $a^2 \neq$

b^2 olması durumunda, M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul, yay uzunluğuna göre parametrelenmiş β profil eğrisinin $x = x(s)$ ve $y = y(s)$ koordinat fonksiyonlarının

$$(a^2 - b^2)\left(a^2x^2z'^2 - b^2x'^2z^2\right) = c_0 \tag{3.45}$$

diferansiyel denklemini, bazı c_0 sabitleri için sağlaması ve M yüzeyinin yoğun bir alt kümesi üzerinde $x'z' \neq 0$ olmasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey ve $a^2 \neq b^2$ olsun. Yüzeyin (3.8) denklemleriyle verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri, (3.17) - (3.20) denklemleriyle verilmiştir. Şimdi, gerek koşulun ispatı için, M yüzeyinin minimal olduğu varsayılsın. Bu durumda (3.27) denklemi sağlanır.

İlk olarak, bir $J \subset I$ aralığı üzerinde $x'z' \equiv 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, x' ve z' fonksiyonlarının sürekli olmasından ve (3.5) denkleminden dolayı genellik bozulmaksızın, J kümesi üzerinde $x' \equiv 0$ olduğu kabul edilebilir ki bu durumda, $d_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere, $x(s) = d_0$, $z'(s) = \pm 1$ ve $\kappa = 0$ olur. Ayrıca, (3.17) daki ikinci denklemden $h^3_{22} = \dfrac{\pm a^2 d_0}{a^2 d_0 + b^2 z(s)}$ elde edilir. Dolayısıyla, (3.27) denkleminden

$$\frac{\pm a^2 d_0}{a^2 d_0 + b^2 z(s)} = 0$$

bulunur. Yani, $d_0 = 0$ olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla, M yüzeyinin yoğun bir alt kümesi üzerinde $x'z' \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Diğer taraftan, (3.27) denklemi $\kappa = -h^3_{22}$ şeklinde çözülür ve (3.25) ve (3.26) ile verilen Codazzi denklemlerinde yerine yazılırsa

$$e_1(h^3_{22}) = 2\omega_{21}(e_2)h^3_{22} + h^4_{12}\omega_{43}(e_2), \tag{3.46}$$

$$e_1(h^4_{12}) = 2\omega_{21}(e_2)h^4_{12} + h^3_{22}\omega_{43}(e_2) \tag{3.47}$$

bulunur. Bu denklemler sırasıyla h^3_{22} ve h^4_{12} ile çarpılır ve taraf tarafa çıkartılırsa,

$$h^3_{22}e_1(h^3_{22}) - h^4_{12}e_1(h^4_{12}) = 2\left((h^3_{22})^2 - (h^4_{12})^2\right)\omega_{21}(e_2) \tag{3.48}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, (3.19) denklemi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2\right]+2\left[(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2\right]\frac{a^2xx'+b^2zz'}{a^2x^2+b^2z^2}=0 \qquad \textbf{(3.49)}$$

halini alır.

Bununla birlikte, $(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2=0$ olması durumunda, (3.49) denklemi sağlanır. Bu durumda, (3.17) daki ikinci denklemden ve (3.18) deki ilk denklemden

$$(a^2xz'-b^2zx')^2=a^2b^2(zx'-xz')^2 \qquad \textbf{(3.50)}$$

eşitliği elde edilir. (3.50) eşitliğinin yeniden düzenlenmesiyle $c_0=0$ için (3.45) denklemine ulaşılır.

Şimdi $(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2\neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, (3.49) denklemi

$$\frac{\left[(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2\right]'}{(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2}+2\frac{(a^2x^2+b^2z^2)'}{a^2x^2+b^2z^2}=0 \qquad \textbf{(3.51)}$$

şeklinde yazılır ve integrali alınırsa, $c_0\neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$\left[(h_{22}^3)^2-(h_{12}^4)^2\right](a^2x^2+b^2z^2)^2=c_0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (3.17) daki ikinci denklem ve (3.18)'deki ilk denklem kullanılırsa $(a^2xz'-b^2x'z)^2-a^2b^2(x'z-z'x)^2=c_0$ bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, (3.45) eşitliğine ulaşılır. Böylece gerek koşulun ispatı tamamlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı için M yüzeyinin yoğun bir $\mathscr{M}$ alt kümesi üzerinde $x'z'\neq 0$ eşitsizliğinin ve M yüzeyi üzerinde ise bazı c_0 sabitleri için (3.45) denkleminin sağlandığı varsayılsın. (3.5) ve (3.45) denklemleri,

$$\begin{pmatrix} a^2x^2 & -b^2z^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z'^2 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi olarak yazılır ve bu denklem sistemi çözülürse, $\tilde{c}_0=\frac{c_0}{a^2-b^2}$ olmak üzere,

$$x'^2=\frac{a^2x^2-\tilde{c}_0}{a^2x^2+b^2z^2} \quad \text{ve} \quad z'^2=\frac{b^2z^2+\tilde{c}_0}{a^2x^2+b^2z^2}, \qquad \textbf{(3.52)}$$

bulunur. Bu denklemlerin s değişkenine göre türevleri alınırsa, sırasıyla,

$$x'x''=\frac{a^2xx'}{a^2x^2+b^2z^2}-\frac{x'^2(a^2xx'+b^2zz')}{a^2x^2+b^2z^2},$$
$$z'z''=\frac{b^2zz'}{a^2x^2+b^2z^2}-\frac{z'^2(a^2xx'+b^2zz')}{a^2x^2+b^2z^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler sırasıyla $-z'^2$ ve x'^2 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$x'z'\left(x'z''-z'x''+\frac{a^2xz'-b^2x'z}{a^2x^2+b^2z^2}\right)=0$$

bulunur. $x'z'\neq 0$ olmasından dolayı, $\mathscr{M}$ kümesi üzerinde (3.44) denklemi sağlanır. Dolayısıyla, $\mathscr{M}$ üzerinde $H\equiv 0$ olur. Ayrıca, ortalama eğrilik fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı $H\equiv 0$ eşitliği, bütün M yüzeyi üzerinde sağlanır; yani, M yüzeyi minimaldir. □

Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.7. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere, yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. $a^2\neq b^2$ durumunda, M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin koordinat fonksiyonlarının*

$$\left(\sqrt{b^2z^2+c_0}+bz\right)^a=d_0\left(\sqrt{a^2x^2-c_0}+ax\right)^{\varepsilon b} \tag{3.53}$$

ve

$$z=d_0x^{\varepsilon b/a},\quad x>0 \tag{3.54}$$

ile verilen iki regüler eğriden biri olmasıdır. Burada, c_0 ve d_0 bazı sıfırdan farklı sabitlerdir.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında $a^2\neq b^2$ koşulunu sağlayan a ve b dönme oranları için yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. Ayrıca, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin minimal olduğu varsayılsın. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.6'den dolayı M yüzeyinin β profil eğrisinin $x=x(s)$ ve $z=z(s)$ koordinat fonksiyonları (3.45) denklemini bir c_0 sabiti için sağlar. Eğer $c_0=0$ ise (3.45) denklemi $\varepsilon=\pm 1$ olmak üzere $axdz=\varepsilon bzdx$ halini alır. Bu denklemin çözülmesiyle (3.54) ile verilen regüler eğri elde edilir.

Şimdi $c_0\neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, (3.5) ve (3.45) denklemleri kullanılırsa, (3.52) denklemi elde edilir. Bu denklemden $\tilde{c}_0=\frac{c_0}{a^2-b^2}$ olmak üzere,

$$\sqrt{a^2x^2-\tilde{c}_0}dz=\varepsilon\sqrt{b^2z^2+\tilde{c}_0}dx \tag{3.55}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle (3.55) denklemini ile verilen regüler eğri elde edilir.

Yeter koşulun ispatı doğrudan hesapla elde edilir. □

Teorem 3.5 ve Teorem 3.7 ile $\mathbb{E}^4$ uzayının (2.59) ile verilen genel dönel yüzeylerinden minimal olanları ile ilgili tam sınıflandırma yapılmıştır. Aşağıdaki teoremleikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olan minimal genel dönel yüzeyler belirlenecektir.

Teorem 3.8. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere, yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. Bu durumda,*

1) $a^2 = b^2$ olması durumunda, profil eğrisi (3.43) ile verilen M minimal dönel yüzeyi has ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.

2) $a^2 \neq b^2$ olması durumunda ise M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul, profil eğrisinin (3.54) ile verilen genel dönel yüzey olmasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.59) ile verilen, düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. Ayrıca, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, yüzey üzerinde tanımlı ve (3.8) denklemleriyle verilen ortonormal çatı alanı olsun. Bu durumda, şekil operatörleri (3.21) denklemleriyle verilen yapıdadır ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (3.17) ve (3.18) denklemleriyle verilmiştir.

Şimdi, teoremin ilk kısmının ispatı için, M yüzeyinin minimal olduğu ve dönme oranlarının $a^2 = b^2$ koşulunu sağladığı varsayılsın. Yüzeyin minimal olmasından dolayı $h_{11}^3 = -h_{22}^3$ olur. Diğer taraftan, $a^2 = b^2$ olmasından dolayı (3.17) daki ikinci denklemden $h_{22}^3 = \dfrac{xz' - zx'}{x^2 + z^2}$ ve (3.18)'deki ilk denklemden ise, $\varepsilon = a/b = \pm 1$ olmak üzere, $h_{12}^4 = \dfrac{-\varepsilon(xz' - zx')}{x^2 + z^2}$ bulunur ve $(h_{22}^3)^2 = (h_{12}^4)^2$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, M yüzeyinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanına karşı gelen şekil operatörleri, (2.49) ile verilen yapıda bulunur. Teorem 2.7'den dolayı, M yüzeyi minimal ise ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. [16] numaralı makalede Teorem 2.7'nin ispatı incelendiğinde, M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin (2.47) denklemini $f = 8\kappa^2$ için sağladığı görülür. (3.43) ile verilen hiperbolün κ eğriliği sabit olmadığı için, M yüzeyi has ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Böylece teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için, M yüzeyinin minimal olduğu ve dönme oranlarının $a^2 \neq b^2$ koşulunu sağladığı varsayılsın. Bu durumda, M yüzeyinin şekil operatörlerinin (2.49) ile verilen formda olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere,

$$h_{12}^4 = \varepsilon h_{22}^3 \tag{3.56}$$

denkleminin sağlanmasıdır. (3.17) daki ikinci ve (3.18)'deki ilk denklemin (3.56) denkleminde kullanılmasıyla,

$$a^2 b^2 (x'z - xz')^2 = (a^2 xz' - b^2 x'z)^2 \tag{3.57}$$

bulunur. (3.57) eşitliğinin yeniden düzenlenmesiyle

$$(a^2 - b^2)(a^2 x^2 z'^2 - b^2 x'^2 z^2) = 0 \tag{3.58}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla, M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul (3.45) denkleminin $c_0 = 0$ için sağlanmasıdır. Bu denklemin genel çözümü ise (3.54) ile verilmiştir. Böylece teoremin ikinci kısmı da ispatlanmış olur. □

3.3.2 Normal demeti düz genel dönel yüzeyler

Bu alt bölümde $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında normal demeti düz, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip genel dönel yüzeylerin sınıflandırması yapılacaktır. Bu amaçla ilk olarak, daha ileride kullanmak amacıyla aşağıdaki yardımcı teorem verilir.

Yardımcı Teorem 3.9. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen bir yarı-ombilik genel dönel yüzey ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ise bu yüzey üzerinde tanımlı, (3.8) denklemleriyle verilen bir ortonormal çatı alanı olsun. Bu durumda M yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri

$$\Delta \nu = 2\left(\kappa^2 + (h_{12}^4)^2\right)\nu + 2\kappa\omega_{43}(e_2)e_2 \wedge e_3 + 2h_{12}^4 \omega_{43}(e_2) e_1 \wedge e_4 \tag{3.59}$$

denklemini sağlar.

İspat. Yardımcı teoremin hipotez kısmında ifade edilen çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri, (3.17) - (3.20) denklemleriyle verilmiştir.

Şimdi, M yüzeyinin yarı-ombilik olduğu varsayılsın. Bu durumda, $h_{22}^3 = h_{11}^3 = \kappa$ eşitliği sağlanır. Doğrudan hesapla,

$$\|h\|^2 = 2\kappa^2 + 2(h_{12}^4)^2, \qquad \mathbf{(3.60)}$$

$$\nabla \mathrm{tr} A_3 = 2e_1(h_{22}^3)e_1, \qquad \mathbf{(3.61)}$$

$$\nabla \mathrm{tr} A_4 = 0, \qquad \mathbf{(3.62)}$$

$$R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = 0 \qquad \mathbf{(3.63)}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.25) Codazzi denklemi ve (3.61) denkleminden

$$\nabla \mathrm{tr} A_3 = 2h_{12}^4 \omega_{43}(e_2)e_1 \qquad \mathbf{(3.64)}$$

elde edilir. (3.60), (3.62) - (3.64) denklemleri, (2.48) denkleminde yerine konulursa (3.59) eşitliğine ulaşılır. □

Önerme 3.10. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey ve $a^2 \neq b^2$ olsun. Normal demetinin düz olması durumunda M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında $a^2 \neq b^2$ olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen ve düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey olsun. M yüzeyinin (3.8) denklemleriyle verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri, (3.17) - (3.20) denklemleriyle, yüzeyin normal eğrilik tansörü R^D ise (3.24) ile verilmiştir.

Şimdi M yüzeyinin normal demetinin düz olduğu, yani, M üzerinde $R^D \equiv 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, Teorem 3.1'den, M yüzeyinin minimal olmadığı görülür. Ayrıca, (3.24) denkleminden, $h_{12}^4 = 0$ veya $h_{11}^3 = h_{22}^3$ bulunur.

Durum 1. $h_{11}^3 = h_{22}^3$. Bu durumda, M dönel yüzeyi yarı-ombilik olur ve yüzeyin Gauss tasviri ν, Yardımcı Teorem 3.9'den dolayı, (3.59) denklemini sağlar.

Şimdi, M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda bazı f fonksiyonları ve bazı $C \neq 0$ sabit vektörleri için (2.47) denklemi sağlanır. (2.47) ve (3.59) denkleminden,

$$2\left(\kappa^2 + (h_{12}^4)^2\right)\nu + 2\kappa\omega_{43}(e_2)e_2 \wedge e_3 + 2h_{12}^4\omega_{43}(e_2)e_1 \wedge e_4 = f(\nu + C) \qquad \textbf{(3.65)}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$2\left(\kappa^2 + (h_{12}^4)^2\right) = f(1 + C_{34}), \qquad \textbf{(3.66)}$$

$$2\kappa\omega_{43}(e_2) = fC_{23}, \qquad \textbf{(3.67)}$$

$$2h_{12}^4\omega_{43}(e_2) = fC_{14}, \qquad \textbf{(3.68)}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{24} = 0 \qquad \textbf{(3.69)}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla C vektörü

$$C = C_{14}e_1 \wedge e_4 + C_{23}e_2 \wedge e_3 + C_{34}e_3 \wedge e_4 \qquad \textbf{(3.70)}$$

olur. Ayrıca, C vektörünün sabit olmasından dolayı, Yardımcı Teorem 2.3'de verilen (2.46) denklemleri $i = 1,2$ için sağlanır. $i = 1$ için (2.46a) denkleminden

$$-C_{14}h_{12}^4 + C_{23}\kappa = 0 \qquad \textbf{(3.71)}$$

elde edilir. (3.67) ve (3.68) denklemlerinin iki tarafı sırasıyla κ ve $-h_{12}^4$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$2\omega_{43}(e_2)\left[\kappa^2 - (h_{12}^4)^2\right] = f(C_{23}\kappa - C_{14}h_{12}^4) \qquad \textbf{(3.72)}$$

bulunur. (3.71) ve (3.72) denklemlerinden

$$\omega_{43}(e_2)\left[\kappa^2 - (h_{12}^4)^2\right] = 0 \qquad \textbf{(3.73)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\omega_{43}(e_2) = 0$ veya $\kappa^2 = (h_{12}^4)^2$ olmalıdır. $\omega_{43}(e_2) = 0$ olması durumunda (3.20) denkleminden, $xx' + zz' = 0$ bulunur, H ortalama eğrilik vektörü paralel olur, bu da M yüzeyinin yer vektörü (3.33) ile verilen yüzeyin açık parçası olduğunu gösterir. Fakat bu yüzey daha önce gösterildiği gibi birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir, yani bu bir çelişkidir. $\kappa^2 = (h_{12}^4)^2$ olması durumunda ise $h_{11}^3 = h_{22}^3$ denkleminden $\varepsilon \in \{-1,+1\}$ olmak üzere

$$h_{22}^3 = \varepsilon h_{12}^4 \qquad \textbf{(3.74)}$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği bulunur. (3.17), (3.18) ve (3.74) denklemlerinden

$$a^2xz' - b^2x'z = \varepsilon ab(x'z - xz')$$

elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle $(a+\varepsilon b)(axz' - \varepsilon bx'z) = 0$ bulunur. Bu denklem ve $a^2 \neq b^2$ eşitsizliğinden $axz' - bx'z = 0$ bulunur. Dolayısıyla, (3.45) denklemi $c_0 = 0$ için sağlanır. Yardımcı Teorem 3.6'den dolayı M yüzeyi yine minimal olur ve düzlemsel olmayan minimal bir yüzey yarı-ombilik olmadığından, bu durum bir çelişkidir.

Durum 2. $h^4_{12} = 0$ olması durumunda ise (3.18) denkleminden $xz' - x'z = 0$ bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyinin β profil eğrisi, orijinden geçen bir doğrunun açık bir parçasıdır, yani, β profil eğrisinin koordinat fonksiyonları, $p_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$x(s) = \frac{s}{\sqrt{1+p_0^2}}, \quad z(s) = \frac{p_0 s}{\sqrt{1+p_0^2}}, \quad s > 0 \tag{3.75}$$

şeklindedir. (3.75) eşitlikleri, (3.17) - (3.20) denklemlerinde yerine yazılırsa, $a_1 = \dfrac{p_0(a^2-b^2)}{a^2+p_0^2b^2}$ ve $a_2 = \dfrac{ab(1+p_0^2)}{a^2+p_0^2b^2}$ olmak üzere

$$h^3_{11} = 0, \qquad h^3_{22} = \frac{a_1}{s}, \quad h^3_{12} = 0, \tag{3.76}$$

$$h^4_{ij} = 0, \qquad i,j = 1,2, \tag{3.77}$$

$$\omega_{12}(e_1) = 0, \qquad \omega_{12}(e_2) = \frac{1}{s}, \tag{3.78}$$

$$\omega_{43}(e_1) = 0, \qquad \omega_{43}(e_2) = \frac{a_2}{s} \tag{3.79}$$

bulunur. Bu eşitlikler (2.48) denkleminde yerine yazılırsa $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasvirinin

$$\Delta\nu = \frac{a_1^2}{s^2}\nu + \frac{a_1a_2}{s^2}e_2\wedge e_3 - \frac{a_1}{s^2}e_1\wedge e_4 \tag{3.80}$$

denklemini sağladığı görülür. Şimdi, M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda bazı f fonksiyonları ve bazı $C \neq 0$ sabit vektörleri için (2.47) denklemi sağlanır. (2.47) ve (3.80) denklemlerinden

$$\frac{a_1^2}{s^2} = f(1+C_{34}), \tag{3.81}$$

$$\frac{a_1a_2}{s^2} = fC_{23}, \tag{3.82}$$

$$-\frac{a_1}{s^2} = fC_{14}, \tag{3.83}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{24} = 0 \tag{3.84}$$

bulunur. Ayrıca, C vektörünün sabit olmasından Yardımcı Teorem 2.3'de verilen (2.46) denklemleri $i = 1,2$ için sağlanır. (2.46b) denkleminde (3.81) - (3.84) eşitlikleri kullanılır ve $i = 2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= e_i(C_{13}) + C_{12}h_{i2}^3 - C_{14}\omega_{34}(e_i) + C_{23}\omega_{21}(e_i) + C_{34}h_{i1}^4 \\ &= C_{14}\omega_{43}(e_2) + C_{23}\omega_{21}(e_2) \\ &= \frac{1}{s}(a_2C_{14} - C_{23}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemden $C_{23} = a_2C_{14}$ elde edilir. Bu eşitlik, (3.82) denkleminde yerine yazılırsa, $a_2 \neq 0$ olmasından dolayı $\frac{a_1}{s^2} = fC_{14}$ bulunur. Bu denklemin, (3.83) denklemi ile aynı anda sağlanması, $a_1 \neq 0$ olmasından dolayı mümkün değildir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. □

Bu önermenin iki sonucu aşağıda elde edilmiştir.

Sonuç 3.11. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen ve düzlemsel olmayan yarı-ombilik bir genel dönel yüzey ve $a^2 \neq b^2$ olsun. Bu durumda, M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

Sonuç 3.12. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen bir genel dönel yüzey ve $a^2 \neq b^2$ olsun. Eğer yüzeyin profil eğrisi bir $c \neq 0$ sabiti için $z = cx,\ x > 0$ doğrusunun açık bir parçası ise M yüzeyi bir dönel konidir. Bu durumda, M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

Bu bölümün geri kalan kısmında dönme oranları $a^2 = b^2$ eşitliğini sağlayan, normal demeti düz genel dönel yüzeyler ele alınacaktır. İlk olarak, aşağıdaki teoremle bu tür yüzeylerin sınıflandırması yapılacaktır.

Teorem 3.13. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen ve düzlemsel olmayan bir genel dönel yüzey ve $a^2 = b^2$ olsun. M yüzeyinin normal demetinin düz olması için gerek ve yeter koşul, $\beta = (x,z)$ profil eğrisinin bir $z = c_0x$ doğrusunun, $x^2 + z^2 = r_0^2$ çemberinin veya

$$\tan^{-1}\frac{x}{z} = a_0 \ln(x^2 + z^2) + b_0 \tag{3.85}$$

ile verilen bir eğrinin açık bir parçası olmasıdır. Burada $a_0 \neq 0,\ b_0,\ c_0 \neq 0$ ve r_0 sabitlerdir. Ayrıca, M genel dönel yüzeyinin profil eğrisinin bu eğrilerden biri olması durumunda, M genel dönel yüzeyi yarı-ombilik ve düz olur.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında $a^2 = b^2$ olmak üzere, yer vektörü (2.59) ile verilen, normal demeti düz bir genel dönel yüzey olsun. M yüzeyinin (3.8) denklemleriyle verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanına karşı gelen konneksiyon formları ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (3.17) - (3.20) denklemleriyle, yüzeyin normal eğrilik tansörü R^D ise (3.24) ile verilmiştir.

M yüzeyinin normal demetinin düz olmasından dolayı (3.24) denkleminden $h^4_{12}(h^3_{11} - h^3_{22}) = 0$ bulunur, yani, $h^4_{12} = 0$ veya $h^3_{11} = h^3_{22}$ olur. $h^4_{12} = 0$ olması durumunda (3.18) denkleminden $z = p_0 x$ elde edilir. Açıklama 3.1 göz önüne alındığında M yüzeyinin bir düzlem parçası olduğu görülür ki bu durumda M yüzeyinin yarı-ombilik ve düz olduğu açıktır.

Şimdi, $h^3_{11} = h^3_{22}$ eşitliğinin sağlandığı ve $h^4_{12} \neq 0$ olduğu varsayılsın. $h^3_{11} = h^3_{22}$ ve (3.17) denkleminden

$$x'z'' - z'x'' = \frac{xz' - x'z}{x^2 + z^2} \tag{3.86}$$

bulunur. Açıktır ki $x^2 + z^2 = r_0^2$, (3.86) denkleminin bir çözümüdür ve bu durumda $a^2 = b^2$ olmasından dolayı M bir Clifford tor yüzeyidir. Clifford tor yüzeyinin yarı-ombilik ve düz olduğu iyi bilinir.

Diğer taraftan, (3.86) denklemi

$$\left(\tan^{-1}\frac{z'}{x'}\right)' = \left(\tan^{-1}\frac{z}{x}\right)'$$

şeklinde yazılır ve integre edilirse bazı a_0 sabitleri için

$$\frac{\frac{z}{x} - \frac{z'}{x'}}{1 + \frac{zz'}{xx'}} = 2a_0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{x'z - xz'}{x^2 + z^2} = 2a_0\frac{xx' + zz'}{x^2 + z^2} \tag{3.87}$$

denklemi elde edilir. $a_0 = 0$ olması durumunda, bu eşitlikten $h^4_{12} = 0$ bulunur ki bu durum mümkün değildir. Dolayısıyla, $a_0 \neq 0$ olmalıdır. (3.87) denkleminin integre edilmesiyle (3.85) denklemine ulaşılır. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı için M genel dönel yüzeyinin $\beta(s) = (x(s), z(s))$ profil eğrisinin koordinat fonksiyonlarının bazı $a_0 \neq 0$ ve b_0 sabitleri için (3.85) denklemini sağladığı varsayılsın. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınır ve (3.5) denklemi kullanılırsa,

$$x'z - xz' = 2a_0(xx' + zz') \qquad \textbf{(3.88)}$$

denklemine ulaşılır. Bu eşitlik

$$\frac{x'z - xz'}{xx' + zz'} = 2a_0$$

şeklinde yazılıp her iki tarafının türevi alınırsa,

$$(x''z - xz'')(xx' + zz') - (x'z - xz')(xx'' + zz'' + 1) = 0 \qquad \textbf{(3.89)}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$z'x''(x^2 + z^2) - x'z''(x^2 + z^2) = zx' - xz' \qquad \textbf{(3.90)}$$

şeklinde yazılırsa, gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla $h_{11}^3 = h_{22}^3$ denklemine ulaşılır ki bu da M yüzeyinin yarı-ombilik olduğunu ve dolayısıyla normal demetinin düz olduğunu gösterir. □

Açıklama 3.2. (3.85) ile verilen β eğrisi, μ bir sabit olmak üzere $x = e^{\mu\theta}\cos\theta$ ve $z = e^{\mu\theta}\sin\theta$ şeklinde parametrelenebilen bir logaritmik spiraldir. Bu eğrinin ürettiği genel dönel yüzeyin yer vektörü

$$f(\theta, t) = \left(e^{\mu\theta}\cos\theta\cos t, e^{\mu\theta}\cos\theta\sin t, e^{\mu\theta}\sin\theta\cos t, e^{\mu\theta}\sin\theta\sin t\right) \qquad \textbf{(3.91)}$$

şeklinde olur.

Önerme 3.14. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları a ve b olmak üzere yer vektörü (2.59) ile verilen, normal demeti düz bir genel dönel yüzey olsun. $a^2 = b^2$ olması durumunda, M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında $a^2 = b^2$ olmak üzere, yer vektörü (2.59) ile verilen, normal demeti düz bir genel dönel yüzey olsun. Bu durumda, Teorem (3.13)'den dolayı, M yüzeyinin β profil eğrisi, bir $z = c_0x$ doğrusunun, $x^2 + z^2 = r_0^2$ çemberinin veya (3.85) ile verilen bir eğrinin açık bir parçası olur. Burada $a_0 \neq 0,\ b_0,\ c_0 \neq 0$ ve r_0 sabitlerdir. Şimdi M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın.

Eğer β eğrisi bir $x^2 + z^2 = r_0^2$ çemberinin açık bir parçası ise, M yüzeyi bir Clifford tor yüzeyinin açık bir parçası olur. Bu durumda, M yüzeyi, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olur ki bu durum bir çelişkidir.

Şimdi M yüzeyinin profil eğrisinin (3.85) denklemiyle verilen eğrinin açık bir parçası olduğu varsayılsın. (3.85) denkleminin iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{x'z - xz'}{x^2 + z^2} = 2a_0 \frac{xx' + zz'}{x^2 + z^2}$$

bulunur. Bu eşitlik, (3.17) ve (3.20) denklemlerinden, $\varepsilon = a/b$ olmak üzere, $-h_{22}^3 = 2a_0 \varepsilon \omega_{43}(e_2)$ bulunur. $h_{11}^3 = \kappa = h_{22}^3$ olmasından dolayı,

$$\omega_{43}(e_2) = 2a_1\kappa, \quad a_1 = -\frac{a}{4ba_0} \neq 0 \tag{3.92}$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan, $a^2 = b^2$ olmasından dolayı (3.17) - (3.20) denklemleri göz önüne alındığında

$$h_{22}^3 = -\varepsilon h_{12}^4, \tag{3.93}$$

$$\omega_{12}(e_2) = \varepsilon \omega_{43}(e_2) \tag{3.94}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.17), (3.92) ve (3.93) denklemleri, (3.59) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Delta \nu = 4\kappa^2 \nu + 4a_1\kappa^2 e_2 \wedge e_3 - 4\varepsilon a_1 \kappa^2 e_1 \wedge e_4 \tag{3.95}$$

denklemi bulunur. M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu için sıfırdan farklı bazı f fonksiyonları ve bazı $C \neq 0$ sabit vektörleri için (2.47) denklemi sağlanır. Dolayısıyla,

$$4\kappa^2 \nu + 4a_1\kappa^2 e_2 \wedge e_3 - 4\varepsilon a_1 \kappa^2 e_1 \wedge e_4 = f(\nu + C)$$

eşitliğinden

$$4\kappa^2 = f(1 + C_{34}), \tag{3.96}$$

$$4a_1\kappa^2 = fC_{23}, \tag{3.97}$$

$$-4\varepsilon a_1\kappa^2 = fC_{14}, \tag{3.98}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{24} = 0 \tag{3.99}$$

elde edilir. Böylece C vektörü, (3.70) denklemindeki formda olur. C vektörünün sabit olması Yardımcı Teorem 2.3'den dolayı (2.46) denklemlerinin sağlanmasını gerektirir. Ayrıca, (3.96) - (3.98) denklemlerinden

$$C_{23} = a_1(1+C_{34}), \quad (\mathbf{3.100})$$
$$C_{14} = -\varepsilon a_1(1+C_{34}) \quad (\mathbf{3.101})$$

elde edilir. Bu eşitlikler ile (3.17), (3.20), (3.93) ve (3.99) denklemleri; $i=2$ için (2.46b) ve $i=1$ için (2.46c) denklemlerinde yerine yazılırsa, sırasıyla

$$\varepsilon a_1(1+C_{34})\omega_{34}(e_2)+a_1(1+C_{34})\omega_{21}(e_2)+C_{34}h^4_{12} = 0, \quad (\mathbf{3.102})$$
$$\varepsilon a_1 e_1(C_{34})+C_{34}\kappa = 0 \quad (\mathbf{3.103})$$

bulunur. (3.93) ve (3.94) denklemleri (3.102) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$a_1(1+C_{34})\omega_{43}(e_2)+a_1(1+C_{34})\omega_{43}(e_2)+C_{34}h^3_{22} = 0 \quad (\mathbf{3.104})$$

olur. Bu eşitlik, $h^3_{11}=h^3_{22}$ ve (3.92) denklemlerinden

$$2a_1^2(1+C_{34})\kappa+2a_1^2(1+C_{34})\kappa+C_{34}\kappa = 0 \quad (\mathbf{3.105})$$

elde edilir. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$\kappa\left[4a_1^2+(4a_1^2+1)C_{34}\right]=0$$

olur ve $C_{34}=-\frac{4a_1^2}{4a_1^2+1}$ bulunur, yani C_{34} sıfırdan farklı bir sabittir. (3.103) denkleminden $\kappa=0$ çıkar ki bu durum bir çelişkidir.

Sonuç olarak, M yüzeyinin profil eğrisi, bir $z=p_0x$ doğrusunun açık bir parçası olur. Açıklama 3.1'den dolayı M yüzeyi bir düzlemin açık bir parçası olur. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı açıktır. □

Önerme 3.10 ve 3.14 kullanılarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.15. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.59) ile verilen, normal demeti düz bir genel dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.*

4. BASİT DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının basit dönel yüzeyleri incelenmiştir. İlk olarak, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin sınıflandırması yapılmıştır. Daha sonra, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin bir karakterizasyonu elde edilmiştir. Ayrıca, sabit Gauss eğriliğine ve ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin sınıflandırılması verilmiştir.

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının profil eğrisi $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s), 0)$ olan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş, bir basit dönel yüzeyi olsun. Bu bölümde "$'$" ile β profil eğrisinin s parametresine göre adi türevi gösterilecektir. Bununla birlikte, $\beta(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}^4$ uzayı içinde kaldığından, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayının $(x(s), y(s), z(s))$ eğrisi yine $\beta(s)$ ile gösterilecektir. Yani, $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$ olarak kullanılacaktır. Bu eğrinin eğriliği ve burulması ise, sırasıyla, $k = k(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ ile gösterilecektir.

Doğrudan hesapla M yüzeyinin koordinat vektör alanları

$$F_s = (x', y', z' \cos t, z' \sin t), \tag{4.1}$$

$$F_t = (0, 0, -z \sin t, z \cos t) \tag{4.2}$$

bulunur ve M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş metrik,

$$g = \begin{pmatrix} x'^2 + y'^2 + z'^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, F tasvirinin bir daldırma olması için gerek ve yeter koşul, β eğrisinin regüler olması ve z koordinat fonksiyonunun hiç bir noktada sıfır olmamasıdır. Genellik bozulmaksızın, β profil eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendiği, yani

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \tag{4.4}$$

denkleminin sağlandığı ve $z > 0$ olduğu varsayılacaktır.

Açıklama 4.1. 3-boyutlu Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler, [11] numaralı makalede çalışılmıştır. Bu çalışmada tümüyle $\mathbb{E}^4$ uzayında kalan basit dönel yüzeyler ele alınacaktır. $\beta(s)$ eğrisinin bir doğrunun açık bir parçası olması durumunda M basit dönel yüzeyi, $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperdüzlemi içinde kalır, yani $M \subset \mathbb{E}^3$ olur. Bundan sonraki hesaplamalarda β eğrisinin k eğriliğinin M yüzeyi üzerindeki her noktada sıfırdan farklı olduğu kabul edilecektir.

4.1 Konneksiyon Formları ve Şekil Operatörleri

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Bu durumda, M yüzeyi üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \qquad e_2 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.5}$$

$$e_3 = \frac{1}{k}(x'', y'', z''\cos t, z''\sin t), \qquad e_4 = \frac{1}{k}(\rho_1, \rho_2, \rho_3\cos t, \rho_3\sin t) \tag{4.6}$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir. Burada, ρ_1, ρ_2 ve ρ_3

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \beta' \times \beta'' = (y'z'' - y''z', x''z' - x'z'', x'y'' - x''y') \tag{4.7}$$

eşitliği ile tanımlanan düzgün fonksiyonlardır. Doğrudan hesapla Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= k e_3, && \text{(4.8a)}\\
\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= 0, && \text{(4.8b)}\\
\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= -\frac{z'}{z}e_1 - \frac{z''}{kz}e_3 - \frac{\rho_3}{kz}e_4, && \text{(4.8c)}\\
\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 &= -k e_1 + \tau e_4, && \text{(4.8d)}\\
\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 &= -\tau e_3, && \text{(4.8e)}\\
\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 &= \frac{z''}{kz}e_2, && \text{(4.8f)}\\
\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 &= \frac{\rho_3}{kz}e_2 && \text{(4.8g)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden, M yüzeyinin konneksiyon formlarının ve ikinci esas formunun bileşenleri

$$h_{11}^3 = k,\ h_{12}^3 = 0,\ h_{22}^3 = -\frac{z''}{kz}, \tag{\textbf{4.9}a}$$

$$h_{11}^4 = h_{12}^4 = 0,\ h_{22}^4 = -\frac{\rho_3}{kz}, \tag{\textbf{4.9}b}$$

$$\omega_{21}(e_1) = 0,\ \omega_{21}(e_2) = -\frac{z'}{z}, \tag{\textbf{4.9}c}$$

$$\omega_{34}(e_1) = \tau,\ \omega_{34}(e_2) = 0 \tag{\textbf{4.9}d}$$

bulunur. Dolayısıyla, M dönel yüzeyinin şekil operatörleri $A_3 = A_{e_3}$ ve $A_4 = A_{e_4}$ olmak üzere

$$A_3 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{z''}{kz} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_3}{kz} \end{pmatrix} \tag{\textbf{4.10}}$$

olur ve Ricci denkleminden $R^D(e_1,e_2;e_3,e_4) \equiv 0$ elde edilir. Dolayısıyla, aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir.

Yardımcı Teorem 4.1. $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen basit dönel yüzeyin normal demeti düzdür.

(4.10) şekil operatörleri göz önüne alındığında, yer vektörü (2.58) ile verilen bir M basit dönel yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün

$$H = \frac{1}{2}\left[(h_{11}^3 + h_{22}^3)e_3 + h_{22}^4 e_4\right], \tag{\textbf{4.11}}$$

Gauss eğriliğinin ise

$$K = -\frac{z''}{z} \tag{\textbf{4.12}}$$

olduğu görülür. Ayrıca $M \subset \mathbb{E}^4$ yüzeyi için Codazzi ve Gauss denklemlerinden

$$(h_{22}^3)' = \omega_{21}(e_2)(h_{22}^3 - k) + \tau h_{22}^4, \tag{\textbf{4.13}}$$

$$(h_{22}^4)' = h_{22}^4\omega_{21}(e_2) - \tau h_{22}^3, \tag{\textbf{4.14}}$$

$$(\omega_{21}(e_2))' = (\omega_{21}(e_2))^2 + kh_{22}^3 \tag{\textbf{4.15}}$$

elde edilir.

Açıklama 4.2. $\beta(s) = (x(s),y(s),z(s))$ profil eğrisinin $x(s)$ veya $y(s)$ koordinat fonksiyonları arasında bazı a_0 ve b_0 sabitleri için $y(s) = a_0x(s) + b_0$ şeklinde bir ilişki olduğu veya buna denk olarak $\rho_3 = x'y'' - x''y' = 0$ eşitliğinin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda β düzlemsel bir eğri olduğundan burulması $\tau \equiv 0$ olur. Bu eşitlikler (4.8e) ve (4.8g) denklemlerinde yerine yazılırsa, $\widetilde{\nabla} e_4 \equiv 0$ elde edilir, yani, e_4 vektörü sabittir. Dolayısıyla, M dönel yüzeyi $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir hiperdüzleminde kalır.

Teorem 4.2. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul bir düzlemin veya $\mathbb{E}^4$ uzayının bir hiperdüzleminde kalan bir katenoidin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, yüzey üzerinde tanımlı (4.5) ve (4.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle, yüzeyin H ortalama eğrilik vektörü ise (4.11) denklemiyle verilmiştir.

Şimdi gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin minimal olduğu, yani, $H \equiv 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (4.9b) ve (4.11) denklemlerinden $\rho_3 = x'y'' - x''y' = 0$ bulunur. Açıklama 4.2 göz önüne alındığında, M yüzeyinin $\mathbb{E}^4$ uzayının bir $\Pi \equiv \mathbb{E}^3$ hiperdüzleminde kaldığı görülür. $\mathbb{E}^3$ uzayının minimal dönel yüzeylerinin düzlem ve katenoid olduğu bilinen bir sonuçtur. Dolayısıyla, M yüzeyi bir düzlemin veya Π hiperdüzleminde kalan bir katenoidin açık bir parçasıdır.

Yeter koşulun ispatı açıktır. □

Açıklama 4.1 ve Teorem 4.2'den dolayı, çalışmanın bundan sonraki bölümünde minimal olmayan basit dönel yüzeyler ele alınacaktır.

4.2 Birinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Basit Dönel Yüzeyler

Bu bölümde, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeylerin tam sınıflandırması verilecektir.

M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzey olsun. Bu durumda, (4.11) denklemi göz önüne alındığında,

$$2D_{e_i}H = e_i(h^3_{11} + h^3_{22})e_3 + e_i(h^4_{22}) + (h^3_{11} + h^3_{22})D_{e_i}e_3 + h^4_{22}D_{e_i}e_4 \qquad \textbf{(4.16)}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafının yeniden düzenlenmesiyle

$$2D_{e_i}H = \Big(e_i(h^3_{11}) + e_i(h^3_{22}) - h^4_{22}\omega^4_3(e_i)\Big)e_3 + \Big(e_i(h^4_{22}) + (h^3_{11} + h^3_{22})\omega^4_3(e_i)\Big)e_4 \quad \textbf{(4.17)}$$

bulunur. Dolayısıyla, H ortalama eğrilik vektörünün paralel olması için gerek ve yeter koşul,

$$e_i(h^3_{11}) + e_i(h^3_{22}) - h^4_{22}\omega^4_3(e_i) = 0, \quad \textbf{(4.18a)}$$

$$e_i(h^4_{22}) + (h^3_{11} + h^3_{22})\omega^4_3(e_i) = 0, \quad i = 1,2 \quad \textbf{(4.18b)}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bununla birlikte, M yüzeyinin ikinci esas formunun (4.9a) ve (4.9b) ile verilen bileşenlerinin tümü ve profil eğrisinin k eğriliği sadece s yay uzunluğu parametresine bağlıdır. Bu durumdan ve (4.9d) denklemlerinden dolayı (4.18) denklemleri $i = 2$ için özdeş olarak sağlanır. Bununla birlikte, (4.18) denklemlerinde $i = 1$ yazılır, (4.13) ve (4.14) ile verilen Codazzi denklemleri kullanılırsa, M yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşulun

$$k' + \big(h^3_{22} - k\big)\omega_{21}(e_2) = 0, \quad \textbf{(4.19a)}$$

$$h^4_{22}\omega_{21}(e_2) + k\tau = 0 \quad \textbf{(4.19b)}$$

denklemlerinin sağlanması olduğu bulunur. Bu denklem takımı kullanılarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan ve profil eğrisi düzlemsel olan bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması için gerek ve yeter koşul bir $S^1(a) \times S^1(b)$ tor yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Burada a ve b bazı pozitif sabitlerdir.

İspat. M, (2.58) denklemiyle verilen, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, β profil eğrisi düzlemsel olan bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, yüzey üzerinde tanımlı (4.5) ve (4.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. Diğer taraftan, β eğrisinin düzlemsel olmasından dolayı $\tau \equiv 0$ olur.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu varsayılsın. Bu durumda, (4.19) denklemleri sağlanır. $\tau \equiv 0$ olmasından dolayı (4.19b) denkleminden $h^4_{22}\omega_{21}(e_2) = 0$ bulunur. Bu eşitlik, (4.9b) ve (4.9c) denklemlerinden $x'y'' - x''y' = 0$ veya $z' = 0$ bulunur. M yüzeyinin tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalmasından dolayı, Açıklama 4.2'den $x'y'' - x''y' \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $z' = 0$, yani, b pozitif bir sabit olmak üzere $z = b$ olur. Ayrıca, $z' = 0$ olmasından dolayı, (4.19a) denkleminden $k'(s) = 0$, yani, $k(s) =$ sabit bulunur. Sonuç olarak, β eğrisi, a bir pozitif sabit olmak üzere $\beta(s) = (a\cos(\frac{s}{a}), a\sin(\frac{s}{a}), b)$ çemberinin açık bir parçasıdır ve $M \subset S^1(a) \times S^1(b)$ olur.

Tersine, $S^1(a) \times S^1(b)$ tor yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu bilinen bir sonuçtur. $\square$

Bu alt bölümün bundan sonraki kısmında, profil eğrisi düzlemsel olmayan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olamayacağı gösterilecektir. İlk olarak aşağıdaki yardımcı teorem ile $z'' = 0$ özel durumunda ispat yapılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.4. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzey olsun ve yüzeyin $\beta = (x, y, z)$ profil eğrisinin düzlemsel olmadığı, z koordinat fonksiyonunun ise lineer olduğu varsayılsın. Bu durumda M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü paralel olamaz.

İspat. M, yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzey olsun ve yüzey üzerinde tanımlı (4.5) ve (4.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. Yüzeyin $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$ profil eğrisinin düzlemsel olmadığı ve z koordinat fonksiyonunun lineer olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\beta(s) = (x(s), y(s), a_1 s + a_2)$ ve $\beta'(s) = (x'(s), y'(s), a_1)$ olur. Burada a_1 ve a_2 sabitlerdir. β eğrisinin yay uzunluğuna göre paremetrelenmiş olmasından dolayı, $x'^2 + y'^2 + a_1^2 = 1$ eşitliği sağlanır ve β eğrisi düzlemsel olmadığı için $0 < |a_1| < 1$ olur. Dolayısıyla, $x' = \sqrt{1 - a_1^2}\cos\theta$ ve $y' = \sqrt{1 - a_1^2}\cos\theta$ olacak şekilde bir $\theta = \theta(s)$ düzgün fonksiyonu vardır ve $\beta' = (\sqrt{1 - a_1^2}\cos\theta, \sqrt{1 - a_1^2}\sin\theta, a_1)$ olur. Doğrudan hesapla,

$$\beta'' = (-\sqrt{1 - a_1^2}\theta'\sin\theta, \sqrt{1 - a_1^2}\theta'\cos\theta, 0), \qquad \textbf{(4.20)}$$

$$
\begin{aligned}
\beta''' =& (-\sqrt{1-a_1^2}\theta''\sin\theta, \sqrt{1-a_1^2}\theta''\cos\theta, 0) \\
&+(-\sqrt{1-a_1^2}(\theta')^2\cos\theta, -\sqrt{1-a_1^2}(\theta')^2\sin\theta, 0),
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitliklerden β eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla $k = \sqrt{1-a_1^2}\theta'$ ve $\tau = a_1\theta'$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, k ve τ

$$
\tau = \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1^2}}k \qquad \textbf{(4.21)}
$$

eşitliğini sağlar. Doğrudan hesapla (4.9) denklemlerinden

$$
h_{22}^3 = 0 \quad h_{22}^4 = \frac{-\sqrt{1-a_1^2}}{a_1 s + a_2}, \quad \omega_{21}(e_2) = \frac{-a_1}{a_1 s + a_2} \qquad \textbf{(4.22)}
$$

bulunur.

Şimdi, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu varsayılsın. Bu durumda, (4.19) denklemleri sağlanır. (4.19a) ve (4.22) denklemlerinden c_1 bir sabit olmak üzere

$$
k = \frac{c_1}{a_1 s + a_2}, \qquad \textbf{(4.23)}
$$

bu eşitlik ve (4.21) denkleminden ise

$$
\tau = \frac{a_1 c_1}{\sqrt{1-a_1^2}(a_1 s + a_2)} \qquad \textbf{(4.24)}
$$

elde edilir. (4.22)-(4.24) eşitlikleri, (4.19b) denkleminde yerine yazılırsa,

$$
h_{22}^4\omega_{21}(e_2) + k\tau = \frac{a_1(1-a_1^2+c_1^2)}{(a_1 s + a_2)^2} = 0
$$

denklemi bulunur. Dolayısıyla $a_1 = 0$ olmalıdır. Bu durum bir çelişkidir. Yani, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü paralel olamaz. □

$z'' \neq 0$ olması durumunda ilk olarak aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.5. *M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, $z'' \neq 0$ olmak üzere, $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$ profil eğrisi düzlemsel olmayan ve (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Bu durumda, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması için gerek ve yeter koşul, $\beta(s)$ eğrisinin x, y ve z koordinat fonksiyonları ile k eğriliğinin, sıfırdan farklı bazı c_1 ve c_2 sabitleri için*

$$
z'^2 + k^2 z^2 = c_1^2 \qquad \textbf{(4.25)}
$$

ve

$$z(x'y''-x''y')=c_2 \tag{4.26}$$

diferansiyel denklemlerini sağlamasıdır.

İspat. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, β profil eğrisi düzlemsel olmayan ve yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun ve $z''\neq 0$ eşitsizliği sağlansın. Ayrıca, yüzey üzerinde tanımlı (4.5) ve (4.6) ile verilen $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ çatı alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. $z''\neq 0$ olmasından dolayı, (4.9a) denkleminden $h^3_{22}\neq 0$ bulunur. Ayrıca, M yüzeyinin β profil eğrisi düzlemsel olmadığı için τ burulması sıfırdan farklıdır.

Gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.19) denklemleri sağlanır. (4.9a), (4.9b) ve (4.9c) denklemleri, (4.19) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} kk'z^2+z'z''+k^2zz' &= 0, \qquad (4.27)\\ (x'y''-x''y')z'+\tau k^2z^2 &= 0 \qquad (4.28)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, $\tau\neq 0$ olmasından dolayı, (4.28) denkleminden $z'(x'y''-x''y')\neq 0$ bulunur. Bu eşitsizlik, (4.9b) ve (4.9c) denklemlerinden $h^4_{22}\omega_{21}(e_2)\neq 0$ elde edilir.

Diğer taraftan, (4.27) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa $(z'^2)'+(z^2k^2)'=0$ elde edilir ve bu denklemin integre edilmesiyle (4.25) eşitliğinin bir $c_1\neq 0$ sabiti için sağlandığı görülür.

Şimdi, (4.27) ve (4.28) denklemleri sırasıyla τ ve $-\frac{z'}{z}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\tau kk'z^2+\tau z'z''-\frac{z'^2}{z}(x'y''-x''y')=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin iki tarafı kz^2 ye bölünür, (4.9b) ve (4.9c) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tau\omega_{21}(e_2)h^3_{22}+k'\tau+(\omega_{21}(e_2))^2h^4_{22}=0 \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.14) denkleminden elde edilen $\tau h_{22}^3 = h_{22}^4\omega_{21}(e_2) - (h_{22}^4)'$ ifadesi (4.29) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\omega_{21}(e_2)(h_{22}^4)' + k'\tau + 2\omega_{21}(e_2)^2 h_{22}^4 = 0 \qquad \textbf{(4.30)}$$

bulunur.

Diğer taraftan, τ fonksiyonu (4.19b) denkleminden $\tau = -\omega_{21}(e_2)h_{22}^4/k$ şeklinde çözülür ve (4.30) denkleminde yerine yazılırsa (4.9c) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\omega_{21}(e_2)h_{22}^4\left(\frac{k'}{k} + 2\frac{z'}{z} + \frac{(h_{22}^4)'}{h_{22}^4}\right) = 0 \qquad \textbf{(4.31)}$$

bulunur. $\omega_{21}(e_2)h_{22}^4 \neq 0$ olmasından dolayı (4.31) denkleminden

$$\frac{k'}{k} + 2\frac{z'}{z} + \frac{(h_{22}^4)'}{h_{22}^4} = 0 \qquad \textbf{(4.32)}$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü, c_2 bir keyfi sabit olmak üzere $h_{22}^4 kz^2 = -c_2$ şeklindedir. Bu eşitlikte (4.9b) denkleminin kullanılmasıyla (4.26) denklemine ulaşılır. Bununla birlikte, $c_2 = 0$ olması durumunda $h_{22}^4 = 0$ çıkar ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla, c_2 sıfırdan farklı bir sabittir.

Yeter koşulun ispatı için (4.25) ve (4.26) denklemlerinin bazı $c_1 > 0$ ve $c_2 \neq 0$ sabitleri için sağlandığı kabul edilsin. (4.25) denkleminin türevi alınırsa $2z'z'' + 2zz'k^2 + 2z^2kk' = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.9a) ve (4.9c) denklemlerinin kullanılmasıyla (4.19a) denklemine ulaşılır.

(4.9b) ve (4.26) denklemlerinden $\ln|h_{22}^4 kz^2| = \ln|c_2|$ bulunur. Bu eşitliğin türevi alınırsa (4.32) denklemi elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı kh_{22}^4 ile çarpılır ve (4.9c) denklemi kullanılırsa $k'h_{22}^4 - 2k\omega_{21}(e_2)h_{22}^4 + k(h_{22}^4)' = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu ve (4.14) Codazzi denkleminden

$$k'h_{22}^4 - k\omega_{21}(e_2)h_{22}^4 - \tau k h_{22}^3 = 0 \qquad \textbf{(4.33)}$$

elde edilir. (4.19a) denkleminden $k' = -\omega_{21}(e_2)h_{22}^3 + \omega_{21}(e_2)k$ şeklinde çözülür ve (4.33) denkleminde yerine konulursa $h_{22}^3(\omega_{21}(e_2)h_{22}^4 + \tau k) = 0$ bulunur. Bu eşitlik, $h_{22}^3 \neq 0$ olmasından dolayı, (4.19b) denkleminin sağlanmasını gerektirir. Böylece, (4.19) denklemlerinin sağlandığı gösterilmiş olur ki, bu da M yüzeyinin ortalama eğriliğinin paralel olduğunu gösterir. □

Eğriler teorisiyle ilgili olan aşağıdaki yardımcı teorem ilerde kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.6. $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında C^2 sınıfından ve yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş bir eğri, ayrıca $0 < |z'| < 1$ olsun. Bu durumda eğrinin $k = k(s)$ eğriliği ile $x = x(s)$, $y = y(s)$ ve $z = z(s)$ koordinat fonksiyonları

$$k^2(1 - z'^2) = (x'y'' - x''y')^2 + z''^2 \tag{4.34}$$

diferansiyel denklemini sağlar.

İspat. $\beta = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisinin yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş olmasından dolayı, eğrinin $x(s)$, $y(s)$ ve $z(s)$ koordinat fonksiyonları $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ diferansiyel denklemini sağlar. $z'^2 \neq 1$ olmasından dolayı,

$$x' = \sqrt{1 - z'^2}\cos\theta, \tag{4.35}$$

$$y' = \sqrt{1 - z'^2}\sin\theta \tag{4.36}$$

olacak şekilde bir $\theta = \theta(s)$ fonksiyonu vardır. Doğrudan hesapla

$$\begin{aligned} x'' &= (\sqrt{1 - z'^2})'\cos\theta - \sqrt{1 - z'^2}\,\theta'\sin\theta, \\ y'' &= (\sqrt{1 - z'^2})'\sin\theta + \sqrt{1 - z'^2}\,\theta'\cos\theta \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak

$$k^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{z''^2}{1 - z'^2} + (1 - z'^2)\theta'^2 \tag{4.37}$$

ve

$$x'y'' - x''y' = (1 - z'^2)\theta' \tag{4.38}$$

elde edilir. θ' fonksiyonu, (4.38) denkleminden $\theta' = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(1 - z'^2)}$ şeklinde çözülür ve (4.37) denkleminde yerine yazılırsa, (4.34) denklemine ulaşılır. □

Önerme 4.7. M, (2.58) ile verilmiş, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının içinde kalan bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü paralel ise $\beta(s)$ profil eğrisi düzlemseldir.

İspat. M, (2.58) ile verilmiş, profil eğrisi düzlemsel olmayan bir basit dönel yüzey olsun. Bu durumda β profil eğrisinin burulması τ sıfırdan farklıdır. Ayrıca, $\beta(s)$ fonksiyonu yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş olduğundan dolayı (4.4) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, $|z'| \leq 1$ olur.

Şimdi, yüzeyin H ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Yardımcı Teorem 4.5'den dolayı, β eğrisinin koordinat fonksiyonları, eğriliği ve burulması, sıfırdan farklı bazı c_1 ve c_2 sabitleri için (4.25) ve (4.26) denklemlerini sağlar. (4.26) ve (4.34) denklemlerinden

$$k^2 = \frac{z^2 z''^2 + c_2^2}{z^2(1-z'^2)} \tag{4.39}$$

bulunur. (4.25) ve (4.39) denkleminden ise

$$z^2 z''^2 = c_1^2 - c_2^2 + (-c_1^2 - 1)z'^2 + z'^4 \tag{4.40}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Şimdi, μ fonksiyonu, $z'^2(s) = \mu(z(s))$ olacak şekilde tanımlansın. Bu eşitliğin türevi alınırsa, $z'' = \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dz}$ bulunur. Bu eşitliklerin (4.40) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\frac{1}{4}z^2\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = c_1^2 - c_2^2 + (-c_1^2 - 1)\mu + \mu^2 \tag{4.41}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca bu eşitliğin yeniden düzenlenmesiyle,

$$\delta_0 = \sqrt{(1-c_1^2)^2 + 4c_2^2} \tag{4.42}$$

ve $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ olmak üzere

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu - \frac{c_1^2+1}{2})^2 - \frac{\delta_0^2}{4}}} = 2\varepsilon\frac{dz}{z} \tag{4.43}$$

bulunur. (4.43) denkleminin genel çözümü, bazı pozitif c_3 sabitleri için

$$\cosh^{-1}\left(\frac{2\mu - c_1^2 - 1}{\delta_0}\right) = \ln c_3 z^{2\varepsilon} \tag{4.44}$$

şeklindedir. Bu eşitlikten

$$z'^2 = \mu = \frac{c_1^2+1}{2} + \frac{\delta_0}{2}\cosh(\ln c_3 z^{2\varepsilon})$$

bulunur. Ayrıca, bu eşitlik ve $z'^2 \leq 1$ eşitsizliğinden çıkan

$$\frac{c_1^2+1}{2}+\frac{\delta_0}{2}\cosh(\ln c_3 z^{2\varepsilon}) \leq 1$$

eşitsizliğinin yeniden düzenlenmesiyle

$$\cosh(\ln c_3 z^{2\varepsilon}) \leq \frac{1-c_1^2}{\delta_0}$$

elde edilir. Bu eşitlikten, $f(x) = \cosh x$ fonksiyonunun en küçük değerinin 1 olmasından dolayı, $1 \leq \frac{1-c_1^2}{2\delta_0}$ bulunur. Bu eşitsizlikten ise $\delta_0 \leq 1-c_1^2$ elde edilir. Diğer taraftan, (4.42) denkleminden, $c_2 \neq 0$ olmasından dolayı, $\delta_0 > 1-c_1^2$ eşitsizliği bulunur. Fakat son iki eşitsizliğin aynı anda sağlanması mümkün değildir, yani $z' > 1$ olmalıdır. Dolayısıyla (4.4), (4.25), (4.26) denklem sisteminin bir çözümü yoktur. Yani ortalama eğrilik vektörü paralel olamaz. □

Teorem 4.3, Yardımcı Teorem 4.4 ve Önerme 4.7 yardımıyla, aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 4.8. Tamamiyle $\mathbb{E}^4$ içinde kalan bir basit dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması için gerek ve yeter koşul profil eğrisinin $\beta(s) = (a\cos(\frac{s}{a}), a\sin(\frac{s}{a}), b)$ çemberinin bir açık parçası olmasıdır. Bu durumda, M dönel yüzeyi bir $S^1(a) \times S^1(b)$ tor yüzeyinin açık bir parçası olur. Burada a ve b bazı pozitif sabitlerdir.

Teorem 4.9. Tamamiyle $\mathbb{E}^4$ içinde kalan bir basit dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul bir $S^1(a) \times S^1(b)$ tor yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Burada a ve b bazı pozitif sabitlerdir.

4.3 İkinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Basit Dönel Yüzeyler

İlk olarak, Yardımcı Teorem 2.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.10. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri

$$\begin{aligned}\Delta\nu =& \Big(k^2+((h_{22}^3)^2+(h_{22}^4)^2)\Big)\nu - \Big(h_{22}^4\omega_{21}(e_2)+\tau k\Big)e_1\wedge e_3 \\ &+\Big(k'+\big(h_{22}^3-k\big)\omega_{21}(e_2)\Big)e_1\wedge e_4\end{aligned} \qquad (4.45)$$

denklemini sağlar. Burada e_1, e_2, e_3 ve e_4 (4.5) ve (4.6) denklemleriyle verilen vektör alanlarıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, yüzey üzerinde tanımlı (4.5) ve (4.6) ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. Bu denklemler göz önüne alındığında, M yüzeyinin ikinci temel formunun uzunluğunun karesi $\|h\|^2$ ile A_3 ve A_4 şekil operatörlerinin izlerinin, sırasıyla,

$$\|h\|^2 = k^2 + ((h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2), \tag{4.46}$$

$$\mathrm{tr}A_3 = k + h_{22}^3, \tag{4.47}$$

$$\mathrm{tr}A_4 = h_{22}^4 \tag{4.48}$$

olduğu görülür. $\mathrm{tr}A_3$ ile $\mathrm{tr}A_4$ fonksiyonlarının sadece s yay uzunluğuna bağlı olmasından dolayı, (4.13) ve (4.14) Codazzi denklemleri kullanılarak, bu fonksiyonların gradyentleri

$$\nabla(\mathrm{tr}A_3) = \left(k' + \omega_{21}(e_2)(h_{22}^3 - k) + \tau h_{22}^4\right) e_1, \tag{4.49}$$

$$\nabla(\mathrm{tr}A_4) = \left(h_{22}^4 \omega_{21}(e_2) - \tau h_{22}^3\right) e_1 \tag{4.50}$$

olarak elde edilir. (4.9d), (4.11), (4.49) ve (4.50) denklemleri kullanılarak $n = 2$ için (2.48) eşitliğinin sağ tarafındaki son üç terim hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^{2} \omega_4^3(e_j)e_j \wedge H + \nabla(\mathrm{tr}A_3) \wedge e_4 - \nabla(\mathrm{tr}A_4) \wedge e_3 &= -\tau e_1 \wedge \left[(k + h_{22}^3)e_3 + h_{22}^4 e_4\right] \\ &+ \left[k' + \omega_{21}(e_2)(h_{22}^3 - k) + \tau h_{22}^4\right] e_1 \wedge e_4 - \left[h_{22}^4 \omega_{21}(e_2) - \tau h_{22}^3\right] e_1 \wedge e_3 \\ &= -\left[h_{22}^4 \omega_{21}(e_2) + \tau k\right] e_1 \wedge e_3 + \left[k' + \omega_{21}(e_2)(h_{22}^3 - k)\right] e_1 \wedge e_4 \end{aligned} \tag{4.51}$$

elde edilir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.1'den dolayı $R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = 0$ olur. Bu eşitlik, (4.46) ve (4.51) ifadeleri, $n = 2$ için (2.48) denkleminde yerine yazılırsa (4.45) denklemine ulaşılır. □

Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.2'in bir sonucu aşağıda verilmiştir ve daha ileride kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.11. M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında bir yüzey olsun. Ayrıca M üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ile verilsin. Bu durumda, $\Lambda^2(E^4) \equiv \mathbb{E}^6$

uzayında

$$C = C_{13}e_1 \wedge e_3 + C_{14}e_1 \wedge e_4 + C_{34}e_3 \wedge e_4 \tag{4.52}$$

formunda bir C vektör alanının sabit olması için gerek ve yeter koşul, $C_{13},\ C_{14},\ C_{34}$ bileşenlerinin $i = 1,2$ için

$$\begin{aligned}
e_i(C_{13}) &= \omega_{34}(e_i)C_{14} - h^4_{1i}C_{34}, && \text{(4.53a)}\\
e_i(C_{14}) &= -\omega_{34}(e_i)C_{13} + h^3_{1i}C_{34}, && \text{(4.53b)}\\
e_i(C_{34}) &= h^4_{1i}C_{13} - h^3_{1i}C_{14}, && \text{(4.53c)}\\
0 &= -\omega_{21}(e_i)C_{13} + h^4_{i2}C_{34}, && \text{(4.53d)}\\
0 &= h^3_{i2}C_{13} + h^4_{i2}C_{14}, && \text{(4.53e)}\\
0 &= \omega_{21}(e_i)C_{14} + h^3_{i2}C_{34} && \text{(4.53f)}
\end{aligned}$$

denklem takımını sağlamasıdır.

İspat. (2.36) - (2.39) denklemleri $n = 2$ için yazılıp $C_{12} = C_{23} = C_{24} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (4.53) ile verilen denklem takımına ulaşılır. □

$\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir basit dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için bir gerek koşul aşağıdaki yardımcı teoremle verilir.

Yardımcı Teorem 4.12. *M, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yer vektörü (2.58) ile verilen ve tamamiyle $\mathbb{E}^4$ uzayında kalan bir basit dönel yüzey; τ, dönel yüzeyin β profil eğrisinin burulması ve $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ ise (4.5) ve (4.6) denklemleri ile verilen vektör alanları olsun. Eğer M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip ise (2.47) denklemindeki C vektörü (4.52) ile verilen formdadır. Ayrıca, f, C_{13}, C_{14} ve C_{34} fonksiyonları sadece profil eğrisinin s yay uzunluğu parametresine bağlıdır ve*

$$\begin{aligned}
h^3_{22}C_{13} + h^4_{22}C_{14} &= 0, && \text{(4.54)}\\
h^4_{22}C_{34} - \omega_{21}(e_2)C_{13} &= 0, && \text{(4.55)}\\
(C_{13})' &= \tau C_{14} && \text{(4.56)}
\end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Ayrıca, bu üç denklemin sağlanması durumunda, $\mathbb{E}^6$ Euclid uzayında $C = C_{13}(s)e_1 \wedge e_3 + C_{14}(s)e_1 \wedge e_4 + C_{34}(s)e_3 \wedge e_4$ vektör alanı sabit bir vektördür.

İspat. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, (4.5) ve (4.6) denklemleri ile verilen $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal baz alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. Diğer taraftan, M basit dönel yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasviri Sonuç 4.10'dan dolayı (4.45) denklemini sağlar. Ayrıca, M yüzeyinin tamamiyle $\mathbb{E}^4$ uzayında kalmasından dolayı, Açıklama 4.2 göz önüne alındığında, $h_{22}^4 \neq 0$ olduğu görülür.

Şimdi, M yüzeyinin noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu, yani, (2.47) denkleminin $\mathbb{E}^6$ uzayında bir

$$C = \sum_{1 \leq A < B \leq 4} C_{AB} e_A \wedge e_B \tag{4.57}$$

sabit vektörü ve f fonksiyonu için sağlandığı varsayılsın. Bu durumda, (2.47) ve (4.45) denklemlerinden

$$\begin{aligned} f(\nu + C) = & \left[k^2 + ((h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2)\right]\nu - \left[h_{22}^4 \omega_{21}(e_2) + \tau k\right] e_1 \wedge e_3 \\ & + \left[k' + (h_{22}^3 - k)\omega_{21}(e_2)\right] e_1 \wedge e_4 \end{aligned} \tag{4.58}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.57) ve (4.58) denklemlerinden

$$-fC_{13} = h_{22}^4 \omega_{21}(e_2) + \tau k, \tag{4.59}$$

$$fC_{14} = k' + (h_{22}^3 - k)\omega_{21}(e_2), \tag{4.60}$$

$$f(1 + C_{34}) = k^2 + (h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2, \tag{4.61}$$

$$C_{23} = C_{24} = C_{34} = 0 \tag{4.62}$$

elde edilir. Dolayısıyla, C vektörü, (4.52) ile verilen formdadır.

C vektörünün sabit olmasından ve Yardımcı Teorem 4.11'den dolayı, C_{13}, C_{14}, C_{34} fonksiyonları, (4.53) denklemlerini sağlar. $i = 2$ için yazılan (4.53a) - (4.53c) denklemlerinde (4.9a), (4.9b) ve (4.9d) denklemleri kullanılırsa, $e_2(C_{13}) = e_2(C_{14}) = e_2(C_{34}) = 0$ elde edilir. Bu eşitlikler ve (4.59) denkleminden ise $e_2(f) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, C_{13}, C_{14}, C_{34} ve f fonksiyonları sadece s parametresine bağlıdır. Diğer taraftan, $i = 2$ için yazılan (4.53e), (4.53d) denklemlerinde ve $i = 1$ için yazılan (4.53a) denkleminde (4.9a) - (4.9c) denklemleri kullanılırsa, sırasıyla, (4.54) - (4.56) denklemlerine ulaşılır.

İspatın geri kalan kısmında, (4.54) - (4.56) denklemlerinin sağlanması durumunda

$$C = C_{13}(s)e_1 \wedge e_3 + C_{14}(s)e_1 \wedge e_4 + C_{34}(s)e_3 \wedge e_4 \tag{4.63}$$

ile verilen C vektör alanının sabit olacağı gösterilecektir. Yardımcı Teorem 4.11 ve (4.9) denklemlerinden dolayı

$$\begin{aligned} \omega_{21}(e_2)C_{14} + h^3_{22}C_{34} &= 0, &(4.64)\\ (C_{14})' &= -\tau C_{13} + kC_{34}, &(4.65)\\ (C_{34})' &= -kC_{14} &(4.66) \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığının gösterilmesi yeterlidir. (4.54) ve (4.55) denklemleri sırasıyla $\omega_{21}(e_2)$ ve h^3_{22} ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$h^4_{22}(\omega_{21}(e_2)C_{14} + h^3_{22}C_{34}) = 0 \tag{4.67}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.67) denkleminden (4.64) eşitliğine ulaşılır.

(4.54) denkleminin iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa,

$$(h^3_{22})'C_{13} + h^3_{22}(C_{13})' + (h^4_{22})'C_{14} + h^4_{22}(C_{14})' = 0 \tag{4.68}$$

bulunur. (4.68) denkleminde (4.13), (4.14) Codazzi denklemlerinin ve (4.56) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{gathered} \left(\omega_{21}(e_2)(h^3_{22} - k) + \tau h^4_{22}\right) C_{13} + \tau h^3_{22}C_{14} + \left(h^4_{22}\omega_{21}(e_2) - \tau h^3_{22}\right) C_{14} \\ + h^4_{22}(C_{14})' = 0 \end{gathered} \tag{4.69}$$

elde edilir. (4.69) denklemi

$$\omega_{21}(e_2)(h^3_{22}C_{13} + h^4_{22}C_{14}) - k\omega_{21}(e_2)C_{13} + \tau h^4_{22}C_{13} + h^4_{22}(C_{14})' = 0 \tag{4.70}$$

şeklinde yeniden düzenlenir ve (4.54), (4.55) denklemleri kullanılırsa,

$$h^4_{22}((C_{14})' + \tau C_{13} - kC_{34}) = 0 \tag{4.71}$$

elde edilir. $h^4_{22} \neq 0$ olmasından dolayı, bu eşitlik, (4.65) denklemini gerektirir. Bu kez (4.55) eşitliğinin iki tarafının s parametresine göre türevi alınıp benzer işlemler yapılırsa (4.66) denklemine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki yardımcı teorem ile $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayının bir basit dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için profil eğrisinin sağlaması gereken gerek ve yeter koşul elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.13. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan ve yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin k eğriliği ve τ burulması ile z koordinat fonksiyonunun

$$z^2k^2(1-z'^2) = z^2z''^2+a_0^2, \tag{4.72}$$

$$z\tau(b_0+z')(a_0^2+z''^2z^2) = -a_0\Big(a_0^2+z^2z''^2+(1+b_0z')(1-z'^2)\Big) \tag{4.73}$$

denklemlerini sağlamasıdır, burada a_0 ve b_0 sıfırdan farklı sabitlerdir.

İspat. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan ve yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, (4.5) ve (4.6) denklemleri ile verilen $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ortonormal baz alanı göz önüne alınsın. Bu çatı alanına karşı gelen konneksiyon formlarının ve yüzeyin ikinci esas formunun bileşenleri (4.9) denklemleriyle verilmiştir. M yüzeyinin tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalmasından dolayı, Açıklama 4.2 göz önüne alındığında $h^4_{22}\neq 0$ olduğu görülür.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, (4.58) denklemi düzgün bir f fonksiyonu ve $C\neq 0$ sabit vektörü için sağlanır. Yardımcı Teorem 4.12'den dolayı C vektörü (4.52) denklemi ile verilen formdadır; C_{13}, C_{14} ve C_{34} bileşenleri ile f fonksiyonu sadece s değişkenine bağlıdır ve (4.54) - (4.56) denklemleri sağlanır. (4.52) ve (4.58) denklemlerinden (4.59) - (4.61) eşitlikleri bulunur.

Şimdi, düzgün bir $Q=Q(s)$ fonksiyonu, $Q=-C_{13}/h^4_{22}$ şeklinde tanımlansın. Bu eşitlikten C_{13} bileşeni

$$C_{13} = -Qh^4_{22} \tag{4.74}$$

şeklinde çözülür ve (4.54) ve (4.55) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$C_{14} = Qh^3_{22}, \tag{4.75}$$

$$C_{34} = -Q\omega_{21}(e_2) \tag{4.76}$$

bulunur. Dolayısıyla, C vektörünün sıfırdan farklı olması, $Q\neq 0$ olmasını gerektirir. (4.74) ve (4.75) denklemleri, (4.56) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{ds}(-Qh^4_{22}) = \tau Qh^3_{22} \tag{4.77}$$

bulunur. Bu eşitlik

$$-Q'h_{22}^4 - Q(h_{22}^4)' = \tau Q h_{22}^3 \qquad \textbf{(4.78)}$$

şeklinde yazılır ve (4.14) Codazzi denklemi kullanılırsa

$$-Q'h_{22}^4 - Q(h_{22}^4\omega_{21}(e_2) - \tau h_{22}^3) = \tau Q h_{22}^3 \qquad \textbf{(4.79)}$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $h_{22}^4 \neq 0$ eşitsizliği ile (4.9d) eşitliği kullanılırsa, $Q' = Q\dfrac{z'}{z}$ bulunur ve

$$Q = \frac{z}{b_0} \qquad \textbf{(4.80)}$$

olur. Burada $b_0 \neq 0$ bir sabittir.

Diğer taraftan, (4.74) - (4.76) denklemleri (4.59) - (4.61) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$fQh_{22}^4 = h_{22}^4\omega_{21}(e_2) + \tau k \qquad \textbf{(4.81)}$$

$$fQh_{22}^3 = k' + (h_{22}^3 - k)\omega_{21}(e_2)e_1 \qquad \textbf{(4.82)}$$

$$f(1 - Q\omega_{21}(e_2)) = k^2 + (h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2 \qquad \textbf{(4.83)}$$

elde edilir. Bu denklemlerin ilk ikisi sırasıyla h_{22}^3 ve h_{22}^4 ile çarpılır ve taraf tarafa çıkartılırsa

$$h_{22}^3\tau k = h_{22}^4\left[k' - k\omega_{21}(e_2)\right] \qquad \textbf{(4.84)}$$

bulunur. (4.14) denkleminden $h_{22}^3\tau$ terimi, $\tau h_{22}^3 = h_{22}^4\omega_{21}(e_2) - (h_{22}^4)'$ şeklinde çözülür ve (4.84) denkleminin sol tarafında yerine yazılırsa,

$$h_{22}^4(k' - k\omega_{21}(e_2)) = k(h_{22}^4\omega_{21}(e_2) - (h_{22}^4)') \qquad \textbf{(4.85)}$$

bulunur. Bu denklem yeniden düzenlenirse $h_{22}^4k' + k(h_{22}^4)' - 2kh_{22}^4\omega_{21}(e_2) = 0$ halini alır. Bu eşitliğin her iki tarafı h_{22}^4k fonksiyonuna bölünür, (4.9d) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{k'}{k} + 2\frac{z'}{z} + \frac{(h_{22}^4)'}{h_{22}^4} = 0 \qquad \textbf{(4.86)}$$

elde edilir, bu eşitliğin integre edilmesiyle $a_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere $kz^2h_{22}^4 = -a_0$ bulunur. (4.9b) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\rho_3 = x'y'' - y'x'' = \frac{a_0}{z} \qquad \textbf{(4.87)}$$

eşitliğine ulaşılır. Yardımcı Teorem 4.6'da verilen (4.34) denklemi kullanılırsa (4.72) denklemine ulaşılır.

Diğer taraftan, (4.81) ve (4.83) denklemleri sırasıyla $(1-Q\omega_{21}(e_2))$ ve Qh_{22}^4 ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve Q fonksiyonunun değeri, (4.80) denkleminden yerine yazılırsa

$$\frac{z}{b_0}\Big(k^2+(h_{22}^3)^2+(h_{22}^4)^2\Big)h_{22}^4=\Big(h_{22}^4\omega_{21}(e_2)+\tau k\Big)\left(1-\frac{z}{b_0}\omega_{21}(e_2)\right) \qquad \textbf{(4.88)}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, (4.9a) ve (4.9b) denklemi kullanılırsa, $(h_{22}^3)^2+(h_{22}^4)^2$ ifadesi

$$(h_{22}^3)^2+(h_{22}^4)^2 = \frac{z''^2+(x'y''-x''y')^2}{k^2z^2} \qquad \textbf{(4.89)}$$

olarak elde edilir. (4.34) denklemi,

$$\frac{z''^2+(x'y''-x''y')^2}{k^2}=1-z'^2$$

şeklinde yazılır ve (4.89) denkleminde yerine konulursa,

$$(h_{22}^3)^2+(h_{22}^4)^2 = \frac{1-z'^2}{z^2} \qquad \textbf{(4.90)}$$

bulunur. (4.9b),(4.9c) ve (4.90) denklemleri, (4.88) denkleminde yerine yazılır, eşitliğin her iki tarafı b_0 ile çarpılırsa

$$-\Big(k^2+\frac{(1-z'^2)}{z^2}\Big)\frac{\rho_3}{k}=\Big(\frac{\rho_3 z'}{kz^2}+\tau k\Big)(b_0+z') \qquad \textbf{(4.91)}$$

elde edilir. (4.72) ve (4.87) denklemi bu eşitlikte yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.73) denklemine ulaşılır. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı için M basit dönel yüzeyinin β profil eğrisinin z koordinat fonksiyonu ile k eğriliği ve τ burulmasının (4.72) ve (4.73) denklemlerini, sıfırdan farklı a_0 ve b_0 sabitleri için sağladıkları kabul edilsin. Bu durumda, (4.34) ve (4.72) denklemlerinden (4.87) denklemi elde edilir.

$b_0+z'=0$ olması durumunda (4.73) denkleminden

$$-a_0\Big(a_0^2+z^2z''^2+(1-z'^2)^2\Big)=0 \qquad \textbf{(4.92)}$$

çıkar ki $a_0 \neq 0$ olmasından dolayı bu mümkün değildir. Dolayısıyla, $b_0 + z' \neq 0$ olmalıdır. (4.72) denkleminden dolayı $(1-z'^2) \neq 0$ eşitsizliği de sağlanmalıdır. M basit dönel yüzeyinin ν Gauss tasvirinin

$$f = b_0 \left[\frac{a_0^2 + z^2 z''^2 + (1+b_0 z')(1-z'^2)}{z^2(b_0+z')(1-z'^2)} - \frac{z'}{z^2} \right], \tag{4.93}$$

$$C = \frac{a_0}{b_0 k z} e_1 \wedge e_3 - \frac{z''}{b_0 k} e_1 \wedge e_4 + \frac{z'}{b_0} \nu \tag{4.94}$$

ile verilen f düzgün fonksiyonu ve C vektörü için (2.47) denklemini sağladığı ve C vektörünün sabit olduğu gösterilecektir.

(4.87) denklemi kullanılırsa, C vektörünün $C_{13} = \frac{a_0}{b_0 k z}$, $C_{14} = -\frac{z''}{b_0 k}$ ve $C_{34} = \frac{z'}{b_0}$ bileşenlerinin (4.74) - (4.76) denklem takımını $Q = \frac{z}{b_0}$ için sağladığı görülür. Dolayısıyla, Q fonksiyonu (4.77) denklemini sağlar. (4.74) - (4.76) eşitlikleri, (4.54) ve (4.55) denklemlerinin sağlanmasını gerektirir. (4.74), (4.75) ve (4.77) denkleminden ise (4.56) bulunur. Yardımcı Teorem 4.12'den dolayı C vektörü sabittir.

Diğer taraftan, (2.47) denkleminin sağlanıldığını göstermek için (4.59) - (4.61) denklemlerinin sağlandığını göstermek yeterlidir. (4.72) ve (4.73) denklemlerinin taraf tarafa çarpılıp yeniden düzenlenmesiyle,

$$\tau k^2 z = -\frac{a_0 \left[a_0^2 + z^2 z''^2 + (1+b_0 z')(1-z'^2) \right]}{z^2(b_0+z')(1-z'^2)} \tag{4.95}$$

elde edilir. (4.93), (4.94) ve (4.95) denklemlerinden doğrudan hesapla

$$\begin{aligned} -fC_{13} &= -\frac{a_0}{kz} \left[\frac{a_0^2 + z^2 z''^2 + (1+b_0 z')(1-z'^2)}{z^2(b_0+z')(1-z'^2)} - \frac{z'}{z^2} \right] \\ &= \tau k + \frac{a_0 z'}{k z^3} = \tau k + \left(\frac{-a_0}{k z^2} \right) \left(\frac{-z'}{z} \right) \end{aligned} \tag{4.96}$$

bulunur. Bu denklemde (4.9b), (4.9c) ve (4.87) denklemlerinin kullanılmasıyla, (4.59) denklemine ulaşılır.

Diğer taraftan, (4.90) denklemi kullanılırsa $\|h\|^2$ terimi

$$\|h\|^2 = k^2 + (h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2 = k^2 + \frac{1-z'^2}{z^2} = \frac{z^2 z''^2 + a_0^2}{z^2(1-z'^2)} + \frac{1-z'^2}{z^2} \tag{4.97}$$

şeklinde hesaplanır. Bu eşitlikte (4.72) denklemi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$k^2 + (h_{22}^3)^2 + (h_{22}^4)^2 = \frac{b_0(z^2 z''^2 + a_0^2 + (1-z'^2)^2)}{z^2(1-z'^2)(b_0+z')} \left(1 + \frac{z'}{b_0} \right) \tag{4.98}$$

bulunur. (4.93), (4.94) ve (4.98) denklemlerinden (4.61) elde edilir. Diğer taraftan, (4.87) denklemi kullanılırsa

$$h_{22}^{4} = -\frac{x'y'' - x''y'}{kz} = \frac{-a_0}{z^2 k} \tag{4.99}$$

bulunur. Bu denklemden elde edilen $h_{22}^{4} kz^2 = a_0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa (4.86) denklemine ulaşılır. (4.14) ve (4.86) denklemlerinden (4.84) eşitliği elde edilir. (4.59) denkleminden τk terimi

$$\tau k = -(fC_{13} + h_{22}^{4}\omega_{21}(e_2)) \tag{4.100}$$

çözülür ve (4.84) denkleminde yerine yazılırsa

$$-h_{22}^{3}(fC_{13} + h_{22}^{4}\omega_{21}(e_2)) = h_{22}^{4}(k' - k\omega_{21}(e_2)) \tag{4.101}$$

bulunur. Bu denklem

$$-fC_{13}h_{22}^{3} = h_{22}^{4}(k' - k\omega_{21}(e_2) + h_{22}^{3}\omega_{21}(e_2)) \tag{4.102}$$

şeklinde düzenlenir ve bu eşitliğin sol tarafındaki terimde (4.54) denklemi kullanılırsa, $h_{22}^{4} \neq 0$ olmasından dolayı, (4.60) denklemine ulaşılır. Sonuç olarak (4.59) - (4.62) denklemlerinin sağlandığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, M yüzeyinin ν Gauss tasviri, (4.58) denklemini (4.93) ve (4.94) ile verilen f düzgün fonksiyonu ve $C \neq 0$ sabit vektörü için sağlar. Yani, M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.14. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan ve yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, β profil eğrisinin z koordinat fonksiyonunun

$$(1 + b_0 z')\left(a_0^2 + z^2 z''^2 + (1 - z'^2)^2\right) = -(b_0 + z')z(1 - z'^2)(zz'')' \tag{4.103}$$

denklemini sıfırdan farklı bazı $a_0 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ sabitleri için sağlaması, $x = x(s)$ ve $y = y(s)$ koordinat fonksiyonlarının ise

$$x = \int \sqrt{1 - z'^2(s)} \cos\left(\int_{s_0}^{s} \frac{a_0}{z(u)(1 - z'^2(u))} du\right) ds + x_0 \tag{4.104}$$

$$y = \int \sqrt{1 - z'^2(s)} \sin\left(\int_{s_0}^{s} \frac{a_0}{z(u)(1 - z'^2(u))} du\right) ds + y_0 \tag{4.105}$$

ile verilmesidir. Burada $-1 < z' < 1$ ve x_0, y_0 ve s_0 bazı keyfi sabitlerdir.

İspat. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan ve yer vektörü (2.58) ile verilen bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, $\theta = \theta(s)$ fonksiyonu, (4.35), (4.36) denklemlerini sağlayacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, doğrudan hesapla, $Z = \sqrt{1-z'^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
x' &= Z\cos\theta, && (\mathbf{4.106})\\
x'' &= Z'\cos\theta - Z\theta'\sin\theta, && (\mathbf{4.107})\\
x''' &= \left(Z'' - Z(\theta')^2\right)\cos\theta - \left(2Z'\theta' + Z\theta''\right)\sin\theta, && (\mathbf{4.108})\\
y' &= Z\sin\theta && (\mathbf{4.109})\\
y'' &= Z'\sin\theta + Z\theta'\cos\theta && (\mathbf{4.110})\\
y''' &= \left(Z'' - Z(\theta')^2\right)\sin\theta + \left(2Z'\theta' + Z\theta''\right)\cos\theta && (\mathbf{4.111})
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak gerekli hesaplar yapıldığında, k ve τ fonksiyonları β eğrisinin, sırasıyla, eğrilik ve burulması ve $\rho_3 = x'y'' - x''y'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau k^2 &= \left(\frac{3z'z''^2}{1-z'^2} + z'''\right)\theta' + \left((1-z'^2)z'\right)\theta'^3 - z''\theta'', && (\mathbf{4.112})\\
\rho_3 &= (1-z'^2)\theta' && (\mathbf{4.113})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Yardımcı Teorem 4.13'dan dolayı, (4.72) ve (4.73) denklemleri sıfırdan farklı bazı a_0 ve b_0 sabitleri için sağlanır.

(4.72) ve (4.73) denklemleri taraf tarafa çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa τk^2 fonksiyonu

$$\tau k^2 = \frac{-a_0\left(a_0^2 + z^2z''^2 + (1+b_0z')(1-z'^2)\right)}{z^3(1-z'^2)(b_0+z')} \qquad (\mathbf{4.114})$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, (4.34), (4.72) ve (4.113) denklemlerinden

$$\theta' = \frac{a_0}{z(1-z'^2)} \qquad (\mathbf{4.115})$$

bulunur. Bu denklem $\theta(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{a_0}{z(\xi)(1-z'(\xi)^2)}d\xi$ şeklinde yazılır, (4.35) ve (4.36) denklemlerinde yerine konulursa,

$$x' = \sqrt{1-z'^2}\cos\left(\int\limits_{s_0}^{s}\frac{a_0}{z(u)(1-z'(u)^2)}du\right) \quad \mathbf{(4.116)}$$

$$y' = \sqrt{1-z'^2}\sin\left(\int\limits_{s_0}^{s}\frac{a_0}{z(u)(1-z'(u)^2)}du\right) \quad \mathbf{(4.117)}$$

bulunur. Bu denklemlerin çözülmesiyle (4.104) ve (4.105) elde edilir. Ayrıca, (4.115) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\theta'' = \frac{a_0\left[(2zz'z''-z'(1-z'^2))\right]}{z^2(1-z'^2)^2} \quad \mathbf{(4.118)}$$

elde edilir. (4.115) ve (4.118) denklemleri, (4.112) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tau k^2 = & \left(\frac{3z'z''^2}{1-z'^2}+z'''\right)\frac{a_0}{z(1-z'^2)}+(1-z'^2)z'\left(\frac{a_0}{z(1-z'^2)}\right)^3 \\ & -z''\frac{a_0\left[(2zz'z''-z'(1-z'^2))\right]}{z^2(1-z'^2)^2}\end{aligned} \quad \mathbf{(4.119)}$$

bulunur. Bu denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\tau k^2 = \frac{a_0}{z^2(1-z'^2)^2}\left[zz'z''^2+a_0^2z^{-1}z'+(1-z'^2)(zz'')'\right] \quad \mathbf{(4.120)}$$

elde edilir. (4.114) ve (4.120) denklemlerinin taraf tarafa çıkartılmasıyla (4.103) denklemine ulaşılır. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı için β eğrisinin koordinat fonksiyonlarının (4.103) - (4.105) denklemleriyle verildiği kabul edilsin. (4.72) ve (4.73) denklemlerinin sağlandığı gösterilecektir. (4.104) ve (4.105) eşitliklerinin her iki tarafının türevi alınırsa, (4.116) ve (4.117) denklemleri bulunur. (4.35) ile (4.116) denklemleri ve (4.36) ile (4.117) denklemlerinden sırasıyla

$$\cos\theta = \cos\left(\int\limits_{s_0}^{s}\frac{a_0}{z(\xi)(1-z'(\xi)^2)}d\xi\right) \quad \mathbf{(4.121)}$$

ve

$$\sin\theta = \sin\left(\int\limits_{s_0}^{s}\frac{a_0}{z(\xi)(1-z'(\xi)^2)}d\xi\right) \quad \mathbf{(4.122)}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden,

$$\theta = \int_{s_0}^{s} \frac{a_0}{z(\xi)(1-z'(\xi)^2)} d\xi \qquad \textbf{(4.123)}$$

olduğu görülür. Ayrıca, (4.123) denkleminin iki tarafının türevleri alınırsa (4.115) ve (4.118) denklemleri bulunur. (4.115) denklemi, (4.37) denkleminde yerine yazılırsa (4.72) denklemine ulaşılır.

(4.115) ve (4.118) denklemlerinin (4.112) denkleminde yerine yazılmasıyla (4.120) denklemi bulunur. (4.103) denkleminden $(1-z'^2)(zz'')'$ terimi

$$(1-z'^2)(zz'')' = -\frac{(1+b_0z')\left(a_0^2+z^2z''^2+(1-z'^2)^2\right)}{(b_0+z')z} \qquad \textbf{(4.124)}$$

şeklinde çözülür ve (4.120) eşitliğinde yerine konulursa

$$\tau k^2 = \frac{a_0}{z^2(1-z'^2)^2}\left[zz'z''^2 + a_0^2z^{-1}z' - \frac{(1+b_0z')\left(a_0^2+z^2z''^2+(1-z'^2)^2\right)}{(b_0+z')z}\right] \textbf{(4.125)}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (4.114) denklemine ulaşılır. (4.72) eşitliği, (4.114) denkleminde yerine konulursa (4.73) denklemine ulaşılır.

M yüzeyinin profil eğrisi, (4.72) ve (4.73) denklemlerini sağladığı için, Yardımcı Teorem 4.13'dan dolayı, M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. □

$|z_0| < 1$ olmak üzere $b_0 = -\frac{1}{z_0}$ sabiti için $z = z_0s + z_1$ fonksiyonu (4.103) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla, Teorem 4.14 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.15. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzey ve $z(s) = z_0s + z_1$ olsun. Bu durumda M dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin

$$\begin{aligned} F(s,t) = \Bigg(& \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{z_0(1+q_0^2)}\left(z_0s+z_1\right)\left(q_0\sin(q_0\ln(z_0s+z_1)) + \cos(q_0\ln(z_0s+z_1))\right), \\ & \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{z_0(1+q_0^2)}\left(z_0s+z_1\right)\left(\sin(q_0\ln(z_0s+z_1)) - q_0\cos(q_0\ln(z_0s+z_1))\right)s, \\ & (z_0s+z_1)\cos t, (z_0s+z_1)\sin t\Bigg) \end{aligned} \qquad \textbf{(4.126)}$$

ile verilen helikal dönel yüzeye kongruent olmasıdır. Burada $0 < |z_0| < 1$ olmak üzere $q_0 \neq 0$, z_0 ve z_1 sabitlerdir. Bu durumda, M dönel yüzeyi düzdür.

Açıklama 4.3. (4.12) denklemi göz önüne alındığında, M basit dönel yüzeyinin düz olmasının, $z'' = 0$ olmasına denk olduğu hemen görülür. Sonuç 4.15'den dolayı, düz bir M basit dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin yer vektörü (4.126) ile verilen yüzeye kongruent olmasıdır. Bu sonuç, yakın zamanda yayınlanan [23] numaralı makalede verilmiştir. Bununla birlikte, aynı makalede (2.47) denklemini sağlayan f fonksiyonu ve C vektörü verilmemiştir.

Aşağıdaki önerme, [23] numaralı makalede yayınlanan bu sonucun bir genelleştirmesidir.

Önerme 4.16. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş, sabit Gauss eğriliğine sahip bir basit dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M dönel yüzeyinin yer vektörü (4.126) ile verilen yüzeye kongruent olmasıdır. Ayrıca, yer vektörü (4.126) ile verilen helikal dönel yüzey, (2.47) denklemini

$$f = \frac{q_0^2 z_0^2 + 1}{(z_0 s + z_1)^2} \tag{4.127}$$

fonksiyonu ve

$$C = -\sqrt{1 - z_0^2}\, z_0 e_1 \wedge e_3 - z_0^2 e_3 \wedge e_4 \tag{4.128}$$

sabit vektörü için sağlar.

İspat. M, tamamiyle $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında kalan, yer vektörü (2.58) ile verilmiş bir basit dönel yüzey olsun. Ayrıca, M yüzeyinin K Gauss eğriliğinin sabit olduğu varsayılsın. Bu durumda, (4.12) denkleminden $K = K_0$ bir sabit olmak üzere,

$$z'' + K_0 z = 0 \tag{4.129}$$

bulunur.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda Teorem 4.14'den dolayı, yüzeyin β

profil eğrisinin z koordinat fonksiyonu, (4.103) denklemini sağlar. Açıklama 4.3'den dolayı $K_0 = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$K_0 > 0$ olması durumunda (4.129) denkleminin genel çözümü, $c_0 \neq 0$ ve s_0 bazı sabitler olmak üzere $z = c_0 \sin(\sqrt{K_0}s + s_0)$ olur. Bu eşitlik (4.103) denkleminde yerine yazılırsa, $S = \sqrt{K_0}s + s_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&(1 + b_0\sqrt{K_0}c_0 \cos S)(a_0^2 + K_0^2 c_0^4 \sin^4 S + (1 - K_0 c_0^2 \cos^2 S)^2) \\ &= 2\sqrt{K_0}^3 c_0^4 \sin^3 S(1 - K_0 c_0^2 \cos^2 S)(b_0 + \sqrt{K_0}c_0 \cos S)\end{aligned} \tag{4.130}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin iki tarafının karesi alınır ve gerekli trigonotmetrik özdeşlikler kullanılırsa $P(t)$,

$$\begin{aligned}P(t) = &\left(1 + b_0\sqrt{K_0}c_0 t\right)^2 \left(a_0^2 + 1 + K_0^2 c_0^4 - 2K_0 c_0^2 \left(1 + K_0 c_0^2\right) t^2 + 2K_0^2 c_0^4 t^4\right)^2 \\ &-2\sqrt{K_0}^3 c_0^4 t^2 \left(1 - K_0 c_0^2 t^2\right)^2 \left(b_0 + \sqrt{K_0}c_0 t\right)^2 \left(1 - t^2\right)^2 \left(1 - t^2\right)\end{aligned} \tag{4.131}$$

şeklinde tanımlanan 14. dereceden bir polinom olmak üzere $P(\cos S) = 0$ bulunur. Bu denklemin bir açık aralıkta gerçeklenebilmesi için $P(t)$ polinomunun katsayılarının tümünün sıfır olması gerekir. t^{14} ün katsayısından $K_0 = 0$ çıkar. yani $K_0 > 0$ olamaz.

$K_0 < 0$ olması durumunda ise (4.129) denkleminin genel çözümü, $c_0 \neq 0$ ve s_0 bazı sabitler olmak üzere $z = c_0 \sinh(\sqrt{-K_0}s + s_0)$ olur. Bu eşitlik (4.103) denkleminde yerine yazılırsa, $T = \sqrt{-K_0}s + s_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left(1 + b_0\sqrt{-K_0}c_0 \cosh T\right) \left(a_0^2 + K_0^2 c_0^4 \sinh^4 T + \left(1 + K_0 c_0^2 \cosh^2 T\right)^2\right) \\ &= 2\sqrt{-K_0}^3 c_0^4 \sinh^3 T(1 + K_0 c_0^2 \cosh^2 T)(b_0 + \sqrt{-K_0}c_0 \cosh T)\end{aligned} \tag{4.132}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin yeniden düzenlenmesiyle $P(\cosh T) = 0$ denklemine ulaşılır ve yukarıda anlatıldığı gibi yine $K_0 = 0$ bulunur ki bu mümkün değildir.

Böylelikle $K_0 = 0$ olduğu bulunur. Sonuç 4.15 ve Açıklama 4.3'den dolayı, M yüzeyi, yer vektörü (4.126) ile verilen helikal dönel yüzeydir ve bu yüzeyin Gauss tasviri, (2.47) denklemini Yardımcı Teorem 4.13'nın ispatında (4.93) ve (4.94) ile verilen f fonksiyonu ve C vektörü için sağlar. Bu yüzeyin profil eğrisinin yer vektörünün gerekli türevleri, doğrudan hesapla, $Q = q_0 \ln(z_0 s + z_1)$ olmak üzere,

$$\beta'(s) = \left(\sqrt{1 - z_0^2}\cos Q, \sqrt{1 - z_0^2}\sin Q, z_0\right), \tag{4.133}$$

$$\begin{aligned}
\beta''(s) &= \left(-\frac{q_0 z_0\sqrt{1-z_0^2}}{z_0 s+z_1}\sin Q, \frac{q_0 z_0\sqrt{1-z_0^2}}{z_0 s+z_1}\cos Q, 0\right), \\
\beta'''(s) &= -\frac{z_0}{z_0 s+z_1}\beta'' + \left(-\frac{q_0^2 z_0^2\sqrt{1-z_0^2}}{(z_0 s+z_1)^2}\cos Q, -\frac{q_0^2 z_0^2\sqrt{1-z_0^2}}{(z_0 s+z_1)^2}\sin Q, 0\right)
\end{aligned} \tag{4.134}$$

bulunur. Bu denklemlerden,

$$k^2 = \frac{q_0^2 z_0^2(1-z_0^2)}{(z_0 s+z_1)^2} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{q_0 z_0^2}{z_0 s+z_1} \tag{4.135}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 4.13'da verilen (4.72) ve (4.73) denklemleri

$$a_0 = (1-z_0^2)q_0 z_0 \quad \text{ve} \quad b_0 = -1/z_0 \tag{4.136}$$

sabitleri için sağlanır. Bu eşitlikler (4.93) ve (4.94) denklemlerinde yerine konulursa, $z''=0$ olduğu da göz önüne alındığında, (4.127) ve (4.128) denklemlerine ulaşılır. □

5. MINKOWSKI UZAYINDA NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP UZAYSAL YÜZEYLER

Bu bölümde $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının uzaysal yüzeyleri ele alınmıştır. İlk olarak harmonik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeylerin tam sınıflandırması verilmiştir. Daha sonra birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeylerin bir karakterizasyonu elde edilmiştir. Son olarak ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırma teoremleri ifade edilmiştir. Bu bölümdeki sonuçların bir kısmı [32] numaralı çalışmada yayınlanmıştır.

$\mathbb{E}^{n+2}$ Euclid uzayında n boyutlu bir alt manifoldun Gauss tasvirinin Laplasyeni Yardımcı Teorem2.4'de verilmiştir. Benzer şekilde, aşağıdaki yardımcı teoremle $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının n-boyutlu yönlendirilmiş bir M alt manifoldunun Gauss tasvirinin Laplasyeni elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 5.1. *M, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının n-boyutlu yönlendirilmiş bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun $\nu = e_{n+1} \wedge e_{n+2}$ Gauss tasviri*

$$\begin{aligned} \Delta\nu =& \|h\|^2\nu + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} \varepsilon_j\varepsilon_k R^D(e_j, e_k; e_{n+1}, e_{n+2}) e_j \wedge e_k \\ &+ \nabla(\mathrm{tr}A_{n+1}) \wedge e_{n+2} + e_{n+1} \wedge \nabla(\mathrm{tr}A_{n+2}) + n\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{(n+1)(n+2)}(e_j) H \wedge e_j \end{aligned} \tag{5.1}$$

denklemini sağlar. Burada, $\|h\|^2$ ve R^D, sırasıyla, M alt manifoldunun ikinci esas formunun normunun karesini ve normal eğrilik tansörünü, $\nabla(\mathrm{tr}A_\beta)$ ise M alt manifoldunun A_β şekil operatörünün izinin gradyentini göstermektedir.

İspat. $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının n-boyutlu yönlendirilmiş bir M alt manifoldu göz önüne alınsın. $\{e_1,\ e_2, \ldots; e_{n+1}, e_{n+2}\}$ ise M üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı olsun. Doğrudan hesapla

$$\begin{aligned} e_i(\nu) &= \left(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_{n+1}\right) \wedge e_{n+2} + e_{n+1} \wedge \left(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_{n+2}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(-h_{ij}^{n+1} e_j \wedge e_{n+2} + h_{ij}^{n+2} e_j \wedge e_{n+1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

ve

$$
\begin{aligned}
-e_ie_i(\nu) = & \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \left(e_i(h_{ij}^{n+1})e_j \wedge e_{n+2} - e_i(h_{ij}^{n+2})e_j \wedge e_{n+1} \right) \\
& + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \left(h_{ij}^{n+1} e_i \left(e_j \wedge e_{n+2}\right) - h_{ij}^{n+2} e_i \left(e_j \wedge e_{n+1}\right)\right)
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.3)}
$$

elde edilir. (5.2) denklemi kullanılarak $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{e_i} e_i\right)(\nu)$ ifadesi

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{e_i} e_i\right)(\nu) &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \omega_{ij}(e_i) e_j(\nu) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}(e_i) \Big(- h_{jk}^{n+1} e_j \wedge e_{n+2} + h_{jk}^{n+2} e_j \wedge e_{n+1} \Big)
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.4)}
$$

şeklinde hesaplanılır.

Öteki taraftan, (5.3) denklemindeki $e_i\left(e_j \wedge e_{n+2}\right)$ ve $e_i\left(e_j \wedge e_{n+1}\right)$ ifadeleri, (2.5) ve (2.6) ile verilen Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak aşağıda şekilde elde edilir.

$$
\begin{aligned}
e_i\left(e_j \wedge e_{n+1}\right) &= \Big(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j\Big) \wedge e_{n+1} + e_j \wedge \Big(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_{n+1}\Big) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{jk}(e_i) e_k + \varepsilon_{n+2} h_{ij}^{n+2} e_{n+2}\right) \wedge e_{n+1} \\
& \quad + e_j \wedge \left(- \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k h_{ik}^{n+1} e_k + \varepsilon_{n+2} \omega_{(n+1)(n+2)}(e_i) e_{n+2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Big(- h_{ik}^{n+1} e_j \wedge e_k + \omega_{jk}(e_i) e_k \wedge e_{n+1}\Big) \\
& \quad + \varepsilon_{n+2} \omega_{(n+1)(n+2)}(e_i) e_j \wedge e_{n+2} - \varepsilon_{n+2} h_{ij}^{n+2} \nu
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.5)}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
e_i\left(e_j \wedge e_{n+2}\right) &= \Big(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_j\Big) \wedge e_{n+2} + e_j \wedge \Big(\widetilde{\nabla}_{e_i} e_{n+2}\Big) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{jk}(e_i) e_k + \varepsilon_{n+1} h_{ij}^{n+1} e_{n+1}\right) \wedge e_{n+2} \\
& \quad + e_j \wedge \left(- \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k h_{ik}^{n+2} e_k + \varepsilon_{n+1} \omega_{(n+2)(n+1)}(e_i) e_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Big(- h_{ik}^{n+2} e_j \wedge e_k + \omega_{jk}(e_i) e_k \wedge e_{n+2}\Big) \\
& \quad - \varepsilon_{n+1} \omega_{(n+1)(n+2)}(e_i) e_j \wedge e_{n+1} + \varepsilon_{n+1} h_{ij}^{n+1} \nu .
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.6)}
$$

(5.5) ve (5.6) eşitlikleri, (5.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-e_ie_i(\nu) = & \sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_k\Big(-h_{ij}^{n+1}h_{ik}^{n+2} + h_{ik}^{n+1}h_{ij}^{n+2}\Big)e_j\wedge e_k \\
& + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\Big(\varepsilon_{n+1}(h_{ij}^{n+1})^2 + \varepsilon_{n+2}(h_{ij}^{n+2})^2\Big)\nu \\
& - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\Big(e_i(h_{ij}^{n+2}) + \varepsilon_{n+1}h_{ij}^{n+1}\omega_{(n+1)(n+2)}(e_i) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k h_{ik}^{n+2}\omega_{kj}(e_i)\Big)e_j\wedge e_{n+1} \\
& + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\Big(e_i(h_{ij}^{n+1}) - \varepsilon_{n+2}h_{ij}^{n+2}\omega_{(n+1)(n+2)}(e_i) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k h_{ik}^{n+1}\omega_{kj}(e_i)\Big)e_j\wedge e_{n+2}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

bulunur. (2.16), (5.4) ve (5.7) denklemleri kullanılarak, ν Gauss tasvirinin Laplasyeni

$$\begin{aligned}
\Delta\nu = & \sum_{i,j,k=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\left(-h_{ij}^{n+1}h_{ik}^{n+2} + h_{ik}^{n+1}h_{ij}^{n+2}\right)e_j\wedge e_k + \left(\sum_{i,j,\beta}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_\beta h_{ij}^{\beta}h_{ij}^{\beta}\right)\nu \\
& - \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+2}e_j\wedge e_{n+1} + \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+1}e_j\wedge e_{n+2}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (2.16) Codazzi denklemlerinden

$$h_{ii,j}^{\beta} = e_j(h_{ii}^{\beta}) + \sum_{\gamma=n+1}^{n+2}\varepsilon_\gamma h_{ii}^{\gamma}\omega_{\gamma\beta}(e_j) - \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(\omega_{ik}(e_j)h_{ik}^{\beta} + \omega_{ik}(e_j)h_{ik}^{\beta}\right). \tag{5.9}$$

elde edilir. Konneksiyon formlarının anti-simetrik olmasından dolayı bu eşitlikteki son terimin sıfır olduğu göz önüne alınırsa,

$$h_{ii,j}^{\beta} = e_j(h_{ii}^{\beta}) + \sum_{\gamma=n+1}^{n+2}\varepsilon_\gamma h_{ii}^{\gamma}\omega_{\gamma\beta}(e_j) \tag{5.10}$$

bulunur. (2.11), (2.12) ve (5.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+2}e_j\wedge e_{n+1} = & \sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(e_j(h_{ii}^{n+2}) + \varepsilon_{n+1}h_{ii}^{n+1}\omega_{(n+1)(n+2)}(e_j)\right)e_j\wedge e_{n+1} \\
= & \left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e_j(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h_{ii}^{n+2})e_j\right)\wedge e_{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{(n+1)(n+2)}(e_j)e_j \\
& \wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_{n+1}h_{ii}^{n+1}e_{n+1}\right) \\
= & \nabla(\mathrm{tr}A_{n+2})\wedge e_{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{(n+1)(n+2)}(e_j)e_j \\
& \wedge(\varepsilon_{n+1}\mathrm{tr}A_{n+1}e_{n+1})
\end{aligned} \tag{5.11}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+1}e_j\wedge e_{n+2}=&\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(e_j(h_{ii}^{n+1})+\varepsilon_{n+2}h_{ii}^{n+2}\omega_{(n+2)(n+1)}(e_j)\right)e_j\wedge e_{n+2}\\ =&\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e_j(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h_{ii}^{n+1})e_j\right)\wedge e_{n+2}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{(n+2)(n+1)}(e_j)e_j\\ &\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_{n+2}h_{ii}^{n+2}e_{n+2}\right)\\ =&\nabla(\mathrm{tr}A_{n+1})\wedge e_{n+2}-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{(n+1)(n+2)}(e_j)e_j\\ &\wedge(\varepsilon_{n+2}\mathrm{tr}A_{n+2}e_{n+2})\end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.11) ve (5.12) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır ve (2.8) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}&-\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+2}e_j\wedge e_{n+1}+\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j h_{ii,j}^{n+1}e_j\wedge e_{n+2}=\\ &\nabla(\mathrm{tr}A_{n+1})\wedge e_{n+2}+e_{n+1}\wedge\nabla(\mathrm{tr}A_{n+2})+n\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{(n+1)(n+2)}(e_j)H\wedge e_j\end{aligned} \tag{5.13}$$

bulunur. (2.7), (2.14) ve (5.13) ifadeleri, (5.8) denkleminde yerine yazılırsa, (5.1) denklemine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. □

Bu yardımcı teorem, $s=0$ olması durumunda [16] numaralı makalede verilmiş olan Lemma 3.1 ile uyumludur.

Açıklama 5.1. (5.1) denklemi göz önüne alındığında, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının n-boyutlu bir M alt manifoldunun birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması durumunda, (2.47) denkleminin $f=\|h\|^2$ ve $C=0$ için sağlanacağı hemen görülür.

Sonuç 5.2. M, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının n-boyutlu yönlendirilmiş bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun hem birinci çeşit hem de ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması ancak ve ancak tamamiyle jeodezik olmasıyla mümkündür.

İspat. M, $\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının bir n-boyutlu yönlendirilmiş bir alt manifoldu, ν ise M yüzeyinin Gauss tasviri olsun. Gerek koşulun ispatı için M alt manifoldunun hem birinci çeşit hem de ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, ν tasviri, bazı f ve g düzgün fonksiyonları ve sıfırdan farklı C sabit vektörü için

$$\Delta\nu = f\nu = g(\nu + C) \tag{5.14}$$

eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklerden $(f-g)\nu = C$ elde edilir. $f-g=0$ olması durumunda $C=0$ çıkar ki bu bir çelişkidir, dolayısıyla $f-g \neq 0$ olmalıdır. Ayrıca, (5.2) denkleminden dolayı $e_i(\nu)$ ve ν lineer bağımsızdır. Dolayısıyla, (5.14) denkleminden elde edilen $e_i(f-g)\nu + (f-g)e_i(\nu) = 0$ eşitliği, $e_i(\nu) = 0$, yani, $h \equiv 0$ olmasını gerektirir. Bu da M alt manifoldunun tamamiyle jeodezik olduğunu gösterir.

Yeter koşulun ispatı için M alt manifoldunun tamamiyle jeodezik olduğu varsayılsın. Bu durumda, $C_0 \neq 0$ sabit bir vektör olmak üzere, $\nu = C_0$ olur ve $\Delta\nu = 0$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, (2.47) denklemi $f=0$ ve $C=0$ için sağlanır. Yani, M alt manifoldu birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir alt manifolddur. Diğer taraftan, ν tasviri (2.47) denklemini $C = -C_0 \neq 0$ sabit vektörü ve keyfi seçilmiş bir f fonksiyonu için sağlar. Dolayısıyla, M aynı zamanda ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir alt manifolddur. Böylece ispat tamamlanır. □

5.1 Harmonik Gauss Tasvirine Sahip Uzaysal Yüzeyler

$\mathbb{E}_s^{n+2}$ yarı-Euclid uzayının yönlendirilmiş bir M alt manifoldu için ν Gauss tasviri $\Delta\nu = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, Gauss tasviri harmoniktir denir.

$\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında Gauss tasviri harmonik olan tek yüzey düzlemdir. Ancak $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında düzlem dışında harmonik Gauss tasvirine sahip yüzeyler vardır. Bu alt bölümde $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında harmonik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 5.3. [33] M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında ortalama eğrilik vektörü paralel olan uzaysal bir yüzey olsun. Bu durumda,

(a) $\langle H, H\rangle$ sabittir ve

(b) her ξ normal vektör alanı için $[A_H, A_\xi] = 0$ olur.

Yardımcı Teorem 5.3'ün (b) kısmı ve (2.15) ile verilen Ricci denkleminden aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.4. *M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında maksimal olmayan bir uzaysal yüzey olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü H paralel ise M yüzeyinin normal konneksiyonu düzdür, yani, $R^D \equiv 0$ olur.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının maksimal olmayan bir uzaysal yüzeyi olsun. Ayrıca yüzeyin H ortalama eğrilik vektörünün ışıksal ve paralel olduğu varsayılsın ve yüzey üzerinde tanımlı bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı verilsin. Bu durumda, Yardımcı Teorem 5.3'ün (b) kısmından ve (2.15) ile verilen Ricci denkleminden ξ bir normal vektör alanı olmak üzere

$$R^D(e_1, e_2; H, \xi) = 0 \tag{5.15}$$

elde edilir. $H = \frac{\varepsilon_3}{2}(\mathrm{tr}A_3 e_3 - \mathrm{tr}A_4 e_4)$ olmasından dolayı, $\xi = e_4$ alınırsa (5.15) denkleminden

$$R^D\left(e_1, e_2; \frac{\varepsilon_3}{2}(\mathrm{tr}A_3 e_3 - \mathrm{tr}A_4 e_4), e_4\right) = 0 \tag{5.16}$$

bulunur. Bu eşitlikten $R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla M yüzeyinin normal konneksiyonu düzdür. □

İlk olarak, aşağıdaki önerme ile $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının maksimal bir yüzeyinin Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul elde edilir.

Önerme 5.5. *M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş, maksimal bir yüzey olsun. M yüzeyinin Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin kendisinin ve normal konneksiyonunun düz olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş, maksimal bir yüzeyi olsun. Bu durumda ortalama eğrilik vektörü $H = 0$ olduğundan, (2.31) ve (5.1) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\|h\|^2 = -2K, \tag{5.17}$$

$$\Delta\nu = \|h\|^2\nu + 2R^D(e_1, e_2; e_3, e_4)e_1 \wedge e_2 \tag{5.18}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten ise

$$\Delta \nu = -2K\nu + 2R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) e_1 \wedge e_2 \tag{5.19}$$

bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyinin harmonik Gauss tasvirine sahip olması $K \equiv 0$ ve $R^D \equiv 0$ eştliklerinin sağlanmasıyla mümkündür. □

Aşağıda $\mathbb{E}_1^4$ uzayında harmonik Gauss tasvirine sahip, maksimal bir yüzey örneği verilmektedir.

Örnek 5.1. Ω, $\mathbb{R}^2$ uzayında açık bir küme, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında yer vektörü $x : \Omega \to \mathbb{E}_1^4$,

$$x(u,v) = (\phi(u,v), u, v, \phi(u,v)) \tag{5.20}$$

ile verilen bir M yüzeyi ele alınsın. Bu yüzey [34] numaralı makalede elde edilmiş biharmonik bir yüzeydir. M yüzeyi $\mathscr{H}_0 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}_1^4 | x_0 = x_3\}$ ile verilen dejenere olmuş bir $\mathscr{H}_0$ düzlemi içinde kalır, yani, $M \subset \mathscr{H}_0 \subset \mathbb{E}_1^4$ olur. Ayrıca, M yüzeyi üzerinde tanımlı bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanı, $\lambda = \sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}$ olmak üzere,

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad e_3 = \frac{1}{\lambda}(0, -\phi_u, -\phi_v, 1), \tag{5.21}$$

$$e_4 = -\frac{1}{\lambda}(\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1, \phi_u, \phi_v, \phi_u^2 + \phi_v^2) \tag{5.22}$$

şeklindedir ve $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = -\langle e_4, e_4 \rangle = 1$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \frac{\phi_{uu}}{\lambda}(e_3 - e_4), \tag{5.23a}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{\phi_{uv}}{\lambda}(e_3 - e_4), \tag{5.23b}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{\phi_{vv}}{\lambda}(e_3 - e_4), \tag{5.23c}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = -\frac{\phi_{uu}}{\lambda} e_1 - \frac{\phi_{uv}}{\lambda} e_2 + \frac{\phi_{uu}\phi_u + \phi_{uv}\phi_v}{\lambda^2} e_4, \tag{5.23d}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = -\frac{\phi_{uv}}{\lambda} e_1 - \frac{\phi_{vv}}{\lambda} e_2 + \frac{\phi_{uv}\phi_u + \phi_{vv}\phi_v}{\lambda^2} e_4, \tag{5.23e}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden, $\omega_{12} = 0$ olduğu, yani, M yüzeyinin düz olduğu görülür. Şekil operatörleri ve normal konneksiyon formunun bileşenleri

$$A_3 = A_4 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \phi_{uu} & \phi_{uv} \\ \phi_{uv} & \phi_{vv} \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

olarak bulunur. (2.14) ile verilen Ricci denklemi göz önüne alındığında, yüzeyin normal konneksiyonunun düz olduğu görülür. Ayrıca, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{\phi_{uu} + \phi_{vv}}{2\lambda}(e_3 - e_4) \tag{5.25}$$

şeklindedir. Özel olarak ϕ harmonik bir fonksiyon olarak seçilirse, $H = 0$ elde edilir, yani, M maksimaldir. Önerme 5.5'den dolayı yüzeyin Gauss tasviri harmoniktir.

Önerme 5.6. $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında normal demeti ve kendisi düz olan bir M maksimal yüzeyi, düzgün bir $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyonu için yer vektörü (5.20) ile verilen yüzeye veya bir düzlemin açık bir parçasına kongruenttir. Burada Ω, $\mathbb{R}^2$'de açık bir kümedir.

İspat. M, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında normal demeti ve kendisi düz olan bir maksimal yüzey olsun. Ayrıca, M yüzeyinin düzlemsel olmadığı varsayılsın. M yüzeyinin düz olmasından dolayı yüzey üzerinde indirgenmiş metrik $g = du^2 + dv^2$ olacak şekilde u, v yerel koordinatları vardır. M yüzeyi üzerinde tanımlı bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı, $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_v$ ve $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda, $\omega_{12} \equiv 0$ olur ve yüzeyin şekil operatörleri, M yüzeyi maksimal olduğu için

$$A_\beta = \begin{pmatrix} h^\beta_{11} & h^\beta_{12} \\ h^\beta_{12} & -h^\beta_{11} \end{pmatrix}, \quad \beta = 3,4$$

formundadır. Dolayısıyla, $\mathrm{tr}A_3 = \mathrm{tr}A_4 = 0$ olur. Ayrıca, M yüzeyi düz olduğu için $\det A_3 = \det A_4$ eşitliği sağlanır. İzleri ve determinantları aynı olan A_3 ve A_4 matrislerinin özdeğerleri eşittir. Bununla birlikte, $R^D = 0$ olmasından dolayı $A_3 = \mp A_4$ olur. Genellik bozulmaksızın $A_3 = A_4$ olduğu varsayılacaktır ($A_3 = -A_4$ olması durumunda $-e_4$ vektörü, e_4 olarak yeniden isimlendirilir).

Ω, $\mathbb{R}^2$'de açık bir küme olmak üzere $x : \Omega \to M \subset \mathbb{E}^4_1$ bir izometrik daldırma olsun. Bu durumda Gauss formüllerinden, $\omega_{12} \equiv 0$ olmasından dolayı

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u = x_{uu} = h^3_{11}(e_3 - e_4), \tag{5.26}$$

$$\nabla_{\partial_v}\partial_u = x_{uv} = h^3_{12}(e_3 - e_4), \tag{5.27}$$

$$\nabla_{\partial_v}\partial_v = x_{vv} = -h^3_{11}(e_3 - e_4) \tag{5.28}$$

bulunur. (5.26) ve (5.28) denklemlerinden,

$$x_{uu} + x_{vv} = 0 \tag{5.29}$$

elde edilir. Ayrıca, x_{uu}, x_{uv} ve x_{vv} ikişer ikişer linear bağımlı, ışıksal vektör alanlarıdır. Diğer taraftan, (5.26) denkleminden, Weingarten formüllerinin kullanılmasıyla, $A_3 = A_4$, yani, $h^3_{ij} = h^4_{ij}$ olmasından dolayı,

$$\begin{aligned} x_{uuu} &= \partial_u\left(h^3_{11}\right)(e_3-e_4)+h^3_{11}\Big(\big(\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3-\widetilde{\nabla}_{e_1}e_4\big)\Big) \\ &= \partial_u\left(h^3_{11}\right)(e_3-e_4)+h^3_{11}\Big(\big(-h^3_{11}e_1-h^3_{12}e_2-\omega_{34}(\partial_u)e_4\big) \\ &\quad -\big(-h^4_{11}e_1-h^4_{12}e_2-\omega_{34}(\partial_u)e_3\big)\Big) \qquad \textbf{(5.30)} \\ &= \left(\partial_u\left(h^3_{11}\right)+\omega_{34}(\partial_u)h^3_{11}\right)(e_3-e_4), \end{aligned}$$

aynı şekilde

$$x_{uuv} = \left(\partial_v\left(h^3_{11}\right)+\omega_{34}(\partial_v)h^3_{11}\right)(e_3-e_4) \qquad \textbf{(5.31)}$$

bulunur. Şimdi bir $y = (y^1,y^2,y^3,y^4) : \Omega \to \mathbb{E}^4_1$ tasviri, $y = x_{uu}$ olacak şekilde tanımlansın. (5.30) ve (5.31) denklemlerinden dolayı, uygun γ_1 ve γ_2 fonksiyonları için $y_u = \gamma_1 y$ ve $y_v = \gamma_2 y$ şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlikten, y vektör alanının koordinat fonksiyonlarının

$$y^i_u = \gamma_1 y^i, \quad y^i_v = \gamma_2 y^i, \quad i = 1,2,3,4 \qquad \textbf{(5.32)}$$

denklemlerini sağladığı görülür. Bu denklem takımının çözülmesiyle, $y^j = c_i y^1,\ j = 2,3,4$ bulunur. Burada, $c_j,\ j = 2,3,4$ bazı sabitlerdir. Dolayısıyla, $\eta_0 = (1,c_1,c_2,c_3)$ bir sabit vektör ve $\phi_1 = y^0$ olmak üzere

$$x_{uu} = \phi_1\eta_0 \qquad \textbf{(5.33)}$$

olur. Benzer işlemler yapılırsa, x_{uu}, x_{uv} ve x_{vv} ikişer ikişer lineer bağımlı vektörler oldukları için, $\phi_2,\phi_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$x_{uv} = \phi_2\eta_0, \qquad \textbf{(5.34)}$$

$$x_{vv} = \phi_3\eta_0 \qquad \textbf{(5.35)}$$

eşitlikleri elde edilir. x_{uu}, x_{uv} ve x_{vv} vektörlerinin ışıksal olmasıdan dolayı, η_0 da ışıksaldır. (5.33) - (5.35) denklemlerinin integre edilmesiyle, bazı $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve η_1, η_2 sabit vektörleri için

$$x = \phi(u,v)\eta_0 + u\eta_1 + v\eta_2 \qquad \textbf{(5.36)}$$

bulunur. (5.29) denkleminden dolayı, ϕ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar, yani, harmoniktir.

Bununla birlikte $\langle x_u, x_u\rangle = \langle x_v, x_v\rangle = 1$ ve $\langle x_u, x_v\rangle = 0$ olmasından dolayı, (5.36) denkleminden $\langle \eta_0, \eta_i\rangle = 0$, $\left\langle \eta_i, \eta_j\right\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,2$ bulunur. Genellik bozulmaksızın $\eta_0 = (1,1,0,0)$, $\eta_1 = (0,0,1,0)$ ve $\eta_2 = (0,0,0,1)$ seçilirse ispat tamamlanır. □

Önerme 5.5 ve Önerme 5.6 ile verilen sonuçların birleştirilmesiyle, aşağıdaki sınıflandırma teoremi verilir.

Teorem 5.7. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının maksimal bir M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul bir $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyonu için yer vektörü (5.20) ile verilen yüzeyin veya bir düzlemin açık bir parçasına kongruent olmasıdır. Burada Ω, $\mathbb{R}^2$'de açık bir kümedir.

Bu alt bölümün geri kalan kısmında $\mathbb{E}_1^4$ uzayında maksimal olmayan, harmonik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeylerin sınıflandırması elde edilecektir. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 5.8. M, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında maksimal olmayan bir uzaysal yüzey olsun. M yüzeyinin ν Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul ortalama eğrilik vektörünün paralel ve ışıksal, yüzeyin ise düz olmasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının maksimal olmayan uzaysal bir yüzeyi olsun. Gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin harmonik Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\Delta\nu = 0$ eşitliği sağlanır ve (5.1) denkleminden $\|h\|^2 = 0$ ve $R^D = 0$ elde edilir. $R^D = 0$ olmasından dolayı yüzeyin normal demeti düzdür. Dolayısıyla, e_3 ve e_4 vektörleri paralel olacak şekilde seçilebilir ve $\omega_{34} = 0$ olur. Böylece, (5.1) denkleminden

$$\nabla(\mathrm{tr}A_3) \wedge e_4 + e_3 \wedge \nabla(\mathrm{tr}A_4) = 0 \qquad \textbf{(5.37)}$$

elde edilir ve bu eşitlik $\mathrm{tr}A_3$ ve $\mathrm{tr}A_4$ fonksiyonlarının sabit olmasını gerektirir. Dolayısıyla $DH = 0$ olur, yani, ortalama eğrilik vektörü paraleldir. H vektörünün paralel olmasından dolayı, Yardımcı Teorem 5.3'ün (a) kısmından, α_0 bir sabit ve $\delta = \pm 1$ olmak üzere , $\langle H, H\rangle = \delta\alpha_0^2$ elde edilir.

Şimdi, ortalama eğrilik vektörünün ışıksal olduğu, yani, $\alpha = 0$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. $\alpha_0 \neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\|h\|^2 = 0$ olmasından dolayı (2.31) denkleminden $K = 2\alpha_0$ bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin sıfırdan farklı olmasından dolayı, $K \neq 0$ eşitsizliği sağlanır, yani, M yüzeyi düz değildir.

Bununla birlikte, yüzeyin normal konneksiyonun düz olmasından dolayı şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. $\langle H, H\rangle \neq 0$ eşitsizliğinden dolayı yüzey üzerindeki $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yerel, ortonormal baz alanı; e_3 vektörü H ile aynı doğrutuda, e_1 ve e_2 ise e_3 vektörünün asal doğrultuları olacak şekilde yeniden seçilirse, karşı gelen şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & 0 \\ 0 & h_{22}^3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_4 = \begin{pmatrix} h_{11}^4 & 0 \\ 0 & -h_{11}^4 \end{pmatrix}, \quad h_{11}^3 + h_{22}^3 = 2\alpha_0 \tag{5.38}$$

olarak elde edilir. $h_{11}^3 + h_{22}^3 = 2\alpha_0$ ve $\omega_{34} = 0$ eşitliklerinden dolayı, (2.16) Codazzi denklemleri

$$e_1(h_{22}^3) = -e_1(h_{11}^3) = \omega_{12}(e_2)\left(h_{11}^3 - h_{22}^3\right), \tag{5.39}$$

$$e_1(h_{22}^4) = -e_1(h_{11}^4) = 2\omega_{12}(e_2)h_{11}^4, \tag{5.40}$$

$$e_2(h_{11}^3) = -e_2(h_{22}^3) = \omega_{12}(e_1)\left(h_{11}^3 - h_{22}^3\right), \tag{5.41}$$

$$e_2(h_{11}^4) = -e_2(h_{22}^4) = 2\omega_{12}(e_1)h_{11}^4 \tag{5.42}$$

halini alır. $\|h\|^2 = 0$ olmasından dolayı ise

$$\left(h_{11}^3\right)^2 + \left(h_{22}^3\right)^2 = 2\left(h_{11}^4\right)^2 \tag{5.43}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$h_{11}^3 e_1(h_{11}^3) + h_{22}^3 e_1(h_{22}^3) = 2h_{11}^4 e_1(h_{11}^4), \tag{5.44}$$

$$h_{11}^3 e_2(h_{11}^3) + h_{22}^3 e_2(h_{22}^3) = 2h_{11}^4 e_2(h_{11}^4) \tag{5.45}$$

elde edilir. (5.39) - (5.42) eşitlikleri, bu iki denklemde yerine yazılırsa,

$$-\omega_{12}(e_2)\left((h_{11}^3 - h_{22}^3)^2 - 4(h_{11}^4)^2\right) = 0, \tag{5.46}$$

$$\omega_{12}(e_1)\left((h_{11}^3 - h_{22}^3)^2 - 4(h_{11}^4)^2\right) = 0 \tag{5.47}$$

eşitlikleri bulunur. M yüzeyinin düz olmamasından dolayı, $\omega_{12}(e_1)$ ve $\omega_{12}(e_2)$ fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, (5.46) ve (5.47) denklemlerinden

$$(h_{11}^3 - h_{22}^3)^2 = 4(h_{11}^4)^2 \tag{5.48}$$

elde edilir. Bu ifade ve (5.43) denkleminden $h_{11}^3 h_{22}^3 + (h_{11}^4)^2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyinin Gauss eğriliği $K = \varepsilon_3(h_{11}^3 h_{22}^3 + (h_{11}^4)^2) = 0$ olur. Yani M yüzeyi düzdür. Fakat bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\alpha_0 = 0$ olmalıdır, yani, H vektörü ışıksaldır. Dolayısıyla $\langle H, H \rangle = 0$ eşitliği sağlanır. $\|h\|^2 = \langle H, H \rangle = 0$ eşitlikleri (2.31) denkleminde yerine yazılırsa $K = 0$ elde edilir, yani, yüzey düzdür. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

Yeter koşulun ispatı için yüzeyin düz, ortalama eğrilik vektörünün ise paralel ve ışıksal olduğu varsayılsın. Bu durumda, $K = \langle H, H \rangle = 0$ olmasından dolayı, (2.31) denkleminden $\|h\|^2 = 0$ bulunur. Ortalama eğrilik vektörünün paralel ve ışıksal olmasından dolayı ise, Yardımcı Teorem 5.4 yüzeyin normal konneksiyonunun düz olmasını, yani, $R^D = 0$ eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Dolayısıyla, şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir, yani,

$$A_\beta = \begin{pmatrix} h_{11}^\beta & 0 \\ 0 & h_{22}^\beta \end{pmatrix}, \quad \beta = 3,4; \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1 \tag{5.49}$$

ve $\omega_{34} = 0$ olacak şekilde bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yerel, ortonormal baz alanı vardır. Ortalama eğrilik vektörünün ışıksal olmasından dolayı

$$\mathrm{tr}A_3 = \mathrm{tr}A_4 = \mu \neq 0 \quad \text{ve} \quad H = \frac{\mu}{2}(e_3 - e_4) \tag{5.50}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, yüzeyin ortalama eğriliğinin paralel olmasından dolayı $D_{e_i}H = 0,\ i = 1,2$ olur ve bu eşitlikten $D_{e_i}H = \frac{e_i(\mu)}{\mu}H = 0,\ i = 1,2$ bulunur. Dolayısıyla, μ fonksiyonu sabittir ve $\nabla(\mathrm{tr}A_3) = \nabla(\mathrm{tr}A_4) = 0$ olur. Bu eşitlikler, $R^D = 0$ ve $\|h\|^2 = 0$ eşitlikleri (5.1) denkleminde yerine yazılırsa $\Delta\nu = 0$ bulunur, yani, yüzeyin Gauss tasviri harmoniktir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıda $\mathbb{E}_1^4$ uzayında harmonik Gauss tasvirine sahip, maksimal olmayan, uzaysal bir yüzey örneği verilmektedir.

Örnek 5.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü

$$x = a(\cosh u, \sinh u, \cos u, \sin u),\ a > 0; \tag{5.51}$$

ile verilen M yüzeyi düzdür, ayrıca ortalama eğrilik vektörü ışıksal ve paraleldir, [24]. Teorem 5.8'den dolayı M yüzeyinin Gauss tasviri harmoniktir.

Bununla birlikte, [24] numaralı makalede aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.9. [24] $\mathbb{E}^4_1$ uzayının ışıksal ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip bir M yüzeyi aşağıdaki beş çeşit yüzeyden birine kongruenttir.

(i) Yer vektörü

$$x(s,t) = \left(\frac{1-b}{2}s^2 + \frac{1+b}{2}t^2, s, t, \frac{1-b}{2}s^2 + \frac{1+b}{2}t^2\right)$$

ile verilen düz, paralel yüzey;

(ii) Yer vektörü (5.51) ile verilen düz, paralel yüzey;

(iii) Sabit ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip, $\mathscr{H}_0 = \{(t, x_2, x_3, t)\}$ hiper düzleminde kalan, fakat ışık konisinin içinde kalmayan, paralel olmayan ve düz bir yüzey;

(iv) Tamamiyle $\mathscr{LC}$ ışık konisinde kalan, paralel olmayan, düz ve ortalama eğrilik vektörü ışıksal yüzey;

(v) $S^3_1(c^2)$ de Sitter uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü $\langle H', H' \rangle = -c^2$ eşitliğini sağlayan paralel olmayan yüzey;

(vi) $H^3(-c^2)$ anti-de Sitter uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü $\langle H', H' \rangle = c^2$ eşitliğini sağlayan paralel olmayan yüzey.

Burada $c \neq 0$ bir sabittir. Tersine, bu altı çeşit yüzeyin her biri ışıksal ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir.

Açıklama 5.2. [35] Teorem 5.9'da (i) ve (iii) ile verilen yüzey aileleri birleştirilerek tek bir yüzey ailesi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Ω, $\mathbb{R}^2$ uzayında açık bir küme, $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ ve $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Delta\phi = c$ denklemini sağlayan reel değerli düzgün bir fonksiyon olmak üzere, yer vektörü (5.20) ile verilen düz yüzey.

Açıklama 5.2 göz önüne alınarak Teorem 5.9 aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilir.

Teorem 5.10. [24, 35] $\mathbb{E}_1^4$ uzayının ışıksal ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip bir M yüzeyi aşağıdaki beş çeşit yüzeyden birine kongruenttir.

(i) Yer vektörü (5.51) ile verilen düz yüzey;

(ii) Ω, $\mathbb{R}^2$ uzayında açık bir küme, $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ ve $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Delta\phi = c$ denklemini sağlayan reel değerli düzgün bir fonksiyon olmak üzere, yer vektörü (5.20) ile verilen düz yüzey;

(iii) Tamamiyle $\mathscr{LC}$ ışık konisinde kalan, paralel olmayan, düz ve ortalama eğrilik vektörü ışıksal yüzey;

(iv) $S_1^3(c^2)$ de Sitter uzayda kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü H', $\langle H', H'\rangle = -c^2$ eşitliğini sağlayan paralel olmayan yüzey;

(v) $H^3(-c^2)$ hiperbolik (anti-de Sitter) uzayda kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü, $\langle H', H'\rangle = c^2$ eşitliğini sağlayan paralel olmayan yüzey.

Burada $c \neq 0$ bir sabittir. Tersine, bu beş çeşit yüzeyin her biri ışıksal ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir.

Theorem 5.10'da (iv) ve (v) ile verilen yüzeyler için aşağıdaki yardımcı teorem verilir.

Teorem 5.11. M, $\mathbb{S}_1^3(r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ de Sitter uzayında kalan bir uzaysal yüzey olsun. M'nin $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında ortalama eğriliği paralel ve ışıksal olan düz bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, yer vektörü

$$x(u,v) = \left(\frac{r}{2}(u^2+v^2), u, v, \frac{r}{2}(u^2+v^2) - \frac{1}{r}\right) \qquad \textbf{(5.52)}$$

ile verilen yüzeye kongruent olmasıdır.

İspat. $M \subset \mathbb{S}_1^3(r^2)$, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında H ortalama eğrilik vektörü ışıksal ve paralel olan, düz bir yüzey olsun. H paralel olduğu için, M yüzeyinin normal demeti düzdür. Dolayısıyla, şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. M yüzeyi düz olduğu için, M yüzeyinin indirgenmiş metrik tansörü, $g = du^2 + dv^2$ olacak şekilde u ve v yerel koordinatları vardır. Ω, $\mathbb{R}^2$ uzayında açık bir küme olmak üzere $x : \Omega \to M \subset \mathbb{S}_1^3(r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ bir izometrik daldırma olsun. Bu durumda $\langle x, x\rangle = r^{-2}$ olur. Dolayısıyla

M üzerinde tanımlı bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı, $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_v$, $e_3 = rx$ şeklindedir. Buradaki e_4 vektörü ise $H = r(e_3 - e_4)$ olacak şekilde seçilsin (H vektörünün bu şekilde yazılabileceği, örneğin, [33] numaralı makaledeki Lemma 2.2'den görülebilir). (2.6) ile verilen Weingarten formüllerinden $\widetilde{\nabla}_{\partial_u} e_3 = r\partial_u$ ve $\widetilde{\nabla}_{\partial_v} e_3 = r\partial_v$ elde edilir. Dolayısıyla, $A_3 = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$ olur. Ayrıca, M yüzeyinin düz olmasından ve $H = r(e_3 - e_4)$ eşitliğinden dolayı, $\det A_3 = \det A_4$ ve $\mathrm{tr} A_3 = \mathrm{tr} A_4$ eşitlikleri sağlanır, yani, A_3 ve A_4 matrislerinin özdeğerleri aynıdır. A_3 matrisinin birim matrisle orantılı olmasından dolayı, $A_3 = A_4$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, (2.5) ile verilen Gauss formüllerinden,

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_u} \partial_u = x_{uu} = -r^2 x + r e_4, \quad \textbf{(5.53a)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_u} \partial_v = x_{uv} = 0, \quad \textbf{(5.53b)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_v} \partial_v = x_{vv} = -r^2 x + r e_4 \quad \textbf{(5.53c)}$$

elde edilir. Bu denklemlerden ise x_1 ve x_2, $\mathbb{E}^4_1$ uzayına düzgün tasvirler ve C_1, $\mathbb{E}^4_1$ uzayında bir sabit vektör olmak üzere, $x = x_1(u) + x_2(v)$ ve

$$\frac{d^2 x_1(u)}{du^2} = \frac{d^2 x_2(v)}{dv^2} = 2C_1 \quad \textbf{(5.54)}$$

bulunur. Bu eşitlikler ve (5.53a) denklemlerinden $C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{E}^4_1$ sabit vektörler olmak üzere

$$x = (u^2 + v^2)C_1 + uC_2 + vC_3 + C_4 \quad \textbf{(5.55)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x_u = 2uC_1 + C_2$ ve $x_v = 2uC_1 + C_3$ olur ve $\langle x_u, x_u \rangle = 1$, $\langle x_u, x_v \rangle = 0$ ve $\langle x_v, x_v \rangle = 1$ eşitliklerinden, sırasıyla,

$$4u^2 \langle C_1, C_1 \rangle + 4u \langle C_1, C_2 \rangle + \langle C_2, C_2 \rangle = 1, \quad \textbf{(5.56)}$$

$$4uv \langle C_1, C_1 \rangle + 2u \langle C_1, C_3 \rangle + 2v \langle C_1, C_2 \rangle + \langle C_2, C_3 \rangle = 0, \quad \textbf{(5.57)}$$

$$4v^2 \langle C_1, C_1 \rangle + 4v \langle C_1, C_3 \rangle + \langle C_3, C_3 \rangle = 1 \quad \textbf{(5.58)}$$

bulunur. Ayrıca, $\langle x, x \rangle = r^{-2}$ ve (5.55) denklemlerinden ise

$$(u^2+v^2)^2 \langle C_1, C_1 \rangle + u^2 \langle C_2, C_2 \rangle + v^2 \langle C_3, C_3 \rangle + \langle C_4, C_4 \rangle + 2(u^2+v^2)u \langle C_1, C_2 \rangle$$
$$+ 2(u^2+v^2)v \langle C_1, C_3 \rangle + 2(u^2+v^2) \langle C_1, C_4 \rangle + uv \langle C_2, C_3 \rangle + u \langle C_2, C_4 \rangle + v \langle C_3, C_4 \rangle = r^{-2} \quad \textbf{(5.59)}$$

elde edilir. (5.56) - (5.59) denklemlerinden ise

$$\langle C_1, C_1\rangle = 0, \quad \langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1, \quad \langle C_4, C_4\rangle = \tfrac{1}{r^2}, \quad \langle C_1, C_4\rangle = -\tfrac{1}{2},$$
$$\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = \langle C_2, C_4\rangle = \langle C_3, C_4\rangle = 0$$

bulunur. Dolayısıyla C_1, C_2, C_3 ve C_4 vektörleri $\mathbb{E}_1^4$ Minkoski uzayının doğrusal izometrilerine göre tektir. Genellik bozulmaksızın $C_1 = \frac{r}{2}(1,0,0,1)$, $C_2 = (0,1,0,0)$, $C_3 = (0,0,1,0)$ ve $C_4 = \frac{1}{r}(0,0,0,-1)$ seçilerek (5.52) ile verilen yüzeye ulaşılır. □

Aşağıdaki teoremin ispatı, Teorem 5.11 ile aynı şekilde yapılır.

Teorem 5.12. *M*, $\mathbb{H}^3(-r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ hiperbolik uzayında kalan bir uzaysal yüzey olsun. *M*'nin $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının ortalama eğriliği paralel ve ışıksal olan düz bir yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul, yer vektörü

$$x(u,v) = \left(\frac{r}{2}(u^2+v^2) + \frac{1}{r}, u, v, \frac{r}{2}(u^2+v^2)\right) \tag{5.60}$$

ile verilen yüzeye kongruent olmasıdır.

Sonuç 5.13. $\mathbb{S}_1^3(r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ uzayı içinde kalan, harmonik Gauss tasvirine sahip bir yüzey, (5.52) ile verilen yüzeye; $\mathbb{H}_1^3(r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ uzayı içinde kalan, harmonik Gauss tasvirine sahip bir yüzey ise (5.60) ile verilen yüzeye kongruenttir.

Bu bölümde verilen sonuçların birleştirilmesiyle aşağıdaki teorem ifade edilir.

Sonuç 5.14. *M*, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında uzaysal bir yüzey olsun. Bu durumda, *M* yüzeyinin harmonik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki altı çeşit yüzeyden birine kongruent olmasıdır.

(i) Bir uzaysal düzlemin açık bir parçası;

(ii) Yer vektörü (5.51) ile verilen düz yüzey;

(iii) Ω, $\mathbb{R}^2$ uzayında açık bir küme, $c \in \mathbb{R}$ ve $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Delta\phi = c$ denklemini sağlayan reel değerli düzgün bir fonksiyon olmak üzere, yer vektörü (5.20) ile verilen düz yüzey;

(iv) Tamamiyle $\mathscr{LC}$ ışık konisinde kalan, paralel olmayan, düz ve ortalama eğrilik vektörü ışıksal yüzey;

(v) (5.52) ile verilen $\mathbb{S}_1^3(r^2)$ de-Sitter uzayında kalan yüzey;

(vi) (5.60) ile verilen $\mathbb{H}^3(r^2)$ hiperbolik uzayında kalan yüzey;

Açıklama 5.3. M, yer vektörü $\phi(u,v) = \frac{r}{2}(u^2+v^2)$ fonksiyonu için (5.20) ile verilmiş bir yüzey olsun. M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\psi_1(x) = x+(0,0,0,-\frac{1}{r})$ ve $\psi_2(x) = x+(\frac{1}{r},0,0,0)$ ötelemeleri altında görüntüleri, sırasıyla (5.52) ve (5.60) ile verilen yüzeylerdir. Dolayısıyla, Teorem (5.14)'de (v) ve (vi) ile verilen yüzeyler, (ii) ile verilen yüzey ailesine kongruenttir.

5.2 Birinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Uzaysal Yüzeyler

Bu bölümde $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının uzaysal yüzeyleri ele alınmıştır ve birinci çeşit noktasal bir tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler için sınıflandırma teoremleri verilmiştir.

İlk olarak $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal yüzeylerle ilgili aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.15. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş, maksimal bir yüzey olsun. M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul normal konneksiyonunun düz olmasıdır. Bu durumda, yüzeyin ν Gauss tasviri (2.47) denklemini $f = \|h\|^2$ ve $C = 0$ için sağlar.

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş ve maksimal bir yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyinin $\nu = e_3 \wedge e_4$ Gauss tasvirinin Laplasyeni, Önerme 5.5'in ispatında anlatıldığı gibi (5.18) denklemini sağlar. (5.18) denkleminden dolayı M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bazı düzgün f fonksiyonları için

$$f\nu = \|h\|^2\nu + 2R^D(e_1,e_2;e_3,e_4)e_1 \wedge e_2$$

eşitliğinin sağlanmasıdır ki bu da ancak ve ancak $R^D = 0$ olması, yani, M yüzeyinin normal konneksiyonunun düz olmasıyla mümkündür. □

Aşağıdaki yardımcı teorem daha sonra kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 5.16. M, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında maksimal bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip ise $f = \|h\|^2$ fonksiyonu,

$$e_1(f) = -4\varepsilon\omega_{12}(e_2)f, \tag{5.61}$$

$$e_2(f) = 4\varepsilon\omega_{12}(e_1)f \tag{5.62}$$

eşitliklerini sağlar. Burada $\{e_1, e_2\}$, M yüzeyinin teğet demeti için bir yerel ortonormal baz alanı, ω_{12} ise bu baz alanına karşı gelen konneksiyon formu ve $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ dir.

İspat. M, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal bir yüzey olsun. Bu durumda (2.47) denklemi $f = \|h\|^2$ fonksiyonu ve $C = 0$ vektörü için sağlanır. Ayrıca, Teorem 5.15'den dolayı M yüzeyinin normal konneksiyonu düzdür. Yüzeyin uzaysal olmasından dolayı şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. M yüzeyinin maksimal olduğu da göz önüne alınırsa, yüzey üzerinde $A_\beta = \mathrm{diag}(h^\beta_{11}, -h^\beta_{11})$, $\beta = 3, 4$ olacak şekilde bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanının mevcut olduğu görülür. (2.7) ve (2.24) - (2.29) denklemlerinin kullanılmasıyla $f = \|h\|^2$ fonksiyonu

$$f = \|h\|^2 = 2\Big(\varepsilon_3(h^3_{11})^2 + \varepsilon_4(h^4_{11})^2\Big), \tag{5.63}$$

ve $\beta = 3, 4$ için $h^\beta_{ij,k}$ terimleri ise

$$h^\beta_{11,2} = e_2(h^\beta_{11}) + \sum_{\gamma=3}^{4} \varepsilon_\gamma h^\gamma_{11}\omega_{\gamma\beta}(e_2), \tag{5.64a}$$

$$h^\beta_{12,k} = 2\omega_{12}(e_k)h^\beta_{11}, \tag{5.64b}$$

$$h^\beta_{22,1} = e_1(-h^\beta_{11}) + \sum_{\gamma=3}^{4} \varepsilon_\gamma(-h^\gamma_{11})\omega_{\gamma\beta}(e_1) \tag{5.64c}$$

olarak elde edilir. (2.16) ile verilen Codazzi denklemleri ve (5.64) denklemlerinden

$$e_1(h^3_{11}) - \varepsilon_4 h^4_{11}\omega_{34}(e_1) = -2\omega_{12}(e_2)h^3_{11}, \tag{5.65a}$$

$$e_1(h^4_{11}) + \varepsilon_3 h^3_{11}\omega_{34}(e_1) = -2\omega_{12}(e_2)h^4_{11}, \tag{5.65b}$$

$$e_2(h^3_{11}) - \varepsilon_4 h^4_{11}\omega_{34}(e_2) = 2\omega_{12}(e_1)h^3_{11}, \tag{5.65c}$$

$$e_2(h^4_{11}) + \varepsilon_3 h^3_{11}\omega_{34}(e_2) = 2\omega_{12}(e_1)h^4_{11} \tag{5.65d}$$

bulunur. (5.65a) ve (5.65b) denklemleri, sırasıyla, $\varepsilon_3 h^3_{11}$ ve $\varepsilon_4 h^4_{11}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\varepsilon_3 h^3_{11} e_1(h^3_{11}) + \varepsilon_4 h^4_{11} e_1(h^4_{11}) = -2\omega_{12}(e_2)\left(\varepsilon_3 (h^3_{11})^2 + \varepsilon_4 (h^4_{11})^2\right) \qquad \textbf{(5.66)}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılır ve (5.63) eşitliği kullanılırsa, (5.61) denklemine ulaşılır. Aynı şekilde, (5.65c) ve (5.65d) denklemleri, sırasıyla, $\varepsilon_3 h^3_{11}$ ve $\varepsilon_4 h^4_{11}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa, (5.62) denkleminin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 5.17. *M*, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında yönlendirilmiş ve maksimal bir yüzey olsun. *M* yüzeyinin birinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması, ancak ve ancak Gauss tasvirinin harmonik olması ile mümkündür.

İspat. $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının birinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip, maksimal bir *M* yüzeyi ele alınsın. Bu durumda Teorem 5.15'den dolayı, yüzeyin normal konneksiyonu düzdür. Ayrıca, yüzeyin Gauss tasviri, (2.47) denklemini, f_0 bir sabit olmak üzere, $f = f_0$ için sağlar. Daha fazlası, Yardımcı Teorem 5.16'dan dolayı, $f = \|h\|^2 = f_0$ fonksiyonu (5.61) ve (5.62) denklemlerini sağlar. Bu denklemlerden

$$\omega_{12}(e_1) f_0 = \omega_{12}(e_2) f_0 = 0 \qquad \textbf{(5.67)}$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla, $f_0 = 0$ veya $\omega_{12} = 0$ olmalıdır. $f_0 = 0$ eşitliğinin sağlanması durumunda $\Delta\nu = f_0\nu = 0$ olacağından *M* yüzeyinin Gauss tasviri harmoniktir. $\omega_{12} = 0$ olması durumunda ise *M* yüzeyi düzdür. *M* yüzeyinin kendisinin ve normal konneksiyonunun düz olmasından dolayı, Teorem 5.5, *M* yüzeyinin Gauss tasvirinin harmonik olmasını gerektirir. Böylelikle gerek koşulun ispatı tamamlanmış olur. Yeter koşulun ispatı açıktır. □

Birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal olmayan uzaysal yüzeylerin belirlenmesi için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.18. *M*, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayında maksimal olmayan ve yönlendirilmiş uzaysal bir yüzey olsun. *M* yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, ortalama eğrilik vektörünün paralel olmasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında maksimal olmayan ve yönlendirilmiş bir uzaysal yüzey olsun. İlk olarak, gerek koşulun ispatı için, yüzeyin ν Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (2.47) denklemi $f = \|h\|^2$ ve $C = 0$ için sağlanır. (2.47) ve (5.1) denklemlerinden $R^D = 0$ ve

$$\nabla(\mathrm{tr}A_3) \wedge e_4 + e_3 \wedge \nabla(\mathrm{tr}A_4) + 2\sum_{j=1}^{2} \omega_{34}(e_j)H \wedge e_j = 0 \tag{5.68}$$

elde edilir. $R^D = 0$ olmasından dolayı, yüzeyin normal demetinin, $\omega_{34} \equiv 0$ olacak şekilde, bir $\{e_3, e_4\}$ ortonormal baz alanı vardır. Dolayısıyla, (5.68) denkleminden $\nabla\mathrm{tr}A_3 = \nabla\mathrm{tr}A_4 = 0$ elde edilir. $\omega_{34} \equiv 0$ ve $\nabla\mathrm{tr}A_3 = \nabla\mathrm{tr}A_4 = 0$ olmasından dolayı yüzeyin ortalama eğrilik vektörü paraleldir.

Yeter koşulun ispatı için H ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu kabul edilsin. Bu durumda Yardımcı Teorem 5.4'den dolayı $R^D = 0$ olur. Dolayısıyla, yüzeyin normal demetinin, $\omega_{34} \equiv 0$ olacak şekilde, bir $\{e_3, e_4\}$ ortonormal baz alanı vardır. $H = \frac{\varepsilon_3}{2}(\mathrm{tr}A_3 e_3 - \mathrm{tr}A_4 e_4)$ vektörünün paralel olmasından dolayı $\mathrm{tr}A_3$ ve $\mathrm{tr}A_4$ fonksiyonları sabittir yani, $\nabla\mathrm{tr}A_3 = \nabla\mathrm{tr}A_4 = 0$ olur. Dolayısıyla, $n = 2$ için (5.1) denkleminden $\Delta\nu = \|h\|^2\nu$ elde edilir, yani, ν Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1-tipindendir. □

Aşağıda has noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir yüzey örneği verilmektedir.

Örnek 5.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü

$$\begin{aligned} x(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(& u\cosh\sqrt{2}v, u\sinh\sqrt{2}v, \sqrt{2}\sin\sqrt{2}u - u\cos\sqrt{2}u, \\ & \sqrt{2}\cos\sqrt{2}u + u\sin\sqrt{2}u \Big) \end{aligned} \tag{5.69}$$

ile verilen bir M yüzeyi ele alınsın. Bu yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu ve $\mathbb{S}_1^3(1) \subset \mathbb{E}_1^4$ de Sitter uzayında kaldığı [24] numaralı makalede gösterilmiştir. Dolayısıyla, Teorem 5.18'den M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür.

Diğer taraftan, $\langle x_u, x_u \rangle = u^2$, $\langle x_u, x_v \rangle = 0$ ve $\langle x_v, x_v \rangle = u^2$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, M yüzeyi üzerinde tanımlı bir ortonormal çatı alanı,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}, \quad e_3 = x, \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}u} \Big((1+u^2)\cosh\sqrt{2}v, (1+u^2)\sinh\sqrt{2}v, \\ & \quad \sqrt{2}u\sin\sqrt{2}u + (1-u^2)\cos\sqrt{2}u, \sqrt{2}u\cos\sqrt{2}u - (1-u^2)\sin\sqrt{2}u \Big) \end{aligned} \tag{5.70}$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir ve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ olur.

Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = e_1, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = e_2, \quad \widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = \frac{1+u^2}{u^2} e_1, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_4 = \frac{-1+u^2}{u^2} e_2 \qquad \textbf{(5.71)}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden şekil operatörleri

$$A_3 = -I, \quad A_4 = \operatorname{diag}\Big((-u^2-1)/u^2, (-u^2+1)/u^2\Big) \qquad \textbf{(5.72)}$$

olarak bulunur. Ayrıca, (2.47) denklemi $C = 0$ vektörü ve sabit olmayan $f = \|h\|^2 = -2u^{-4}$ fonksiyonu için sağlanır. Yani, M yüzeyi has birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.

[36] numaralı makalede $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının ortalama eğrilik vektörü paralel olan yüzeylerinin karakterizasyonu elde edilmiş ve aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.19. [36] $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal bir M yüzeyi aşağıda verilen 12 çeşit yüzeyden birine kongruenttir:

(1) E_1^4 Minkowski uzayının bir maksimal yüzeyi;

(2) $\mathscr{LC} \subset \mathbb{E}_1^4$ ışık konisinde kalan sabit ortalama eğriliğe sahip yüzey;

(3) $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ Euclid uzayında kalan sabit ortalama eğriliğe sahip yüzey;

(4) $\mathbb{E}_1^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında kalan sabit ortalama eğriliğe sahip yüzey;

(5) $r > 0$ olmak üzere $\mathbb{S}_1^3(r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ de-Sitter uzayında kalan sabit ortalama eğriliğe sahip yüzey;

(6) $r > 0$ olmak üzere $\mathbb{H}^3(-r^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ hiperbolik uzayında kalan sabit ortalama eğriliğe sahip yüzey;

(7) Yer vektörü (5.51) ile verilen düz, paralel yüzey;

(8) Yer vektörü

$$x(s,t) = \left(\frac{1-b}{2}s^2 + \frac{1+b}{2}t^2, s, t, \frac{1-b}{2}s^2 + \frac{1+b}{2}t^2\right)$$

ile verilen düz, paralel yüzey;

(9) Sabit ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip, $\mathscr{H}_0 = \{(t, x_2, x_3, t)\}$ hiper düzleminde kalan, fakat ışık konisinin içinde kalmayan, paralel olmayan, düz yüzey;

(10) Tamamiyle $\mathscr{LC}$ ışık konisinde kalan, paralel olmayan, düz, ortalama eğrilik vektörü ışıksal yüzey;

(11) $S_1^3(c^2)$ de Sitter uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü, $\langle H', H' \rangle = -c^2$ eşitliğini sağlayan, düz veya paralel olmayan yüzey;

(12) $H^3(-c^2)$ hiperbolik uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü, $\langle H', H' \rangle = c^2$ eşitliğini sağlayan, düz veya paralel olmayan yüzey.

Teorem 5.18 ve Teorem 5.19 birleştirilerek aşağıdaki karakterizasyon teoremi elde edilir.

Teorem 5.20. *M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında maksimal olmayan ve yönlendirilmiş uzaysal bir yüzey olsun ve yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün uzaysal veya zamansal olduğu varsayılsın. Bu durumda, M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin $\mathscr{LC} \subset \mathbb{E}_1^4$ ışık konisinin, $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ 3-boyutlu Euclid uzayının, $\mathbb{E}_1^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ 3-boyutlu Minkowski uzayının, $\mathbb{S}_1^3(c^2) \subset \mathbb{E}_1^4$ de Sitter uzayının veya $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ hiperbolik uzayının içinde kalması ve ortalama eğriliğinin sabit olmasıdır.*

Asağıdaki önerme ile ortalama eğrilik vektörü ışıksal olan bir uzaysal yüzeyin Gauss tasvirinin birinci çeşit (global) 1-tipinden olmasının harmonik olmasına denk olduğu elde edilir:

Önerme 5.21. *M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının, ortalama eğrilik vektörü ışıksal olan uzaysal bir yüzeyi olsun. M yüzeyinin birinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması, ancak ve ancak Gauss tasvirinin harmonik olması ile mümkündür.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının, ortalama eğrilik vektörü ışıksal olan bir yüzeyi olsun ve yüzeyin Gauss tasviri ν ile gösterilsin. Ayrıca, yüzeyin harmonik olmayan birinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Yani, ν tasviri, (2.47) denklemini $f_0 \neq 0$ bir sabit olmak üzere $f = \|h\|^2 = f_0$ fonksiyonu ve $C = 0$ vektörü için sağlasın. Bu durumda, Teorem 5.18'den dolayı, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü H paralel olur. Ayrıca, ν tasvirinin harmonik olmamasından dolayı, Teorem 5.8 ve Teorem 5.10, M yüzeyinin aşağıdaki iki çeşit yüzeyden birine kongruent olmasını gerektirir.

(i) $\mathbb{S}_1^3(r^2)$ de Sitter uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü, $\langle H', H'\rangle = -r^2$ eşitliğini sağlayan, düz veya paralel olmayan yüzey;

(ii) $\mathbb{H}^3(-r^2)$ hiperbolik uzayında kalan ve bu uzaydaki H' ortalama eğrilik vektörü, $\langle H', H'\rangle = r^2$ eşitliğini sağlayan, düz veya paralel olmayan yüzey.

$x : \Omega \to M \subset \mathbb{E}_1^4$, M yüzeyinin yer vektörü olsun. Bu durumda, $\langle x, x\rangle = \varepsilon_3 r^{-2}$ eşitliği sağlanır. Burada ε_3, M yüzeyinin $S_1^3(r^2)$ veya $H^3(-r^2)$ uzaylarında kalmasına göre, sırasıyla, +1 veya -1 dir. e_3 vektörü, $e_3 = rx$ şekilde seçilecek olursa, yüzeyin ortalama eğrilik vektörü, e_4 uygun bir birim normal vektör olmak üzere, $H = \varepsilon_3 r(e_3 - e_4)$ olarak elde edilir ve $\omega_{34} = 0$ olur.

$\Delta\nu = f_0\nu$ olmasından dolayı, (5.1) denkleminden $R^D = 0$ bulunur, yani, yüzeyin normal konneksiyonu düzdür ve şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. Dolayısıyla, yüzeyin teğet uzayının

$$A_3 = \mathrm{diag}(h_{11}^3, h_{22}^3) \quad \text{ve} \quad A_4 = \mathrm{diag}(h_{11}^4, h_{22}^4) \tag{5.73}$$

olacak şekilde bir $\{e_1, e_2\}$ yerel baz alanı vardır ve

$$h_{11}^3 + h_{22}^3 = h_{11}^4 + h_{22}^4 = 2r \tag{5.74}$$

olur. $\|h\|^2$ ve $\langle H, H\rangle$ sabit olduğu için, (2.31) denkleminden dolayı yüzeyin Gauss eğriliği K sabittir, yani, K_0 bir sabit olmak üzere $K_0 = \varepsilon_3(h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{11}^4 h_{22}^4)$ olur. Sırasıyla, bu eşitlik ve (5.74) denkleminden elde edilen

$$e_i(h_{11}^3)h_{22}^3 + h_{11}^3 e_i(h_{22}^3) = e_i(h_{11}^4)h_{22}^4 + h_{11}^4 e_i(h_{22}^4) \tag{5.75}$$

ve

$$e_i(h_{11}^\beta) = -e_i(h_{22}^\beta), \quad i = 1, 2,\ \beta = 3, 4 \tag{5.76}$$

eşitliklerinden

$$e_i(h_{11}^3)(h_{11}^3 - h_{22}^3) = e_i(h_{11}^4)(h_{11}^4 - h_{22}^4) \tag{5.77}$$

denklemleri bulunur. Bununla birlikte, M yüzeyi için (2.16) Codazzi denklemleri

$$e_1(h^\beta_{11}) = -\omega_{12}(e_2)(h^\beta_{11} - h^\beta_{22}), \tag{5.78}$$

$$e_2(h^\beta_{11}) = \omega_{12}(e_1)(h^\beta_{11} - h^\beta_{22}), \quad \beta = 3,4 \tag{5.79}$$

halini alır. Bu denklemler, (5.77) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\omega_{12}(e_i)\Big((h^3_{11} - h^3_{22})^2 - (h^4_{11} - h^4_{22})^2\Big) = 0, \quad i = 1,2 \tag{5.80}$$

bulunur. M yüzeyinin düz olmamasından dolayı $\omega_{12} \equiv 0$ olamaz. Dolayısıyla, (5.80) denkleminden $(h^3_{11} - h^3_{22})^2 = (h^4_{11} - h^4_{22})^2$ elde edilir. Dolayısıyla, $f_0 = \|h\|^2 = 0$ olur ki bu bir çelişkidir, dolayısıyla, M yüzeyinin Gauss tasviri, birinci çeşit (global) 1-tipinden ise harmoniktir. □

Teorem 5.22. $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının maksimal olmayan bir uzaysal M yüzeyinin birinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin paralel ortalama eğrilik vektörüne ve sabit Gauss eğriliğine sahip olmasıdır.

İspat. $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının maksimal olmayan bir M uzaysal yüzeyinin birinci çeşit 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, f_0 bir sabit olmak üzere, $\|h\|^2 = f_0$ olur. Ayrıca, Teorem 5.18'den dolayı M yüzeyi paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir ve Yardımcı Teorem 5.3'den dolayı $\langle H, H\rangle$ sabit olur. Böylece (2.31) denkleminden yüzeyin Gauss eğriliği sabit çıkar, dolayısıyla gerek koşulun ispatı tamamlanmış olur.

Yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olması koşulu, Teorem 5.18'den dolayı $\Delta\nu = \|h\|^2\nu$ eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Bu koşul ile birlikte Gauss eğriliğinin sabit olması durumunda ise (2.31) denkleminden dolayı $\|h\|^2$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. Dolayısıyla, yüzey birinci çeşit 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir. □

Aşağıda global 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal bir yüzey örneği verilmektedir:

Örnek 5.4. $\mathbb{E}^4_1$ uzayında, yer vektörü

$$x(u,v) = (a\cosh u, a\sinh u, b\cos v, b\sin v), \quad b^2 - a^2 \neq 0, \quad ab \neq 0 \tag{5.81}$$

ile verilen bir M yüzeyi ele alınsın. Bu durumda, $c = \sqrt{\varepsilon(b^2 - a^2)}$ olmak üzere, $\langle x(u,v), x(u,v)\rangle = \varepsilon c^2$, eşitliği sağlanır. Burada $\varepsilon = \pm 1$, $b^2 - a^2$ sayısının işaretidir. $\varepsilon = 1$ olması durumunda $M = H^1(-a^{-2}) \times S^1(b^{-2}) \subset S^3_1(c^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_1$, $\varepsilon = -1$ olması durumunda ise $M = H^1(-a^{-2}) \times S^1(b^{-2}) \subset H^3(-c^{-2}) \subset \mathbb{E}^4_1$ olur. Ayrıca, M yüzeyi üzerinde tanımlı bir çatı alanı,

$$e_1 = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial v}, \quad e_3 = \frac{1}{c}x, \quad e_4 = \frac{1}{c}(b\cosh u, b\sinh u, a\cos v, a\sin v) \quad \textbf{(5.82)}$$

şeklindedir ve $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1, \quad \langle e_3, e_3\rangle = -\langle e_4, e_4\rangle = \varepsilon$ olur.

Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = \frac{1}{c}e_1, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = \frac{1}{c}e_2, \quad \textbf{(5.83)}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = \frac{b}{ac}e_1, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_4 = \frac{a}{bc}e_2 \quad \textbf{(5.84)}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$A_3 = \frac{-1}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{-1}{c}\begin{pmatrix} b/a & 0 \\ 0 & a/b \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \omega_{34} = 0 \quad \textbf{(5.85)}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$H = \frac{\varepsilon}{c}(-e_3 + \frac{a^2+b^2}{2ab}e_4), \quad DH = 0 \quad \text{ve} \quad \|h\|^2 = \frac{1}{2} \quad \textbf{(5.86)}$$

olur. Bu eşitlikler, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, M yüzeyinin Gauss tasvirinin $\Delta\nu = \frac{1}{2}\nu$ eşitliğini sağladığı bulunur. Dolayısıyla, M yüzeyi birinci çeşit 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.

5.3 İkinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Uzaysal Yüzeyler

Bu bölümde $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyleri çalışılmıştır. İlk olarak maksimal yüzeyler ele alınmış ve bir maksimal yüzeyin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için bir düzlemin açık bir parçasından ibaret olması gerektiği gösterilmiştir. Daha sonra ise ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip, sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin tam sınıflandırılması elde edilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar [32] numaralı çalışmada yayınlanmıştır.

5.3.1 İkinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal yüzeyler

Aşağıdaki teoremle $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal yüzeylerinin sınıflandırması elde edilir.

Teorem 5.23. $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının maksimal bir yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.

İspat. M, $\mathbb{E}^4_1$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş ve maksimal bir yüzeyi olsun. Bu durumda, $H \equiv 0$ olur ve M yüzeyi üzerinde tanımlı, karşı gelen şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} h^3_{11} & 0 \\ 0 & -h^3_{11} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_4 = \begin{pmatrix} h^4_{11} & h^4_{12} \\ h^4_{12} & -h^4_{11} \end{pmatrix} \tag{5.87}$$

formunda olan bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanı vardır. Ayrıca, M yüzeyi maksimal olduğu için, yüzeyin Gauss tasviri (5.18) denklemini sağlar.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda düzgün bir f fonksiyonu ve sıfırdan farklı bir $C \in \mathbb{E}^6_3$ sabit vektörü için (2.47) denklemi sağlanır. Bu iki denklemden

$$f(\nu + C) = \|h\|^2 \nu + 2R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) e_1 \wedge e_2 \tag{5.88}$$

elde edilir. Ayrıca, C vektörü sabit olduğu için Yardımcı Teorem 2.3'den dolayı C vektörünün $C_{12}, C_{13}, \ldots, C_{34}$ bileşenleri, (2.46) denklemlerini sağlarlar.

(5.88) denkleminden

$$C_{13} = C_{14} = C_{23} = C_{24} = 0 \tag{5.89}$$

elde edilir. (5.87) ve (5.89) denklemlerinin $i = 1, 2$ için (2.46b) ve (2.46e) denklemlerinde yerine yazılmasıyla

$$C_{12} h^4_{11} = C_{34} h^4_{11} = 0, \tag{5.90}$$

$$C_{12} h^3_{11} + C_{34} h^4_{12} = C_{12} h^4_{12} - C_{34} h^3_{11} = 0 \tag{5.91}$$

eşitlikleri elde edilir. C vektörü sıfırdan farklı olduğu için C_{12} ve C_{34} fonksiyonlarından biri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, (5.90) ve (5.91) denklemlerinden $h^3_{11} = h^4_{11} = h^4_{12} =$

0 elde edilir ve $h \equiv 0$ olur ki bu da M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ uzayınının uzaysal bir düzleminin açık bir parçası olduğunu gösterir.

Yeter koşulun ispatı, Sonuç 5.2'de verilmiştir. □

Teorem 5.7, Teorem 5.15, Önerme 5.17 ve Teorem 5.23 kullanılarak $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip maksimal yüzeylerinin bir karakterizasyonu aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 5.24. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının maksimal bir yüzeyi olsun. M yüzeyinin noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul normal demetinin düz olmasıdır. Eğer M yüzeyi, bir $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyonu için yer vektörü (5.20) ile verilen yüzey ise Gauss tasviri harmonik, aksi taktirde has birinci çeşit noktasal 1-tipindendir. Burada Ω, $\mathbb{R}^2$ de açık bir kümedir.

5.3.2 Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip, sabit ortalama eğrilikli uzaysal yüzey örnekleri

Bu bölümde ilk olarak ikinci çeşit noktasal bir tipinden Gauss tasvirine sahip, sabit ortalama eğrilikli uzaysal yüzey örnekleri elde edilmiştir.

Örnek 5.5. a_0, b_0 ve c_0 sıfırdan farklı sabitler ve $c_0^2 = b_0^2 - a_0^2$ olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında yer vektörü

$$x(s,t) = (a_0 s, b_0 \cos s, b_0 \sin s, t) \tag{5.92}$$

ile verilen M yüzeyi göz önüne alınsın. Bu yüzey, birinci cins helissel silindir olarak isimlendirilir. M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal bir çatı alanı,

$$e_1 = \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.93}$$

$$e_3 = (0, \cos s, \sin s, 0), \quad e_4 = (\frac{b_0}{c_0}, -\frac{a_0}{c_0}\sin s, \frac{a_0}{c_0}\cos s, 0) \tag{5.94}$$

olmak üzere, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir ve $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = -\langle e_4, e_4 \rangle = 1$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = -\frac{b_0}{c_0^2} e_3, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0, \quad \widetilde{\nabla} e_2 = 0, \\
&\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = \frac{b_0}{c_0^2} e_1 - \frac{a_0}{c_0^2} e_4, \quad \widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = -\frac{a_0}{c_0^2} e_3, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = \widetilde{\nabla}_{e_2} e_4 = 0
\end{aligned} \tag{5.95}$$

bulunur. Bu eşitliklerden $\omega_{12} \equiv 0$, $\omega_{34}(e_1) = \frac{a_0}{c_0^2}$, $\omega_{34}(e_2) = 0$ elde edilir ve şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{b_0}{c_0^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = 0 \tag{5.96}$$

olur. Dolayısıyla, $\|h\|^2 = b_0^2/c_0^4$, $R^D = 0$, $\nabla \mathrm{tr} A_\beta = 0$ ve $H = -b_0/(2c_0^2)e_3$ elde edilir. Bu eşitlikler, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, M yüzeyinin Gauss tasvirinin

$$\Delta\nu = \frac{b_0^2}{c_0^4}\nu + \frac{a_0 b_0}{c_0^4} e_1 \wedge e_3 \tag{5.97}$$

eşitliğini sağladığı görülür.

M yüzeyinin Gauss tasviri, (2.47) denklemini $f = \frac{1}{c_0^2}$ ve $C = \frac{a_0^2}{c_0^2}\nu + \frac{a_0 b_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_3$ için sağlar. Bununla birlikte $\widetilde{\nabla}_{e_2} e_A = 0$ olduğu için $e_2(C) = 0$ olduğu hemen görülür. Ayrıca, (5.95) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} e_1(C) &= \frac{a_0^2}{c_0^2} e_1(\nu) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2} e_1(e_1 \wedge e_3) \\ &= \frac{a_0^2}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 \wedge e_4 + e_3 \wedge \widetilde{\nabla}_{e_1} e_4) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge \widetilde{\nabla}_{e_1} e_3) \\ &= \frac{a_0^2}{c_0^2}\left(\frac{b_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_4 + 0\right) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2}\left(0 + \frac{-a_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_4\right) = 0 \end{aligned} \tag{5.98}$$

bulunur. Dolayısıyla, C vektörü sabittir ki bu durum M yüzeyinin ikinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğunu gösterir.

Örnek 5.6. $a_0 \neq 0$ ve $b_0 \neq 0$ bazı sabitler olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü

$$x(s,t) = (b_0 \cosh s, b_0 \sinh s, a_0 s, t) \tag{5.99}$$

ile verilen M yüzeyi göz önüne alınsın. Bu yüzey, ikinci cins helissel silindir olarak isimlendirilir. M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal bir çatı alanı,

$$e_1 = \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.100}$$

$$e_3 = (\cosh s, \sinh s, 0, 0), \quad e_4 = (\frac{a_0}{c_0}\sinh s, \frac{a_0}{c_0}\cosh s, -\frac{b_0}{c_0}, 0) \tag{5.101}$$

ve $c_0^2 = a_0^2 + b_0^2$ olmak üzere, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir ve $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = \langle e_4, e_4\rangle = 1$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{gathered} \widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \frac{b_0}{c_0^2} e_3, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0, \quad \widetilde{\nabla} e_2 = 0, \\ \widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = \frac{b_0}{c_0^2} e_1 + \frac{a_0}{c_0^2} e_4, \quad \widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = \frac{a_0}{c_0^2} e_3, \quad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = \widetilde{\nabla}_{e_2} e_4 = 0 \end{gathered} \tag{5.102}$$

bulunur. Bu eşitliklerden $\omega_{12} \equiv 0$, $\omega_{34}(e_1) = \frac{a_0}{c_0^2}$, $\omega_{34}(e_2) = 0$ elde edilir ve şekil operatörleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{b_0}{c_0^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = 0 \qquad \textbf{(5.103)}$$

olur. Dolayısıyla $\|h\|^2 = -b_0^2/c_0^4$, $R^D = 0$, $\nabla \mathrm{tr} A_\beta = 0$ ve $H = b_0/(2c_0^2)e_3$ elde edilir. Bu eşitlikler, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, M yüzeyinin Gauss tasvirinin

$$\Delta\nu = -\frac{b_0^2}{c_0^4}\nu - \frac{a_0 b_0}{c_0^4} e_1 \wedge e_3 \qquad \textbf{(5.104)}$$

eşitliğini sağladığı bulunur.

M yüzeyinin Gauss tasviri, (2.47) denklemini $f = -\frac{1}{c_0^2}$ ve $C = -\frac{a_0^2}{c_0^2}\nu + \frac{a_0 b_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_3$ için sağlar. Bununla birlikte, $\widetilde{\nabla}_{e_2} e_A = 0$ olduğu için $e_2(C) = 0$ olduğu hemen görülür. Ayrıca, (5.102) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} e_1(C) &= -\frac{a_0^2}{c_0^2} e_1(\nu) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2} e_1(e_1 \wedge e_3) \\ &= -\frac{a_0^2}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 \wedge e_4 + e_3 \wedge \widetilde{\nabla}_{e_1} e_4) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge \widetilde{\nabla}_{e_1} e_3) \qquad \textbf{(5.105)} \\ &= -\frac{a_0^2}{c_0^2}\left(\frac{b_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_4 + 0\right) + \frac{a_0 b_0}{c_0^2}\left(0 + \frac{a_0}{c_0^2} e_1 \wedge e_4\right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, C vektörü sabittir. Böylece, M yüzeyinin ikinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür.

Örnek 5.7. a_0, b_0 ve c_0 sıfırdan farklı sabitler ve $c_0^2 = a_0^2 - b_0^2$ olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında, yer vektörü

$$x(s,t) = (b_0 \sinh s, b_0 \cosh s, a_0 s, t) \qquad \textbf{(5.106)}$$

ile verilen M yüzeyi göz önüne alınsın. Bu yüzey, üçüncü cins helissel silindir olarak isimlendirilir. M yüzeyi üzerinde tanımlı ortonormal bir çatı alanı,

$$e_1 = \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \textbf{(5.107)}$$

$$e_3 = (\sinh s, \cosh s, 0, 0), \quad e_4 = (\frac{a_0}{c_0}\cosh s, \frac{a_0}{c_0}\sinh s, \frac{b_0}{c_0}, 0) \qquad \textbf{(5.108)}$$

olmak üzere, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ şeklindedir ve $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = -\langle e_4, e_4\rangle = 1$ olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1=\frac{b_0}{c_0^2}e_3,\quad \widetilde{\nabla}_{e_2}e_1=0,\quad \widetilde{\nabla}e_2=0,\\
&\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3=-\frac{b_0}{c_0^2}e_1+\frac{a_0}{c_0^2}e_4,\quad \widetilde{\nabla}_{e_1}e_4=\frac{a_0}{c_0^2}e_3,\quad \widetilde{\nabla}_{e_2}e_3=\widetilde{\nabla}_{e_2}e_4=0
\end{aligned} \tag{5.109}$$

bulunur. Bu eşitliklerden $\omega_{12}\equiv 0$, $\omega_{34}(e_1)=-\frac{a_0}{c_0^2}$, $\omega_{34}(e_2)=0$ elde edilir ve şekil operatörleri

$$A_3=\begin{pmatrix}\frac{b_0}{c_0^2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_4=0 \tag{5.110}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\|h\|^2=\frac{b_0^2}{c_0^4},\quad R^D=0,\quad \nabla\mathrm{tr}A_\beta=0\quad \text{ve}\quad H=\frac{b_0}{2c_0^2}e_3 \tag{5.111}$$

elde edilir. Bu eşitlikler, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, M yüzeyinin Gauss tasvirinin

$$\Delta\nu=\frac{b_0^2}{c_0^4}\nu+\frac{a_0b_0}{c_0^4}e_1\wedge e_3 \tag{5.112}$$

eşitliğini sağladığı bulunur.

M yüzeyinin Gauss tasviri, (2.47) denklemini $f=-\frac{1}{c_0^2}$ ve $C=-\frac{a_0^2}{c_0^2}\nu-\frac{a_0b_0}{c_0^2}e_1\wedge e_3$ için sağlar. Bununla birlikte $\widetilde{\nabla}_{e_2}e_A=0$ olduğu için $e_2(C)=0$ olduğu hemen görülür. Ayrıca, (5.109) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
e_1(C) &= -\frac{a_0^2}{c_0^2}e_1(\nu)-\frac{a_0b_0}{c_0^2}e_1(e_1\wedge e_3)\\
&= -\frac{a_0^2}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3\wedge e_4+e_3\wedge\widetilde{\nabla}_{e_1}e_4)-\frac{a_0b_0}{c_0^2}(\widetilde{\nabla}_{e_1}e_1\wedge e_3+e_1\wedge\widetilde{\nabla}_{e_1}e_3)\\
&= -\frac{a_0^2}{c_0^2}\left(-\frac{b_0}{c_0^2}e_1\wedge e_4+0\right)-\frac{a_0b_0}{c_0^2}\left(0+\frac{a_0}{c_0^2}e_1\wedge e_4\right)=0
\end{aligned} \tag{5.113}$$

bulunur. Dolayısıyla, C vektörü sabittir. Böylece, M yüzeyinin ikinci çeşit (global) 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür.

Daha sonra kullanmak için bu helissel silindirler ile ilgili aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir:

Yardımcı Teorem 5.25. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının bir uzaysal yüzeyi olsun. Eğer, $\alpha\neq 0$ ve $\beta\neq 0$, $\varepsilon_3\alpha^2-\beta^2\neq 0$ eşitsizliğini sağlayan sabitler olmak üzere, konneksiyon formları

$$\omega_{13}=-\alpha\omega_1,\quad \omega_{34}=\beta\omega_1,\quad \omega_{12}=\omega_{14}=\omega_{23}=\omega_{24}=0 \tag{5.114}$$

şeklinde olan bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı varsa, M yüzeyi yer vektörü (5.92), (5.99) ve (5.106) ile verilen helissel silindirlerden birine kongruenttir. Burada, $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{e_1, e_2\}$ bazına karşı gelen dual bazdır.

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının bir uzaysal yüzeyi olsun. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, M yüzeyi üzerinde tanımlı, karşı gelen konneksiyon formları (5.114) şeklinde olan bir çatı alanı ve $\varepsilon_3\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\omega_{34}(e_1) = \beta$, $\omega_{34}(e_2) = 0$ ve şekil operatörleri $A_3 = \mathrm{diag}(\alpha, 0)$, $A_4 = 0$ olur. $\omega_{12} = 0$ olmasından dolayı (2.32) ile verilen birinci yapı denkleminden $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\omega_1 = du$ ve $\omega_2 = dv$ olacak şekilde yerel koordinatlar vardır ve $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_v$ olur.

M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü $x : \Omega \to M$ olsun. $\omega_{12} = 0$ olmasından dolayı $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = x_{uu} = h(e_1, e_1)$, $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \widetilde{\nabla}_{e_2} e_1 = x_{uv} = h(e_1, e_2)$ ve $\widetilde{\nabla}_{e_2} e_2 = x_{vv} = h(e_2, e_2)$ bulunur. Bu eşitlikler ile (2.5) ve (2.6) denklemleriyle verilen Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$x_{uu} = \varepsilon_3 \alpha e_3, \qquad x_{uv} = 0, \quad x_{vv} = 0, \tag{5.115}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_3 = (e_3)_u = -\alpha x_u - \varepsilon_3 \beta e_4, \qquad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_3 = (e_3)_v = 0, \tag{5.116}$$

$$\widetilde{\nabla}_{e_1} e_4 = (e_4)_u = -\varepsilon_3 \beta e_3, \qquad \widetilde{\nabla}_{e_2} e_4 = (e_4)_v = 0 \tag{5.117}$$

bulunur. Dolayısıyla, e_3 ve e_4 sadece u'ya bağlıdır. İspatın bundan sonraki bölümünde "$'$" ile u değişkenine göre adi türev gösterilecektir. Ayrıca yüzeyin ortalama eğriliği $4\langle H, H\rangle = \varepsilon_3 \alpha^2$ ve ortalama eğrilik vektörü $2H = x_{uu}$ olduğundan,

$$\langle x_{uu}, x_{uu}\rangle = \varepsilon_3 \alpha^2 \tag{5.118}$$

eşitliği elde edilir.

(5.115)'deki ikinci ve üçüncü denklemlerden $L_1 \in \mathbb{E}_1^4$ bir sabit vektör ve B, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayına düzgün bir tasvir olmak üzere

$$x = vL_1 + B(u) \tag{5.119}$$

elde edilir. Bu eşitliğin (5.115)'deki birinci denklemde yerine konulmasıyla,

$$B'' = \varepsilon_3 \alpha e_3 \tag{5.120}$$

bulunur. (5.116)'daki birinci denklemin u değişkenine göre türevi alınır, (5.117)'deki birinci denklemde ve (5.120) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$e_3'' + (\varepsilon_3\alpha^2 - \beta^2)e_3 = 0 \tag{5.121}$$

bulunur. (5.121) denkleminin genel çözümü, sıfırdan farklı olan $\varepsilon_3\alpha^2 - \beta^2$ sabitinin pozitif veya negatif olmasına göre trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonlar türünden yazılabilir. Bu yüzden iki ayrı durum incelenecektir.

Durum 1. $\varepsilon_3\alpha^2 - \beta^2 = -a^2 < 0$ olması durumunda, (5.121) denkleminden $e_3 = \cosh(au)\tilde{L}_2 + \sinh(au)\tilde{L}_3$ elde edilir. Burada $\tilde{L}_2, \tilde{L}_3 \in \mathbb{E}_1^4$ bazı sabit vektörlerdir. Bu eşitlik ve (5.120) denkleminden

$$B''(u) = \varepsilon_3\alpha\left(\cosh(au)\tilde{L}_2 + \sinh(au)\tilde{L}_3\right) \tag{5.122}$$

bulunur. Bu denklemin çözülmesiyle

$$B(u) = \cosh(au)L_2 + \sinh(au)L_3 + uL_4 + L_5 \tag{5.123}$$

elde edilir. Burada L_2, L_3, L_4, $L_5 \in \mathbb{E}_1^4$ bazı sabit vektörlerdir. Genellik bozulmaksızın, $L_5 = 0$ kabul edilir. Dolayısıyla, (5.119) ve (5.123) denklemlerinden

$$x = vL_1 + \cosh(au)L_2 + \sinh(au)L_3 + uL_4. \tag{5.124}$$

elde edilir.

$\langle x_u, x_u\rangle = 1$, $\langle x_u, x_v\rangle = 0$, $\langle x_v, x_v\rangle = 1$ eşitlikleri ve (5.118) denkleminden

$$\begin{gathered}\langle L_A, L_B\rangle = \delta_{AB},\ 1 \leq A, B \leq 4, \quad \langle L_1, L_1\rangle = 1,\\ \langle L_2, L_2\rangle = -\langle L_3, L_3\rangle = \frac{\varepsilon_3\alpha^2}{(\varepsilon_3\alpha^2 - \beta^2)^2}, \quad \langle L_4, L_4\rangle = \frac{\beta^2}{\beta^2 - \varepsilon_3\alpha^2}\end{gathered} \tag{5.125}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\varepsilon_3 = 1$ veya $\varepsilon_3 = -1$ olmasına göre, L_2, L_3 and L_4 vektörleri için, $\mathbb{E}_1^4$ uzayının uygun lineer izometrilerine göre, iki farklı seçim vardır:

Durum 1a. $\varepsilon_3 = 1$ olması durumunda, genellik bozulmaksızın, $L_1 = (0,0,0,1)$, $L_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(0,1,0,0)$, $L_3 = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(1,0,0,0)$ ve $L_4 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}(0,0,1,0)$ seçilir. Bu eşitlikler (5.124) denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\sinh(au), \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\cosh(au), \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}u, v\right) \tag{5.126}$$

elde edilir. $s=\sqrt{\beta^2-\alpha^2}u$, $t=v$ şeklinde koordinat dönüşümü yapılır ve $\frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}=a_0$, $\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}=b_0$ yazılırsa M yüzeyinin yer vektörü (5.106) ile verilen yüzey olduğu görülür.

Durum 1b. $\varepsilon_3=-1$ olması durumunda, $\mathbb{E}_1^4$ uzayının uygun lineer izometrilerine göre, bu kez $L_1=(0,0,0,1)$, $L_2=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(1,0,0,0)$, $L_3=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(0,1,0,0)$, $L_4=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(0,0,1,0)$ seçilir ve benzer işlemler yapılırsa, M yüzeyinin yer vektörü (5.99) ile verilen yüzeye kongruent olduğu görülür.

Durum 2. $\varepsilon_3\alpha^2-\beta^2=a^2>0$ olması durumunda, (5.121) denkleminin genel çözümü

$$e_3=\cos(au)\tilde{L}_2+\sin(au)\tilde{L}_3 \qquad (\mathbf{5.127})$$

şeklindedir ve $\varepsilon_3=1$ olur. Burada, $\tilde{L}_2$ ve $\tilde{L}_3\in\mathbb{E}_1^4$ bazı sabit vektörlerdir. Durum 1a'da anlatılan yöntemle M yüzeyinin bu kez yer vektörü (5.92) ile verilen yüzeye denk olduğu gösterilir. □

Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki sınıflandırma teoremi elde edilir.

Teorem 5.26. *M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip, normal konneksiyonu düz olan uzaysal bir yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin yer vektörünün (5.92), (5.99) ve (5.106) ile verilen helissel silindirlerden birine kongruent olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında normal konneksiyonu düz bir yüzey olsun. Bu durumda şekil operatörleri aynı anda köşegenleştirilebilir. Ayrıca, M yüzeyinin ortalama eğriliğinin sıfırdan farklı bir sabit olduğu varsayılsın. Bu durumda, yüzey üzerinde tanımlı, karşı gelen şekil operatörleri

$$A_3=\mathrm{diag}(h_{11}^3,h_{22}^3),\quad A_4=\mathrm{diag}(h_{11}^4,-h_{11}^4) \qquad (\mathbf{5.128})$$

formunda olan bir $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ortonormal çatı alanı vardır ve bir α sabiti için $h_{11}^3+h_{22}^3=2\alpha$ eşitliği sağlanır. Ayrıca, yüzeyin ortalama eğrilik vektörü, $H=\varepsilon_3\alpha e_3$ olur ve $\nabla(\mathrm{tr}A_3)=\nabla(\mathrm{tr}A_4)=0$ elde edilir. Bu eşitlikler, (5.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Delta\nu = \|h\|^2\nu-\varepsilon_3\alpha\omega_{34}(e_1)e_1\wedge e_3-\varepsilon_3\alpha\omega_{34}(e_2)e_2\wedge e_3 \qquad (\mathbf{5.129})$$

bulunur.

Şimdi, gerek koşulun ispatı için, M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, (2.47) denklemi düzgün bir f fonksiyonu ve $C \neq 0$ sabit vektörü için sağlanır. (2.47) ve (5.129) denklemlerinden

$$f(\nu + C) = \|h\|^2 \nu - \varepsilon_3 \alpha \omega_{34}(e_1) e_1 \wedge e_3 - \varepsilon_3 \alpha \omega_{34}(e_2) e_2 \wedge e_3 \qquad \textbf{(5.130)}$$

elde edilir. C vektörü, (2.35) ile verilen şekilde bileşenlerine ayrılırsa, (5.130) denkleminin iki tarafındaki vektörlerin aynı bileşenlerinin birbirine eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned} f(1 - C_{34}) &= \|h\|^2, && \textbf{(5.131)} \\ fC_{13} &= -\alpha \omega_{34}(e_1), && \textbf{(5.132)} \\ fC_{23} &= -\alpha \omega_{34}(e_2), && \textbf{(5.133)} \\ C_{12} = C_{14} = C_{24} &= 0 && \textbf{(5.134)} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

C vektörünün sıfırdan farklı sabit bir vektör olmasından dolayı, Yardımcı Teorem 2.3 $C_{12}, C_{13}, \ldots, C_{34}$ bileşenlerinin (2.46) denklemlerini $i = 1,2$ için sağlamasını gerektirir. $i = 1,2$ için (2.46c) ve (2.46e) denklemlerinde (5.128) ve (5.134) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} -\omega_{34}(e_1) C_{13} + h^3_{11} C_{34} &= 0. && \textbf{(5.135)} \\ \omega_{34}(e_2) C_{13} &= 0, && \textbf{(5.136)} \\ \omega_{34}(e_1) C_{23} &= 0, && \textbf{(5.137)} \\ -\omega_{34}(e_2) C_{23} + h^3_{22} C_{34} &= 0 && \textbf{(5.138)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\omega_{34}(e_1) = \omega_{34}(e_2) = 0$ olması durumunda, ortalama eğriliğinin sabit olmasından dolayı, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü paralel olur ve Teorem 5.18'den dolayı M yüzeyinin Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1-tipinden olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla, genellik bozulmaksızın $\omega_{34}(e_1) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı varsayılacaktır. Bu durumda, (5.132) denkleminden $C_{13} \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla, (5.136) denkleminden $\omega_{34}(e_2) = 0$ elde edilir ve (5.133) denkleminden ise $C_{23} = 0$ bulunur. Böylelikle, C vektörü

$$C = \varepsilon_3 C_{13} e_1 \wedge e_3 - C_{34} e_3 \wedge e_4 \qquad \textbf{(5.139)}$$

olur. $C_{23} = 0$ eşitliğinin sağlanmasından dolayı (5.138) denkleminden $C_{34}h^3_{22} = 0$ elde edilir. Bununla birlikte, $C_{34} = 0$ olması durumunda (5.135) denkleminden $\omega_{34}(e_1)C_{13} = 0$ bulunur ki bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, $h^3_{22} = 0$ olur. Böylece, (5.128) denkleminden

$$A_3 = \mathrm{diag}(\alpha, 0), \quad A_4 = \mathrm{diag}(h^4_{11}, -h^4_{11}). \tag{5.140}$$

elde edilir. $h^3_{11,2} = h^3_{12,1}$, $h^3_{22,1} = h^3_{12,2}$ ve $h^4_{22,1} = h^4_{12,2}$ Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$\alpha\omega_{12}(e_1) = 0, \tag{5.141}$$

$$\varepsilon_4 h^4_{11}\omega_{34}(e_1) = \alpha\omega_{12}(e_2), \tag{5.142}$$

$$e_1(-h^4_{11}) = 2h^4_{11}\omega_{12}(e_2) \tag{5.143}$$

halini alır. Buna ek olarak, $\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle = \varepsilon_3(\det A_3 - \det A_4)$ Gauss denkleminden

$$e_1\big(\omega_{12}(e_2)\big) = \varepsilon_3\left(h^4_{11}\right)^2 - \big(\omega_{12}(e_2)\big)^2 \tag{5.144}$$

bulunur ve (5.141) eşitliğinden, $\alpha \neq 0$ olduğu için, $\omega_{12}(e_1) = 0$ elde edilir.

Şimdi $h^4_{11} = 0$ olduğu gösterilecektir. $h^4_{11} \neq 0$ olduğu varsayılsın. (5.132) denklemi $\omega_{34}(e_1)$ ile çarpılır ve (5.135) denklemi kullanılırsa, $h^3_{11} = \alpha \neq 0$ olduğu için,

$$fC_{34} = -\left(\omega_{34}(e_1)\right)^2 \tag{5.145}$$

bulunur. (5.131), (5.140) ve (5.145) denklemlerinden

$$f = \varepsilon_3(\alpha^2 - 2(h^4_{11})^2) - (\omega_{34}(e_1))^2 \tag{5.146}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.132), (5.139) ve (5.145) denklemlerinden

$$C = \frac{-\omega_{34}(e_1)}{f}\left(\varepsilon_3\alpha e_1\wedge e_3 - \omega_{34}(e_1)e_3\wedge e_4\right) \tag{5.147}$$

bulunur.

Şimdi, bir $\hat{C}$ vektör alanı ve $\hat{f}$ fonksiyonu, $\hat{C} = \varepsilon_3\alpha e_1\wedge e_3 - \omega_{34}(e_1)e_3\wedge e_4$ ve $\hat{f} = \frac{-\omega_{34}(e_1)}{f}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, (5.147) denkleminden $C = \hat{f}\hat{C}$ elde edilir ve C vektörü sabit olduğundan dolayı,

$$e_1(C) = e_1(\hat{f})\hat{C} + \hat{f}e_1(\hat{C}) = 0 \tag{5.148}$$

olur. Eğer $\hat{C}$ ve $e_1(\hat{C})$ lineer bağımsız ise, (5.148) denkleminden $\hat{f}=0$ bulunur ki bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, ya $\hat{C}$ ve $e_1(\hat{C})$ lineer bağımlı veya $e_1(\hat{C}) = 0$ olmalıdır. Bununla birlikte, (2.5) ve (2.6) ile verilen Gauss and Weingarten formüllerinden

$$e_1(\hat{C}) \quad = \quad -h^4_{11}\omega_{34}(e_1)e_1\wedge e_3+\Big(\alpha h^4_{11}-e_1\big(\omega_{34}(e_1)\big)\Big)e_3\wedge e_4 \qquad \textbf{(5.149)}$$

bulunur ve bu eşitlik, $h^4_{11}\neq 0$ olmasından dolayı $e_1(\hat{C})\neq 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak, $\hat{C}$ ve $e_1(\hat{C})$ vektör alanlarının lineer bağımlı olduğu elde edilir.

(5.142) denkleminin türevi alınırsa,

$$\varepsilon_4 e_1(h^4_{11})\omega_{34}(e_1)+\varepsilon_4 h^4_{11}e_1\big(\omega_{34}(e_1)\big)=\alpha e_1(\omega_{12}(e_2)) \qquad \textbf{(5.150)}$$

elde edilir. (5.142) - (5.144) ve (5.150) denklemlerinden

$$h^4_{11}\Big(e_1\big(\omega_{34}(e_1)\big)+\alpha h^4_{11}-\omega_{12}(e_2)\omega_{34}(e_1)\Big)=0 \qquad \textbf{(5.151)}$$

bulunur. $h^4_{11}\neq 0$ olduğu için, (5.151) denkleminden

$$e_1\big(\omega_{34}(e_1)\big)=-\alpha h^4_{11}+\omega_{12}(e_2)\omega_{34}(e_1) \qquad \textbf{(5.152)}$$

elde edilir. (5.142), (5.149) ve (5.152) denklemlerinden

$$e_1(\hat{C}) \quad = \quad \omega_{12}(e_2)\hat{C}+2\alpha h^4_{11}e_3\wedge e_4. \qquad \textbf{(5.153)}$$

bulunur.

$e_1(\hat{C})$ ve $\hat{C}$ vektör alanları lineer bağımlı olduğu için, (5.153) eşitliğinden $\alpha h^4_{11}=0$ elde edilir ki bu durum bir çelişkidir. Sonuç olarak, $h^4_{11}=0$ olduğu gösterilmiş olur.

$h^4_{11}=0$ olduğu için, (5.142) denkleminden $\omega_{12}(e_2)=0$ bulunur. Diğer taraftan, (5.146) ve (5.147) denklemlerinden $\varepsilon_3\alpha^2\langle C,C\rangle=(1+\langle C,C\rangle)\omega_{34}(e_1)$ elde edilir ve bu denklemden

$$\beta=\frac{\varepsilon_3\alpha^2\langle C,C\rangle}{1+\langle C,C\rangle}\neq 0 \qquad \textbf{(5.154)}$$

olmak üzere, $\omega_{34}(e_1)=\beta$ bulunur. Ayrıca, (5.146) denkleminden $f=\varepsilon_3\alpha^2-\beta^2\neq 0$ elde edilir.

Sonuç olarak, M yüzeyinin konneksiyon formları (5.114) denkleminde verildiği şekilde elde edilmiş olur. Yardımcı Teorem 5.25 göz önüne alındığında, M yüzeyinin (5.92), (5.99) ve (5.106) ile verilen helissel silindirlerden birine kongruent olduğu görülür. $\square$

Teorem 5.26'in bir sonucu aşağıda ifade edilmiştir:

Sonuç 5.27. $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayının sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğine sahip, normal konneksiyonu düz olan uzaysal bir M yüzeyi ikinci çeşit has noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olamaz.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Euclid ve yarı-Euclid uzaylarında karşıt boyutu 2 olan alt manifoldlar ele alındı ve bu alt manifoldlardan noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanları incelendi. İlk olarak karşıt boyutun iki olduğu durumda en genel haldeki bir alt manifoldun Gauss tasviri ile ilgili bazı yardımcı teoremler verildi. Daha sonra ise en genel halde verilen bu yardımcı teoremler kullanılarak 4-boyutlu Euclid ve yarı-Euclid uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler ile ilgili bir takım problemler incelendi.

İlk olarak $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında meridyen eğrileri düzlemsel olan genel dönel yüzeyler ele alındı ve bu yüzeylerden noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanları ile ilgili bazı sınıflandırma sonuçları verildi. Has noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyler elde edildi. Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında yarı-ombilik genel dönel yüzeylerin ve minimal genel dönel yüzeylerin sınıflandırmaları yapıldı. İleride, meridyen eğrisi düzlemsel olmayan noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip genel dönel yüzeyler ile ilgili çalışma yapılarak bu konuda yeni sonuçlar verilebilir. $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında dönme oranları eşit olan bir genel dönel yüzeyin minimal olması için gerek koşullardan birinin meridyen eğrisinin düzlemsel olması olduğu Moore tarafından daha önceden gösterilmiştir. İleride, aynı sonucun dönme oranlarının eşit olmaması durumunda geçerli olup olmadığı incelenilerek bu tezde verilen meridyen eğrileri düzlemsel olan minimal genel dönel yüzeyler ilgili tam sınıflandırma teoremi daha da geliştirilebilir.

Ayrıca, $\mathbb{E}^4$ Euclid uzayında basit dönel yüzeyler incelenerek birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir basit dönel yüzeyin bir Clifford tor yüzeyinin açık bir parçası olduğu gösterildi. Daha sonra ise ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri ispatlandı. Bir basit dönel yüzeyin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için profil eğrisinin koordinat fonksiyonlarından birinin üçüncü mertebeden adi türevli bir denklemi sağlaması gerektiği gösterildi. Bu denklemin çok fazla non-lineer terimler içermesinden dolayı tam olarak incelemesinin bu çalışmanın kapsamını aştığı düşünülmüştür. İlerleyen yıllarda, bu denklem çalışılarak ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip basit dönel yüzeyler ile ilgili daha gelişmiş sonuçlara ulaşılabilir.

Son olarak $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında uzaysal yüzeyler çalışıldı. Bu yüzeylerden Gauss tasviri harmonik olanlar ve noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar ile ilgili çeşitli sınıflandırma ve karakterizasyon teoremleri verildi. Daha ileride, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında zamansal yüzeyler ele alınarak bu yüzeylerden noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olanlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.Y.** (1984). *Total mean curvature and submanifold of finite type*. Academic Press, London.

[2] **Chen, B.Y. ve Petroviç, M.** (1991). On spectral decomposition of immersions of finite type, *Bull. Austral. Math. Soc.*, *44*(2), 117–129.

[3] **Chen, B.Y.** (1986). Finite type pseudo-Riemannian submanifolds, *Tamkang J. of Math.*, *17*(2), 137–151.

[4] **Chen, B.Y.** (1996). A report on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, *22*(1), 117–337.

[5] **Chen, B.Y.**, **Morvan, J.M. ve Nore, T.** (1986). Energy, tension and finite type maps, *Kodai Math. J.*, *9*(3), 406–418.

[6] **Chen, B.Y. ve Piccini, P.** (1987). Submanifolds with finite type Gauss Map, *Bull. Austral. Math. Soc.*, *35*(1), 161–186.

[7] **Chen, B.Y. ve Li, S.** (1998). Spherical Hypersurfaces with 2-Type Gauss Map, *Beitr. Algebra Geom.*, *39*(1), 169–179.

[8] **Alias, L.J.**, **Ferrández, A.**, **Lucas, P. ve Merono, M.A.** (1998). On the Gauss map of B-scrolls, *Tsukuba J. Math.*, *22*(2), 371–377.

[9] **Choi, S.M.** (1995). On the Gauss map of ruled surfaces in a 3-dimensional Minkowski space, *Tsukuba J. Math.*, *19*(2), 285–304.

[10] **Chen, B.Y.** (1991). Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, *17*(2), 169–188.

[11] **Chen, B.Y.**, **Choi, M. ve Kim, Y.H.** (2005). Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map, *J. Korean Math. Soc.*, *42*(4), 447–455.

[12] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2000). Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map, *J.Geom. Phys.*, *34*(3), 191–205.

[13] **Dursun, U.** (2009). Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map in Lorentz–Minkowski space, *Proc. Est. Acad. Sci.*, *58*(3), 146–161.

[14] **Choi, M. ve Kim, Y.H.** (2001). Characterization of helicoid as ruled surface with pointwise 1-type Gauss map, *Bull. Korean Math. Soc.*, *38*(4), 753–761.

[15] **Choi, M.**, **Kim, D.S. ve Kim, Y.H.** (2009). Helicoidal surfaces with pointwise 1-type Gauss map, *J. Korean Math. Soc.*, *46*(1), 215–223.

[16] **Dursun, U. ve Arsan, G.** (2011). Surfaces in the Euclidean Space E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Hacet. J. Math. Stat.*, *40*(5), 617–625.

[17] **Dursun, U. ve Coşkun, E.** (2012). Flat surfaces in the Minkowski space E31 with pointwise 1-type Gauss map, *Turk. J. Math.*, **36**(4), 613–629.

[18] **Ki, U.H.**, **Kim, D.S.**, **Kim, Y.H. ve Roh, Y.M.** (2009). Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 3-space, *Taiwanese J. Math.*, *13*(1), 317–338.

[19] **Yoon, D.W.** (2001). Rotation surfaces with finite type Gauss Map in E^4, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, *32*(5), 1803–1808.

[20] **Yoon, D.W.** (2004). Some properties of the Clifford Torus as rotation surface, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, *34*(3), 907–915.

[21] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2004). Classification of rotation surfaces in pseudo-Euclidean space, *J. Korean Math. Soc.*, *41*(2), 379–396.

[22] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2005). On the Gauss map of ruled surfaces in Minkowski space, *Rocky Mountain J. Math.*, *35*(5), 1555–1581.

[23] **Arslan, K.**, **Bayram, B.K.**, **Bulca, B.**, **Kim, Y.H.**, **Murathan, C. ve Öztürk, G.** (2011). Rotational embeddings in E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Turk. J. Math.*, *35*(3), 493–499.

[24] **Chen, B.Y. ve van der Veken, J.** (2010). Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature vector in Lorentzian space forms, *Houston J. Math.*, *36*(2), 421–449.

[25] **O'Neill, M.P.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. World Scientific, New York.

[26] **Cole, F.N.** (1890). On rotations in space of four dimensions, *Amer. J. Math.*, *12*(2), 191–210.

[27] **Moore, C.L.E.** (1918). Motions in hyperspace, *Annals of Math.*, *19*(3), 176–184.

[28] **Moore, C.L.E.** (1919). Surfaces of rotation in a space of four dimensions, *Annals. of Math.*, *21*(2), 81–93.

[29] **Vranceanu, G.** (1977). Surfaces de rotation dans E^4, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, *22*(8), 857–862.

[30] **Dursun, U. ve Turgay, N.C.** (2013). Minimal and pseudo-umbilical rotational surfaces in Euclidean space E^4, *Mediterr. J. Math.*, *10*(1), 497–506.

[31] **Dursun, U. ve Turgay, N.C.** (2012). General rotational surfaces in Euclidean space E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Math. Commun.*, *17*(1), 71–81.

[32] **Dursun, U. ve Turgay, N.C.** (2012). On space-like surfaces in Minkowski 4-space with pointwise 1-type Gauss map of the second kind, *Balkan J. Geom. Appl.*, *17*(1), 22–33.

[33] **Chen, B.Y.** (2009). Complete classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary non-flat pseudo-Riemannian space forms, *Cent. Eur. J. Math.*, *7*(3), 400–428.

[34] **Chen, B.Y. ve Ishikawa, S.** (1998). Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces, *Kyushu J. Math.*, *52*(1), 167–185.

[35] **Chen, B.Y.** (2009). Classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces of arbitrary dimension, *J. Math. Phys.*, *50*(4), 043503, 14 pp.

[36] **Chen, B.Y. ve van der Veken, J.** (2009). Complete classification of parallel surfaces in 4-dimesional Lorentzian space forms, *Tohoku Math. J.*, *61*(1), 1–40.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nurettin Cenk Turgay

Doğum Yeri ve Tarihi: Lübeck(Almanya), 29 Mayıs 1980

Adres: Acıbadem, Tur sok. No:9/16 Kadıköy/ISTANBUL

E-Posta: turgayn@itu.edu.tr

Lisans:
İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği
Y. Lisans:
İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği (Yüksek Lisans)
Mesleki Deneyim ve Ödüller:
▪ 2004-... Araştırma Görevlisi (İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)
Yayın ve Patent Listesi:

▪ Hizel, E., **Turgay, N.C.**, Güldoğan, B., 2009: The symmetry reductions and new exact solutions of the generalized Davey- Stewartson equation. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **4(5)** (2009), 883–894.

▪ Hizel, E., **Turgay, N.C.**, Güldoğan, B., 2008: Symmetry analysis of three dimensional time independent Schrödinger-Newton equation. *Appl. Math. Sciences*, **2(3)** (2008), 341–351.

▪ Hizel, E., **Turgay, N.C.**, 2007: Symmetry group analysis and similarity solutions for nonlinear reaction-diffusion system of Gray- Scott type. *Int. Math. Forum.*, **58(7)** (2007), 2847–2858.

▪ Hizel, E., **Turgay, N.C.**, 2007: Group invariant solutions of Burgers-Poisson equation. *Int. Math. Forum.*, **55(7)** (2007), 2701–2710.

▪ Kim, Y. H., **Turgay, N. C.**, 2012: On the Gauss map of rotational surfaces concerning Cheng-Yau operator *Conference on Pure and Applied Differential Geometry - KU Leuven*, August, 27-30, 2012 Leuven, Belgium.

▪ Hizel, E., **Turgay, N.C.**, 2008: Durağan haldeki Schrödinger Newton denkleminin Lie simetrilerinin bir boyutlu optimal sistemi *19. Ulusal Matematik Sempozyumu - Dumlupınar Üniversitesi*, August, 22-25, 2008 Kütahya, Turkey.

▪ **Turgay, N.C.**, Hizel, E., Teoman Özer, 2008: Benjamin-Bona-Mahony denkleminin Lie simetrileri ve simetri indirgemeleri üzerine *19. Ulusal Matematik Sempozyumu - Dumlupınar Üniversitesi*, August, 22-25, 2008 Kütahya, Turkey.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2013: Minimal and Pseudo-Umbilical Rotational Surfaces in Euclidean Space $\mathbb{E}^4$. *Mediterr. J. Math.*, **10(1)** (2013), 497–506.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2012: General rotational surfaces in Euclidean space $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Math. Commun.*, **17(1)** (2012), 71–81.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2012: On space-like surfaces in Minkowski 4-space with pointwise 1-type Gauss map of the second kind. *Balkan J. Geom. Appl.*, **17(2)** (2012), 34–45.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2012: On the Gauss map of space-like surfaces of 4-dimensional Minkowski space. *25. Ulusal Matematik Sempozyumu - Niğde Üniversitesi*, September, 5-8, 2012 Niğde, Turkey.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2012: On the simple rotational surfaces of the Euclidean 4-space and their Gauss map. *The Korean Mathematical Society Spring-2012 Meeting - Sookmyung Women's University*, April 28, 2012 Seoul, Republic of Korea.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2011: On space-like surfaces in Minkowski 4-space with pointwise 1-type Gauss map of the second kind. *The V-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems - University Politehnica of Bucharest*, September, 6-9, 2011 Bucharest, Romania.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2011: General rotational surfaces in Euclidean 4-space with pointwise 1-type Gauss map of the second kind. *9. Ulusal Geometri Sempozyumu, Samsun 19 Mayıs Üniversitesi*, June, 7-10, 2011 Samsun, Turkey.

▪ Dursun, U., **Turgay, N. C.**, 2011: On the Gauss map of space-like surfaces of 4-dimensional Minkowski space. *9. Ulusal Geometri Sempozyumu, Samsun 19 Mayıs Üniversitesi*, June, 7-10, 2011 Samsun, Turkey.