

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEMLERİN UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ
YÖNTEMİYLE DİNAMİK MODELLEMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdem YANIK

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEMLERİN UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ
YÖNTEMİYLE DİNAMİK MODELLEMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Erdem YANIK
(504101110)**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU

HAZİRAN 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 504101110 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Erdem YANIK**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEMLERİN UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ YÖNTEMİYLE DİNAMİK MODELLEMESİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hakan TEMELTAŞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet BARAN
Marmara Üniversitesi

Teslim Tarihi : **3 Mayıs 2013**
Savunma Tarihi : **7 Haziran 2013**

Canım aileme ve Melis'e,

ÖNSÖZ

Bu çalışmada değerli vaktini, bilgi ve deneyimini esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. S. Murat Yeşiloğlu'na, tezin gelişimindeki katkı ve desteğinden dolayı Arş. Gör. Musa Yazar'a, çalışmalarımızda mutluluk ve sıkıntıları paylaştığım değerli arkadaşım Cenk Karaman'a, her aşamada hep yanımda olan sonuna kadar gelmemde büyük katkı sahibi Melis Can Özdemir'e, maddi manevi destekleriyle her zaman arkamda olan sadece çalışmamı düşünme imkan ve azmini sağlayan sevgili aileme gönülden teşekkür ederim.

Haziran 2013

Erdem Yanık

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
SEMBOL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	1
1.2 Tez Organizasyonu	2
1.3 Temel Altuzaylar ve Özellikleri	3
1.4 Sözde Ters İşlemlerle Çözüm Vektörünün Bulunması	4
1.5 Rotasyon Matrisinin Rodrigues Formülü ile Bulunması.....	6
2. KİNEMATİK MODELLEME	9
2.1 Tek Link Üzerindeki Hız Aktarımları	9
2.2 İki Link Üzerindeki Hız Aktarımları	10
2.3 Seri Manipülatör Üzerindeki Hız Aktarımları.....	12
2.4 Ortak Çalışan Seri Manipülatörler Kinematik Simülasyonu.....	16
3. DİNAMİK MODELLEME	19
3.1 Seri Manipülatör Dinamiği	19
3.2 Seri Manipülatör Dinamiği Simülasyonu	24
4. HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEM DİNAMİĞİ	27
4.1 Yatay Yüzey Üzerinde Kaymadan Yuvarlanan Disk.....	28
4.2 Kaymadan Yuvarlanan Diskin Dinamik Modeli	29
5. SONUÇLAR	33
5.1 Tekerin İlerleme Yönünde Hareketi	34
5.2 Tekerin Yana Yatma Hareketi.....	35
5.3 Tekerin Direksiyon Hareketi	36
6. DEĞERLENDİRME	39
KAYNAKLAR	41
EKLER	43
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Altuzaylar arası eşleşim.	4
Şekil 1.2 : Eksen takımının dönme hareketi.	6
Şekil 2.1 : Tek link üzerinde uzunluk vektörü ve hızların gösterimi.	9
Şekil 2.2 : İki link üzerinde link uzunluk vektörleri, dönme eksenini ve açısal hız.	10
Şekil 2.3 : Farklı eklem tipleri için uzaysal H matrisinin yapısı.	11
Şekil 2.4 : Ortak çalışan seri manipülatörlerin VRML görüntüsü.	16
Şekil 2.5 : Üst platformun dönme hareketi örnek görüntüsü.	17
Şekil 3.1 : Seri manipülatör VRML görüntüsü.	24
Şekil 3.2 : Yerçekimi ve sürtünme etkisi altında durağan hal.	25
Şekil 3.3 : Yerçekimi olmadan uç noktaya daimi kuvvet uygulanması.	26
Şekil 4.1 : Kaymadan yuvarlanan yana yatabilen disk [18].	29
Şekil 4.2 : Kaymadan yuvarlanan disk sembolik link eklem gösterimi.	29
Şekil 4.3 : Genelleştirilmiş koordinatlar vektörü.	31
Şekil 5.1 : Tek tekerlek VRML görüntüsü.	33
Şekil 5.2 : Tekerin ilerleme yönündeki hareketi için eklem açısal ivmeleri.	34
Şekil 5.3 : Tekerin ilerleme yönündeki hareketi için eklem açısal hızları.	35
Şekil 5.4 : Tekerin yana yatma hareketi için eklem açısal ivmeleri.	35
Şekil 5.5 : Tekerin yana yatma hareketi için eklem açısal hızları.	36
Şekil 5.6 : Tekerin direksiyon hareketi için eklem açısal ivmeleri.	36
Şekil 5.7 : Tekerin direksiyon hareketi için eklem açısal hızları.	37
Şekil B.1 : 1. manipülatör eklem açısal hızları.	46
Şekil B.2 : 2. manipülatör eklem açısal hızları.	46
Şekil B.3 : 3. manipülatör eklem açısal hızları.	47
Şekil B.4 : Üst platform açısal hızları.	48
Şekil B.5 : Üst platform doğrusal hızları.	48
Şekil C.1 : Eklem açısal hızları.	49
Şekil C.2 : Eklem açısal hızları.	49

SEMBOL LİSTESİ

- $N(\mathbf{A})$: Matrisin boş uzayı
 $N(\mathbf{A}^T)$: Transpoz matrisinin boş uzayı
 $R(\mathbf{A})$: Matrisin değer uzayı
 $R(\mathbf{A})$: Transpoz matrisinin değer uzayı
 \mathbb{R}^n : n boyutlu reel sayılar uzayı
 $\mathbf{A}^\#$: Matrisinin sözde tersi
 \mathbf{I} : birim matris
 R : Rotasyon matrisi
 $\vec{\omega}$: link açısal hız vektörü
 \vec{v} : link doğrusal hız vektörü
 $\hat{\omega}$: 3×3 negatif simetrik matris
 $\vec{\ell}_{k-1,k}$: link $k - 1$ 'in link vektörü
 $\vec{\ell}_{k,c}$: link k eksen takımı orjininden linkin kütle merkezine olan vektör
 \vec{h} : dönme ve/veya öteleme eksen vektörü
 \vec{H} : dönme ve/veya öteleme eksen uzaysal vektörü
 $\dot{\theta}$: eklem açısal hızı
 $\ddot{\theta}$: eklem açısal ivmesi
 $\dot{\underline{\theta}}$: manipülatör tüm eklem açısal hızları vektörü
 $\ddot{\underline{\theta}}$: manipülatör tüm eklem açısal ivmeleri vektörü
 \vec{V}_k : link k 'nın uzaysal hız vektörü
 \vec{V}_t : uç noktası uzaysal hız vektörü
 \vec{V}_b : hareketli platform uzaysal hız vektörü
 $\Phi_{k,k-1}$: link $k - 1$ 'den link k 'ya propagasyon matrisi
 J : Jakobiyen matrisi
 \vec{f}_k : link k 'ya etkiyen kuvvet vektörü

- $\bar{\tau}_k$: link k 'ya etkiyen tork vektörü
 m_k : link k 'nın kütlesi
 m_b : base'in kütlesi
 \mathcal{I}_k : link k atalet tensörü
 \mathcal{I}_b : base atalet tensörü
 M_k : link k 'nın kütle matrisi
 M_b : base'in kütle matrisi
 \mathbf{M} : tüm manipülatör kütle matrisi
 $\bar{\bar{a}}_k$: link k coriolis ve santrifüj uzaysal ivmeleri vektörü
 $\bar{\bar{a}}_b$: base coriolis ve santrifüj uzaysal ivmeleri
 \underline{a} : tüm manipülatör coriolis ve santrifüj uzaysal ivmeleri vektörü
 \bar{b}_k : link k uzaysal ivmeleri artan terimleri
 \bar{b}_b : base uzaysal ivmeleri artan terimleri
 \underline{b} : tüm manipülatör uzaysal ivmeleri artan terimleri
 \underline{C} : coriolis ve terçekimi etkilerini içeren matris
 \mathcal{M} : genelleştirilmiş kütle matrisi
 $\bar{\bar{F}}_t$: manipülatör uç noktasına dışarıdan etkiyen uzaysal kuvvet vektörü
 $\underline{\mathcal{T}}$: manipülatör eklemlerine uygulanması gereken tork vektörü
 \mathbf{A} : kısıt matrisi
 $\underline{\lambda}$: kısıtların oluşturduğu kuvvetlerin genliklerini içeren vektör

HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEMLERİN UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ YÖNTEMİYLE DİNAMİK MODELLEMESİ

ÖZET

Holonomik olmayan sistemlerin dinamik modellemesini anlatabilmek için öncelikle holonomik bir sistem olan seri manipülatörlerin uzaysal vektör cebri ile kinematik ve dinamik modellemesi incelenmiştir. Kinematik modellemede manipülatör linklerinin açısız ve doğrusal hızlarını içeren uzaysal hız vektörleri manipülatörün bulunduğu altplatformdan manipülatör uç noktasına kadar propagasyon matrisleri ile hız aktarımları yapılarak bulunur. Her link uzaysal hızı kendinden önceki linklerin uzaysal hızlarını da içerir ve kendinden önceki eklem tipine göre eklem açısız ya da doğrusal hızından etkilenir. Sistemin başlangıç konfigürasyonuna göre link uzunluk, hareketli eksen takımı, dönme ve öteleme eksenleri, propagasyon matrisleri oluşturulur. Başlangıç konfigürasyonuna göre manipülatör uç noktası uzaysal hızları ile eklem açısız hızları arası eşlem yapan jakobiyen matrisi bulunur. Ters kinematik yöntem ile istenen uç noktası uzaysal hız vektörüne karşılık eklem açısız hızlarını bulmaktadır. Kinematik ve dinamik modellerin uygulamalarında her iterasyonda hareketli eksen takımları Rodriguez formülü ile güncellenmelidir. Bu sayede her hareketli eksen takımının eklem açısız hızları kullanılarak önceki eklem rotasyonlarına göre de güncellenmesi sağlanır. Kinematik modelleme için hareketli manipülatör üzerinde ortak çalışan seri manipülatörler örneği üzerinde çalışılmıştır. Sistemin kinematik denklemleri çıkarılmış ve simülasyon çalışmasında girilen alt ve üst platform uzaysal hızları sonucu sistemde oluşan hareket incelenmiştir.

Ardından uzaysal vektör cebri yöntemi ile dinamik denklemlerin bulunması anlatılmıştır. Dinamik denklemlerin bulunması için sistemdeki her linke uygulanan tork ve kuvvet denklemleri uzaysal kuvvet vektörü şeklinde oluşturulmuştur. Her link için kütle matrisleri, eylemsizlik matrisleri bulunmuş, kinematik denklemlerle bulunmuş olan propagasyon matrisleri, hareketli eksen takımı matrisleri ve jacobiyen matrisi kullanılarak geliştirilmiş kütle matrisi, coriolis ve yerçekimi etkilerini içeren matris elde edilmiştir. Hareketli base olması durumunda da base kütle ve eylemsizlik matrisleri ile base geliştirilmiş kütle matrisi de dinamik denklemlere eklenmiştir. Böylece eklem açısız ivmelerine ve manipülatör uç noktasına uygulanan kuvvetlere karşılık uygulanması gereken torkun hesaplanmasını sağlayan ters dinamik denklemi bulunmuştur. Bulunan dinamik denklemler 5 serbestlik dereceli seri manipülatöre uygulanarak ileri dinamik ile uygulanan tork ve uç nokta kuvvetleri altında seri manipülatör hareketi incelenmiştir.

Kinematik ve dinamik denklemlerden sonra bu denklemlerin holonomik olmayan bir sistem olan yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanan diske uygulanışı incelenmiştir. Holonomik olmayan sistem, kısıtları holonomik olmayan mekanik bir sistemdir. Sistem kısıtları koordinat, hız ve bağımsız değişken olan zamanın fonksiyonu olarak ifade edilebilirler. Hız ile ifade edilen kısıtlar integrallenecek basit hale getirilebilirse yani sadece sistem konfigürasyonu ile ifade edilebilecek duruma getirilebiliyorsa bu kısıtlar holonomik kısıtlardır. Tersine hız ile ifade edilen kısıtlar

integrallenemiyorsa holonomik olmayan kısıtlardır. Lagrange denklemleri ile sistem hareket denklemlerinin bulunmasında kısıtlar genelleştirilmiş koordinatlar içerisinde ifade edilerek hareket denklemlerinden elimine edilmesi sağlanabilir. Ancak bunun için kısıtların holonomik olması bir başka değişle integrallenebilmesi gerekir. Holonomik olan kısıtların genelleştirilmiş koordinatlar içerisinde elimine edilmesi ya da hareket denklemlerinin çıkarılmasından sonra eklenmesi ile elde edilen denklemler aynıdır. Ancak holonomik olmayan kısıtların hareket denklemine eklenmesi için öncelikle kısıt olmayan hareket denklemleri çıkarılmalı sonra holonomik olmayan kısıtlar genelleştirilmiş kuvvetler şeklinde eklenmelidir. Pfaffian kısıtları ile sistemin hız kısıtı olan yönleri bir kısıt matrisi ile gösterilebilir. Kısıtlar, kısıt kuvvetleri oluşturarak sistemin hareket izni olmayan yönlerde gitmesini engellerler.

Uzaysal vektör cebri ile elde edilen kaymadan yuvarlanan diskin dinamik denklemlerine hız kısıtlarını eklemek için Pfaffian kısıtı ile hareketin sınırlanmış olduğu yönler gösterilmiş, hız kısıtları kısıt kuvvetleri ile denklemlere dahil edilmiştir. VRML programında tasarlanan diskin hareketleri incelenerek varılan sonuçlar gösterilmiştir.

DYNAMIC MODELLING OF NON-HOLONOMIC SYSTEMS USING SPATIAL OPERATOR ALGEBRA

SUMMARY

In this thesis, kinematic and dynamic modelling using spatial operator algebra are given for understanding dynamic modelling of non-holonomic systems. To this end, for kinematic modelling cooperating manipulators on a mobile platform and for dynamic modelling serial manipulator with gravitational and external forces are explained by spatial operator algebra method. The algorithms for all the systems are written in Matlab Editor. The motion of the systems and simulation results are examined via Simulink and VRML 3D Animation Toolbox.

In kinematic modelling spatial velocity vectors of manipulator links are obtained with propagation matrices propagated from the base to the tip point of the manipulators. Link spatial velocity vector consist of angular and linear velocity of the link. Spatial velocity vector of each link contains spatial velocity of prior links and affected from joint angular or translational velocity according to joint types. When the joint type changes to 2 or 3 degree of freedom joint the column numbers of axis of rotation or translation matrices increases. Link length vectors, body frames, rotation and translation axis, propagation matrices are created with respect to the initial configuration of the system. A manipulator's all link spatial velocity vectors can be found by multiplying propagation matrix of the manipulator, axis of rotation or translation matrix of the manipulator and joints angular velocity vector. The spatial velocity of the tip point of the manipulator can be found by multiplying all the link spatial velocity vector with the propagation matrix from the last joint of the manipulator to the tip point. Also the Jacobian operator which maps between manipulator tip point spatial velocities and joint angular velocities is obtained by the product of the tip point propagation matrix, manipulator propagation matrix and axis of rotation or translation matrix.

Joint angular velocities which correspond to the desired spatial velocity vector of tip point, found by invers kinematic method. In the applications of kinematic and dynamic models in each iteration body frames must be updated with Rodriguez Formula. Thus, updating of each body frame respect to all the prior joint rotation using angular velocity which denoted according to its own body frame. Cooperating serial manipulators on a mobile platform is studied for kinematic modeling. In this study cooperating serial manipulator is modeled with three 7 degree of freedom redundant manipulators holding a free flying platform on a mobile base. Kinematic equations using spatial operator algebra is extended for cooperating manipulators and for velocity of mobile base. Joint angular velocity response and the of the system motion occurs on the system are investigated with base and free flying platform spatial velocity inputs during the simulation. It is possible to work with two types of upper platform. The velocity of the upper platform can be depend on the velocity of the mobile base or it is independent and only has its input velocity.

After kinematic modelling derivation of dynamic modelling with spatial vector operator method is explained. For derivation of dynamic equations, torque and force equations applying on the each link of the system, identified via spatial force vectors. Torque vector of each link contains torque due to rotational and translational motion of the link, torque due to forces applied to the link and the torque of next link. Also force vector of each link contains force due to acceleration of center of mass of the link and force vector of next link. Mass matrices of each link of the manipulator consist of mass, distance to the center of mass and the inertia tensor of the link. Starting with the link n each link spatial force vector depends on next links spatial force vector and spatial force vector of link n depends on only spatial force vector applied to the tip point of the manipulator.

All link force and torque equations are written in matrix form. Propagation matrix, link spatial acceleration vector, bias spatial forces vector, spatial tip force vector are used to find all the spatial force vectors of the manipulator. By taking the time derivative of link spatial velocity vector, link spatial acceleration vector, which contains bias spatial acceleration vector, can be found. Bias spatial acceleration vector is used to find coriolis and gravitational terms. Linear part of this vector for first link of the manipulator is the gravitational acceleration vector if the manipulator is modeled to work with gravitation else this part is simply a vector of zeros. Mass matrices, inertial matrices are derived for each link and obtained a matrix, including coriolis and gravitation, and generalized mass matrix; using propagation, body frames, jacobian matrix found by kinematic equations mentioned before. In case of a system with mobile base, mass, inertial and generalized matrix of the mobile base should be added to equations of motion of the system. Invers dynamic equation which provided to calculate required applied torques respect to the forces on the tip point of the manipulator and joint angular accelerations is obtained with this method. Derivated dynamic equations applied on 5 degree of freedom serial manipulator. With forward dynamics joint angular accelerations and motion of the serial manipulator under applied torques and tip point forces are investigated. Simulation results with and without gravitation and tip point forces are given.

Afterwards applying kinematic and dynamic equations using spatial operator algebra on an example of non-holonomic systems is shown. A disk rolling on a plane or a unicycle which has rolling without slipping constraint is studied. A nonholonomic system means the system constraints are nonholonomic. The system constraints can be expressed as a function of coordinate, velocity and independent variable time. If the constraints expressed with velocity are integrable for simplification which means that it can be expressed with only the system configurations, these constraints are holonomic. If they cannot, the constraints are nonholonomic. To find the equation of motion of the system with Lagrange equations, the constraints can be expressed in generalized coordinates and can be eliminated from the equations of motion. However for applying this approach, the constraints must be holonomic, in other words they must be integrable. The equations obtained by elimination of the holonomic constraints in generalized coordinates or adding after derivation of unconstrained dynamic equations gives the same result. Although for adding the nonholonomic constraints to the equations of motion, one should derivate equations of motion without constraints first and then should add nonholonomic constraints as generalized forces. Velocity constraints of the disk can be written as Pfaffian constraints. This constraints prevent the disk to has lateral or longitudinal slip.

Velocity constraints of the disk can be indicated in a constraint matrix. Constraints generate constraint forces and prevent the system go the directions which the system doesn't have motion permission. In dynamic modeling of rolling without slipping disk as a robotic approach, a manipulator is considered that the mass and the inertia of the disk are in center of mass of the disk and represent the mobile base of the manipulator. The manipulator has one degree of freedom rotational joint in center of mass of the disk and should have negative of the base's angular velocity in rolling direction to keep the tip point of the manipulator in contact with the surface. A two degree of freedom joint is attached to the manipulator with a link parallel to the disk at the bottom of the disk. This joint consist of steering and falling motions of the disk and must have negative of the base's angular velocities in steering and falling directions. The tip point of the manipulator should keep its starting orientation and contact with rolling surface. Also to achieve the rolling without slipping constraint with the disk, center of mass of the disk's or base of the manipulator's linear velocity in the rolling direction has to be equal to the product of the radius of the disk and angular velocity of the disk in rolling direction.

For adding velocity constraints on the rolling without slipping disk's dynamic equations obtained with spatial vector operator method, directions of unpermitted motion are shown as Pfaffian constraints, which is the product of a constraint matrix and generalized coordinate vector. The velocity constraints and constraint forces are incorporated on the equations. Instead the product of transpose of the Jacobian operator and spatial force vector externally applied to the tip point, the product of the transpose of the constraint matrix and amplitude of the generalized forces vector is used in dynamic equations. Disk's steering, falling and rolling motions in are designed using VRML program and results are shown.

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Taraması

Kullanımı uzun süreden beri devam eden uzaysal vektör cebirinden Rodriguez [1] iki nokta sınır değer problemi olarak rijit cisim dinamiği çözümlerinde faydalanmış, açık ve kapalı seri zincir sistemlerinin ileri ve ters dinamiği üzerine yeni bir algoritma geliştirmiştir. Rodriguez, Kreutz-Delgado ve Jain [2] pek çok tipte sistem için dinamik algoritmayı kullanmıştır. Bu metoda Yeşilöglü [3] sözde eklem yapısını tanıtarak katkı sağlamıştır. Bu tezde bu çalışma temel alınmıştır.

Holonomik ve holonomik olmayan terminolojisi ilk kez Hertz [4] tarafından sunulmuştur. Buna göre holonomik kelimesi (whole-law) tüm dinamik yasalarına uyan sistemler için kullanılmıştır. Bu tip kısıtlar hızlar üzerinden gösteriliyorsa integrallenerek konfigürasyon parametreleri ile ifade edilebilen kısıtlara dönüştürülebilirler. Holonomik olmayan sistemlerin hareket denklemlerinin çıkarılması üzerine Neimark ve Fufaev [5]'de Lagrange-d'Alembert prensibinden yola çıkılarak holonomik olmayan hareket denklemleri Lagrange çarpanları ile bulunması gösterilmiştir.

Yuvarlanan disk için klasik referanslar Chaplygin [6] ve Vierkandt'ın kayıpların olmadığı durumda diskin periyodik hareket yaptığını ispatlayan çalışmasıdır.[7] Bu konuda Hermans [8], O'Reilly[9], Crouch [10], Hermans ve Kemppainen [11], Zenkov, Bloch ve Marsden [12], Bloch, Reyhanoglu ve MacClamroch [13] tarafından yapılan modern çalışmalar bulunmaktadır.

Kaymadan yuvarlanma ile ilgili diğer sistemlerden olan bisiklet ve araba benzeri araçların holonomik olmayan modellenmesi ve kontrolü üzerine Getz ve Marsden [14], yuvarlanan parmak uçlarına sahip robot el üzerine Murray, Li, Sastry [15], iki tekerlek üzerinde hareketli ters sarkaç üzerine Larimi, Zarafshan, Moosavian [16], holonomik olmayan kısıtlara sahip yılanlı robot üzerine Polchankajorn, Manewarn [17] gibi çeşitli çalışmalar bulunmaktadır.

1.2 Tez Organizasyonu

Tezin giriş bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel bilgiler açıklanmıştır. Matris temel altuzayları tanıtılmış ve özellikleri anlatılmıştır. Kinematik ve dinamik denklemlerin simülasyon uygulamalarında kullanılmak üzere incelenen sistemin modeline göre çözümü olmayan ya da sonsuz çözümü olan eşitlikler için minimum hata ya da minimum vektör normu ile bir çözüm elde edilebilmesi için sözde ters işlemi açıklanmıştır. Rotasyon sonucu hareketli eksenlerin güncellenmesinde kullanılacak rotasyon matrislerinin Rodriguez formülü ile elde edilmesi anlatılmıştır. Farklı yapıdaki sistemler için kinematik ve dinamik denklemlerin uzaysal vektör cebri yöntemi uygulamaları [1-3]'te görülebilir. Tezde bu çalışmalardaki uzaysal vektör cebri yaklaşımı temel alınmıştır.

2. bölümde seri manipülatör için uzaysal vektör cebri ile kinematik denklemlerin çıkarılışı, ilgilenilen sistemin link uzunlukları, eklem dönme eksenleri, manipülatörün serbestlik derecesi gibi başlangıç yapısına dayanarak, propagasyon matrisinin, dönme eksenleri matrislerinin bulunması ve uç noktası uzaysal hızları ile eklem açısal hızları arasında eşlem yapan jakobiyen matrisinin elde edilmesi anlatılmıştır. Ters kinematik yöntemle istenen uç noktası uzaysal hızının oluşabilmesi için gereken eklem açısal hızlarının bulunuşu gösterilmiştir. Tezde kinematik alanda çalışılan örnek sistem hareketli platform üzerinde ortak çalışan manipülatörlerdir. Denklem yapısı H matrisleri ve propagasyon matrisleri değiştirilerek farklı sistemlere de uygulanabilir. Hareketli platform üzerinde ortak çalışan seri manipülatörlerin kinematiği için Matlab programında yazılan algoritmalar ve VRML Editör programında yapılan simülasyon çalışması anlatılmıştır.

3. Bölümde seri manipülatör için dinamik denklemlerin elde edilmesi için her ekleme uygulanan tork ve kuvvet denklemleri, kütle matrisi, eylemsizlik matrislerinin oluşturulması açıklanmış, ikinci bölümde bulunan kinematik denklemlerin de yardımıyla ileri dinamik yöntem yapılandırılmıştır. İleri dinamik yöntem ile uygulanan tork vektörü ve manipülatör uç noktasına dışarıdan uygulanan uzaysal kuvvet vektörüne karşılık manipülatör eklemlerinde oluşan açısal ivmeler bulunmaktadır. Dinamik denklemlerin seri manipülatör için uygulanması Matlab programında yapılan çalışmayla anlatılmıştır.

4. Bölümde holonomik ve holonomik olmayan sistemler arasındaki kinematik ve dinamik modelleme farklılıkları, sınırlamalar verilmiş, Holonomik olmayan bir sistem olan düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanan diskin ya da tek tekerleğin uzaysal vektör cebri yöntemiyle kinematik ve dinamik modelinin oluşturulması anlatılmıştır. Holonomik olmayan bu sistem için kinematik ve dinamik denklemlerde yapılması gereken değişiklikler, holonomik olmayan kısıtların hareket denklemlerine eklenmesi ve simülasyon çalışmaları gösterilmiştir.

1.3 Temel Altuzaylar ve Özellikleri

Değer Uzayı : Bir $m \times n$ A matrisinin sütunlarının tüm lineer kombinasyonları A matrisinin değer uzayını oluşturur ve $R(A)$ ile ifade edilir. $R(A)$ 'nın boyutu matrisin rankına 'r' eşittir. Matrisin satır sayısı, dolayısıyla sütunların eleman sayıları m olduğundan $R(A)$, \mathbb{R}^m ' in altuzayıdır.

$$Ax = b \quad (1.1)$$

Boş Uzay : Denklem (1.2)'nin çözümünü sağlayan sıfırdan farklı tüm x vektörleri A matrisinin boş uzayını oluşturur ve $N(A)$ ile gösterilir. $N(A)$ 'ın boyutu matrisin sütun sayısından rankın çıkarılması ile bulunur. Matrisin sütun sayısı ve $N(A)$ 'yı oluşturacak x vektörlerinin eleman sayıları n olacağından $N(A)$, \mathbb{R}^n 'in altuzayıdır. $N(A)$ 'ın sıfırdan farklı olması durumu A matrisinin terslenemez bir matris olduğunu gösterir ve denklem (1.4) kullanılamaz.

$$Ax = 0 \quad (1.2)$$

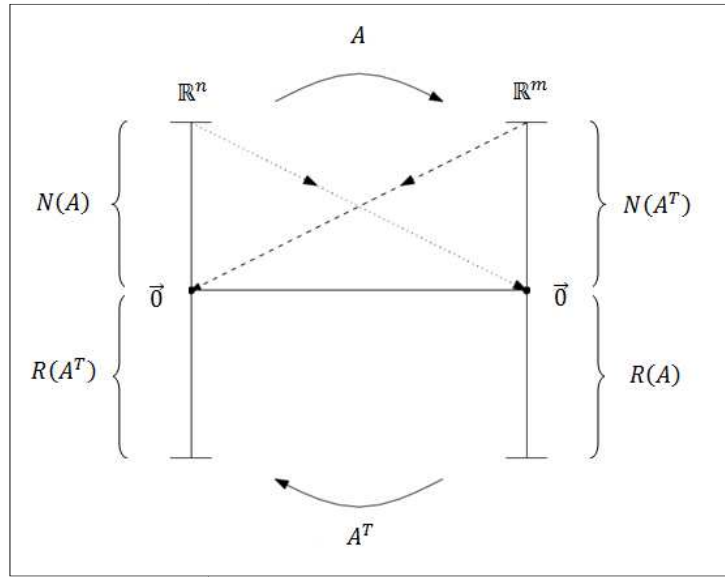
Transpozun Değer Uzayı : A matrisi transpozunun sütunlarının tüm lineer kombinasyonları A matrisi transposunun değer uzayını oluşturur ve $R(A^T)$ ile gösterilir. $R(A^T)$ 'nin boyutu matrisin rankına eşittir. A^T 'nin satır sayısı, dolayısıyla sütunların eleman sayıları n olduğundan $R(A^T)$, \mathbb{R}^n ' in altuzayıdır.

Transpozun Boş Uzayı : Denklem (1.3)'ün çözümünü sağlayan sıfırdan farklı tüm x vektörleri A^T 'nin boş uzayını oluşturur ve $N(A^T)$ ile gösterilir. $N(A^T)$ 'nin boyutu A^T 'nin sütun sayısından A matrisi rankının farkıdır. A^T 'nin sütun sayısı ve $N(A^T)$ 'ni oluşturacak x vektörlerinin eleman sayıları m olacağından $N(A^T)$, \mathbb{R}^m 'in altuzayıdır.

$$A^T x = 0 \quad (1.3)$$

A matrisi ile x vektörünün çarpımı bir lineer kombinasyon belirtir ve eşitliğin sağ tarafında $R(A)$ 'nın elemanı olan bir vektör meydana getirir. Verilen b için çözümün bulunabilmesi, b 'nin $R(A)$ 'nın elemanı olmasına bağlıdır.

Dört temel altuzay arası eşleme Şekil 1.1'de gösterilmiştir. A matrisinin $N(A)$ 'nın elemanı olan bir vektörle ya da A^T matrisinin $N(A^T)$ 'nin elemanı olan bir vektörle çarpımı sonucu sıfır vektörüne götürür. $R(A)$ ve $N(A^T)$ altuzaylarının boyutları toplamı m , $R(A^T)$ ve $N(A)$ matrislerinin boyutları toplamı n 'dir.



Şekil 1.1 : Altuzaylar arası eşlem.

1.4 Sözde Ters İşlemlerle Çözüm Vektörünün Bulunması

A 'nın kare matris olması durumunda denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir. A 'nın tüm satır vektörleri lineer bağımsız ise A terslenebilir matristir ve verilebilecek tüm b 'ler $R(A)$ 'nın elemanı olacağından tek bir çözüm (1.4) ile bulunabilir.

$$x = A^{-1}b \quad (1.4)$$

$N(A)$ sıfırdan farklı ise A terslenemez bir matristir ve bu durum b 'nin $R(A)$ 'da olmasına bağlı olarak sonsuz çözüme ya da çözümsüzlüğe yol açar. $N(A^T)$ sıfırdan farklı ise tek bir çözüm ya da çözümsüzlük durumu oluşur.

A dikdörtgen matris olduğunda, denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla $m > n$ ise büyük olasılıkla b , $R(A)$ 'da olmayacak ve çözüm bulunamayacaktır. Bu durumda en küçük kareler yöntemi kullanılarak denklem (1.5)'teki hatanın karesi en küçük olacak şekilde b vektörünün $R(A)$ altuzayına düşen bileşeni bulunmalıdır.

$$hata = b - Ax \quad (1.5)$$

Denklem (1.6) ile matrisin sol tersi alınarak (1.4)'te A'nın tersi yerine kullanılarak uygun çözüm elde edilir. A matrisinin sol tersinin hesaplanabilmesi için matrisin sütun rankı tam olması gerekir. Aksi halde (1.6)'daki tersleme yapılamaz.

$$\left(A^{\#}\right)_{sol} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \quad (1.6)$$

Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla $n > m$ ise $N(A^T)$ mutlaka sıfırdan farklı bir uzay ifade edeceğinden sonsuz çözüm oluşur. Bu kez istenen sonsuz çözümden normu en küçük olanı bulmaktır. Denklem (1.7) ile matrisin sağ tersi bulunarak denklem (1.4)'te A'nın tersi yerine konarak uygun çözüm elde edilir. Matrisin sağ tersi alınabilmesi için A'nın satır rankı tam olması, bir başka deyişle $N(A^T)$ 'nin sıfır olması gerekir. Aksi halde (1.7)'deki tersleme işlemi yapılamaz.

$$\left(A^{\#}\right)_{sağ} = A^T \left(AA^T\right)^{-1} \quad (1.7)$$

Matrisin satır ve sütun rankının tam olmadığı yani en küçük kareler yöntemi uygulanamadığı durumda sözde ters işlemi uygulanır. Sözde ters işlemi için A matrisi tekil değer ayrışımı yöntemi ile denklem (1.8)'deki matrislere ayrıştırılır.

$$A = U \Sigma V^T \quad (1.8)$$

Burada U , AA^T 'un eigenvektörlerinden oluşan $m \times m$ ortogonal matris, V^T ise $A^T A$ 'nın eigenvektörlerinden oluşan $n \times n$ ortogonal matristir. İçeriği denklem (1.9)'da gösterilen Σ matrisi dikdörtgen matris olup, diagonalindeki elemanları A matrisinin tekil değerleridir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \sigma_n & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

A matrisinin rankı tam olmadığında sıfır tekil değerleri vardır. Σ matrisinin sıfırdan farklı tekil değerleri denklem (1.10)'daki gibi terslenir. Sözde ters işleminde uygulamaya göre belirlenen toleranstan küçük olan tekil değerler sıfırlanabilir.

$$\Sigma^\# = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

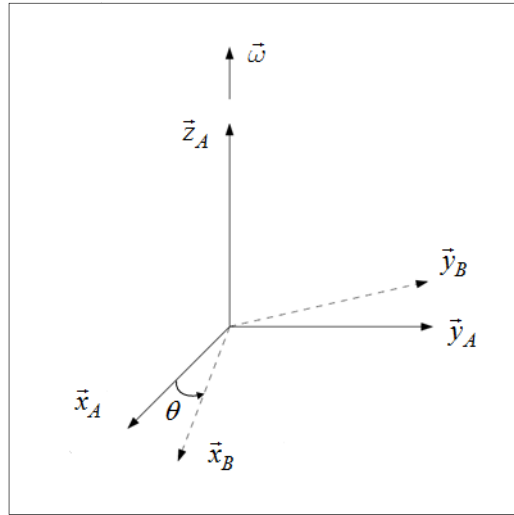
Terslenen matris kullanılarak A matrisinin sözde tersi bulunur.

$$A^\# = V \Sigma^\# U^T \quad (1.11)$$

Matlab programında $\text{pinv}(A)$ komutu, girilen A matrisinin satır ya da sütun rankı tam ise en küçük kareler yöntemi ile aynı sonucu verir. A matrisi rankı yetersiz ise bu kez matrisin sözde tersini bulur. Tezde yapılan çalışmalarda jakobiyen matrisinin tersini almak için pinv komutu kullanılmıştır.

1.5 Rotasyon Matrisinin Rodrigues Formülü ile Bulunması

Şekil 1.2’de görülen B eksen takımının $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ birim vektörü ile gösterilen dönme eksenine göre $\theta \in \mathbb{R}$ açısı kadar dönmesi sonucu hareketli eksen takımının A sabit eksen takımına göre oryantasyonu rotasyon matrisi ile bulunabilir.



Şekil 1.2 : Eksen takımının dönme hareketi.

Rotasyon matrisini ω ve θ cinsinden eksponansiyel olarak ifade edebilmek için B eksen takımında bir b noktasının hızı yazılırsa:

$$\dot{b}(t) = \vec{\omega} \times b(t) = \hat{\omega} b(t) \quad (1.12)$$

Burada $\hat{\omega}$ sembolü, 3×3 negatif simetrik matrisi ifade eder. Matris elemanları vektörel çarpımı sağlayacak şekildedir.

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Negatif simetrik matrisin transpozu, matrisin -1 katına eşittir.

$$\hat{\omega}^T = -\hat{\omega} \quad (1.14)$$

Diferansiyel denklemin çözümü ile b noktasının t anındaki konumu denklem (1.15) ile bulunur. $b(0)$, b noktasının $t=0$ anındaki başlangıç konumudur.

$$b(t) = e^{\hat{\omega}t} b(0) \quad (1.15)$$

Ekspansiyel ifadenin açılımı denklem (1.16)'da gösterilmiştir.

$$e^{\hat{\omega}t} = \mathbf{I} + \hat{\omega}t + \frac{(\hat{\omega}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}t)^3}{3!} + \dots \quad (1.16)$$

Negatif simetrik matris özelliklerinden faydalanarak rotasyon matrisini veren Rodrigues Formülü elde edilir.

$$R = e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{I} + \hat{\omega} \sin \theta + (1 - \cos \theta) \quad (1.17)$$

2. KİNEMATİK MODELLEME

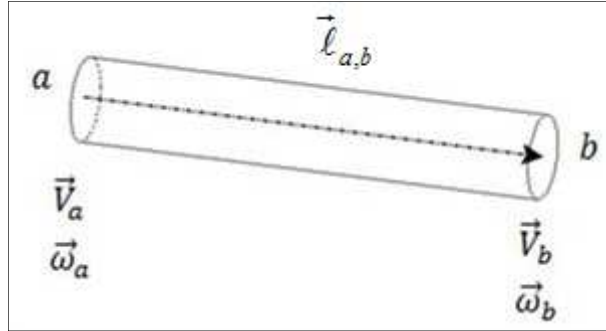
2.1 Tek Link Üzerindeki Hız Aktarımları

Şekil 2.1’de gösterilen tek link üzerindeki b noktasının açısal ve çizgisel hızı a noktasının hızlarına bağlı olarak yazılırsa:

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_a \quad (2.1)$$

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \frac{d}{dt} \vec{\ell}_{a,b} \quad (2.2)$$

$\vec{\ell}_{a,b} \in \mathbb{R}^3$, a noktasından b noktasına, normu link uzunluğunu belirten vektördür. Denklem (1.12), denklem (2.3)’e yerleştirilmiş ve sağ el kuralına uygun olarak vektörel çarpım denklem (2.4)’te yeniden yazılmıştır.



Şekil 2.1 : Tek link üzerinde uzunluk vektörü ve hızların gösterimi.

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \vec{\ell}_{a,b} \quad (2.3)$$

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a - \vec{\ell}_{a,b} \times \vec{\omega}_a \quad (2.4)$$

Açısal ve çizgisel hız denklemleri matris formunda bir araya getirilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega}_b \\ \vec{v}_b \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\hat{\ell}_{a,b} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_a \\ \vec{v}_a \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (2.5)$$

$\mathbf{I}_{3 \times 3}$, 3×3 birim matrisi, $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ ise 3×3 sıfır matrisi, $\hat{\ell}_{a,b}$ 3×3 ters simetrik matrisi tanımlamaktadır. Hızların uzaysal vektörlerle ifadesi denklem (2.6)’te gösterilmiştir.

$$\vec{V}_b = \phi_{b,a} \vec{V}_a \quad (2.6)$$

\vec{V} açısal ve çizgisel hızları içeren 6×1 uzaysal hız vektörü, $\phi_{b,a}$ ise a noktasının hızlarını b noktasına aktarmayı sağlayan propogation (aktarım) matrisidir.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2 İki Link Üzerindeki Hız Aktarımları

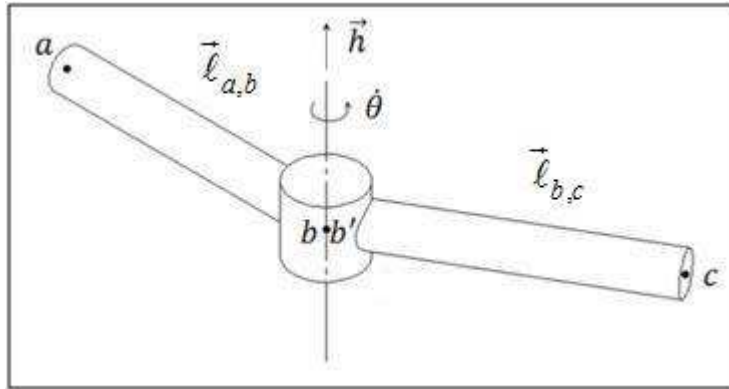
Şekil 2.2'de iki link üzerinde gösterilen noktalardan b ve b' eklem merkezinde çakışık iki nokta olarak düşünülmektedir. b noktasının açısal ve doğrusal hızları:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_b &= \vec{\omega}_a \\ \vec{v}_b &= \vec{v}_a + \vec{\omega}_a \times \vec{l}_{a,b} \end{aligned} \quad (2.8)$$

İken eklemdaki dönüş hareketinin etkisiyle b' noktasının açısal ve doğrusal hızları:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{b'} &= \vec{\omega}_b + \vec{h} \dot{\theta} \\ \vec{v}_{b'} &= \vec{v}_b \end{aligned} \quad (2.9)$$

Burada \vec{h} dönme eksenini gösteren 3×1 birim vektör, $\dot{\theta}$ eklem açısal hızıdır.



Şekil 2.2 : İki link üzerinde link uzunluk vektörleri, dönme eksenini ve açısal hız.

c noktası hızlarının b' noktasına bağlı olarak gösterimi :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_c &= \vec{\omega}_{b'} \\ \vec{v}_c &= \vec{v}_{b'} + \vec{\omega}_{b'} \times \vec{l}_{b',c} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Denklem (2.10)'un matris formunda ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega}_c \\ \vec{v}_c \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\hat{\ell}_{b,c} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_b \\ \vec{v}_b \end{bmatrix}_{6 \times 1} + \begin{bmatrix} \vec{h} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \dot{\theta} \quad (2.11)$$

Son olarak iki link için a , b ve c noktalarının hız aktarımları uzaysal hız vektörleriyle verilirse:

$$\begin{aligned} \vec{V}_b &= \phi_{b,a} \vec{V}_a \\ \vec{V}_c &= \phi_{c,b} \vec{V}_b + \vec{H} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

\vec{H} vektörü eklem tipine göre değişen uzaysal vektördür. Denklem (2.11)'de dönel eklem tipi için dönme eksenini gösteren birim vektör ve $\vec{0}$ vektöründen oluşur. Eklem tipine prizmatik tipinde olması durumunda \vec{h} birim vektörü öteleme yönünü gösterir ve \vec{H} uzaysal vektörü denklem (2.13)'teki şeklini alır.

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{h} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Eklem tipine serbestlik derecesi arttıkça, dönel ve prizmatik özellikler yeni bir sütun olarak eklenir ve \vec{H} bir matris haline gelir. Farklı eklem tiplerine göre \vec{H} matrisinin oluşturulması Şekil 2.4'te gösterilmiştir.

$\begin{bmatrix} \vec{h} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{h} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vec{h}_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{h}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \vec{h}_3 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix}$
dönel	prizmatik	helisel	silindirik	küresel
1 SD	1 SD	1 SD	2 SD	3 SD

Şekil 2.3 : Farklı eklem tipleri için uzaysal \vec{H} matrisinin yapısı.

2.3 Seri Manipülator Üzerindeki Hız Aktarımları

Birinci linkten n'inci linke kadar link uzaysal hızları, her link kendinden önceki link hızlarına bağlı olarak yazılırsa:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_1 &= \vec{H}_1 \dot{\theta}_1 \\
 \vec{V}_2 &= \phi_{2,1} \vec{V}_1 + \vec{H}_2 \dot{\theta}_2 \\
 \vec{V}_3 &= \phi_{3,2} \vec{V}_2 + \vec{H}_3 \dot{\theta}_3 \\
 &\vdots \\
 \vec{V}_n &= \phi_{n,n-1} \vec{V}_{n-1} + \vec{H}_n \dot{\theta}_n
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Denklem (2.14)'deki uzaysal hızlar denklem (2.15)'ye yerleştirilir.

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_1 &= \vec{H}_1 \dot{\theta}_1 \\
 \vec{V}_2 &= \phi_{2,1} \vec{H}_1 \dot{\theta}_1 + \vec{H}_2 \dot{\theta}_2 \\
 \vec{V}_3 &= \phi_{3,1} \vec{H}_1 \dot{\theta}_1 + \phi_{3,2} \vec{H}_2 \dot{\theta}_2 + \vec{H}_3 \dot{\theta}_3 \\
 &\vdots \\
 \vec{V}_n &= \phi_{n,1} \vec{H}_1 \dot{\theta}_1 + \phi_{n,2} \vec{H}_2 \dot{\theta}_2 + \dots + \vec{H}_n \dot{\theta}_n
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Denklem (2.15) matris formunda yazılırsa :

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vdots \\ \vec{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{2,1} & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \dots & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{H}_1 & \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{H}_2 & \vec{0} & \dots & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{H}_3 & \dots & \vec{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{0} & \vec{0} & \dots & \dots & \vec{H}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

ϕ ve \vec{H} matrislerinden oluşturulan büyük matrislerle birlikte eşitlik denklem (2.17) gibi de ifade edilebilir.

$$\underline{V}_{6n \times 1} = \Phi_{6n \times 6n} \mathbf{H}_{6n \times n} \underline{\dot{\theta}}_{n \times 1} \tag{2.17}$$

Uç noktasının hızı, uç noktasının bağlandığı son link uzunluğunu içeren propagasyon matrisinin son link uzaysal hız vektörü ile çarpılmasıyla bulunur.

$$\vec{V}_t = \phi_{t,n} \vec{V}_n \tag{2.18}$$

Uç noktası hızlarını \underline{V} vektöründen faydalanarak bulmak için $\phi_{t,n}$ matrisini içeren Φ_t matrisi oluşturulur.

$$\ddot{\underline{V}}_t = \Phi_t \underline{V} \quad (2.19)$$

Φ_t matrisi, $\phi_{t,n}$ sona gelecek ve matrisin geri kalanı $0_{6 \times 6}$ matrislerden oluşacak şekilde yapılandırılır.

$$\ddot{\underline{V}}_t = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} & \cdots & 0_{6 \times 6} & \phi_{t,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{V}}_1 \\ \ddot{\underline{V}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\underline{V}}_{n-1} \\ \ddot{\underline{V}}_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Denklem (2.17), (2.21)'e yerleştirilerek :

$$\ddot{\underline{V}}_t = \Phi_t \Phi \mathbf{H} \dot{\underline{\theta}} \quad (2.21)$$

Manipülator eklem açısal hızları $\dot{\underline{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ ile uç noktası uzaysal hız vektörü $\ddot{\underline{V}}_t \in \mathbb{R}^6$ arasında eşleme yapan $6 \times n$ jakobiyen matrisi denklem (2.22) ile elde edilir.

$$J = \Phi_t \Phi \mathbf{H} \quad (2.22)$$

Jakobiyen matrisi denklem (2.21)'e yerleştirilerek ileri kinematik denklemleri son haline alır. Verilen eklem açısal hızlarına karşılık uç noktası uzaysal hızı:

$$\ddot{\underline{V}}_t = J \dot{\underline{\theta}} \quad (2.23)$$

Ters kinematik ile istenen uç noktası açısal ve doğrusal hızlarına karşılık eklemlere uygulanması gereken açısal hızlar jakobiyenin sözde tersi ile bulunmaktadır.

$$\dot{\underline{\theta}} = J^\# \ddot{\underline{V}}_t \quad (2.24)$$

$J^\#$ jakobiyen matrisinin sözde tersini ifade eder. Matlab programında sözde ters işlemi, işlem uygulanan matrisin satır ve sütun rankını inceleyerek en küçük kareler yönteminin uygulanırılığını kontrol eder. 6 boyutlu uzayda redundant bir manipülatör üzerinde çalışılıyorsa matris $6 \times n$, $n > 6$ olacak ve sağ ters alınarak en küçük kareler yöntemi uygulanır.

Ancak J matrisinin satır rankı tam değilse sözde ters alınarak çözüm bulunur. Serbestlik derecesi 6'dan küçük manipülatörler için ise sol ters incelenerek aynı işlem uygulanır.

Manipülatörlerin tuttuğu üst platformun hızı, platform merkezinden her bir uç işlevcisine olan uzaklığın oluşturduğu ${}^i\phi_{t,c}$ propagasyon matrisleri ile çarpılarak denklem (2.25)'deki gibi tüm manipülatör uç nokta hızlarına aktarılır.

$${}^i\vec{V}_t = {}^i\phi_{t,c} \vec{V}_c \quad (2.25)$$

Hareketli alt platform uzaysal hız vektörü ve her manipülatörün uç noktasına propagasyon matrisleri çarpımının eklenmesi ile manipülatörlerin ileri kinematik denklemleri (2.26)'de matris formunda gösterilmiştir.

$$\underline{V}_t = \begin{bmatrix} {}^1\vec{V}_t \\ {}^2\vec{V}_t \\ {}^3\vec{V}_t \\ \vdots \\ {}^p\vec{V}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J & & & & 0 \\ & {}^2J & & & \\ & & {}^3J & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & {}^pJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^1 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^3 \\ \vdots \\ \dot{\theta}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\phi_{t,b} \\ {}^2\phi_{t,b} \\ {}^3\phi_{t,b} \\ \vdots \\ {}^p\phi_{t,b} \end{bmatrix} \vec{V}_b \quad (2.26)$$

Ortak çalışan manipülatörler için kinematik denklemlerin sonraki kullanımlarında kolaylık sağlamak amacıyla matris ve vektörler modüler hale getirilir. Bu amaçla manipülatörlerin tüm link uzaysal hızları vektörüne alt platform uzaysal hız vektörü eklenir.

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_b \\ {}^1\underline{V} \\ {}^2\underline{V} \\ \vdots \\ {}^p\underline{V} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$\dot{\underline{\theta}}$ vektörü, alt platform uzaysal hızı ve ayrı ayrı tüm manipülatör eklemlerini içerecek şekilde oluşturulur.

$$\dot{\underline{\theta}} = \begin{bmatrix} \vec{V}_b \\ \dot{\underline{\theta}}^1 \\ \dot{\underline{\theta}}^2 \\ \vdots \\ \dot{\underline{\theta}}^p \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Φ matrisi, tüm manipülatör propagasyon matrisleri diagonale gelecek şekilde oluşturulur.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ {}^1\Phi^1\Phi_b & {}^1\Phi & & 0 \\ {}^2\Phi^2\Phi_b & & {}^2\Phi & \\ \vdots & & & \ddots \\ {}^p\Phi^p\Phi_b & 0 & & {}^p\Phi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

\mathbf{H} matrisi, birim matris ve tüm manipülatörlerin \mathbf{H} matrisleri diagonale gelecek, geri kalan kısımlar uygun boyutlarda sıfır matrislerden oluşacak şekilde doldurulur.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & 0 \\ & {}^1\mathbf{H} & & \\ & & {}^2\mathbf{H} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & {}^p\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Φ_t matrisi tüm manipülatör uç noktası propagasyon matrisleri diagonale gelecek, geri kalan kısımlar uygun boyutlarda sıfır matrislerden oluşacak şekilde doldurulur.

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & {}^1\Phi_t & & \\ & & {}^2\Phi_t & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & {}^p\Phi_t \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

J matrisi, her manipülatörün alt platformdan uç noktasına uzaklığı içeren propagasyon matrisleri ve diagonalde her manipülatör için hesaplanan jakobiyen matrislerinden oluşur. Geri kalan kısımlar uygun boyutlarda sıfır matrislerdir.

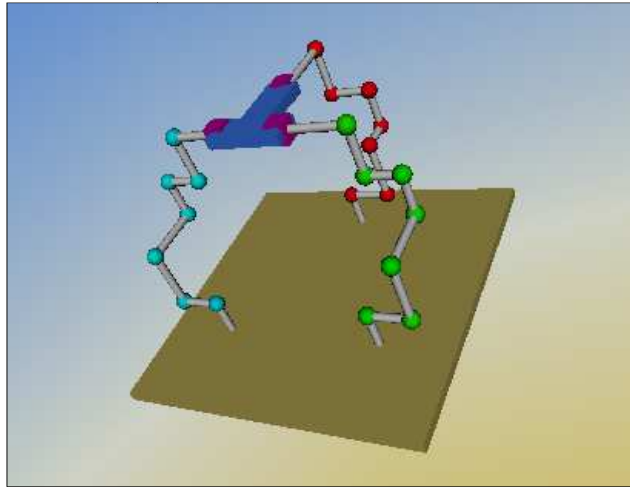
$$\mathbf{J} = \Phi_t \Phi \mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}^1\Phi_{t,b} & {}^1J & & 0 \\ {}^2\Phi_{t,b} & & {}^2J & \\ \vdots & & & \ddots \\ {}^p\Phi_{t,b} & 0 & & {}^pJ \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Hareketli platform üzerinde ortak çalışan manipülatörler için gerekli matrisler oluşturulduğunda verilen eklem açılma hızlarına karşılık gelen uç noktası hızlarının bulunmasını sağlayan ileri kinematik denklemi elde edilir.

$$\underline{\mathbf{V}}_t = \mathbf{J} \underline{\dot{\theta}} \quad (2.33)$$

2.4 Ortak Çalışan Seri Manipülatörler Kinematiği Simülasyonu

Şekil 2.4'te görülen hareketli bir platform üzerinde 3 adet 7 serbestlik dereceli manipülatör ve ortak çalışan bu manipülatör uç işlevcilerinin tuttuğu üst platform Matlab VRML Editor programında tasarlanmıştır.



Şekil 2.4 : Ortak çalışan seri manipülatörlerin VRML görüntüsü.

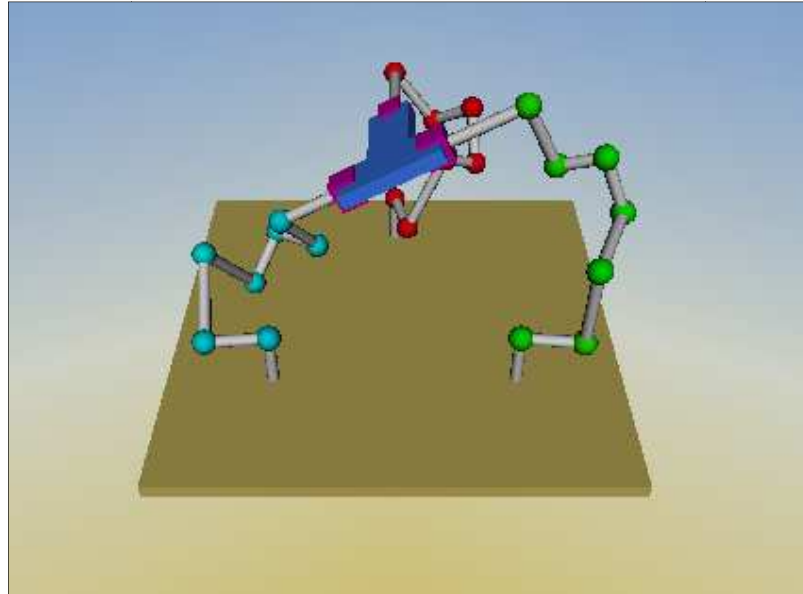
Matlab Editor'de yazılımın ilk kısmında manipülatör sayısı, serbestlik dereceleri, link uzunlukları, eklemlerin dönme eksenleri girilerek sistemin başlangıç konfigürasyonu oluşturulur. Bu kısım programın çalıştırılışında bir kez çalıştırılarak başlangıç değerleri ve sistem değişkenleri tanımlanır.

İkinci kısımda ise her adımda üst ve alt platform için girilen uzaysal hız değerleri işlenerek propagasyon, uzunluk, dönme eksen matrisleri oluşturulur. $\mathbf{J}^\#$ hesaplanarak denklem (2.24) ile üst ve alt platformlara verilen uzaysal hızlar için manipülatörlerin eklem açısal hızları $\dot{\theta}$ elde edilir. Giriş olarak alınan üst ve alt platform hızları ile bulunan birim dönme eksen vektörleri ve açısal hızlar Rodrigues formülünde kullanılır. Hareketli alt platform, üst platform ve tüm link hareketli eksen takımları güncellenir.

Rodrigues formülü uç noktasından alt platforma doğru uygulanarak n'inci eklemden birinci ekleme kadar her eklemin kendinden önceki tüm eklemlerin dönüş hareketini de içermesi sağlanır. j'inci eklem x ekseninin dönüş sonrası değerleri (2.34)'deki gibi bulunur. Bu işlem y ve z eksenleri için de uygulanır.

$$\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} = R_1 R_2 R_3 \cdots R_j \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Bulunan açısal hızlar ve dönme eksenleri Simulink programında ilgili bloktan alınarak uygulamanın gözlemleneceği VRML bloğuna aktarılır. Şekil 2.5'te üst platformun dönme hareketine ait örnek simülasyon görüntüsü verilmiştir.



Şekil 2.5 : Üst platformun dönme hareketi örnek görüntüsü.

Çalışmaya ait sonuçlar EK-B bölümünde verilmiştir.

3. DİNAMİK MODELLEME

Sistem dinamikğinin ile hareket denklemlerinin oluşturulması için Newton Euler yönteminde sistem ayrı ayrı parçaları için incelenerek bu parçalara etkiyen iç kuvvetler daha sonra hareket denklemlerine geçildiğinde bu kuvvetler denklemler içinde elimine edilir. Bu kuvvetler sistemde harekete neden olmaz ve iş yapmazlar. İş ve enerji tabanlı olan analitik dinamik yaklaşımında ise Lagrange yöntemi ile sistemin dinamiği ayrı ayrı parçaların değil tüm sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi kullanılarak sistem dinamiğini ifade eden Lagrange denklemleri elde edilir. Sistem dinamik denklemleri için farklı yöntemler birçok kaynak bulunmaktadır. Sistem dinamik denklemi genel olarak denklem (3.1)'deki gibi ifade edilir.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (3.1)$$

Burada M matrisi genelleştirilmiş kütle matrisi, C matrisi Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerini içeren matris, N matrisi yerçekimini ve eklemlere etkiyen diğer kuvvetleri içeren matristir. Eşitliğin sağ tarafı eklemlere uygulanan tork değerleridir.

Bu tezde hareketli base üzerindeki seri manipülatör dinamik modellemesi için uzaysal vektör cebri yöntemi kullanılmıştır. Uzaysal vektör cebri yöntemi ile farklı sistem yapıları için dinamik modellemenin oluşturulması [3]'ten incelenebilir.

3.1 Seri Manipülatör Dinamiği

Seri manipülatörün k'inci linki için, uygulanan tork denklemi sırasıyla, k+1'inci linkin torkunun ve bu linke uygulanan kuvvetin, k'inci linkteki öteleme ve dönmenin link torkuna etkisini içerir.

$$\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_{k+1} + \bar{\ell}_{k,k+1} \times \bar{f}_{k+1} + m_k \bar{\ell}_{k,c} \times \dot{\bar{v}}_k + \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_k \omega_k) \quad (3.2)$$

Aynı şekilde k'inci linke uygulanan kuvvet denklemi, bir sonraki link kuvveti ve kütle merkezinin doğrusal hızının zamana bağlı türevi alınarak bulunan ivmenin meydana getirdiği kuvvetlerden oluşur.

$$\vec{f}_k = \vec{f}_{k+1} + m_k \frac{d}{dt} (\vec{v}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{\ell}_{k,c}) \quad (3.3)$$

Burada $\vec{\ell}_{k,c}$ link merkezine kadar olan uzaklığı belirten vektördür. Tork ve kuvvet vektörleri birleştirilerek link uzaysal kuvvet vektörü yazılır.

$$\vec{\vec{F}}_k = \begin{bmatrix} \vec{\vec{v}}_k \\ \vec{f}_k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{\vec{F}}_k = \phi_{k+1,k}^T \vec{\vec{F}}_{k+1} + M_k \dot{\vec{V}}_k + \vec{\vec{b}}_k \quad (3.5)$$

Burada k linki uzunluğunu içeren propagasyon matrisi,

$$\phi_{k+1,k}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \hat{\ell}_{k,k+1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

link kütle matrisi,

$$M_k = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_k & m_k \hat{\ell}_{k,c} \\ -m_k \hat{\ell}_{k,c} & m_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

link uzaysal kuvvetler artan terimleri,

$$\vec{\vec{b}}_k = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_k + \mathcal{I} \vec{\omega}_k \\ m_k \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{\ell}_{k,c}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.5)'te bulunan link uzaysal kuvvet vektörü ifadesi n link için yazılır.

$$\begin{aligned} \vec{\vec{F}}_1 &= \phi_{2,1}^T \vec{\vec{F}}_2 + M_1 \dot{\vec{V}}_1 + \vec{\vec{b}}_1 \\ \vec{\vec{F}}_2 &= \phi_{3,2}^T \vec{\vec{F}}_3 + M_2 \dot{\vec{V}}_2 + \vec{\vec{b}}_2 \\ &\vdots \\ \vec{\vec{F}}_{n-1} &= \phi_{n,n-1}^T \vec{\vec{F}}_n + M_n \dot{\vec{V}}_n + \vec{\vec{b}}_n \\ \vec{\vec{F}}_n &= \phi_{t,n}^T \vec{\vec{F}}_t + M_n \dot{\vec{V}}_n + \vec{\vec{b}}_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

n 'inci linkten itibaren link uzaysal kuvvet vektör ifadeleri denklemde yerine yerleştirilerek tüm linklere etkiyen uzaysal kuvvetler vektörünün elde edilmesini sağlayan eşitlik bulunur.

$\vec{\bar{F}}_t$ manipülatör uç noktasına dışarıdan uygulanan kuvvetleri ifade eden uzaysal kuvvet vektörüdür.

$$\underline{F} = \Phi^T \left(M \underline{\dot{V}} + \underline{b} + \Phi_t^T \vec{\bar{F}}_t \right) \quad (3.10)$$

Burada $\underline{\dot{V}}$ tüm link uzaysal ivmeleri vektörü,

$$\underline{\dot{V}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{V}}_1 \\ \dot{\bar{V}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{V}}_{n-1} \\ \dot{\bar{V}}_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

\underline{b} , tüm linklerin uzaysal kuvvetler artan terimleri vektörü,

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \\ \bar{b}_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

\mathbf{M} ise tüm linklerin kütle matrislerini içeren matristir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & & & & 0 \\ & M_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_{n-1} & \\ 0 & & & & M_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Denklem (3.10)'daki link uzaysal hız vektörlerinin türevlerini bulmak için kinematik denklemlerde kullanılan açısal ve doğrusal hız denklemleri tekrar yazılırsa :

$$\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_{k-1} + \vec{h}_k \dot{\theta}_k \quad (3.14)$$

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{k-1} + \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k} \quad (3.15)$$

Zamana göre türevleri alındığında :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}}_k &= \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{h}_k \dot{\theta}_k \\
&= \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k - \vec{\omega}_{k-1}) \\
&= \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k + \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\omega}_k
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{v}}_k &= \dot{\vec{v}}_{k-1} + \dot{\vec{\omega}}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k} + \vec{\omega}_{k-1} \times (\vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k}) \\
&= \dot{\vec{v}}_{k-1} - \vec{\ell}_{k-1,k} \times \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{\omega}_{k-1} \times (\vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Matris formuna geçirilirse :

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_k \\ \dot{\vec{v}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\hat{\ell}_{k-1,k} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{k-1} \\ \dot{\vec{v}}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{h}_k \\ \vec{0} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_k + \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\omega}_k \\ \vec{\omega}_{k-1} \times (\vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k}) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

k'inci linkin uzaysal ivmesi k-1'inci link uzaysal ivmesine bağlı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{\vec{V}}_k = \phi_{k,k-1} \dot{\vec{V}}_{k-1} + \vec{H}_k \ddot{\theta}_k + a_k \tag{3.19}$$

Denklemden a_k vektörü, k linki için coriolis ve santrifüj uzaysal ivmelerini ifade eden vektördür.

$$a_k = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\omega}_k \\ \vec{\omega}_{k-1} \times (\vec{\omega}_{k-1} \times \vec{\ell}_{k-1,k}) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

n link vektörünün ivme denklemleri her biri kendinden önceki linki içerek şekilde yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{V}}_1 &= \vec{H}_1 \ddot{\theta}_1 + a_1 \\
\dot{\vec{V}}_2 &= \phi_{2,1} \dot{\vec{V}}_1 + \vec{H}_2 \ddot{\theta}_2 + a_2 \\
\dot{\vec{V}}_3 &= \phi_{3,2} \dot{\vec{V}}_2 + \vec{H}_3 \ddot{\theta}_3 + a_3 \\
&\vdots \\
\dot{\vec{V}}_n &= \phi_{n,n-1} \dot{\vec{V}}_{n-1} + \vec{H}_n \ddot{\theta}_n + a_n
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Matris formunda gösterimi denklem (3.22)'deki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{V}}_1 \\ \dot{\underline{V}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\underline{V}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & 0 \\ \phi_{2,1} & \mathbf{I} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_{n,1} & \cdots & \phi_{n,n-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\bar{H}}_1 \\ \bar{\bar{H}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\bar{H}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\bar{a}}_1 \\ \bar{\bar{a}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\bar{a}}_n \end{bmatrix} \right\} \quad (3.22)$$

Link uzaysal ivmelerinin genel ifadesi :

$$\dot{\underline{V}} = \Phi (\mathbf{H} \ddot{\underline{\theta}} + \underline{a}) \quad (3.23)$$

Denklem (3.23), (3.10)'da yerine yerleştirilirse :

$$\underline{F} = \Phi^T (\mathbf{M} \Phi \mathbf{H} \ddot{\underline{\theta}} + \mathbf{M} \Phi \underline{a} + \underline{b} + \Phi_t^T \bar{\bar{F}}_t) \quad (3.24)$$

Uzaysal kuvvetler kullanılarak eklemlere uygulanması gereken torqları bulabilmek için dönme eksenlerinden yararlanılır.

$$\underline{\mathcal{T}} = \mathbf{H}^T \underline{F} \quad (3.25)$$

Denklem (3.24), (3.25)'te kullanılarak ters dinamik elde edilir.

$$\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{M} \ddot{\underline{\theta}} + \underline{\mathcal{C}} + J^T \bar{\bar{F}}_t \quad (3.26)$$

Burada \mathcal{M} genelleştirilmiş kütle matrisi,

$$\mathcal{M} = \mathbf{H}^T \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{H} \quad (3.27)$$

$\underline{\mathcal{C}}$ ise coriolis ve yerçekimini içeren matrisidir.

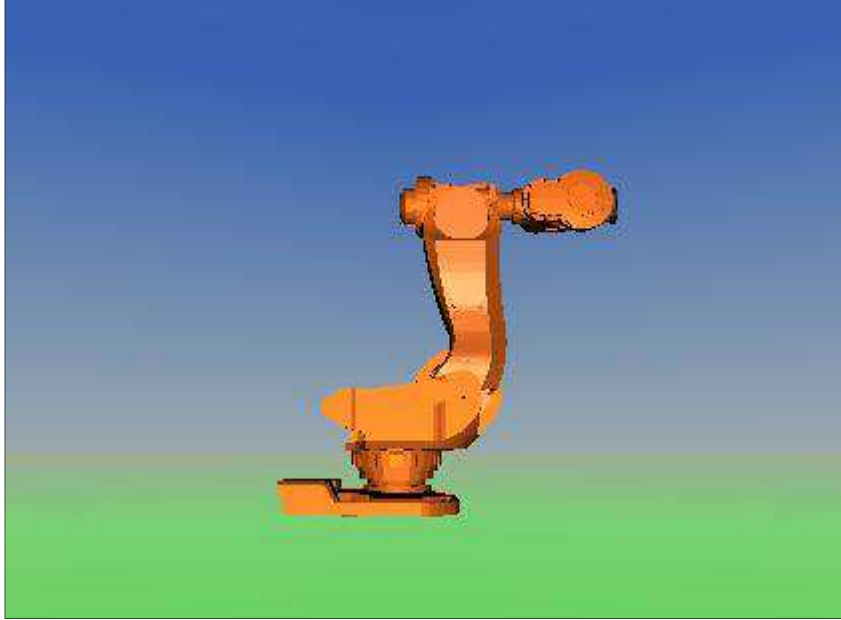
$$\underline{\mathcal{C}} = \mathbf{H}^T \Phi^T (\mathbf{M} \Phi \underline{a} + \underline{b}) \quad (3.28)$$

İleri dinamik ile uygulanan tork ve dış kuvvet vektörlerine karşılık eklem açısai ivmeleri bulunabilir.

$$\ddot{\underline{\theta}} = \mathcal{M}^{-1} (\underline{\mathcal{T}} - \underline{\mathcal{C}} - J^T \bar{\bar{F}}_t) \quad (3.29)$$

3.2 Seri Manipülator Dinamiği Simülasyonu

Dinamik denklemlerin seri manipülator uygulaması için Şekil 3.1’de görülen VRML programında tasarlanan 5 serbestlik dereceli seri manipülator kullanılmıştır.



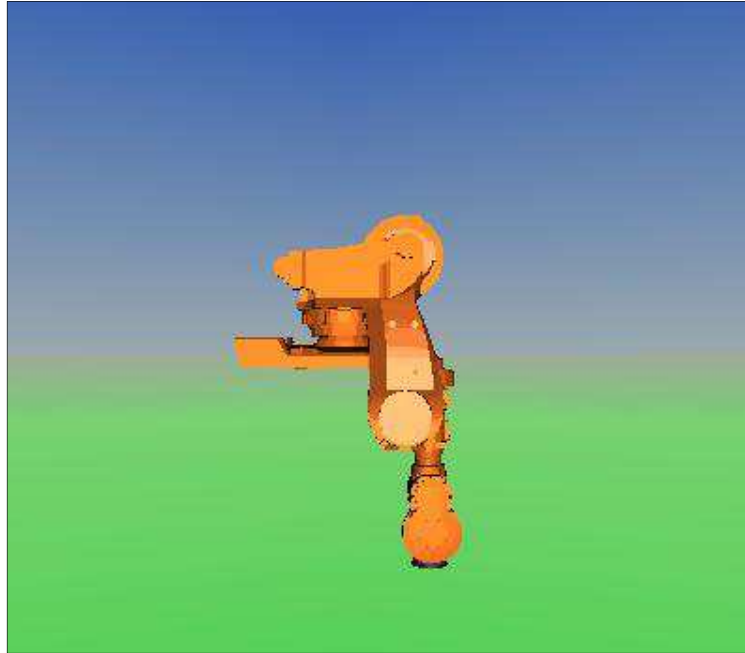
Şekil 3.1 : Seri manipülator VRML görüntüsü.

Bu uygulamada da program başlangıcında bir kez tanıtılmak üzere ilk kısımda sistemin başlangıç koşullarını oluşturacak link uzunluk matrisleri, kütle matrisleri, eklem dönme eksenleri, uygulanan tork vektörü girilmiştir. İkinci kısımda ise ters dinamik yapıyı oluşturacak şekilde genelleştirilmiş kütle matrisi, coriolis matrisi, propagasyon matrisleri oluşturulmuş, jakobiyen matrisi elde edilmiştir. Sisteme girilen uç noktaya uygulanacak uzaysal kuvvet vektörüne karşılık eklem açısız ivmeleri bulunarak Simulink programında ilgili bloğa verilmiş ve manipülator hareketi takip edilmiştir. Başlangıç değerlerinden a vektörünün yapısı değiştirilerek, çalışılan ortamda yerçekimi etkisi uygulanabilmekte ya da kaldırılabilir.

$$a_1 = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

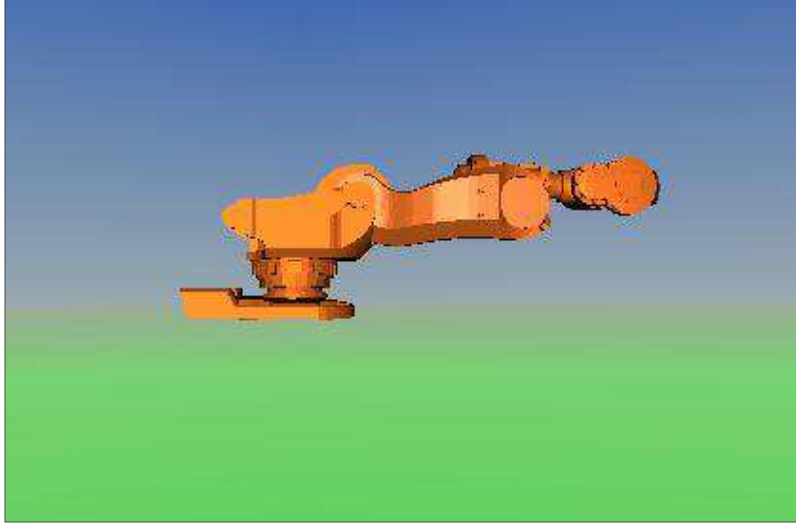
Burada \vec{g} yerçekimi ivmesini içeren vektördür. Yerçekimi etkisi \underline{a} vektörünün ilk 6×1 'lik kısmına yerleştirilerek sonraki tüm linklere aktarılması sağlanır. Hareketli base ile çalışıldığı durumda yerçekimi etkisi a_b 'e verilir ve \underline{a} vektörü ilk kısmında a_b 'i içerecek şekilde genişletilir.

Seri manipülatörün dinamik modellemesi ile uygulanan etkiler sonucu belirli fiziksel karşılıklar görülmesi beklenmektedir. Yerçekimi olduğunda uç noktaya kuvvet ve eklemlere tork uygulanmadığında \vec{z} yönünde olmayan eklemlerin hız kazandığı ve manipülatörün aşağı yönlü düşüşü ile başlayan hareket salınımlar halinde devam eder. Aynı şartlar altında sisteme eklem hızlarının ters yönünde sürtünme kuvveti eklendiğinde ise linklerin aşağı düşüşü ile başlayan hareket, genliği azalan salınımlarla devam eder ve hızların sifıra yaklaşarak tüm manipülatörün \vec{z} yönünde durağan hale gelmesi ile sonlanır. Seri manipülatörün yerçekimi etkisi altında, uç noktaya dış kuvvet uygulanmadan eklem sürtünme kuvvetleri dahil edilerek hareketinin gözlemlenmesi sonucu durağan haldeki görüntüsü Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 : Yerçekimi ve sürtünme etkisi altında durağan hal.

Yerçekimi olmadığı, eklemlere tork uygulanmadığı ve uç noktaya belli bir yönde daimi bir kuvvet uygulandığı durumda ise manipülatör salınımlar sonucu kuvvetin uygulandığı yönde durağan hale gelir. Uç noktaya sadece bir süre aralığında kuvvet uygulanırsa, kuvvetin uygulandığı süre boyunca eklem hızları artar ve kuvvet kalktığında hareket sabit hızla devam eder. Seri manipülatörün yerçekimi etkisi altında olmadığı durumda uç noktasına daimi bir kuvvetin uygulanması sonucu gözlenen hızların sifıra gitmesi ve manipülatörün kuvvetin uygulandığı yöne doğru sonlanan ile hareketi Şekil 3.3’te gösterilmiştir.



Şekil 3.3 : Yerçekimi olmadan uç noktaya daimi kuvvet uygulanması.

Uzaysal vektör cebri yöntemiyle bulunan seri manipülatör dinamik denklemlerinin VRML programında oluşturulan seri manipülatör için uygulanması ile çeşitli etkiler altında hareket incelenmiş ve elde edilen bulgular EK-C kısmında gösterilmiştir.

4. HOLONOMİK OLMAYAN SİSTEM DİNAMİĞİ

Holonomik terminolojisi ilk olarak Hertz tarafından geliştirilmiştir. Holonomik sistem, olası configürasyonlarını sınırlayan kısıtlara bağı mekanik sistemdir. Bir sistemin holonomik olmama durumu, sistemin kısıtlarının holonomik olmamasından kaynaklanır. Bir sistem için kısıtlar koordinatlar, hızlar ve bağımsız olarak zamanı içerecek şekilde fonksiyonlar olarak ifade edilir. Holonomik kısıtlar için;

$$f(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (4.1)$$

holonomik olmayan kısıtlar için ise;

$$f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0 \quad (4.2)$$

kısıt ifadeleri kullanılır. Hız içeren kısıtlar integrallenebilir iseler holonomik kısıtlarlardır ve integrallenerek sadece koordinatlar ve zaman içeren kısıtlar haline getirilebilirler. Holonomik olmayan kısıtlar ise integrallenemezler ve basit kısıt fonksiyonları şeklinde gösterilemezler. Holonomik olmayan sistemlerin dinamiği ve kontrolünü içeren çok sayıda çalışma ve kaynak bulunmaktadır.

Holonomik olmayan sistemlere kaymama kısıtı ile kaymadan yuvarlanan disk ve küre[18], kaymadan ilerleyen bisiklet[14][19], yuvarlanan parmak uçlarına sahip robot el [15], açısız momentumun korunumundan kaynaklı kısıtlar ile uzayda hareket etmeye çalışan astronot veya uzayda hareketli bir platform üzerindenki robot kol, bazı eksik tahrikli sistemler gibi örnekler verilebilir.[20] Holonomik olmayan kısıtlardan ivme içeren ve yalnızca hız ve sistem koordinatlarla ifade edilebilen kısıta integrallenemeyen kısıtlara ikinci dereceden holonomik olmayan kısıtlar, hız içeren ve sadece pozisyon kısıtları ile ifade edilecek şekilde integrallenemeyen kısıtlara birinci dereceden holonomik olmayan kısıtlar denir.

Sistem hareketinin sınırlandırılması hız kısıtları ile Pfaffian kısıtı halinde aşağıdaki gibi ifade edilmesi ifade edilebilir.

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (4.3)$$

Pfaffian kısıtı integrallenebilir olduğunda holonomik bir kısıttır. Holonomik olmadığı durumda sistemin hızlarında kısıtlamaya gidilir ancak sistem konfigürasyonunda kısıtlamaya olmaz. Kısıtı olan sistemlerde Lagrange denklemleri ile dinamik modellemede genelleştirilmiş koordinatlar ile kısıtlama olmadan hareket denklemleri çıkarıldıktan sonra kısıtlar denkleme eklenerek kısıtların dahil olduğu Lagrange denklemleri elde edilir. Kısıtların kısıt kuvvetleri oluşturması ile sistemin sınırlandırılmış bölgede kalması sağlanır.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + A^T(q)\lambda = F \quad (4.4)$$

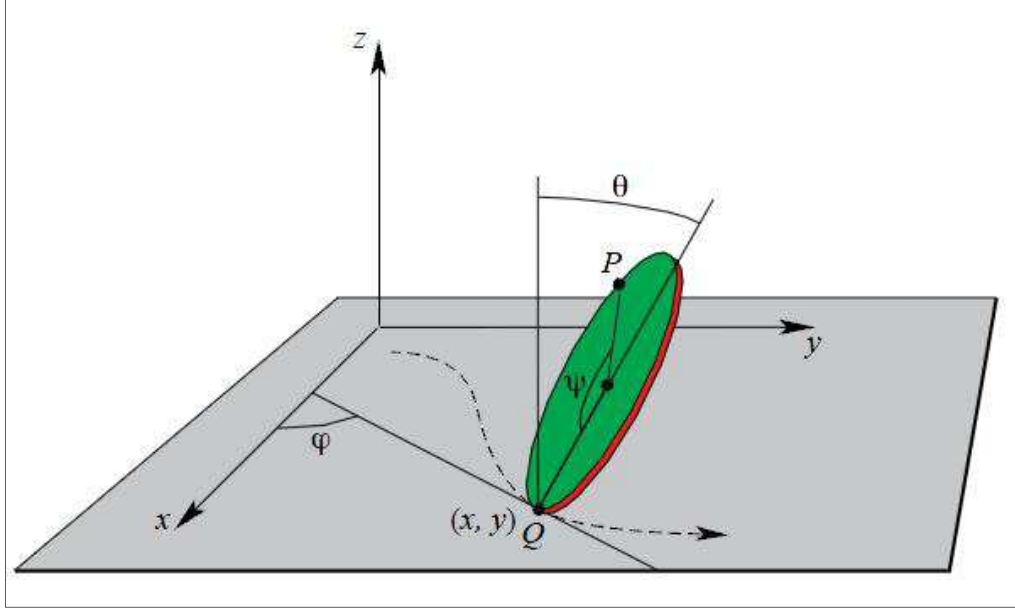
Burada λ genelleştirilmiş kuvvet genliğini ifade ederken F sisteme dışarıdan uygulanan kuvvetlerdir. Sistem kısıtları holonomik ise Lagrange denklemleri oluşturulurken bu kısıtların genelleştirilmiş koordinatlar içerisinde ifade edilmesi ile sonradan denklemlere eklenmesi aynı hareket denklemlerini meydana getirir. Holonomik olmayan sistemlerde ise kısıtlar, kısıtlanmamış sistem için Lagrange denklemleri oluşturulduktan sonra denklemlere eklenmelidir.

Bu tezde holonomik olmayan sistemlerden kaymadan yuvarlanan disk örneği incelenmiştir. Kaymadan yuvarlanan diskin holonomik olmayan özellikleri incelenerek holonomik olmayan kısıtlar ile dinamik modellemesi için uzaysal vektör cebri yöntemiyle robotik yaklaşım uygulanmıştır.

4.1 Yatay Yüzey Üzerinde Kaymadan Yuvarlanan Disk

Holonomik olmayan dinamik sistemlerin en genel örneği yatay yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanan disk ya da tek tekerlektir. Literatürde birçok kaynakta holonomik olmayan kısıtlara sahip sistemler için kaymadan yuvarlanan disk yana yatabilen ya da dik durarak yuvarlanan tiplerinde incelenmekte ve genelleştirilmiş koordinatlar ile dinamik denklemleri verilmektedir. Kaymadan yuvarlanan disk ya da tek tekerlek için genelleştirilmiş koordinatlar Şekil 4.1’de görüldüğü gibi diskin yüzeyle temas noktasının konumunu (x, y) , disk yüzeyi ile yere dikey eksen arasındaki açı θ , disk yüzeyinin x eksenindeki açı φ ve disk yüzeyi normaline göre dönüş açısı ψ olarak verilmektedir. Bu genelleştirilmiş koordinatlar için sistemin holonomik olmayan kısıtları aşağıdaki şekilde verilmektedir. [18]

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{\psi}R \cos \varphi &= 0 \\ \dot{y} + \dot{\psi}R \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

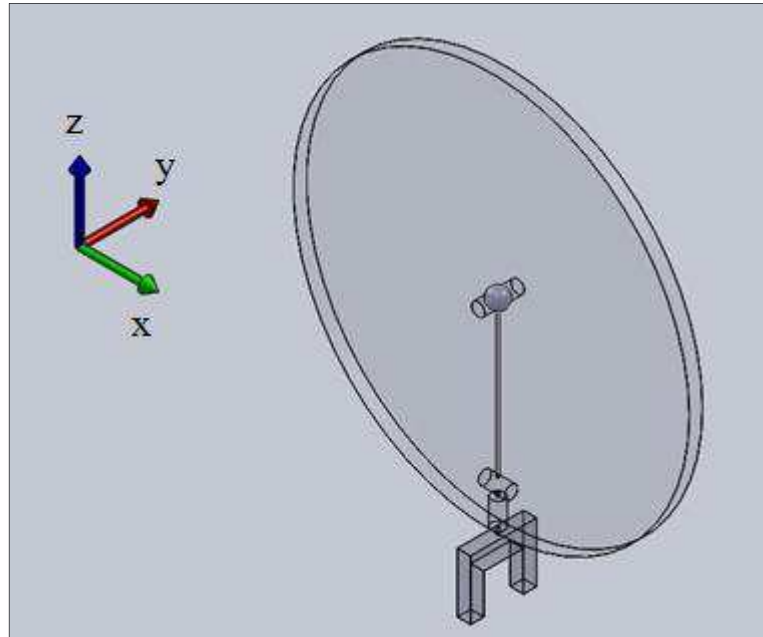


Şekil 4.1 : Kaymadan yuvarlanan yana yatabilen disk [18].

Diskin kaymadan yuvarlanması sırasında merkez noktasının ilerleme yönündeki hızı dönmeden ötürü yer ile temas noktasına ilerlemeye ters yönde yarıçap ile yuvarlanmayı sağlayan açısal hız çarpımı ile aktarılır. Eşit büyüklükte ve ters yönde hızları gösterdiklerinden disk yer ile temas noktasındaki doğrusal hızı sıfırdır.

4.2 Kaymadan Yuvarlanan Diskin Dinamik Modeli

Kaymadan yuvarlanan disk için link eklem benzetimi Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 : Kaymadan yuvarlanan disk sembolik link eklem gösterimi.

Diskün kütle ve ataleti disk merkezindeki tanımlanan base'de toplanmıştır. Yine disk merkezinde diskin kendi dönüşünü simgeleyen bir eklem ve yer ile temas noktasında yani base'den yarıçap kadar uzaklıkta diskin devrilmesini ve direksiyon hareketini simgeleyen iki serbestlik dereceli bir eklem bulunmaktadır. Uç noktası ise aynı şekilde yer ile temas noktasında olup başlangıç oryantasyonunda kalması ve sadece disk dönüş yönünde ilerlemesi istenmektedir. Dolayısıyla base'in dönel hareketlerine karşılık eklemler ters yönlü eşit açısal hızlara sahip olarak uç noktanın oryantasyonunu korumalıdır.

Hareketli base'in dinamik denklemlere eklenmesi amacıyla için dinamik denklemler kısmında bulunan ileri dinamik denklem matris ve vektörleri genişletilir. Hareketli base için kütle matrisi base'in kütle ve atalet tensörü kullanılarak oluşturulur.

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_b & m_b \hat{\ell}_{b,c} \\ -m_b \hat{\ell}_{b,c} & m_b \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tüm manipülâtör link kütle matrislerini içeren \mathbf{M} matrisi base kütle matrisi eklenerek genişletilir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & 0 \\ 0 & {}^1\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Matriste görülen 1 indisi ilgili manipülâtörü ifade eder. Ortak çalışan manipülâtörler için vektör ve matrisler genişletilebilir. Base kütle matrisinin eklenmesi ile elde edilen genelleştirilmiş kütle matrisi genişletilmiş matrisler kullanılarak bulunur.

$$\mathcal{M} = \mathbf{H}^T \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{H} \quad (4.8)$$

Manipülâtör link uzaysal kuvvetler artan terimleri vektörü base için uzaysal kuvvetler artan terimlerini içerir.

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{b}}_b \\ {}^1\underline{b} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Manipülâtör linkleri coriolis ve santrifüj uzaysal ivmelerini içeren vektöre base için coriolis ve santrifüj uzaysal ivmeleri eklenerek genişletilmiş \underline{a} vektörü elde edilir.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{a}}_b \\ {}^1\underline{a} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Coriolis ve yerçekimini içeren \underline{C} matrisi, genişletilmiş kütle matrisleri, coriolis ve santrifüj uzaysal ivmeleri vektörü, uzaysal kuvvetler artan terimleri vektörü kullanılarak bulunur.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}_b \\ {}_1\underline{C} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \Phi^T (\mathbf{M} \Phi \underline{a} + \underline{b}) \quad (4.11)$$

Hareketli base için genişletilen vektör ve matrislerle ileri dinamik denklem elde edilmiştir.

$$\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{M}^{-1} \left(\underline{\mathcal{T}} - \underline{C} - J^T \ddot{\vec{F}}_t \right) \quad (4.12)$$

Disk in yanal yönde kaymaması ve hareket boyunca üzerinde yuvarlandığı yüzey üzerinde kalması için uç nokta uzaysal hızı ile bağıntılı Pfaffian kısıtı yazılırsa:

$$\mathbf{A} \dot{\theta} = 0 \quad (4.13)$$

Burada \mathbf{A} matrisi kısıt matrisidir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{0}^T & 0 & 1 & 0 \\ \bar{y}_1^T & \bar{0}^T & 1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2^T & \bar{0}^T & 0 & 0 & 1 \\ \bar{0}^T & \bar{x}_1^T & r & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & \bar{y}_1^T & 0 & r & 0 \\ \bar{0}^T & \bar{z}_2^T & 0 & r\bar{y}_1\bar{z}_2 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 9} \quad (4.14)$$

Şekil 4.3'te görülen hız kısıtlarının uygulandığı genelleştirilmiş koordinatlar vektörü base'in açısal ve doğrusal hızları ile eklem açısal hızlarından oluşmaktadır.

$$\underline{\dot{\theta}} = \begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \\ v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$\left. \begin{matrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{matrix} \right\} \vec{\omega}_b$
 $\left. \begin{matrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{matrix} \right\} \vec{v}_b$

Şekil 4.3 : Genelleştirilmiş koordinatlar vektörü.

Denklem (4.12)'deki dinamik denklemde uç noktaya dışarıdan uygulanan kuvvetler yerine hız kısıtlarından kaynaklanan kuvvetler kullanılarak sistemin hız kısıtlarını içeren ileri dinamik denklem elde edilir.

$$\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{M}^{-1}(\underline{\mathcal{T}} - C - A^T \underline{\lambda}) \quad (4.15)$$

Denklemde λ kısıtlardan kaynaklı kuvvetlerin genliklerinden oluşan vektördür. Kısıt kuvvetlerini bulabilmek için ileri dinamik denklemin yanında ikinci bir denkleme ihtiyaç duyulur. Denklem (4.13)'ün zaman bağlı türevi alınırsa:

$$\dot{A}\dot{\theta} + A\ddot{\theta} = 0 \quad (4.16)$$

Denklem (4.15) denklem (4.16)'da yerine konarak bilinmeyen kısıt kuvvetlerinin genliği olan denklem elde edilir.

$$\dot{A}\dot{\theta} + A\mathcal{M}^{-1}(\underline{\mathcal{T}} - C - A^T \underline{\lambda}) = 0 \quad (4.17)$$

Eşitlikten λ çekilerek :

$$A\mathcal{M}^{-1}A^T \underline{\lambda} = A\mathcal{M}^{-1}(\underline{\mathcal{T}} - C) + \dot{A}\dot{\theta} \quad (4.18)$$

İleri dinamik denklemde kullanılmak üzere hız kısıtlarından kaynaklanan kısıt kuvvetleri genlikleri elde edilir.

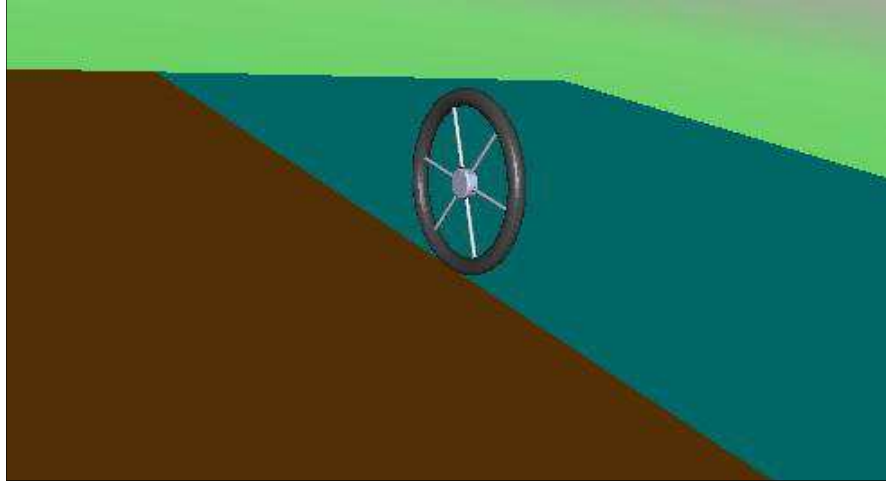
$$\underline{\lambda} = \Omega^{-1}(A\mathcal{M}^{-1}(\underline{\mathcal{T}} - C) + \dot{A}\dot{\theta}) \quad (4.19)$$

Matrisin terslenebilmesi için rankının tam olması gereklidir.

$$\Omega = (A\mathcal{M}^{-1}A^T) \quad (4.20)$$

5. SONUÇLAR

Kaymadan yuvarlanan disk için Matlab programında dinamik denklemler koda geçirilmiş, VRML simülasyon programında Şekil 5.1'de görülen disk ya da tek tekerlek tasarımı yapılmıştır. Tekerleğin kütle ve ataleti teker merkezinde bulunan hareketli basede noktasal olarak verilmiştir. Base ile ilk eklem arası uzaklık sıfır, ilk eklem ile ikinci eklem arası uzaklık tekerlek yarıçapıdır.



Şekil 5.1 : Tek tekerlek VRML görüntüsü.

Programın ilk bölümünde kütle, yarıçap, eylemsizlik matrisleri, propagasyon matrisleri gibi sistem başlangıç değerlerini barındıran kısımlar oluşturulmuştur. İkinci kısımda ise sisteme giriş olarak verilen uygulanan tork değerleri için geliştirilmiş kütle matrisi, Coriolis matrisi, kısıt ve iş yapmayan kuvvetler bulunmuş, eksen takımı güncellemeleri yapılarak dinamik denklemden hareketli base'in uzaysal ivmesi ve eklem açısız ivmeleri elde edilmiştir. Her iterasyonda bulunan bu değerler integral bloklarından geçirilerek sisteme geri beslenmiş ve base hızı ve eklem açısız hızları dinamik denklemlerde kullanılmıştır.

Dönme eksenlerini gösteren H matrisi ikinci eklemi iki dönel eklem çakışık olarak 2 serbestlik dereceli bir eklem oluşturacak şekilde yapılandırılmıştır.

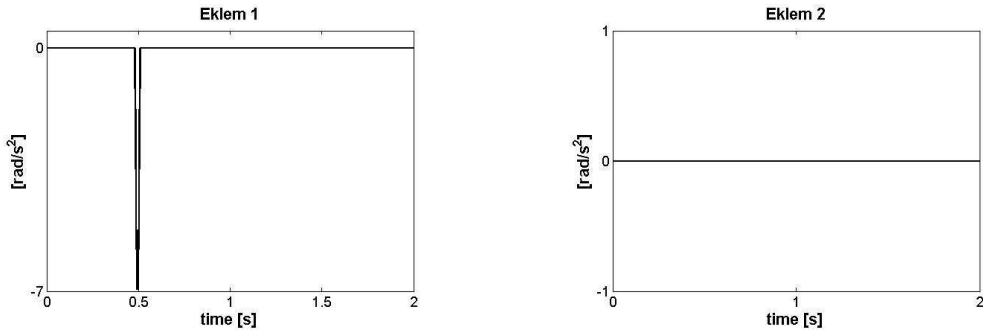
$$H = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{y}_1 & \vec{z}_2 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Sistem için bulunan dinamik denklemler ve tasarım sonucu sisteme uygulanan tork değerlerine karşılık simülasyonda teker hareketi incelenmiştir. Tekerin merkezine yani base'e uygulanan \vec{x} yönlü kuvvete karşılık tekerin kaymadan ilerlemesi, kuvvet uygulandığı sürece açısal ve doğrusal hızın artması, kuvvet kaldırıldığında tekerin sabit hızda harekete devam etmesi beklenir. Aynı şekilde base'e \vec{y} doğrultusunda tork uygulandığında da kaymadan ilerleme görülmelidir. Base'e tekere yanal olacak şekilde yani \vec{y} yönünde uygulanan kuvvete karşılık tekerin bulunduğu yüzeye temas noktasının doğrusal hareketlenmemesi ve bu şekilde base'in açısal ve doğrusal hızlar kazanarak tekerin yana devrilme hareketi yapması beklenen sistem hareketidir. Aşağıda farklı yönlerde base'e uygulanan tork girişlerine karşılık elde edilen grafikler verilmiştir.

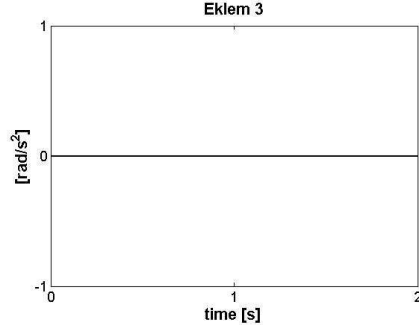
5.1 Tekerin İlerleme Yönünde Hareketi

Yuvarlanmadan kayan diskin base'ine \vec{y} yönünde 0.03. sn'de anlık tork uygulandığında eklem açısal ivmeleri Şekil 5.2'de, eklem açısal hızları grafikleri Şekil 5.3'te gösterilmiştir.

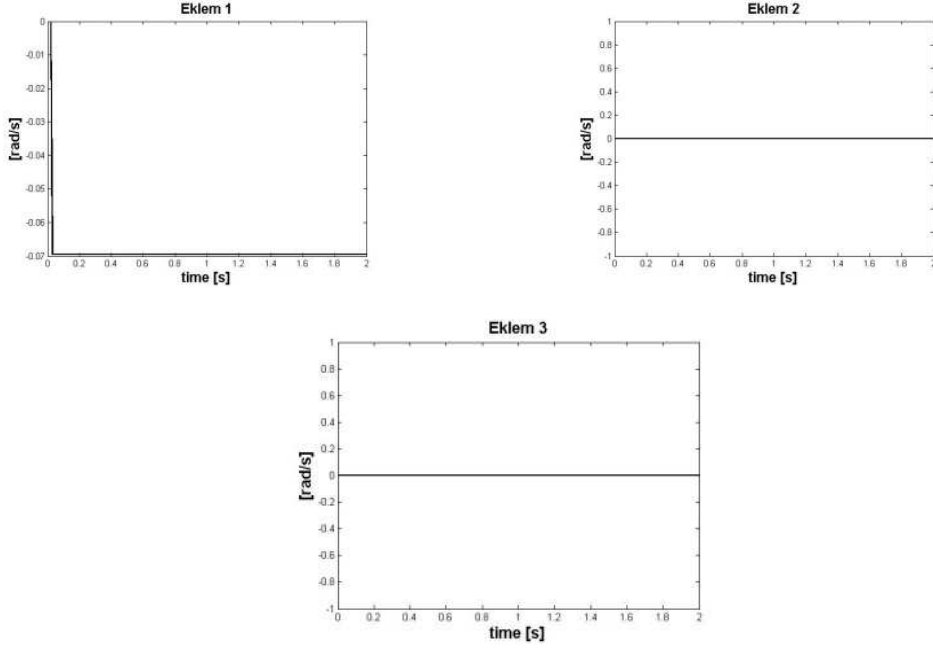
$$\underline{T} = [0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



Şekil 5.2 : Tekerin ilerleme yönündeki hareketi için eklem açısal ivmeleri.



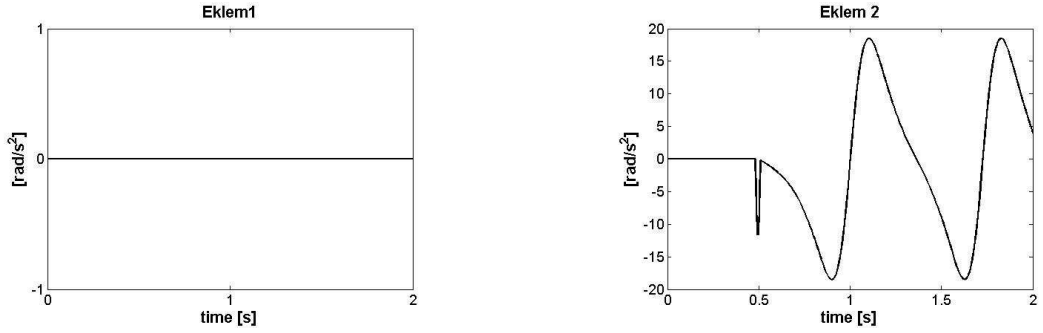
Şekil 5.2 (devam) : Tekerin ilerleme yönündeki hareketi için eklem açısai ivmeleri.



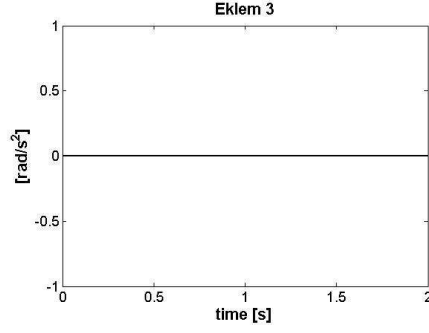
Şekil 5.3 : Tekerin ilerleme yönündeki hareketi için eklem açısai hızları.

5.2 Tekerin Yana Yatma Hareketi

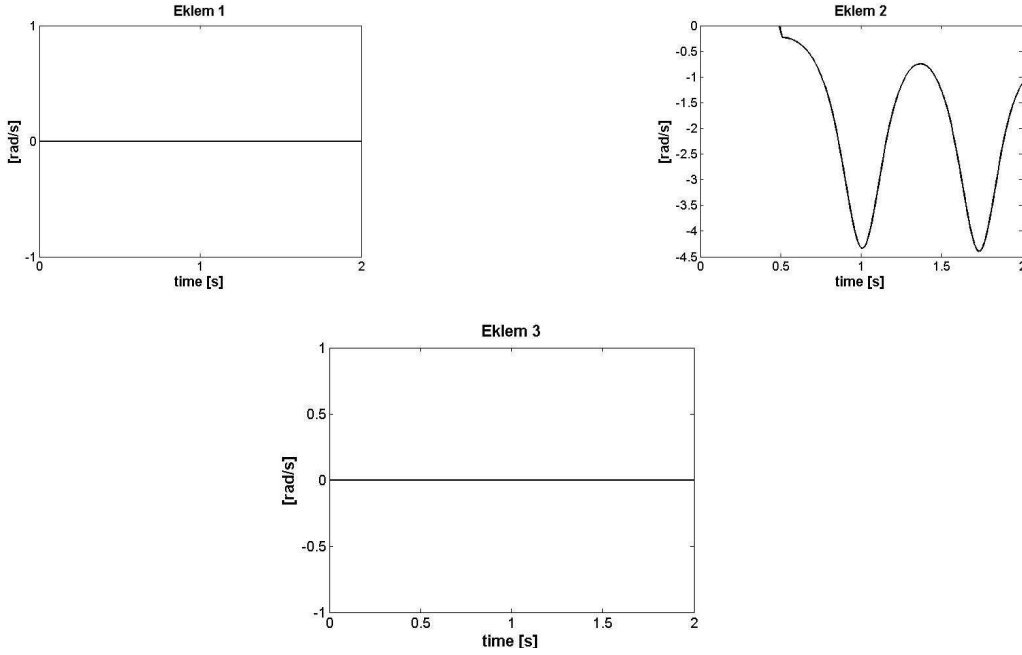
Yuvarlanmadan kayan diskin yana yatmasını sağlayarak base'ine \vec{x} yönünde 0.5 sn'de anlık tork uygulandığında eklem açısai ivmeleri Şekil 5.4'te, eklem açısai hızları grafikleri Şekil 5.5'te gösterilmiştir.



Şekil 5.4 : Tekerin yana yatma hareketi için eklem açısai ivmeleri.



Şekil 5.4 (devam) : Tekerin yana yatma hareketi için eklem açısai ivmeleri.



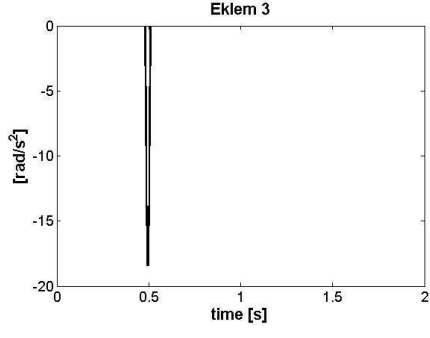
Şekil 5.5 : Tekerin yana yatma hareketi için eklem açısai hızları.

5.3 Tekerin Direksiyon Hareketi

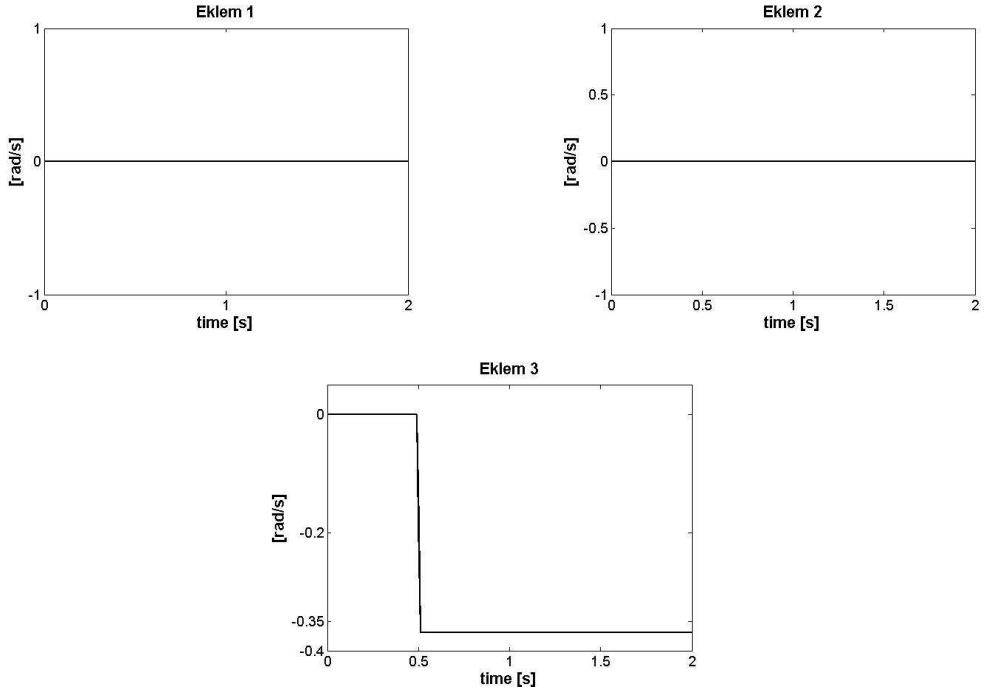
Yuvarlanmadan kayan diskin base'ine \vec{z} yönünde 0.5. sn'de anlık tork uygulandığında eklem açısai ivmeleri Şekil 5.6'da, eklem açısai hızları grafikleri Şekil 5.7'de gösterilmiştir.



Şekil 5.6 : Tekerin direksiyon hareketi için eklem açısai ivmeleri.



Şekil 5.6 (devam) : Tekerin direksiyon hareketi için eklem açısal ivmeleri.



Şekil 5.7 : Tekerin direksiyon hareketi için eklem açısal hızları.

6. DEĞERLENDİRME

Tezde uzaysal vektör cebri yöntemiyle kinematik modelleme anlatılmış ve kinematik modelleme için gerekli temel bilgilere yer verilmiştir. Kinematik modelleme için hareketli base üzerinde ortak çalışan seri manipülatörler örneği VRML programında tasarlanıp, Matlab ve Simulink programında yapılan yazılım ile çalışılmış ve elde edilen bulgular verilmiştir. Sistem modeline uygun olarak yapılacak değişiklikler ile kinematik modellemenin farklı sistemlere uygulanabileceği gösterilmiştir.

Uzaysal vektör cebri yöntemiyle dinamik modelleme anlatıldıktan sonra yöntem seri manipülatör dinamiği örneği üzerinde çalışılmış, yerçekimi, sürtünme etkileri altında ve manipülatör uç noktasına dışarıdan uygulanan kuvvetlere karşılık simülasyon sonuçları verilmiştir.

Holonomik ve holonomik olmayan sistem özellikleri anlatılmış uzaysal vektör cebri yöntemiyle kinematik ve dinamik modelleme çalışmalarından faydalanarak holonomik olmayan kısıtlara sahip bir sistem olan kaymadan yuvarlanan disk dinamik modellemesi için robotik yaklaşım sunulmuştur. Diskin hız kısıtlarına karşılık oluşan kısıt kuvvetlerinin bulunması ve dinamik denklemlere eklenmesi anlatılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmaları ve elde edilen veriler gösterilmiştir.

Bu tezin bir sonraki aşaması olarak kaymadan yuvarlanan diskin istenen bir yörüngeyi izlemesi, devrilmeden ilerlemesinin sağlanması, yine holonomik olmayan bir sistem olan bisikletin sistemi için hareketli base üzerinde ortak çalışan seri manipülatörlerin dinamiğinden yola çıkılarak bisiklet dinamiği üzerinde çalışılabilir. Bisikletin istenen bir yörüngede dengesini koruyarak ilerlemesi çalışmaları ve bisiklete etkiyen kuvvet dağılımları incelemesi yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Rodriguez, G.**, (1989). Recursive Forward Dynamics For Multiple Robot Arms Moving A Common Task Object, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 5.
- [2] **Rodriguez, G., Kreutz-Delgado, K., Jain A.**, (1991). Spatial Operator Algebra for Manipulator Modelling And Control, International Journal of Robotics Research, 10, 371-381.
- [3] **Yeşiloğlu, S. M.**, (2007). High Performance Dynamical Modelling of Complex Topology Systems, PhD thesis, Istanbul Technical University, Turkey.
- [4] **Hertz, H.R.**, (1894). Gessamelte Werke, Band III, Der Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Barth, Leipzig, 1894, English translation MacMillan, London, 1899, reprint Dover, NY, 1956.
- [5] **Neimark, J., Fufaev, N.**, (1972). Dynamics of Nonholonomic Systems, Transactions of Mathematical Monographs, AMS.
- [6] **Chaplygin, S., A.**, (1892). On The Motion Of A Heavy Body Of Revolution On A Horizontal Plane, Physics Section of the Imperial Society of Friends of Physics, Anthropology and Ethnographics, Moscow,9, 10-16.
- [7] **Vierkant, A.**, (1892) . Über gleitende und rollende Bewegung, Monatshefte der Math. Und Phys. III 31-54.
- [8] **Hermans, J.**, (1995) . A Symmetric Sphere Rolling On a Surface, Nonlinearity, 8, 1-23.
- [9] **O'Reilly, O., M.** (1996) . The Dynamics of Rolling Disks and Sliding Disks, Nonlinear Dynamics 10, 287-305.
- [10] **Crouch, R., D., Kemppainen, J., Sniatycki, and L. Bates** (1995) . Geometry of Nonholonomic Constraints, Rep. Math. Phys. 36, 275-286.
- [11] **Cushman, R., J., Hermans, Kemppainen, D.**, (1996) . The Rolling Disk, in Nonlinear Dynamical Systems and Chaos (Groningen,1995), Birkhauser, Basel, Boston, MA, Prog. Nonlinear Differential Equations Appl. 19, 21-60.
- [12] **Zenkov, D., V., Bloch, A., V., Marsden, J., E.**, (1998) . The Energy Momentum Method for the Stability of Nonholonomic Systems, Dyn. Stab. Of Systems 13, 123-166.
- [13] **Bloch, A., M., Reyhanoglu, M., McClamroch, H.**, (1992) . Control and Stabilization of Nonholonomic Systems, IEEE Trans. Aut. Control 37, 1746-1757.
- [14] **Getz, N., H., Marsden, J., E.**, (1995). Control for an Autonomous Bicycle, In International Conference on Robotics and Automation, IEEE, Nagoya, Japan.

- [15] **Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S. S.**, (1994) A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press.
- [16] **Larimi, S., R., Zarafshan, P., Moosavian, S., A., A.**, (2013). Stabilized Supervizig Control of Two Wheel Mobile Manipulator., Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Tecnology, Iran
- [17] **Polchankajorn, P., Maneewarn T.** (2011). Helical Controller for Moduler Snake Robot with Non-holonomic Constraint, Field Institute of roBOtics, King Mogkut's Universty of Tecnology Thonburi, Bangkok, Thailand
- [18] **Bloch, A.**, (2003) Nonholonomic Mechanics and Control, Springer.
- [19] **Chen, C., Dao, T., Yang, C.**, (2005). Turning Dynamics and Equilibrium of Two-Wheeled Vehicles, Department of Mechanical and Automation Engineering, Da-Yeh University, Changhua, Taiwan.
- [20] **Ting, J., Wen, Y.**, (1998). Control of Nonholonomic Systems, Department of Electrical, Computer, and Systems Engineering, Rensselaer PolytechnicInstitute.

EKLER

EK A : İngilizce Teknik Terimlerin Tezde Kullanılan Türkçe Karşılıkları

EK B : Ortak Çalışan Seri Manipölatörler Simülasyon Sonuçları

EK C : Seri Manipölatör Dinamiği Simülasyon Sonuçları

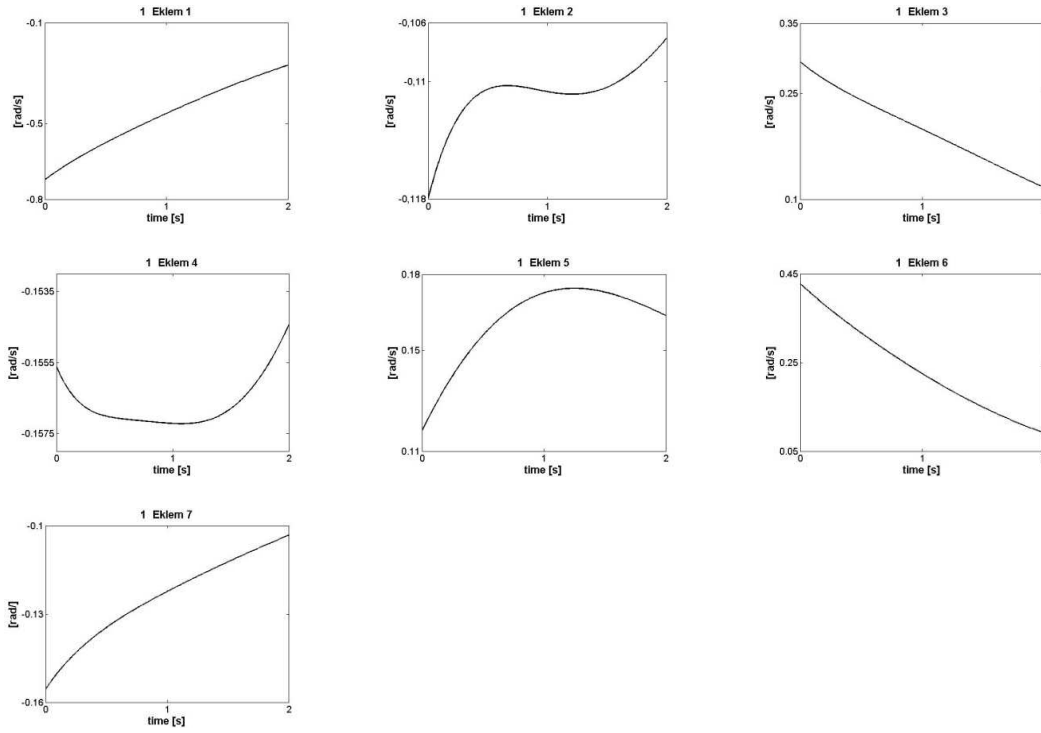
EK A

Base	:	Taşıyıcı Platform
Body Frame	:	Link Eksen Takımı
Contact Point	:	Temas Noktası
Cross Product	:	Vektörel Çarpım
Dimension	:	Boyut
Fixed Frame	:	Sabit Eksen Takımı
Holonomic	:	Holonomik
Identity Matrix	:	Birim Matris
Joint	:	Eklem
Least Squares Method	:	En Küçük Kareler Yöntemi
Mapping	:	Eşlem
Nonholonomic	:	Holonomik Olmayan
Null Space	:	Boş Uzay
Orthogonal	:	Ortogonal
Propagation	:	Propagasyon
Pseudo Invers	:	Sözde Ters
Range Space	:	Değer Uzayı
Redundant	:	Artımlı
Rotation Matrix	:	Rotasyon Matrisi
Skew Symmetric	:	Negatif Simetrik
Singular Value Decomposition	:	Tekil Değer Ayrışımı
Space	:	Uzay
Spatial Operator Algebra	:	Uzaysal Vektör Cebri
Spatial Vector	:	Uzaysal Vektör
Subspace	:	Altuzay
Tip Point	:	Uç Nokta
Transpose	:	Transpoz
Unit	:	Birim

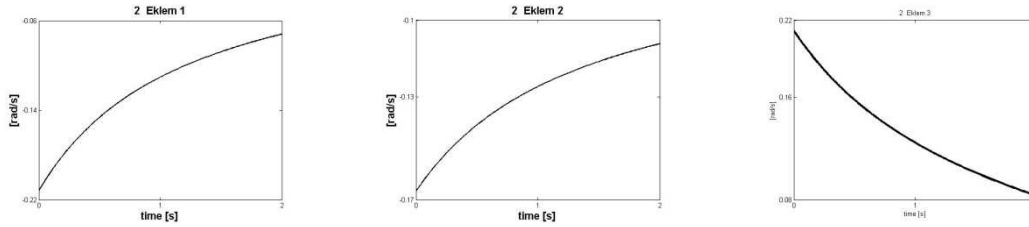
EK B

Hareketli base üzerinde ortak çalışan seri manipülatörler için aşağıdaki üst platformun aşağı yönlü hareketini sağlayan üst platform ve base hızları için manipülatör eklem açısız hızları gösterilmektedir.

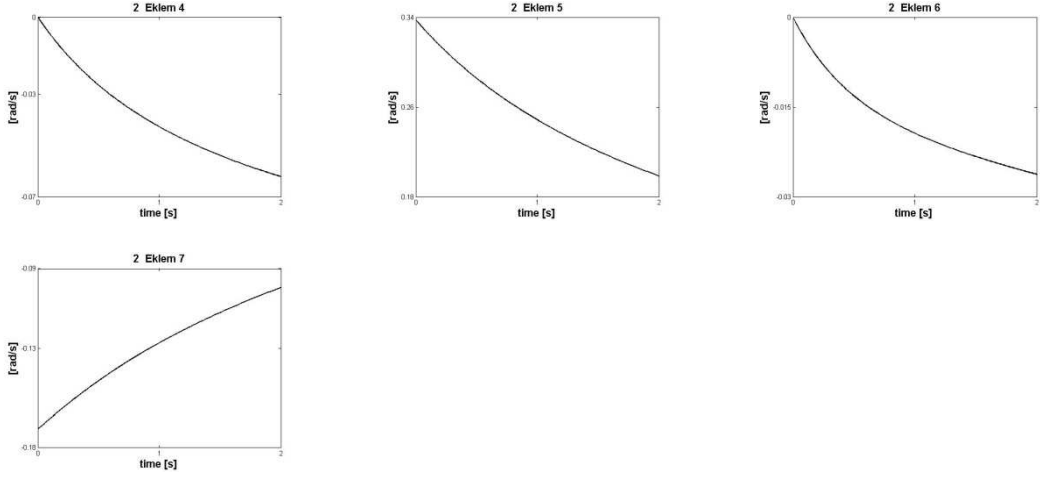
$$V_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$



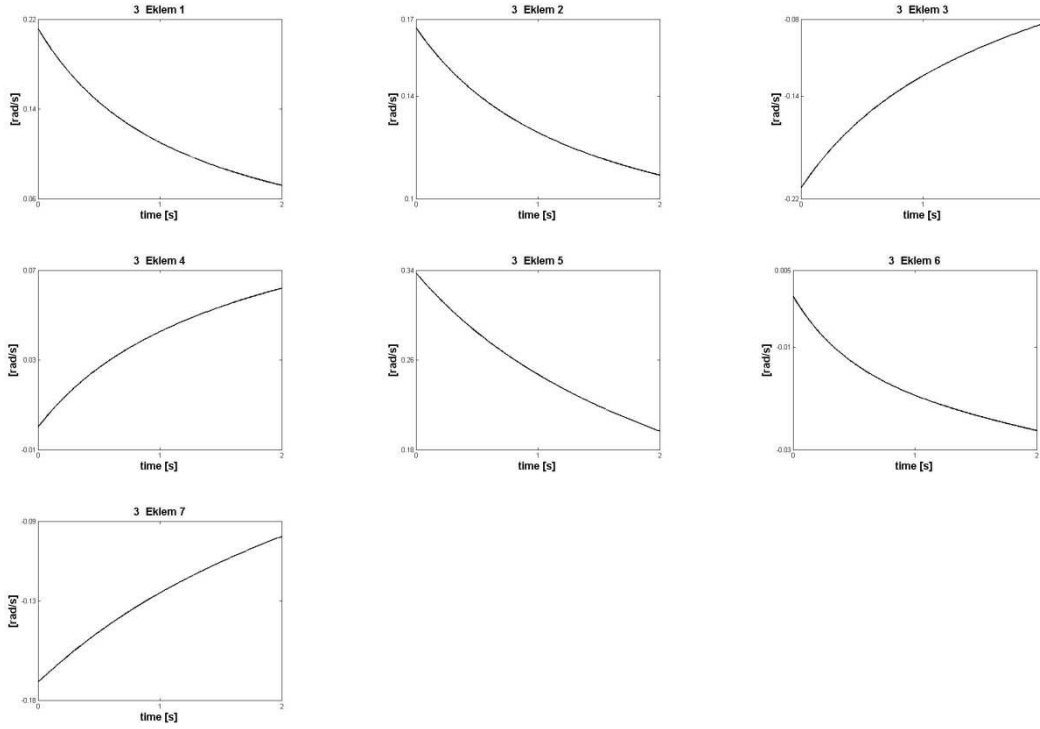
Şekil B.1 : 1. manipülatör eklem açısız hızları.



Şekil B.2 : 2. manipülatör eklem açısız hızları.

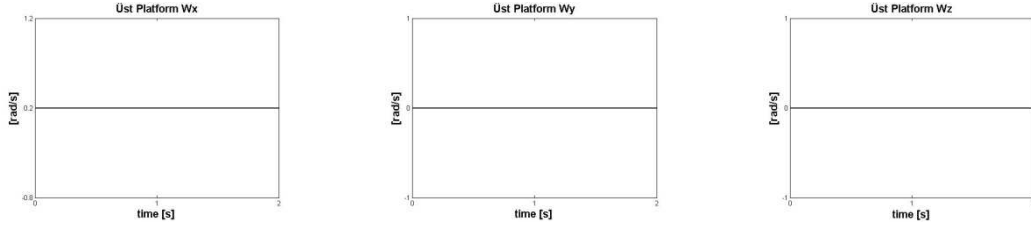


Şekil B.2 (devam) : 2. manipülör eklem açısıl hızları.

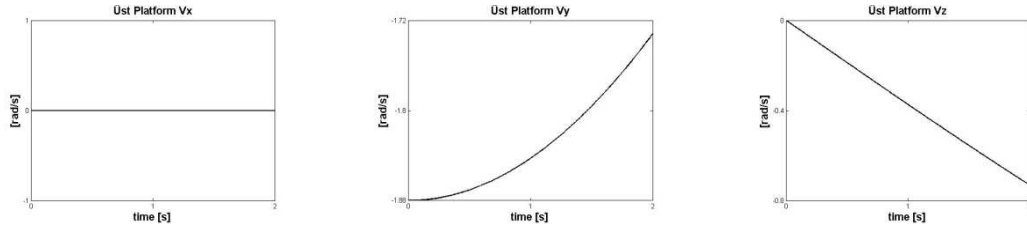


Şekil B.3 : 3. manipülör eklem açısıl hızları.

Hareketli base üzerinde ortak çalışan seri manipölatörler için base'in \vec{x} ekseninde dönmesini sağlayan aşağıdaki hızda dönmesi sonucu üst platform açısal ve doğrusal hızları gösterilmektedir.



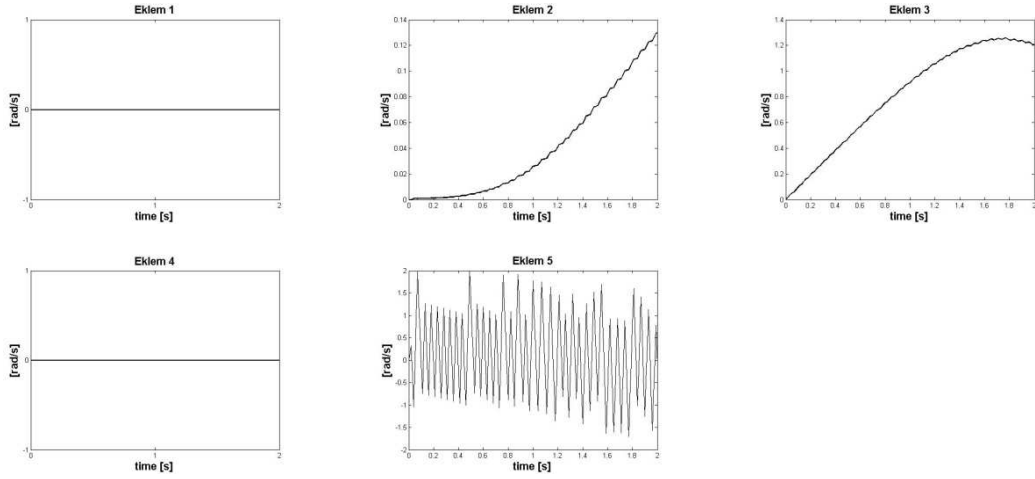
Şekil B.4 : Üst platform açısal hızları



Şekil B.5 : Üst platform doğrusal hızları.

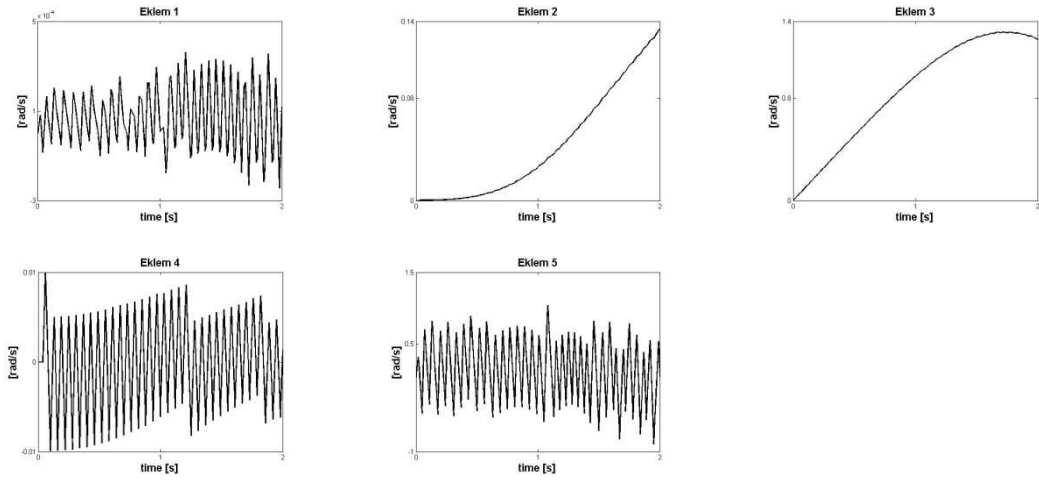
EK C

Yerçekimi etkisi altında salınım yapan seri manipülatörün eklem açısızlı hızları verilmiştir.



Şekil C.1 : Eklem açısızlı hızları.

Manipülatör uç noktasına daimi kuvvet uygulanması sonucu oluşan eklem açısızlı hızları verilmiştir.



Şekil C.2 : Eklem açısızlı hızları.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Erdem Yanık

Doğum Yeri ve Tarihi : Zonguldak 19.07.1987

E-Posta : erdemyanik@gmail.com

Lisans : Kocaeli Üniversitesi
Mekatronik Mühendisliği (2010)
Hochschule Bochum (Çifte Diploma)

Mesleki Deneyim ve Ödüller: Altınay Robot Teknolojileri (2011-2012)
Lisans Bölüm İkinciliği (2010)