

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN SONLU TİTREŞİMİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Öznur ÖZDEMİR**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan ENGİN

OCAK 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN SONLU TİTREŞİMİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Öznur ÖZDEMİR
(501051104)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Aralık 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 22 Ocak 2009

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ertaç ERGÜVEN (İTÜ)
Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER (YTÜ)**

OCAK 2009

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında derin bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN'e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim esnasında benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme en içten dileklerle teşekkür ederim.

Aralık 2008

Öznur ÖZDEMİR
İnşaat Müh.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
SEMBOL LİSTESİ	x
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Bilgiler	1
1.2. Zemin Modelleri.....	2
1.2.1. Winkler zemin modeli.....	2
1.2.2. Heteyni zemin modeli	4
1.2.3. Filonenko-borodich modeli.....	4
1.2.4. Pasternak modeli	5
1.2.5. Vlassov modeli.....	5
1.3. Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar	6
1.4. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı	9
2. PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER	11
2.1. Problemin Tanımı	11
2.2. Statik Tekil Yükle Yüklü Sonlu Kiriş, Doğrusal Teori.....	11
2.3. Dinamik Tekil Yükle Yüklü Sonlu Kiriş, Doğrusal Teori	15
2.4. Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Özel Durumlar	17
2.4.1. Durum I: $\Omega = w$ olması hali (rezonans hali)	17
2.4.2. Durum II: $\Omega > w$ olması hali	18
2.4.3. Durum III: $\Omega < w$ olması hali.....	19
3. SONLU YERDEĞİŞTİRME HALİ	21
3.1. Yönetici Denklemler	21
3.2. Mod Fonksiyonları	22
3.3. Uzay Koordinatının Eliminasyonu	25
3.3.1. Katlı ölçek yöntemi	27
3.4. Sönümlü, Zorlanmış, Lineer Olmayan Titreşim Probleminin Katlı Ölçek Yöntemi İle Çözümü	31
3.4.1. Rezonanstan uzak bölgede çözüm	33
3.4.2. Rezonans bölgesinde çözüm	35
4. SAYISAL SONUÇLAR.....	39
4.1. Sayısal Değerler.....	39
4.2. Sonuçlar	39
4.2.1. Statik yükleme hali.....	39
4.2.2. Dinamik yükleme hali	43
4.2.2.1. Durum I: $\Omega = w$ olması hali (rezonans hali)	43
4.2.2.2. Durum II: $\Omega > w$ olması hali	43
4.2.2.3. Durum III: $\Omega < w$ olması hali.....	45

4.2.3. Sonlu yerdeğiştirme hali.....	47
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1 : Çeşitli Zemin Türleri İçin Ortalama “k” Değerleri	3

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : Winkler zemin modeli.....	2
Şekil 1.2 : Winkler zemin modelini temsil eden yayların üzerine farklı bir yaklaşım olarak getirilen elastik mebran tabaka.	5
Şekil 1.3 : Vlasov zemin modeli.....	6
Şekil 2.1 : Elastik zemine oturan, statik tekil yük ile yüklü sonlu kiriş.....	11
Şekil 2.2 : Kirişe ait diferansiyel eleman.....	12
Şekil 2.3 : Elastik zemine oturan, dinamik tekil yük ile yüklü sonlu kiriş.....	15
Şekil 2.4 : Kirişe ait diferansiyel eleman.....	15
Şekil 3.1 : Elastik zemine oturan kirişin sonlu titreşimi.....	21
Şekil 4.1 : Uygulama noktasının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği	40
Şekil 4.2 : Uygulama noktasının değişimine göre kesme kuvveti grafiği	40
Şekil 4.3 : Uygulama noktasının değişimine göre eğilme momenti grafiği	41
Şekil 4.4 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği.	44
Şekil 4.5 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği.	44
Şekil 4.6 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği.	42
Şekil 4.7 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği.	42
Şekil 4.8 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği.	42
Şekil 4.9 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği.	43
Şekil 4.10 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği.	44
Şekil 4.11 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği.	44
Şekil 4.12 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği.	45
Şekil 4.13 : $e=5m$ 'de Ω^2 / w^2 değişimi için yerdeğiştirme grafiği.....	45

Şekil 4.14 : $e=5m$ 'de Ω^2 / w^2 değişimi için kesme kuvveti grafiği.....	45
Şekil 4.15 : $e=5m$ 'de Ω^2 / w^2 değişimi için eğilme momenti grafiği.....	46
Şekil 4.16 : $e=5m$ 'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre yerdeğiştirme grafiği....	46
Şekil 4.17 : $e=5m$ 'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre kesme kuvveti grafiği...	47
Şekil 4.18 : $e=5m$ 'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre eğilme momenti grafiği.	47
Şekil 4.19 : Sönüm katsayısının değişimine göre $P=10^6$ da genlik-frekans kayması eğrileri.....	48
Şekil 4.20 : Zorlama genliğinin değişimine göre $\mu=0,1$ 'de genlik frekans kayması eğrileri.....	48
Şekil 4.21 : Zorlama genliğinin değişimine göre $\mu=1$ 'de genlik frekans kayması eğrileri.....	49
Şekil 4.22 : Sonlu yerdeğiştirme halinde üç çözüme ait elastik eğriler.....	49

SEMBOL LİSTESİ

E	: Kiriş elastisite modülü
P	: Tekil kuvvet
A	: Kiriş kesit alanı
k	: Zemin yatak katsayısı
I	: Eylemsizlik momenti
L	: Kiriş boyu
ρ	: Kiriş kütle yoğunluğu
h	: Kiriş kalınlığı
v	: Kirişin düşey doğrultudaki çökme değeri
M	: Eğilme momenti
T	: Kesme kuvveti
ξ	: Kirişin herhangi bir noktasının koordinatlarının kiriş uzunluğuna oranını gösteren boyutsuz bir büyüklük.
Ω	: Zorlama frekansı
w	: Doğal frekans
A1,B1,C1,D1	: Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları
A2,B2,C2,D2	: Diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayıları
D	: Plağın eğilme rijitliği
∇	: Laplace operatörü
r_0	: Boyutsuz sabit
c	: Sönüm katsayısı
μ	: Boyutsuz sönüm katsayısı
$p(x,y)$: Elastik zemin tepkisi
δ	: Dirac delta operatörü
T₁,T₂...	: Zamana bağlı ölçekler
γ	: Boyutsuz sabit
$q(x)$: Yayılı yük

ÖZET

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN SONLU TİTREŞİMİ

Bu tez çalışmasında, Winkler elastik zemini üzerine oturan sonlu uzunluktaki kirişin dinamik tekil yük etkisi altında sonlu titreşimi incelenmiştir. Tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümünde, elastik zemine oturan kiriş problemleri hakkında ilk ve en önemli çalışmalardan biri olan ve bizim bu tez çalışmasında kabul ettiğimiz Winkler zemin teorisi ana hatlarıyla anlatılmış, teorinin dayandığı temel esas ve kabuller belirtilmiş ve teorinin uygulandığı problemler hakkında bilgi verilmiştir. Diğer zemin modellerine de değinilmiş ve bu modellerle ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Değişik araştırmacıların zemin hakkında yaptıkları kabuller doğrultusunda yatak katsayılarının belirlenmesi konusunda yaptıkları çalışmalar, bu çalışmaların birbirleri ile kıyaslanması ve farklı zeminler için ortalama “k” yatak katsayısı değerleri verilmiştir.

İkinci bölümde, elastik zemine oturan kirişin statik ve dinamik tekil yük etkisi altında yönetici denklemler yardımı ile elastik eğri fonksiyonları elde edilmiştir. Sınır koşulları yardımı ile de denklem sabitleri bulunmuştur.

Üçüncü bölümde, aynı kirişin dinamik tekil yük etkisinde sonlu titreşimi incelenmiştir. Bu durumda kiriş yönetici denklemi sonlu yerdeğiştirme nedeniyle lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olur. Bu denklem mod fonksiyonları kullanılarak, zamana bağlı lineer olmayan adi diferansiyel denklem takımına indirgenmiştir. Bu lineer olmayan diferansiyel denklem takımı pertürbasyon yönteminin versiyonu olan katlı ölçek yöntemi ile çözülmüştür. Çözümünden önce katlı ölçek yöntemi ile ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise sayısal örnek verilmiş ve problemde kullanılan parametreler tanımlanmıştır. Her üç hal için de yönetici denklemlerden elde edilen elastik eğri fonksiyonları kullanılarak kiriş boyunca yerdeğiştirme, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları Mathematica ve Excel programları kullanılarak çizilmiştir.

SUMMARY

FINITE VIBRATION OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

In this study, finite vibration of a beam resting on Winkler elastic foundation with a finite length under a dynamic singular load is investigated. This thesis is composed of four main chapters.

In the first part, Winkler's hypothesis, which we are using in this thesis, is once of the first and the most important working about beams on elastic foundation. For this purpose, main Winkler's assumptions are given and applicability of the hypothesis to the various problems is also discussed. The information and some examples of working are given briefly about other some models of foundation. The different assumption about elastic foundation accepted by some researchers and average values of modules of foundation for various foundations are also given in this chapter.

In the second chapter, elastic curve functions of the beam resting on elastic foundation are obtained by using the governing equations of a beam under static and dynamic singular load. Constants of equations are calculated with the boundary conditions.

In third part of this study, finite vibration of the same beam under a dynamic singular load is investigated. In this case, governing equation of beam is a non-linear differential equation with partial derivative due to finite replacement. By using modal functions, this equation is reduced to ordinary differential equation set which is non-linear and not-time dependent. This non-linear differential set is solved with methods of multi-scale which is a vesion of perturbation method. Before soluation, explanation pertaining to methods of multi-scale is given.

Finally, in fourth chapter, numerical examples are analyzed and parameters which are used in the problem are defined. For each three states, the elastic curve functions which result from the governing equations are used in order to plot the diagrams of displacement, shear force and bending moment along the beam in assistance with the programs Mathematica and Excel.

1. GİRİŞ

1.1 Genel Bilgiler

Temeller yapının tümünün davranışını etkileyen, yeter ölçüde güvenli ve ekonomik olması gereken elemanlardır. Sürekli temellerin uygulama alanında yaygın bir şekilde kullanılmakta olan klasik metotlarla çözümü genellikle gerçek durumdan çok farklı, güvenli ya da ekonomik olmayan sonuçlar verir. Son yıllarda sürekli temeller elastik zemine oturan kiriş olarak çözülmektedir.

Elastik zemine oturan kirişlerin analizi üç aşamadan oluşur;

- 1- Yapının davranışı ve zemin tipiyle ilgili temel kabullerin yapılması.
- 2- Zemin katsayısı, kiriş boyutu ve malzemesi gibi gerekli büyüklüklerin seçilmesi.
- 3- Problemin matematiksel olarak kesin ve yaklaşık çözülmesi.

Elastik zemine oturan kirişler teorisinin uygulamada kullanıldığı yerler ;

- Yol inşaatlarında
- Demiryolu üst yapılarının hesabında
- Elastik zemine oturan betonarme binalar
- Hava meydanları iniş pistlerinin beton plaklarının inşasında
- Soğuk bölgelerde yapılan binalarda
- Zemin üstündeki kısımlarına yatay yükler etkileyen kazık ve palpaşların hesabında

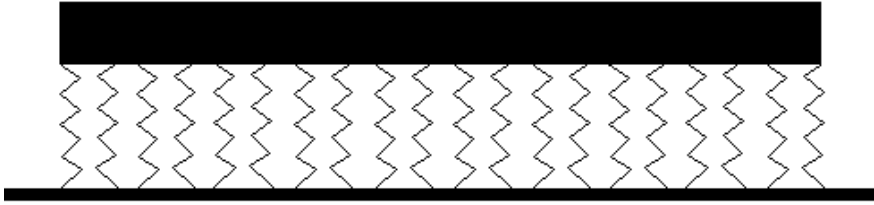
Uygulama alanının çokluğu elastik zemin üzerine oturan kirişlerin detaylı bir biçimde incelenmesini gerektirmiştir. Bu incelemelerde zeminin karmaşık elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliği bir takım zorluklar oluşturmuştur. Bundan dolayı elastik zemine oturan kirişlerin analizinden önce zeminle ilgili bir takım idealleştirmeler yapılması gerekmektedir. Bu da matematiksel çözümlerin

doğruluğunu daima sınırlar. Elastik zemin üzerine oturan kirişler teorisi üstünde çalışmış araştırmacılar zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini çeşitli şekillerde düşünmüş ve modellemişlerdir. Değişik zemin modellerine göre değişik hipotezler vardır (Keskinel ve Kumbasar, 1970).

1.2 Zemin Modelleri

1.2.1 Winkler zemin modeli

Elastik zemin üzerine oturan yapıların davranış şekli ile ilgili ilk önemli çalışma Winkler tarafından yapılmıştır. Winkler hipotezine göre zeminin birbirine sonsuz yakın, elastik ve lineer yaylardan oluştuğu kabul edilir.



Şekil 1.1 : Winkler Zemin Modeli

Zemine etkiyen kuvvetler yalnız etkiği noktada şekil değiştirme oluştururlar. Yani bu durumda zemini oluşturduğu kabul edilen sonsuz yakın yayların, yalnızca doğrudan yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Yani zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak değerlendirilmektedir.

Winkler hipotezi zemine son derece basit ve kolay bir yaklaşım kazandırdığından, kiriş ve plak problemlerinde oldukça geniş bir uygulama alanına ulaşmıştır.

Winkler hipotezinin uygulamada kullanıldığı yerler;

- Gemi kabukları, dönel kabuklar
- Köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler
- Bir ve iki doğrultuda sürekli temeller
- Yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palpaşlar
- Su tankları ve betonarme silo temelleri

Hipoteze göre, elastik zemin üzerinde bulunan, çeşitli yüklerin etkisi altındaki elastik ve prizmatik kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisi, kirişin aynı noktadaki çökme değeri ile doğru orantılıdır. Başka bir ifadeyle, yatak ortamının elastik olduğunu yani zemin malzemesinin Hooke kanunlarına uygunluk gösterdiğini belirtir. Zemin basınç deneyleri, yük, belli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yükü orantılı olduğunu gösterir. $v(x, y)$ kirişin düşey doğrultudaki çökme değeri olarak ele alınırsa, $p(x, y)$ elastik zemin tepkisi;

$$p(x, y) = kv(x, y) \quad (1.1)$$

şeklinindedir. Burada “k” elastik yay katsayısı olup uygulamada yatak katsayısı veya zemin parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda, birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder. Çeşitli zemin türleri için ortalama “k” değerleri Çizelge 1.1’de verilmiştir.

Çizelge1.1: Çeşitli zemin türleri için ortalama “k” değerleri

Zemin Türü	$k \text{ (} kN / m^3 \text{)}$
Balçık, turba	< 2.000
Kil, plastik	5.000 – 10.000
Kil, yarı sert	10.000 – 15.000
Kil, sert	15.000 – 30.000
Dolma toprak	10.000 – 20.000
Kum, gevşek	10.000 – 20.000
Kum, orta sıkı	20.000 – 50.000
Kum, sıkı	50.000 – 100.000
Kum-çakıl, sıkı	100.000 – 150.000
Sağlam şist	>500.000
Kaya	>2.000.000

Winkler zemin hipotezine göre, zeminin homojen olmamasından dolayı yatak katsayısı noktadan noktaya farklılık gösterir. Bu nedenle yatak katsayısı, yatay bir düzlemin çeşitli noktalarında birbirinden farklı değerler alabileceği gibi, derinliğin artması ile de değişebilir. Ancak zemin yatak katsayısı k, zemin tepkisinden ve taban

basıncından bağımsız bir değerdir ve bütün temel yüzeyi boyunca sabit kaldığı varsayılır. Bu varsayım problemin matematiksel çözümünü oldukça basitleştirir.

Winkler'in zemin modelinde zemin karakterini ifade eden bir tek "k" zemin yatak katsayısı parametresi vardır. Zeminin fiziksel ve mekanik özellikleri Winkler'in basit matematiksel bağıntısıyla ortaya konulmaktan çok daha karmaşık bir durum teşkil eder. Bu nedenle elastik zemini daha gerçekçi bir şekilde modelleyebilmek için kayma gerilmelerini de içeren iki parametrelili modeller geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları şunlardır;

1.2.2 Hetenyi zemin modeli

Hetenyi 1946'da Winkler zemin modeli üzerinde araştırma yapmıştır. Kitabında yatak katsayısının sayısal değeri ile ilgili hiçbir bilgi vermemiş, daha ziyade kesin çözümler üzerinde durmuştur. Hetenyi modelinde Winkler yaylarının üzerinde iki boyutlu problemler için bir plak ve tek boyutlu problemler için bir kiriş olduğu kabul edilir. Bu durumda D plağın eğilme rijitliği olmak üzere zemin tepkisi;

$$p(x, y) = kv(x, y) + D\nabla^2\nabla^2v(x, y) \quad (1.2)$$

ve

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.3)$$

şeklinde olup, bu ifadede;

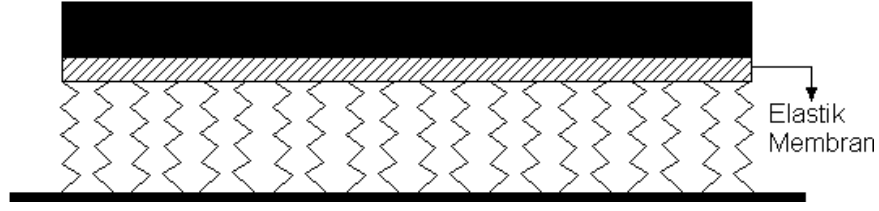
E = Elastisite modülü

h = Plak kalınlığı

ν = Poisson oranı'dır.

1.2.3 Filonenko-Borodich modeli

Winkler zeminini oluşturan yayların üzerinde yayların birbiri ile etkileşimini sağlayan elastik bir membran tabakasının olduğu göz önüne alınmıştır. Bu modelde sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde kayma gerilmesi de meydana gelmektedir.



Şekil 1.2 : Winkler Zemin Modelini temsil eden yayların üzerine farklı bir yaklaşım olarak getirilen elastik membran tabaka

Bu durumda T membran kuvveti ve ∇ laplace operatörü olmak üzere zemin tepkisi;

$$p(x, y) = kv(x, y) - T\nabla^2 v(x, y) \quad (1.4)$$

ve

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

şeklinde olur.

1.2.4 Pasternak modeli

Winkler yaylarının üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan elastik bir kayma tabakası göz önüne alınmıştır. Kayma tabakası (x,y) düzleminde izotropik olarak kabul edilmiştir.

$$p(x, y) = kv(x, y) - T\nabla^2 v(x, y) \quad (1.6)$$

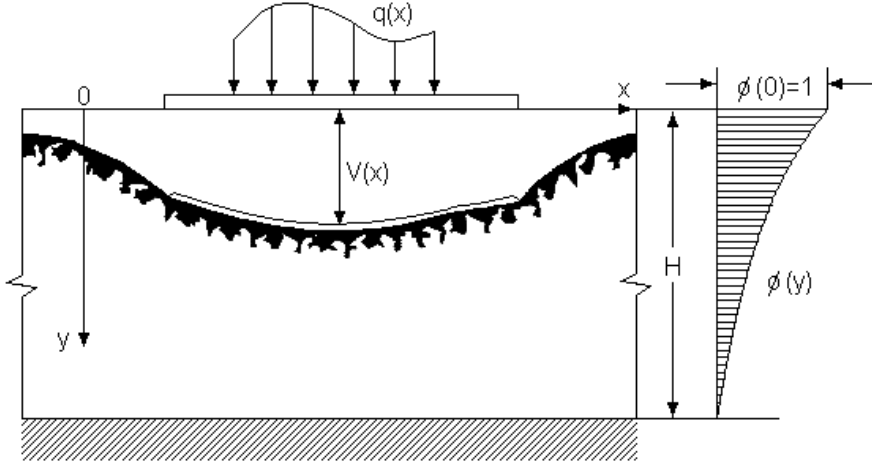
1.2.5 Vlasov modeli

Diğer zemin modellerinden farklı olarak, elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmış ve virtüel iş prensibi kullanılmıştır. Zemin yarı sonsuz bir ortam olarak kabul edilir ve zemin parametresini elde etmek için zeminin elastisite modülü, poisson oranı, derinliği ve genişliğinden yararlanılmaktadır. Vlasov zemin modelinde tek katmanlı zemin için denge denklemi;

$$2tV'' + kV = p(x, y)\phi(0) \quad (1.7)$$

olarak ifade edilir. Bu denge denkleminde $p(x,y)$ zemin tepkisi, k zemin yatak katsayısı, $2t$ ise Winkler modelinde göz önünde bulundurulmayan yaylar arasındaki kesme deformasyonunu ifade eder. Bir başka deyişle $2t=0$ alındığında Winkler zemin

modeline ait denklem elde edilir. Bu iki zemin parametresini hesaplayabilmek için Vlasov ve Leontev elastik zemin derinliğince düşey deplasman profilini temsil eden diğer bir parametre olan γ 'yı tanımlamıştır. Bu yaklaşımın getirdiği avantaj, zemin modülü k ile yaylar arasındaki etkileşimi ifade eden $2t$ 'nin zemin ile kirişin veya plağın geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanabilmesidir.



Şekil 1.3 : Vlasov Zemin Modeli

1.3 Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar

Winkler'in geliştirdiği elastik zemine oturan yapıların davranışı ve "k" yatak katsayısının değeri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazılarında aşağıda bahsedilmiştir.

Zimmerman (1942); elastik zemine oturan kirişler teorisini demiryolu üst yapılarının hesabında kullanmıştır. Bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla "k" yatak katsayısı değerini çeşitli zemin türleri için hesap etmiştir.

Miranda ve Nair (1946); sonlu uzunluktaki elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmışlar ve bu çözümlerle ilgili sayısal örnekler vermişlerdir.

Dodge (1964); elastik zemin üzerine oturan sonlu ve yarı sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranış biçimleri ile ilgili tesir fonksiyonlarını oluşturmuş ve bu fonksiyonlara ait eğrileri hazırlamıştır.

Krasheninkova (1964); rijit taban üzerine oturan sıkışabilir tabanın çökmelerini

elastisite teorisinden yola çıkarak temel çözümü, Zemochlin'in rijit çubuk çalışmalarından yararlanarak hesaplamıştır.

Donalt (1965); elastik zemin üzerine oturan kirişlerin, orta noktalarından tekil yük ve eğilme momenti ile yüklenmeleri durumunda gösterdikleri davranış biçimlerini incelemiştir.

Severn (1966); elastik çözümler yerine plastik çözümleri de göz önüne alarak, hem zemini hem de kirişi plastik, zemini plastik, kirişi elastik veya bu durumun tam tersini ele alarak çalışmalar yapmıştır.

Durelli ve Parks (1966); elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışmasını yapmışlardır. Kirişleri bir ve iki noktadan yükleyerek davranışları incelemiş buldukları sonuçları teorik çözümlerle karşılaştırmışlardır.

Munther (1970); sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranış şekillerini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve elde edilen sonuçları, Durelli ve Parks'ın yaptığı fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğrilerin üzerinde göstermiştir.

Bakioğlu ve Özkan (1980); gerçekleştirdikleri çalışmada temellerin çökmeleri ile eğilme momentleri arasındaki diferansiyel denklemleri, sonlu farklar denklemleri şeklinde oluşturup taban basıncının bu noktalar arasında parabolik olarak değiştiğini kabul etmişlerdir. Ayrıca bu çalışmada taban basınçları cinsinden belirtilen moment bağıntılarından yola çıkarak, çökmeler ile taban basınçları arasında lineer denklem takımları oluşturmuşlardır.

Ting (1982); Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur. Bu çözüm, farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek kullanılabilir.

Zhaohua ve Cook (1983); araştırmalarında sonlu elemanların iki türünü bir veya iki parametrelili kirişleri analiz edebilmek için formülize etmişlerdir. Modeller, Winkler, Filonenko-Borodich, Pasternak ve Vlasov zeminlerini kapsamaktadır. İki elemandan biri mutlak yer değiştirme fonksiyonuna, diğeri kübik yer değiştirme fonksiyonuna dayanmaktadır. Sonuçlar, mutlak yer değiştirme fonksiyonuna dayanan elemanların mutlak numerik sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Terzaghi ve Peck (1984); yaptıkları deneysel çalışmalar sonucu aynı p taban basıncı değerleri için çökmelerin kiriş genišlięine bağlı olarak değişimini gösteren bir bağıntı hesaplamışlardır. Bu bağıntıdan yararlanarak yatak katsayısının kiriş genišlięi ile değişimini gösteren bir bağıntı vermişlerdir.

Ting ve Mockry (1984); düzlem ereve analizi için, tekil yük, tekil moment ve lineer yayılı kuvvetlere bağlı olarak elastik zemin üzerindeki bir kiriş için yük eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisi geliştirmiş ve bu rijitlik matrisinin elemanlarının bilinen deplasman metoduna kolayca uygulanabileceğini göstermiştir.

Katsikadelis ve Armenakas (1984); çalışmalarında sınır entegral denklemlerinin nümerik değerlendirilmesi ile sınır entegral denklem metodunu, elastik zemine oturan herhangi bir şekildeki basit destekli plakların analizinde uygulamışlardır. Elde edilen sayısal sonuçlar, analitik özümlemlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, sınır entegral denklem metodunun daha avantajlı olduğu ortaya konmuştur.

Lin ve Adams (1987); ekme gerilmesi almayan Winkler zeminine oturan, ağırlıklı, üzerinde bir çift yük etkisindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranışını incelemiştir. Tekil yüklerin aralıklarına, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı sonuçlar ortaya koymuştur. Demiryolu sistemlerindeki ilgili parametreler için örnek hesaplar ayrılma etkisinin önemli olduğunu göstermektedir.

Bowles (1988); temel yapısının, zeminden on kat ve hatta daha fazla rijit olması nedeniyle, yatak katsayısının değerinin $k = 40q_a$ KN/m³ eşitliği kullanılarak zeminin maksimum taşıma kapasitesine göre saptanmasının çok yanılıcı bir sonuç vermeyeceğini ve yaklaşık bir hesap için kullanılabilabileceğini ifade etmiştir.

Karamanlidis ve Prakash (1988); iki parametrelili elastik yarı düzleme oturan kirişlerin burkulma ve titreşimini analitik ve sonlu elemanlar yöntemlerinden yararlanarak incelemiş ve birtakım mesnetlenme şekilleri için öz frekansları bulmuşlardır.

Elmas (1988); elastik zemine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranış şekillerini incelemiş ve orta noktadan etkiyen tekil yükün limit değerini artırarak, kirişlerin davranışını farklı malzeme ve boyutların etkisi altında ele almıştır.

Celep (1988); Winkler zemini üzerinde dikdörtgenel elastik plakların davranışını analiz etmiştir. Galerkin metodunu kullanarak problem cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

Rosa (1989); Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetlenme durumları altında eksenel kuvvetlerin de etkisini gözönüne alarak Hamilton ilkesinden faydalanarak titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Bütün bu araştırmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı varsayılmıştır.

Lai ve diğ. (1992); elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizini, kütle ve rijitlik matrislerinin hesap edilmesi amacıyla yeni bir formülasyon geliştirerek, sonlu elemanlar metoduyla yapmış ve kiriş doğal frekansını elde etmişlerdir.

Ding (1993); kiriş boyunca değişen Winkler zeminine oturan kirişlerin titreşimini analiz ederek, çözüm için zemin tepkilerini, kirişin yer değiştirmesini içeren bir integral denklem biçiminde dış yük olarak almış ve sayısal çözüm yaparak frekans parametrelerine ulaşmıştır.

1.4 Çalışmanın Amaç Ve Kapsamı

Bu tez çalışmasında elastik zemine oturan kirişin dinamik tekil yük etkisi altında sonlu titreşimi incelenmiştir. Winkler zemin hipotezi kullanılarak özel problemin çözümünde hesap kolaylığı sağlanmıştır.

Ele alınan problemdeki temel denklemlerden elastik eğri fonksiyonları elde edilmiş ve bilinmeyen sabit sayılar sınır koşulları yardımı ile bulunmuştur. Hesaplanan sabitler çözüm denkleminde yerine konarak elastik eğri fonksiyonları oluşturulmuş ve bu denklemin sonuçlarından yararlanarak yerdeğiştirme, kesme kuvveti ve moment diyagramları grafiksel olarak verilmiştir. Hesaplamalarda ve çizimlerde Excel ve Mathematica paket programları kullanılmıştır.

2. PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER

2.1 Problemin Tanımı

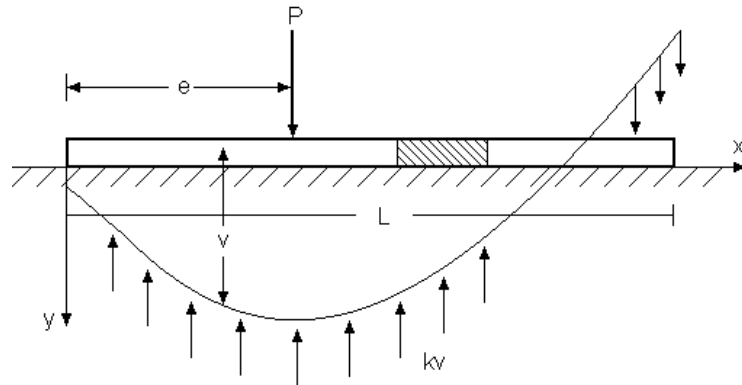
Bu tez çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan sonlu uzunluklu (L), tekil yük ile yüklenmiş bir kirişin titreşimleri çeşitli çözüm yöntemleri ile incelenmiştir.

Kirişin Winkler zemini üzerine oturduğu kabul edilmiştir. Winkler zemini halinde, kirişin elastik bir yatak üzerinde olduğu ve herhangi bir noktadaki taban basıncının yük belirli bir değeri aşmadıkça aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu yani zeminin malzemesinin Hooke kanunlarına uyum gösterdiği kabul edilmiştir. Bu problemde kullanılan kiriş malzemesi betonarme olarak ele alınmıştır. Problem üç kademeli olarak ele alınmıştır. Birinci aşamada statik yük etkisi altında ve I. mertebe teorisinin geçerli olduğu kabul edilmiştir. İkinci aşamada harmonik tekil yük halinde I. mertebe teorisi göz önüne alınmıştır. Üçüncü aşamada, dinamik yük altında kirişin sonlu yerdeğiştirme yaptığı kabul edilmiştir.

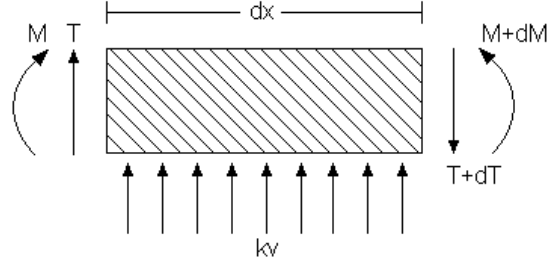
2.2 Statik Tekil Yükle Yüklü Sonlu Kiriş, Doğrusal Teori

Bu bölümde, elastik zemine oturan, P tekil yükü ile yüklü, EI eğilme rijitlikli sonlu kirişin elastik eğrisinin yönetici denklemi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Şekil 2.1’de görülen (x,y) düzlemindeki bir kiriş sisteminde, x koordinatına karşı gelen aşağı yönlü sehimler v ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1 : Elastik zemine oturan, statik tekil yük ile yüklü sonlu kiriş



Şekil 2.2 : Kirişe ait diferansiyel eleman

Denge denklemi düşey doğrultuda yazılırsa;

$$\sum K_y = 0 \Rightarrow T - T - dT + kvdx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = kv \quad (2.1)$$

Momentlerin toplamı sıfıra eşitlenirse;

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - M - dM + Tdx = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = T \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) ifadeleri birlikte düzenlenirse elastik eğrinin diferansiyel denklemi;

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = 0 \quad (2.3)$$

olur. $\xi = \frac{x}{L}$ ve $\bar{v} = \frac{v}{L}$ şeklinde boyutsuzlaştırılma yapılırsa;

$$\frac{EIL}{L^4} \frac{d^4 \bar{v}}{d\xi^4} + k\bar{v}L = 0 \rightarrow \frac{d^4 \bar{v}}{d\xi^4} + \frac{kL^4}{EI} \bar{v} = 0 \quad (2.4)$$

Burada;

$$4\lambda^4 = \frac{kL^4}{EI} \Rightarrow \frac{d^4 \bar{v}}{d\xi^4} + 4\lambda^4 \bar{v} = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir. Dördüncü dereceli diferansiyel denklemin çözümü için $\bar{v} = e^{\alpha\xi}$ alınarak denklemde türevi yerine yazılırsa;

$$\alpha^4 e^{\alpha \xi} + 4\lambda^4 e^{\alpha \xi} = 0 \rightarrow (\alpha^4 + 4\lambda^4) e^{\alpha \xi} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Çözüm için parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir;

$$\alpha^4 + 4\lambda^4 = 0 \quad (2.6)$$

denkleminin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\alpha_1 = \lambda + i\lambda \quad \alpha_2 = -\lambda - i\lambda \quad \alpha_3 = -\lambda + i\lambda \quad \alpha_4 = \lambda - i\lambda \quad (2.7)$$

Bu kökler diferansiyel denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\bar{v} = Ae^{\alpha_1 \xi} + Be^{\alpha_2 \xi} + Ce^{\alpha_3 \xi} + De^{\alpha_4 \xi} \quad (2.8)$$

elde edilir. Veya

$$\bar{v} = Ae^{\lambda \xi} e^{i\lambda \xi} + Be^{-\lambda \xi} e^{-i\lambda \xi} + Ce^{i\lambda \xi} e^{-\lambda \xi} + De^{\lambda \xi} e^{-i\lambda \xi} \quad (2.9)$$

genel çözümü elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa en son aşağıdaki yerdeğiştirme fonksiyonu elde edilir.

$$\bar{v}(\xi) = A \cosh \lambda \xi \cos \lambda \xi + B \sinh \lambda \xi \cos \lambda \xi + C \cosh \lambda \xi \sin \lambda \xi + D \sinh \lambda \xi \sin \lambda \xi \quad (2.10)$$

P tekil yükü nedeni ile kiriş elastik eğrisi $0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arası;

$$\bar{v}_1(\xi_1) = A_1 \cosh \lambda \xi_1 \cos \lambda \xi_1 + B_1 \sinh \lambda \xi_1 \cos \lambda \xi_1 + C_1 \cosh \lambda \xi_1 \sin \lambda \xi_1 + D_1 \sinh \lambda \xi_1 \sin \lambda \xi_1 \quad (2.11)$$

ve $e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası ise;

$$\bar{v}_2(\xi_2) = A_2 \cosh \lambda \xi_2 \cos \lambda \xi_2 + B_2 \sinh \lambda \xi_2 \cos \lambda \xi_2 + C_2 \cosh \lambda \xi_2 \sin \lambda \xi_2 + D_2 \sinh \lambda \xi_2 \sin \lambda \xi_2 \quad (2.12)$$

olarak ele alınmalıdır. Bu iki çözümde $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ olmak üzere toplam sekiz adet bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenler aşağıda açıklanan sınır koşulları ve ara süreklilik/süreksizlik koşulları kullanılarak elde edilecektir. İki ucu serbest, statik tekil yük ile yüklenmiş kirişin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

Sınır Koşulları:

1- Kirişin başlangıç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$M_1(\xi_1 = 0) = 0 \rightarrow \bar{v}_1''(\xi_1 = 0) = 0 \quad (2.13)$$

2- Kirişin başlangıç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$T_1(\xi_1 = 0) = 0 \rightarrow \bar{v}_1'''(\xi_1 = 0) = 0 \quad (2.14)$$

3- Kirişin bitiş noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$M_2(\xi_2 = 1) = 0 \rightarrow \bar{v}_2''(\xi_2 = 1) = 0 \quad (2.15)$$

4- Kirişin bitiş noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$T_2(\xi_2 = 1) = 0 \rightarrow \bar{v}_2'''(\xi_2 = 1) = 0 \quad (2.16)$$

5- P tekil yükünün altında, birinci ve ikinci bölge için çökme değerleri birbirine eşittir.

$$\bar{v}_1\left(\xi_1 = \frac{e}{L}\right) = \bar{v}_2\left(\xi_2 = \frac{e}{L}\right) \quad (2.17)$$

6- P tekil yükünün altında, birinci ve ikinci bölge için dönme değerleri birbirine eşittir.

$$\bar{v}_1'\left(\xi_1 = \frac{e}{L}\right) = \bar{v}_2'\left(\xi_2 = \frac{e}{L}\right) \quad (2.18)$$

7- P tekil yükünün altında, birinci ve ikinci bölge için eğilme momentleri değerleri birbirine eşittir.

$$\bar{v}_1''\left(\xi_1 = \frac{e}{L}\right) = \bar{v}_2''\left(\xi_2 = \frac{e}{L}\right) \quad (2.19)$$

8- P tekil yükünün altında, ikinci bölgenin kesme kuvveti değeri ile birinci bölgenin kesme kuvveti değerinin farkı, $-P$ kuvvetine eşittir.

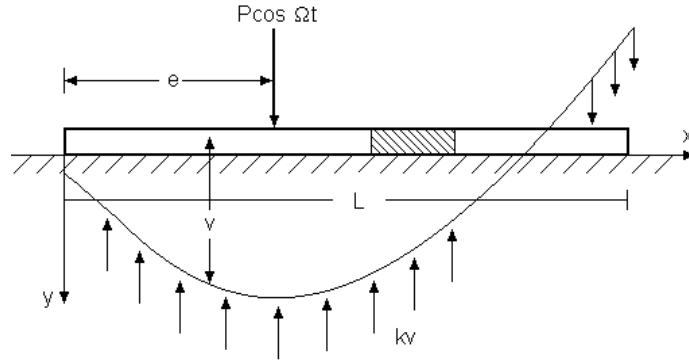
$$-EIv_2''' + EIv_1''' = -P$$

$$-v_2''' \left(\xi_2 = \frac{e}{L} \right) + v_1''' \left(\xi_1 = \frac{e}{L} \right) = -\frac{PL^2}{EI} \quad (2.20)$$

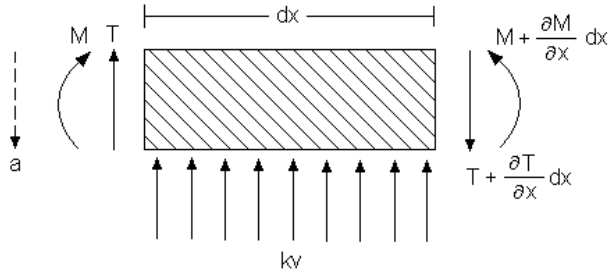
Böylece sekiz bilinmeyen için sekiz adet sınır koşulu elde edilmiştir.

2.3. Dinamik Tekil Yükü Yüklü Sonlu Kiriş, Doğrusal Teori

Winkler zemini üzerine oturan, harmonik tekil yük $[P \cos(\Omega t)]$ ile yüklenmiş EI eğilme rijitlikli, sonlu uzunluktaki elastik kirişin yönetici denkleminin çıkarılışı aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3 : Elastik zemine oturan, dinamik tekil yük ile yüklü sonlu kiriş.



Şekil 2.4 : Kirişe ait diferansiyel elemanı.

Elemanın aşağı doğru ivmesi $a = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ alındığında düşey doğrultudaki denge denklemini yazıldığında;

$$-T + T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - kv dx = \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

eşitliği elde edilir. Burada; ρ kirişin özgül kütlesi, A kirişin kesiti, v kirişin aşağı doğru pozitif kabul edilen yer değiştirmesi, k zemin katsayısı, T kesme kuvvetidir ve

$T = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$, dır. Bu durumda (2.21) ifadesini düzenlersek;

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

elde edilir. Doğrusal teori kullanıldığı için, harmonik zorlama etkisi altında kirişin davranışı da harmonik olacağından $v(x,t)$ yerdeğiştirmesi aşağıdaki gibi parçalara ayrılabilir.

$$v(x,t) = V(x) \cos \Omega t \quad (2.23)$$

Bu durumda yönetici denklemde zamana bağlı terim yok edilerek aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + kV = \rho A \Omega^2 V \quad (2.24)$$

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + \frac{k}{EI} \left(1 - \frac{\rho A \Omega^2}{k} \right) V = 0 \quad (2.25)$$

$\xi = \frac{x}{L}$ ve $\bar{V} = \frac{V}{L}$ şeklinde boyutsuzlaştırılma yapılırsa;

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} + \frac{kL^4}{EI} \left(1 - \frac{\rho A \Omega^2}{k} \right) \bar{V} = 0 \quad (2.26)$$

elde edilir ve burada;

$$\frac{kL^4}{EI} = \lambda^4 \quad \text{ve} \quad w^2 = \frac{k}{\rho A} \quad \text{dersek;}$$

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} + \lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2} \right) \bar{V} = 0 \quad (2.27)$$

yönetici denklemini elde edilir.

2.4 Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Özel Durumlar

2.4.1. Durum I: $\Omega = w$ olması hali (rezonans hali)

Bu durumda kirişin yönetici denklemi ve çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} = 0 \quad (2.28)$$

$$\bar{V} = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D \quad (2.29)$$

$0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arası;

$$\bar{V}_1 = A_1\xi^3 + B_1\xi^2 + C_1\xi + D_1 \quad (2.30)$$

$e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası;

$$\bar{V}_2 = A_2\xi^3 + B_2\xi^2 + C_2\xi + D_2 \quad (2.31)$$

Bu durumda bilinen sınır koşullarının kullanılmasının sonucu $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sıfır, $D_1 = D_2$ bulunur. Sonuçta $\bar{V}(\xi) = \text{sabit}$ şeklinde olup kirişin her noktası aynı yönde ve eşit hareket yapar. Yani sistem harmonik zorlama etkisi altında kütle yay sistemine dönüşür. Bu durumda $v=v(t)$ zamana bağlı yönetici denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho AL \frac{d^2 v}{dt^2} + kvL = P \cos \Omega t \quad (2.32)$$

Bu denklemde düzenleme yapılırsa;

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + w^2 v = \frac{P}{\rho AL} \cos \Omega t \quad (2.33)$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü de ($\Omega = w$ olduğundan)

$$v(t) = a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + \frac{P}{2\rho A 2\Omega} t \sin \Omega t \quad (2.34)$$

olarak elde edilir.

2.4.2. Durum II: $\Omega > w$ olması hali

$\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) < 0$ olur. Bu durumda yönetici denklemini aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} - \lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) \bar{V} = 0 \quad (2.35)$$

$$\beta^4 = \lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) \quad (2.36)$$

dersek;

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} - \beta^4 \bar{V} = 0 \quad (2.37)$$

şeklinde olur. Bu diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri,

$$\alpha_1 = \beta, \alpha_2 = -\beta, \alpha_3 = i\beta, \alpha_4 = -i\beta \quad (2.38)$$

olarak elde edilir.

Çözüm sonunda aşağıdaki yerdeğiştirme fonksiyonu elde edilir.

$$\bar{V} = A \sinh \beta \xi + B \cosh \beta \xi + C \cos \beta \xi + D \sin \beta \xi \quad (2.39)$$

$0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arası;

$$\bar{V}_1 = A_1 \sinh \beta \xi_1 + B_1 \cosh \beta \xi_1 + C_1 \cos \beta \xi_1 + D_1 \sin \beta \xi_1 \quad (2.40)$$

$e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası;

$$\bar{V}_2 = A_2 \sinh \beta \xi_2 + B_2 \cosh \beta \xi_2 + C_2 \cos \beta \xi_2 + D_2 \sin \beta \xi_2 \quad (2.41)$$

geçerlidir. Bu iki çözümde $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ olmak üzere toplam sekiz adet bilinmeyen vardır. Sınır koşulları statik yük ile yüklü kiriş ile aynıdır.

2.4.3. Durum III: $\Omega < w$ olması hali

$\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) > 0$ olur. Bu durumda yönetici denklemi aşağıdaki gibi düzenlediğimizde;

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} + \lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) \bar{V} = 0 \quad (2.42)$$

$$4\beta^4 = \lambda^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) \quad (2.43)$$

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} + 4\beta^4 \bar{V} = 0 \quad (2.44)$$

denkleme ulaşılır. Dördüncü dereceli diferansiyel denklemin çözümü için $V = e^{\alpha\xi}$ alınıp denklemde türevlerini yerine yazarsak;

$$\bar{V} = e^{\alpha\xi} \Rightarrow \bar{V}' = \alpha e^{\alpha\xi}, \quad \bar{V}'' = \alpha^2 e^{\alpha\xi}, \quad \bar{V}''' = \alpha^3 e^{\alpha\xi}, \quad \bar{V}^{iv} = \alpha^4 e^{\alpha\xi} \quad (2.45)$$

$$\alpha^4 e^{\alpha\xi} + 4\beta^4 e^{\alpha\xi} = 0 \rightarrow e^{\alpha\xi} (\alpha^4 + 4\beta^4) = 0 \quad (2.46)$$

denklemleri elde edilir ve bu durumda çözüm aşamaları statik yük etkisi altındaki kiriş ile aynıdır.

$$\bar{V} = A \cos \beta\xi \cosh \beta\xi + B \cos \beta\xi \sinh \beta\xi + C \sin \beta\xi \cosh \beta\xi + D \sin \beta\xi \sinh \beta\xi \quad (2.47)$$

$0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arası;

$$\bar{V}_1(\xi_1) = A_1 \cos \beta\xi_1 \cosh \beta\xi_1 + B_1 \cos \beta\xi_1 \sinh \beta\xi_1 + C_1 \sin \beta\xi_1 \cosh \beta\xi_1 + D_1 \sin \beta\xi_1 \sinh \beta\xi_1 \quad (2.48)$$

$e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası;

$$\bar{V}_2(\xi_2) = A_2 \cos \beta\xi_2 \cosh \beta\xi_2 + B_2 \cos \beta\xi_2 \sinh \beta\xi_2 + C_2 \sin \beta\xi_2 \cosh \beta\xi_2 + D_2 \sin \beta\xi_2 \sinh \beta\xi_2 \quad (2.49)$$

geçerlidir. Bu iki çözümde $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ olmak üzere toplam sekiz adet bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenler aşağıda açıklanan sınır koşulları ve ara süreklilik / süreksizlik koşulları kullanılarak elde edilecektir.

Sınır koşulları statik yük ile yüklü kiriş ile aynıdır.

Sınır Koşulları;

$$1- \bar{V}_1'' (\xi = 0) = 0,$$

$$2- \bar{V}_1''' (\xi = 0) = 0,$$

$$3- \bar{V}_2'' (\xi = 1) = 0,$$

$$4- \bar{V}_2''' (\xi = 1) = 0,$$

$$5- \bar{V}_1(\xi = e/L) = \bar{V}_2(\xi = e/L),$$

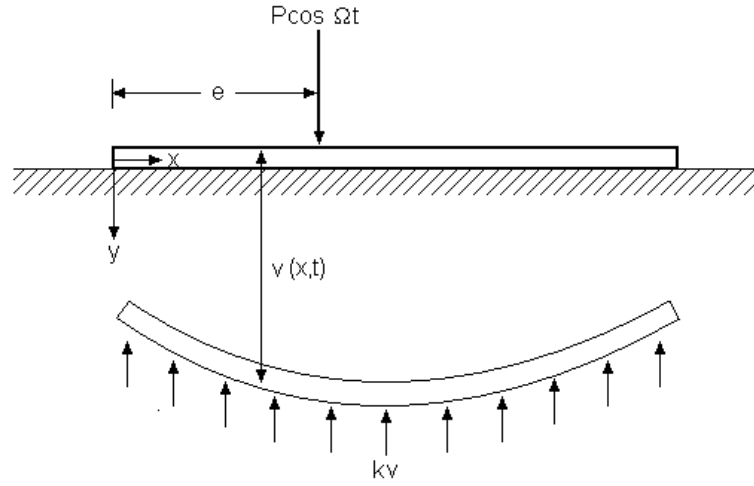
$$6- \bar{V}_1' (\xi = e/L) = \bar{V}_2' (\xi = e/L),$$

$$7- \bar{V}_1'' (\xi = e/L) = \bar{V}_2'' (\xi = e/L),$$

$$8- \bar{V}_1''' (\xi = e/L) - \bar{V}_2''' (\xi = e/L) = -\frac{PL^2}{EI}$$

3. SONLU YERDEĞİŞTİRME HALİ

3.1 Yönetici Denklem



Şekil 3.1 : Elastik zemine oturan kirişin sonlu titreşimi

Şekil 3.1'deki kiriş P harmonik tekil yükünün etkisi altında sonlu yerdeğiştirme hareketi yapsın. Bu durumda kirişe ait yönetici denklem [28] aşağıdaki gibidir;

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv = \frac{3}{2} EA \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + P \cos \Omega t \delta(x-e) \quad (3.1)$$

Burada kiriş boyunca boyuna yerdeğiştirmeler ihmal edilmiştir. Bu ifade de c sönüm katsayısını δ 'da Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Dirac delta fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases}$$

ve $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$ 'dır.

$\xi = \frac{x}{L}$ ve $\bar{v} = \frac{v}{L}$ şeklinde boyutsuzlaştırılma yapılırsa;

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \xi^4} + k \bar{v} = \frac{3}{2} \frac{EA}{L^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} + \frac{P}{L} \cos \Omega t \delta(\xi - e/L) \quad (3.2)$$

denklemini elde edilir.

Yukarıdaki denklem sağ taraftaki ilk terimin varlığı nedeni ile lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Lineer olmayan diferansiyel denklemler, bir kaçının dışında kapalı çözüme sahip değildir. Bu tür denklemlerin çözümü için çeşitli yaklaşık çözüm yöntemleri vardır. Bunlar arasında ardışık yaklaşımlar ve pertürbasyon yöntemleri sayılabilir. Bu problemde önce mod süperpozisyonu kullanılarak x koordinatının eliminasyonu sonucu ortaya zamana bağlı bir adi diferansiyel denklem takımı çıkmaktadır. Lineer olmayan bu diferansiyel denklem pertürbasyon yönteminin bir alt yöntemi olan katlı ölçek yöntemi kullanılarak çözüldü. Aşağıda ilk olarak mod fonksiyonları ile ilgili açıklamalar yapılmıştır.

3.2 Mod Fonksiyonları

Bu kısımda önce iki ucu serbest kirişin doğal frekansları ve bu frekanslara karşı gelen mod fonksiyonları bulunacaktır.

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Yönetici denkleminin yukarıdaki gibi olduğunu varsayarak mod fonksiyonları ile çözmeye çalışalım.

$\xi = \frac{x}{L}$ ve $\bar{v} = \frac{v}{L}$ şeklinde boyutsuzlaştırılma yapılırsa;

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{v}(\xi,t)}{\partial \xi^4} = -\rho A \frac{\partial^2 \bar{v}(\xi,t)}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

eşitliği elde edilir. $\bar{v}(\xi,t)$ yerdeğiştirmesi aşağıdaki gibi parçalara ayrılabilir.

$$\bar{v}(\xi,t) = \bar{V}(\xi)T(t) \quad (3.5)$$

$\bar{v}(\xi,t)$ yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} T = -\rho A \frac{d^2 T}{dt^2} \bar{V} \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu eşitlikte x 'e bağlı terimler eşitliğin bir tarafına t 'ye bağlı terimler eşitliğin diğer tarafına eşitlenip γ^4 gibi sabit bir değere eşitlenir ise;

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} = -\frac{\rho AL^4}{EI} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \gamma^4 \quad (3.7)$$

elde edilir. x 'e bağlı terimler ve t 'ye bağlı terimler ayrı ayrı γ^4 sabitine eşitlenerek çözüme ulaşılır.

i-

$$-\frac{\rho AL^4}{EI} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \gamma^4 \quad (3.8)$$

eşitliğini çözersek;

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \gamma^4 \frac{EI}{\rho AL^4} T = 0 \quad (3.9)$$

w doğal frekans olmak üzere $w^2 = \gamma^4 \frac{EI}{\rho AL^4}$ ise;

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + w^2 T = 0 \quad (3.10)$$

olur.

ii-

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} = \gamma^4 \quad (3.11)$$

denklemini çözersek;

$$\frac{d^4 \bar{V}}{d\xi^4} - \gamma^4 \bar{V} = 0 \quad (3.12)$$

$$\bar{V} = e^{\alpha\xi} \Rightarrow \bar{V}' = \alpha e^{\alpha\xi}, \bar{V}'' = \alpha^2 e^{\alpha\xi}, \bar{V}''' = \alpha^3 e^{\alpha\xi}, \bar{V}^{IV} = \alpha^4 e^{\alpha\xi} \quad (3.13)$$

$$\alpha^4 e^{\alpha\xi} - \gamma^4 e^{\alpha\xi} = 0 \rightarrow e^{\alpha\xi} (\alpha^4 - \gamma^4) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Çözüm için parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir;

denkleminin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\alpha^4 - \gamma^4 = 0 \quad \alpha_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = -\gamma, \quad \alpha_3 = i\gamma, \quad \alpha_4 = -i\gamma \quad (3.14)$$

Bu kökler diferansiyel denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\bar{V}(\xi) = Ae^{\gamma\xi} + Be^{-\gamma\xi} + Ce^{i\gamma\xi} + De^{-i\gamma\xi} \quad (3.15)$$

veya başka bir ifade ile;

$$\bar{V}(\xi) = A \cosh \gamma\xi + B \sinh \gamma\xi + C \cos \gamma\xi + D \sin \gamma\xi \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu çözümde A, B, C, D olmak üzere toplam dört adet bilinmeyen vardır.

Bu bilinmeyenler aşağıda açıklanan sınır koşulları kullanılarak elde edilecektir. İki ucu serbest kirişin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

Sınır Koşulları:

1- Kirişin başlangıç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{V}''(\xi = 0) = 0 \Rightarrow A = C \quad (3.17)$$

2- Kirişin başlangıç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{V}'''(\xi = 0) = 0 \Rightarrow B = D \quad (3.18)$$

3- Kirişin bitiş noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{V}''(\xi = 1) = 0 \Rightarrow A(\cosh \gamma - \cos \gamma) + B(\sinh \gamma - \sin \gamma) = 0 \quad (3.19)$$

4- Kirişin bitiş noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{V}'''(\xi = 1) = 0 \Rightarrow A(\sinh \gamma + \sin \gamma) + B(\cosh \gamma - \cos \gamma) = 0 \quad (3.20)$$

Bu sınır koşullarını kullanarak (3.19) ve (3.20) eşitlikleri elde edilir. Çözüme ulaşmak için matris şeklinde yazılıp determinantını sıfıra eşitleriz.

$$\begin{vmatrix} (\cosh \gamma - \cos \gamma) & (\sinh \gamma - \sin \gamma) \\ (\sinh \gamma + \sin \gamma) & (\cosh \gamma - \cos \gamma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

$$\cos \gamma \cosh \gamma = 1 \quad (3.22)$$

Bu determinantın çözümünden $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ değerleri bulunur.

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 4,730, \quad \gamma_2 = 7,853, \quad \gamma_3 = 10,996, \quad \gamma_4 = 14,137, \dots \quad (3.23)$$

$$\bar{V}_1(\xi) = A(\cosh \gamma_1 \xi - 0,9882502 \sinh \gamma_1 \xi + \cos \gamma_1 \xi - 0,9882502 \sin \gamma_1 \xi) \quad (3.24)$$

$$\bar{V}_2(\xi) = A(\cosh \gamma_2 \xi - 1,00078 \sinh \gamma_2 \xi + \cos \gamma_2 \xi - 1,00078 \sin \gamma_2 \xi) \quad (3.25)$$

$$\bar{V}_3(\xi) = A(\cosh \gamma_3 \xi - 0,999966 \sinh \gamma_3 \xi + \cos \gamma_3 \xi - 0,999966 \sin \gamma_3 \xi) \quad (3.26)$$

$$\bar{V}_4(\xi) = A(\cosh \gamma_4 \xi - 1,00000144 \sinh \gamma_4 \xi + \cos \gamma_4 \xi - 1,00000144 \sin \gamma_4 \xi) \quad (3.27)$$

3.3 Uzay Koordinatının Eliminasyonu

Yönetici denklemimiz boyutsuz halde aşağıdaki gibiydi;

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \xi^4} + k \bar{v} = \frac{3}{2} \frac{EA}{L^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} + \frac{P}{L} \cos \Omega t \delta(\xi - e/L) \quad (3.28)$$

Mod fonksiyonları yardımı ile yönetici denkleminin çözümü boyutsuz olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{v}(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_m(\xi) T_m(t) = \bar{V}_1(\xi) T_1(t) + \bar{V}_2(\xi) T_2(t) + \dots \quad (3.29)$$

$\bar{V}_m(\xi)$ mod fonksiyonudur. Mod fonksiyonları ortogonal olup aralarında

$$\int_0^1 \bar{V}_m \bar{V}_n d\xi = \gamma_{mn} C \quad (3.30)$$

bağıntısı bulunmaktadır. Burada γ_{mn} kronecker deltasıdır. Ve $\gamma_{mn} = \begin{cases} 1: m = n \\ 0: m \neq n \end{cases}$ olmaktadır.

Seri çözümü yönetici denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_m \frac{d^2 T_m}{dt^2} + c \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_m \frac{dT_m}{dt} + \frac{EI}{L^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^4 \bar{V}_m}{d\xi^4} T_m + k \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_m T_m = \\ \frac{3}{2} \frac{EA}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d\bar{V}_m}{d\xi} T_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\bar{V}_n}{d\xi} T_n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{V}_r}{d\xi^2} T_r + \frac{P}{L} \cos \Omega t \delta(\xi - e/L) \end{aligned} \quad (3.31)$$

denkleminde ulaşılır. Burada $\frac{d^4 \bar{V}_m}{d\xi^4} = \gamma_m^4 \bar{V}_m$ olduğundan ve her iki tarafı da $\bar{V}_s(\xi)$ ile çarpıp integral alırsak yönetici denkleminde x koordinatı ortadan kalkar. Yönetici denkleminin aşağıdaki yapıyı alır.

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \bar{V}_m \bar{V}_s d\xi \right) \frac{d^2 T_m}{dt^2} + c \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \bar{V}_m \bar{V}_s d\xi \right) \frac{dT_m}{dt} + \frac{EI}{L^4} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \gamma_m^4 \bar{V}_m \bar{V}_s d\xi \right) T_m + \\ k \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \bar{V}_m \bar{V}_s d\xi \right) T_m = \\ \frac{3}{2} \frac{EA}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{d\bar{V}_m}{d\xi} \frac{d\bar{V}_n}{d\xi} \frac{d^2 \bar{V}_r}{d\xi^2} \bar{V}_s d\xi \right) T_m T_n T_r + \frac{P}{L} \cos \Omega t \int_0^1 \bar{V}_s \delta(\xi - e/L) d\xi \end{aligned} \quad (3.32)$$

m=s kabul edersek;

$$\rho AC \frac{d^2 T_s}{dt^2} + cC \frac{dT_s}{dt} + \frac{EI}{L^4} \gamma_s^4 C T_s + kC T_s = \frac{3}{2} \frac{EA}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \frac{P}{L} \cos \Omega t \bar{V}_s(\xi) \quad (3.33)$$

Burada $\Gamma_{mnr} = \left(\int_0^1 \frac{d\bar{V}_m}{d\xi} \frac{d\bar{V}_n}{d\xi} \frac{d^2 \bar{V}_r}{d\xi^2} \bar{V}_s d\xi \right)$ dir.

Her iki tarafı da ρAC 'ye bölüp düzenlersek;

$$\frac{d^2 T_s}{dt^2} + \left(\frac{kL^4 + EI\gamma_s^4}{\rho AL^4} \right) T_s + \frac{c}{\rho A} \frac{dT_s}{dt} = \frac{3}{2} \frac{E}{\rho CL^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \frac{P\bar{V}_s(\zeta)}{\rho ACL} \cos \Omega t \quad (3.34)$$

elde edilir.

$w_s^2 = \left(\frac{kL^4 + EI\gamma_s^4}{\rho AL^4} \right)$ yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa en son olarak aşağıdaki yönetici denklem elde edilir.

$$\frac{d^2 T_s}{dt^2} + w_s^2 T_s = -\frac{c}{\rho A} \frac{dT_s}{dt} + \frac{3}{2} \frac{E}{\rho CL^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \frac{P\bar{V}_s(\zeta)}{\rho ACL} \cos \Omega t \quad (3.35)$$

bu denklem de katlı ölçek yöntemi ile çözülmüştür. Aşağıda ilk olarak katlı ölçek yöntemi ile ilgili açıklamalar verilmiştir.

3.3.1 Katlı ölçek yöntemi

Katlı ölçek yönteminde temel ilke bir fonksiyonda tek değişken yerine bir çok değişkenin kullanılmasıdır. Örneğin x , t 'nin bir fonksiyonu olmak üzere; t 'nin ise bir başka parametreye bağlı olması gibi. Katlı ölçek yöntemi fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik alanlarında çok geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Sönümlü sistemlerin çözümünde de kolaylık sağlar.

Katlı ölçek yönteminin genelde üç versiyonu bulunmaktadır.

Birinci versiyonda bağlı değişkenlerin pertürbasyon serisine açılmasına ilave olarak türevler de seriye açılmaktadır. Bu nedenle bu versiyon türev-açılım yöntemi olarak adlandırılır.

Katlı ölçek yönteminin ikinci versiyonunda $\xi = \varepsilon t$, $\eta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} t$ olarak alınıp bağlı değişkenim (t, ε) yerine $(\xi, \eta : \varepsilon)$ 'a bağlılığı esas alınmaktadır. Burada zamana göre türetme ξ ve η 'ye göre türetmeye genişletilmektedir.

Üçüncü versiyonda iki değişkenli açılım aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

$$\xi : \mu(\varepsilon)t, \quad \eta = \sum_{n=0}^M \delta_n(\xi); \quad g_n[\mu(\varepsilon)t] \quad (3.36)$$

Biz tezimizde birinci versiyonu kullanacağımız için onu inceleyeceğiz.

Bu yöntemde t yeni bir bağımsız değişken $\varepsilon \ll 1$ parametresine bağlı olarak;

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0,1,2,\dots \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre (3.37) ifadesi

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad \text{ve} \quad T_2 = \varepsilon^2 t \dots \quad (3.38)$$

şeklinde değerler alacaktır.

t zamanına bağlı türevler ise dolayısıyla ε bağımsız değişkenine bağlı olarak

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (3.40)$$

şeklinde olur.

Bu yöntemde v yerdeğiştirmesi de ε parametresi ve zamana bağlı olarak

$$v(t; \varepsilon) = \varepsilon v_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^3 v_3(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (3.41)$$

şeklinde pertürbasyon serisine açılmaktadır.

Bu tanıma göre örnek olarak;

$$\ddot{v} + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0 \quad (3.42)$$

denklemini katlı ölçek yöntemi ile çözelim.

(3.40) ve (3.41) ifadeleri bu denkleme yerlerine konursa denklem;

$$\begin{aligned} & \left[D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \right] (\varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots) + \\ & \alpha_1 (\varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots) + \alpha_2 (\varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots)^2 + \alpha_3 (\varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklini alır. Bu denklem düzenlenir ve ε , ε^2 ve ε^3 parametrelerine bağlı terimler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$D_0^2 v_1 + w_0^2 v_1 = 0 \quad (3.44)$$

$$D_0^2 v_2 + w_0^2 v_2 = -2D_0 D_1 v_1 - \alpha_2 v_1^2 \quad (3.45)$$

$$D_0^2 v_3 + w_0^2 v_3 = -2D_0 D_1 v_2 - D_1^2 v_1 - 2D_0 D_2 v_1 - 2\alpha_2 v_1 v_2 - \alpha_3 v_1^3 \quad (3.46)$$

şeklinde üç ayrı denklem elde edilir. Burada $w_0^2 = \alpha_1$ alınmıştır.

Birinci denklemin çözümü;

$$v_1 = A(T_1, T_2, \dots) e^{iw_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2, \dots) e^{-iw_0 T_0} \quad (3.47)$$

şeklinde bulunur. Bu denklemdeki $\bar{A} e^{-iw_0 T_0}$, $A e^{iw_0 T_0}$ 'ın karmaşık eşleniğidir. (3.47) ifadesi (3.45)'de yerine konur ve denklem düzenlenirse;

$$D_0^2 v_2 + w_0^2 v_2 = -2iw_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{iw_0 T_0} - \alpha_2 \left[A^2 e^{2iw_0 T_0} + A\bar{A} \right] + K.E. \quad (3.48)$$

şekline dönüşür. Burada “K.E.” solunda kalan bütün terimlerin karmaşık eşleniğini göstermektedir. Bu ifadede denklemin homogen çözümü olan terimler periyodikliği bozan seküler terimler olarak adlandırılmaktadır. Diferansiyel denklemin periyodik çözümü olabilmesi için sağ tarafta bu tür terimlerin olmaması gerekir. Bu nedenle (3.48) denkleminin sağ tarafında $\frac{\partial A}{\partial T_1}$ sıfır olmalıdır. Yani;

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \rightarrow A = (T_2, \dots) \quad (3.49)$$

Bu sonuç A nın T_1 in fonksiyonu olmadığını gösterir.

Bu durumda (3.48) ifadesinin çözümü;

$$v_2 = \alpha_2 \left(\frac{A^2}{3w_0^2} e^{2iw_0 T_0} - \frac{A\bar{A}}{w_0^2} \right) + K.E. \quad (3.50)$$

şeklinde olur.

Son olarak, bulunan (3.47) ve (3.50) ifadelerini (3.46)'da yerine koyup denklem düzenlenirse;

$$D_0^2 v_3 + w_0^2 v_3 = - \left[2iw_0 D_2 A - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 w_0^2}{3w_0^2} A^2 \bar{A} \right] e^{iw_0 T_0} - \frac{3\alpha_3 w_0^2 + 2\alpha_2^2}{3w_0^2} A^3 e^{3iw_0 T_0} + K.E. \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade de periyodikliği bozan seküler terim sıfıra eşitlenir ise;

$$2iw_0 D_2 A + \frac{9\alpha_3 w_0^2 - 10\alpha_2^2}{3w_0^2} A^2 \bar{A} = 0 \quad (3.52)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümünü daha uygun hale getirmek için A ve \bar{A} ifadeleri polar halde;

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta} \quad \bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\theta} \quad (3.53)$$

şeklinde yazılır. Burada $a, \theta \rightarrow T_2$ 'nin gerçel fonksiyonları olarak kabul edilmektedir.

$$\gamma = \frac{9\alpha_3 w_0^2 - 10\alpha_2^2}{3w_0^2} \quad (3.54)$$

şeklinde kısaltma yapılırsa;

$$e^{i\theta} \left(-iw_0 \frac{\partial a}{\partial T_2} + aw_0 \frac{\partial \theta}{\partial T_2} + \frac{1}{8} \gamma a^3 \right) = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. Bu ifade de;

$$-w_0 \frac{\partial a}{\partial T_2} = 0 \quad (3.56)$$

olur. a =sabit olup T_2 'den bağımsızdır.

(3.55) ifadesindeki diğer terimler de sıfıra eşitlenir ve θ 'ya göre integre edilirse θ değeri;

$$\theta = -\frac{1}{8w_0} \gamma a^2 T_2 + \beta \quad (3.57)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadedeki β değeri integral sabitidir. Sonuç olarak;

$$v_1 = \frac{1}{2} a e^{i \left[\left(w_0 + \frac{9\alpha_3 w_0^2 - 10\alpha_2^2}{24w_0^3} a^2 \varepsilon^2 \right) t + \beta \right]} + K.E. \quad (3.58)$$

şeklinde elde edilir. γ 'nın (3.54) deki değeri ve T_2 yerine de eşiti olan $\varepsilon^2 t$ ifadesi kullanılmıştır. Buna göre lineer olmayan halde w dairesel frekansı, w_0^2 yerine α_1 kullanılarak,

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1} \left(1 + \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \varepsilon^2 a^2 \right) \quad (3.59)$$

şeklinde elde edilir. (3.58) ifadesi de;

$$v_1 = a \cos(\omega t + \beta) \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak v ifadesi;

$$v = \varepsilon a \cos(\omega t - \beta) - \frac{\varepsilon^2 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta) \right) + 0(\varepsilon^3) \quad (3.61)$$

şeklinde elde edilir.

3.4 Sönümlü, Zorlanmış, Linear Olmayan Titreşim Probleminin Katlı Ölçek Yöntemi İle Çözümü

Yönetici denklemimiz aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2 T_s}{dt^2} + w_s^2 T_s = -\varepsilon \frac{c}{\rho A} \frac{dT_s}{dt} + \varepsilon \frac{3}{2} \frac{E}{\rho C L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \varepsilon \frac{P \bar{V}_s(\zeta)}{\rho A C L} \cos \Omega t \quad (3.62)$$

$$w_s^2 = \left(\frac{kL^4 + EI\gamma_s^4}{\rho A L^4} \right) \text{ idi. } C=1, \quad 2\mu\varepsilon = \frac{c}{\rho A}, \quad \varepsilon r_0 = \frac{3}{2} \frac{E}{\rho L^2}, \quad \varepsilon u_s = \frac{P \bar{V}_s(\zeta)}{\rho A L} \text{ dersek;}$$

$$\frac{d^2 T_s}{dt^2} + w_s^2 T_s = -2\mu\varepsilon \frac{dT_s}{dt} + \varepsilon r_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \varepsilon u_s \cos \Omega t \quad (3.63)$$

Yönetici denklem son halini alır. Katlı ölçek yöntemine göre;

$$\frac{dT_s}{dt} = D_0 T_s + \varepsilon D_1 T_s + \varepsilon^2 D_2 T_s + \dots \quad (3.64)$$

$$\frac{d^2 T_s}{dt^2} = D_0^2 T_s + 2\varepsilon D_0 D_1 T_s + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) T_s + \dots \quad (3.65)$$

$$T_s = T_{s0} + \varepsilon T_{s1} + \varepsilon^2 T_{s2} + \dots \quad (3.66)$$

yerlerine koyup tekrar düzenlersek;

$$\begin{aligned}
& D_0^2 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) + 2\varepsilon D_0 D_1 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) + \\
& \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) + w_s^2 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) = \\
& -2\mu\varepsilon \left[D_0 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) + \varepsilon D_1 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) + \varepsilon^2 D_2 (T_{s_0} + \varepsilon T_{s_1} + \varepsilon^2 T_{s_2}) \right] \quad (3.67) \\
& \varepsilon r_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \varepsilon \frac{u_s}{2} (e^{i\Omega T_0} + K.E.)
\end{aligned}$$

elde edilir. ε^0 , ε^1 , ε^2 ortak parantezlerine alınırsa;

$$\begin{aligned}
& (D_0^2 T_{s_0} + w_s^2 T_{s_0}) + \varepsilon (D_0^2 T_{s_1} + 2D_0 D_1 T_{s_0} + w_s^2 T_{s_1}) + \\
& \varepsilon^2 (D_0^2 T_{s_2} + 2D_0 D_1 T_{s_1} + D_1^2 T_{s_0} + 2D_0 D_2 T_{s_0} + w_s^2 T_{s_2}) = \\
& \varepsilon \left[-2\mu D_0 T_{s_0} + r_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r + \frac{1}{2} u_s (e^{i\Omega T_0} + K.E.) \right] + \varepsilon^2 (-2\mu D_0 T_{s_1} - 2\mu D_1 T_{s_0}) \quad (3.68)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} T_m T_n T_r$ kısmını incelersek;

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{mnr} (T_{m_0} + \varepsilon T_{m_1}) (T_{n_0} + \varepsilon T_{n_1}) (T_{r_0} + \varepsilon T_{r_1}) \quad (3.69)$$

olur ve burada ε^0 , ε^1 , ε^2 ortak parantezlerine alınırsa;

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_{mnr} T_{m_0} T_{n_0} T_{r_0} + \varepsilon (\dots) + \varepsilon^2 (\dots) \right\} \quad (3.70)$$

ε ve ε^2 'li terimler ihmal edilir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{r=1}^2 \Gamma_{mnr} T_{m_0} T_{n_0} T_{r_0} = \Gamma_{111s} T_{10}^3 + (\Gamma_{211s} + \Gamma_{121s} + \Gamma_{112s}) T_{20} T_{10}^2 + \\
& \Gamma_{222s} T_{20}^3 + (\Gamma_{221s} + \Gamma_{212s} + \Gamma_{122s}) T_{20}^2 T_{10} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Buna göre yönetici denklemini tekrar düzenlersek;

$$\begin{aligned}
& (D_0^2 T_{s0} + w_s^2 T_{s0}) + \varepsilon (D_0^2 T_{s1} + 2D_0 D_1 T_{s0} + w_s^2 T_{s1}) + \\
& \varepsilon^2 (D_0^2 T_{s2} + 2D_0 D_1 T_{s1} + D_1^2 T_{s0} + 2D_0 D_2 T_{s0} + w_s^2 T_{s2}) = \\
& \varepsilon \left[-2\mu D_0 T_{s0} + r_0 \left(\Gamma_{111s} T_{10}^3 + (\Gamma_{211s} + \Gamma_{121s} + \Gamma_{112s}) T_{20} T_{10}^2 + \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} u_s (e^{i\Omega T_0} + K.E.) \right] + \\
& \varepsilon^2 (-2\mu D_0 T_{s1} - 2\mu D_1 T_{s0})
\end{aligned} \tag{3.72}$$

eşitliği elde edilir.

$$\varepsilon^0 \Rightarrow D_0^2 T_{s0} + w_s^2 T_{s0} = 0 \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 \Rightarrow D_0^2 T_{s1} + w_s^2 T_{s1} = & -2D_0 D_1 T_{s0} - 2\mu D_0 T_{s0} + \\
r_0 \left[\Gamma_{111s} T_{10}^3 + (\Gamma_{211s} + \Gamma_{121s} + \Gamma_{112s}) T_{20} T_{10}^2 + \right. & \\
\left. \Gamma_{222s} T_{20}^3 + (\Gamma_{221s} + \Gamma_{212s} + \Gamma_{122s}) T_{20}^2 T_{10} \right] + & \frac{1}{2} u_0 (e^{i\Omega T_0} + K.E.)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\varepsilon^2 \Rightarrow D_0^2 T_{s2} + w_s^2 T_{s2} = -2\mu D_0 T_{s1} - 2\mu D_1 T_{s0} - 2D_0 D_1 T_{s1} - D_1^2 T_{s0} - 2D_0 D_2 T_{s0} \tag{3.75}$$

3.4.1 Rezonanstan uzak bölgede çözüm

Bu durumda $\Omega \neq w_s$ olarak kabul edilmiştir. (3.73) eşitliğinin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$D_0^2 T_{s0} + w_s^2 T_{s0} = 0 \tag{3.76}$$

$$T_{s0} = A_{s1} (T_1) e^{iw_s T_0} + K.E. \tag{3.77}$$

$$s = 1 \Rightarrow T_{10} = A_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E. \tag{3.78}$$

$$s = 2 \Rightarrow T_{20} = A_{21} e^{iw_2 T_0} + K.E. \tag{3.79}$$

(3.74) eşitliğinin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$D_0^2 T_{s1} + w_s^2 T_{s1} = -2D_0 D_1 T_{s0} - 2\mu D_0 T_{s0} + r_0 \left[\begin{array}{l} \Gamma_{111s} T_{10}^3 + (\Gamma_{211s} + \Gamma_{121s} + \Gamma_{112s}) T_{20} T_{10}^2 + \\ \Gamma_{222s} T_{20}^3 + (\Gamma_{221s} + \Gamma_{212s} + \Gamma_{122s}) T_{20}^2 T_{10} \end{array} \right] + \frac{1}{2} u_s (e^{i\Omega T_0} + K.E.) \quad (3.80)$$

$$a_1 = (\Gamma_{211s} + \Gamma_{121s} + \Gamma_{112s}) \quad \text{dersek;} \\ b_1 = (\Gamma_{221s} + \Gamma_{212s} + \Gamma_{122s})$$

$s=1$ için;

$$D_0^2 T_{11} + w_1^2 T_{11} = -2iw_1 \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} e^{iw_1 T_0} + K.E. \right) - 2\mu (iw_1 A_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E.) + r_0 (\Gamma_{1111} T_{10}^3 + a_1 T_{20} T_{10}^2 + \Gamma_{2221} T_{20}^3 + b_1 T_{20}^2 T_{10}) + \frac{1}{2} u_1 (e^{i\Omega T_0} + K.E.) \quad (3.81)$$

Bu ifadede periyodikliği bozan seküler terim sıfıra eşitlenir ise;

$$-2iw_1 \frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} - 2\mu iw_1 A_{11} + 3r_0 \Gamma_{1111} A_{11}^2 \bar{A}_{11} + 2b_1 A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} = 0 \quad (3.82)$$

olur. Bu durumda gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} = -\mu A_{11} + \frac{3}{2} \frac{r_0}{iw_1} \Gamma_{1111} A_{11}^2 \bar{A}_{11} + \frac{b_1}{iw_1} A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} \quad (3.83)$$

A_{11} 'in T_1 'e göre türevi elde edilir.

$$A_{11}(T_1) = \frac{1}{2} a_{11}(T_1) e^{i\beta_1(T_1)} \Rightarrow \frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} = \frac{1}{2} a'_{11} e^{i\beta_1(T_1)} + \frac{1}{2} a_{11} i\beta'_1 e^{i\beta_1(T_1)} \quad (3.84)$$

$$A_{21}(T_1) = \frac{1}{2} a_{21}(T_1) e^{i\beta_2(T_1)} \Rightarrow \frac{\partial A_{21}}{\partial T_1} = \frac{1}{2} a'_{21} e^{i\beta_2(T_1)} + \frac{1}{2} a_{21} i\beta'_2 e^{i\beta_2(T_1)}$$

(3.84) eşitliği (3.83)'de yerine yazılırsa;

$$a'_{11} + a_{11} i\beta'_1 = -\mu a_{11} - i \frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 - i \frac{b_1 r_0}{4w_1} a_{11} a_{21}^2 \quad (3.85)$$

denkelmi elde edillir. Bu denklemden eşitliğin her iki tarafındaki gerçel kökler birbirine eşitlenirse;

$$a_{11}' = -\mu a_{11} \quad (3.86)$$

çözümüne ulaşılır. Duraklı titreşim halinde $T_1 \rightarrow \infty$ $a_{11} = 0 \Rightarrow A_{11} = 0 \Rightarrow T_{10} = 0$ olur. Aynı şeyler $s = 2$ içinde geçerlidir. Bu durumda denklem;

$$D_0^2 T_{11} + w_1^2 T_{11} = \frac{1}{2} u_1 (e^{i\Omega T_0} + K.E.) \quad (3.87)$$

şeklini alır. Bu denklemden T_{11} 'in çözümü aşağıdaki gibidir. Sadece zorlamann etkisi vardır.

$$T_{11} = \frac{u_1}{w_1^2 - \Omega^2} e^{iw_1 T_0} + K.E. \quad (3.88)$$

Burada zayıf nonlineerlik etkisi altında rezonanstan uzak bölgelerde çözüm lineer teori ile üst üste düşer.

3.4.2 Rezonans bölgesinde çözüm

Bu durumda $\Omega \cong w_1 + \varepsilon \sigma_1$ olarak kabul edilmiştir. Burada σ_1 frekans kayması olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda sıfırıncı mertebedeki denklem (3.73)'deki gibi olup çözüm (3.78)'de verilmiştir. Birinci mertebeden denklem ise aşağıdaki gibidir.

$$D_0^2 T_{11} + w_1^2 T_{11} = -2iw_1 \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} e^{iw_1 T_0} + K.E. \right) - 2\mu (iw_1 A_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E.) +$$

$$r_0 \left[\begin{aligned} & \Gamma_{1111} (A_{11}^3 e^{3iw_1 T_0} + 3A_{11}^2 \bar{A}_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E.) \\ & + a_1 \left(A_{11}^2 A_{21} e^{i(2w_1 + w_2) T_0} + 2A_{11} \bar{A}_{11} A_{21} e^{iw_2 T_0} + \bar{A}_{11}^2 A_{21} e^{i(-2w_1 + w_2) T_0} + K.E. \right) \\ & + \Gamma_{2221} (A_{21}^3 e^{3iw_2 T_0} + 3A_{21}^2 \bar{A}_{21} e^{iw_2 T_0} + K.E.) \\ & + b_1 \left(A_{21}^2 A_{11} e^{i(2w_2 + w_1) T_0} + A_{21}^2 \bar{A}_{11} e^{i(2w_2 - w_1) T_0} + 2A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E. \right) \end{aligned} \right] +$$

$$\frac{1}{2} u_1 (e^{i(w_1 + \varepsilon \sigma_1) T_0} + K.E.) \quad (3.89)$$

Bu ifade de periyodikliği bozan seküler terim sıfıra eşitlenir ise;

$$-2iw_1 \frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} - 2\mu iw_1 A_{11} + 3r_0 \Gamma_{1111} A_{11}^2 \bar{A}_{11} + 2b_1 A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} + \frac{u_1}{2} e^{i\sigma_1 T_1} = 0 \quad (3.90)$$

eşitliğine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} = -\mu A_{11} + \frac{3}{2} \frac{r_0}{iw_1} \Gamma_{1111} A_{11}^2 \bar{A}_{11} + \frac{b_1}{iw_1} A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} + \frac{u_1}{4iw_1} e^{i\sigma_1 T_1} \quad (3.91)$$

A_{11} 'in T_1 'e göre türevi elde edilir.

$$A_{11}(T_1) = \frac{1}{2} a_{11}(T_1) e^{i\beta_1(T_1)} \Rightarrow \frac{\partial A_{11}}{\partial T_1} = \frac{1}{2} a'_{11} e^{i\beta_1(T_1)} + \frac{1}{2} a_{11} i \beta'_1 e^{i\beta_1(T_1)} \quad (3.92)$$

$$A_{21}(T_1) = \frac{1}{2} a_{21}(T_1) e^{i\beta_2(T_1)} \Rightarrow \frac{\partial A_{21}}{\partial T_1} = \frac{1}{2} a'_{21} e^{i\beta_2(T_1)} + \frac{1}{2} a_{21} i \beta'_2 e^{i\beta_2(T_1)}$$

(3.89) eşitliği (3.88)'de yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2} a'_{11} e^{i\beta_1} + \frac{1}{2} a_{11} i \beta'_1 e^{i\beta_1} = -\mu \frac{1}{2} a_{11} e^{i\beta_1} + \frac{3}{2} \frac{r_0}{iw_1} \Gamma_{1111} \frac{1}{8} a_{11}^3 e^{i\beta_1} + \frac{b_1 r_0}{iw_1} \frac{1}{8} a_{21}^2 a_{11} e^{i\beta_1} + \frac{u_1}{4iw_1} e^{i\sigma_1 T_1} \quad (3.93)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını da 2 ile çarpıp, $e^{i\beta_1}$ ile bölersek;

$$a'_{11} + a_{11} i \beta'_1 = -\mu a_{11} - i \frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 - i \frac{b_1 r_0}{4w_1} a_{11} a_{21}^2 - \frac{u_1}{2w_1} [i \cos(\sigma_1 T_1 - \beta_1) - \sin(\sigma_1 T_1 - \beta_1)] \quad (3.94)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde eşitliğin her iki tarafındaki gerçel ve sanal kökler birbirine eşitlenirse;

$$1- a'_{11} = -\mu a_{11} + \frac{u_1}{2w_1} \sin(\sigma_1 T_1 - \beta_1) \quad (3.95)$$

$$2- a_{11} \beta'_1 = -\frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 - \frac{b_1 r_0}{4w_1} a_{11} a_{21}^2 - \frac{u_1}{2w_1} \cos(\sigma_1 T_1 - \beta_1) \quad (3.96)$$

şeklinde iki adet eşitlik elde edilir.

Aynı işlemler s=2 içinde yapılırsa;

$s=2$ için;

$$\begin{aligned}
D_0^2 T_{21} + w_2^2 T_{21} = & -2iw_1 \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial T_1} e^{iw_2 T_0} + K.E. \right) - 2\mu \left(iw_2 A_{21} e^{iw_2 T_0} + K.E. \right) + \\
& r_0 \left[\begin{aligned}
& \Gamma_{1112} \left(A_{11}^3 e^{3iw_1 T_0} + 3A_{11}^2 \bar{A}_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E. \right) \\
& + a_2 \left(A_{11}^2 A_{21} e^{i(2w_1+w_2)T_0} + 2A_{11} \bar{A}_{11} A_{21} e^{iw_2 T_0} + \bar{A}_{11}^2 A_{21} e^{i(-2w_1+w_2)T_0} + K.E. \right) \\
& + \Gamma_{2222} \left(A_{21}^3 e^{3iw_2 T_0} + 3A_{21}^2 \bar{A}_{21} e^{iw_2 T_0} + K.E. \right) \\
& + b_2 \left(A_{21}^2 A_{11} e^{i(2w_2+w_1)T_0} + A_{21}^2 \bar{A}_{11} e^{i(2w_2-w_1)T_0} + 2A_{21} \bar{A}_{21} A_{11} e^{iw_1 T_0} + K.E. \right)
\end{aligned} \right] \\
& + \frac{1}{2} u_2 \left(e^{i(w_1+\varepsilon\sigma_1)T_0} + K.E. \right)
\end{aligned} \tag{3.97}$$

elde edilir. Bu ifade de periyodikliği bozan seküler terim sıfıra eşitlenip, A_{11} 'in T_1 'e göre türevi yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial T_1} = -\mu A_{21} + \frac{a_2 r_0}{iw_2} A_{11} \bar{A}_{11} A_{21} + \frac{3}{2} \frac{r_0 \Gamma_{2222}}{iw_2} A_{21}^2 \bar{A}_{21} \tag{3.98}$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.24) değerler yerlerine yazılırsa;

$$a'_{21} + a_{21} i \beta'_2 = -\mu a_{21} - i \frac{1}{4} \frac{a_2 r_0}{w_2} a_{11}^2 a_{21} - i \frac{3}{8} \frac{r_0 \Gamma_{2222}}{w_2} a_{21}^3 \tag{3.99}$$

denkelmi elde edilir. Bu eşitlikte eşitliğin her iki tarafındaki gerçel ve sanal kökler birbirine eşitlenirse iki adet denklem de buradan elde edilir.

$$3- a'_{21} = -\mu a_{21} \quad T_1 \rightarrow \infty \Rightarrow a_{21} = 0 \tag{3.100}$$

$$4- a_{21} \beta'_2 = -\frac{1}{4} \frac{a_2 r_0}{w_2} a_{11}^2 a_{21} - \frac{3}{8} \frac{r_0 \Gamma_{2222}}{w_2} a_{21}^3 \tag{3.101}$$

(3.97) eşitliğinden $a_{21} = 0$ elde edilir.

$$\sigma_1 T_1 - \beta_1 = \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 = \sigma_1 T_1 - \gamma_1 \Rightarrow \beta'_1 = \sigma_1 - \gamma'_1 \text{ dersek;}$$

Diğer eşitliklerde bunlar yerine yazılırsa;

$$1- a'_{11} = -\mu a_{11} + \frac{u_1}{2w_1} \sin \gamma_1 \tag{3.102}$$

$$2- a_{11}(\sigma_1 - \gamma_1') = -\frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 - \frac{u_1}{2w_1} \cos(\sigma_1 T_1 - \beta_1) \quad (3.103)$$

eşitlikleri elde edilir.

$T_1 \rightarrow \infty$ $a_{11}' = 0$ $\gamma_1' = 0$ $\beta_1' = \sigma_1$ olduğu için eşitlikler yeniden düzenlenirse;

$$1- \mu a_{11} = \frac{u_1}{2w_1} \sin \gamma_1 \quad (3.104)$$

$$2- a_{11} \sigma_1 + \frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 = -\frac{u_1}{2w_1} \cos \gamma_1 \quad (3.105)$$

elde edilir ve bu iki eşitliğin karelerini alınıp alt alta toplanırsa;

$$(\mu a_{11})^2 + \left(a_{11} \sigma_1 + \frac{3}{8} \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} a_{11}^3 \right)^2 = \left(\frac{u_1}{2w_1} \right)^2 \quad (3.106)$$

eşitliği sağlanır. Bu altıncı dereceden denklemi çözüm kolaylığı için üçüncü dereceden yaparsak;

$a_{11}^2 = X_{11}$ dersek;

$$X_{11} \mu^2 + X_{11} \sigma_1^2 + \frac{3}{4} \sigma_1 \frac{r_0}{w_1} \Gamma_{1111} X_{11}^2 + \frac{9}{64} \frac{r_0^2}{w_1^2} \Gamma_{1111}^2 X_{11}^3 = \left(\frac{u_1}{2w_1} \right)^2 \quad (3.107)$$

olur.

4. SAYISAL SONUÇLAR

4.1. Sayısal Değerler

Bu bölümde 2. ve 3. bölümde yönetici denklemlerden elde edilen elastik eğri fonksiyonlarının, sınır koşullarından yararlanılarak çözümü yapılmış ve çeşitli parametrelere göre elde edilen sonuçlar grafiklerle verilmiştir. Sayısal uygulamada 2. bölüm için tekil kuvvetin yeri 2,5m ve 5m seçilerek değişik karşılaştırmalar yapılmıştır. 3. bölümde de μ sönüm oranının değeri üç farklı şekilde seçilip elastik eğri fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

Problemin tanımı ve çözümü için gerekli olan parametreler; E kiriş elastisite modülü, L kiriş boyu, I kiriş atalet momenti, P tekil yük, k zemin yatak katsayısı, A kiriş kesit alanı ve ρ kütle yoğunluğudur. Bunların sayısal değerler aşağıdaki gibidir.

$$L = 10 \text{ m}, P = 10^6 \text{ N}, E = 3.10^{10} \text{ N/m}^2, k = 10^8 \text{ N/m}^3, I = 0,1927 \text{ m}^4, A = 1 \text{ m}^2$$

$$\rho = 25000 \text{ N/m}^3$$

4.2 Sonuçlar

4.2.1 Statik Yükleme Hali

Yukarıdaki sayısal değerlerden sonra λ değeri hesaplanır.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{4EI}} \quad (4.1)$$

$0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arasında;

$$v_1(\xi_1) = A_1 \cosh \lambda \xi_1 \cos \lambda \xi_1 + B_1 \sinh \lambda \xi_1 \cos \lambda \xi_1 + C_1 \cosh \lambda \xi_1 \sin \lambda \xi_1 + D_1 \sinh \lambda \xi_1 \sin \lambda \xi_1 \quad (4.2)$$

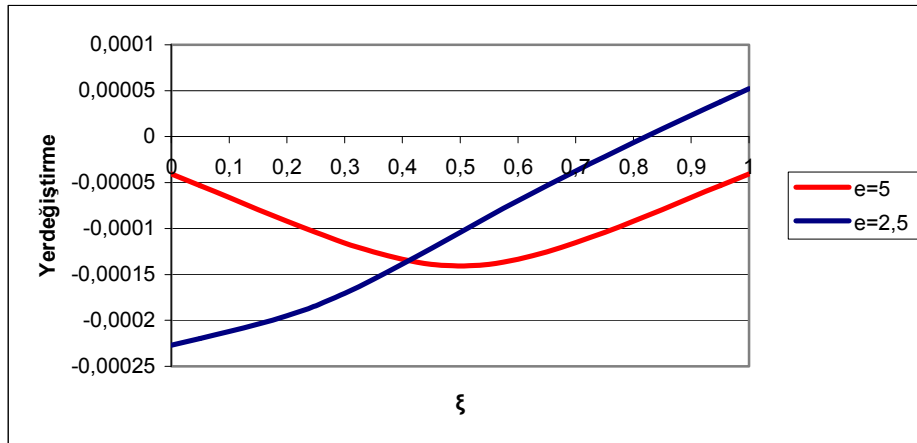
ve $e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası ise;

$$v_2(\xi_2) = A_2 \cosh \lambda \xi_2 \cos \lambda \xi_2 + B_2 \sinh \lambda \xi_2 \cos \lambda \xi_2 + C_2 \cosh \lambda \xi_2 \sin \lambda \xi_2 + D_2 \sinh \lambda \xi_2 \sin \lambda \xi_2 \quad (4.3)$$

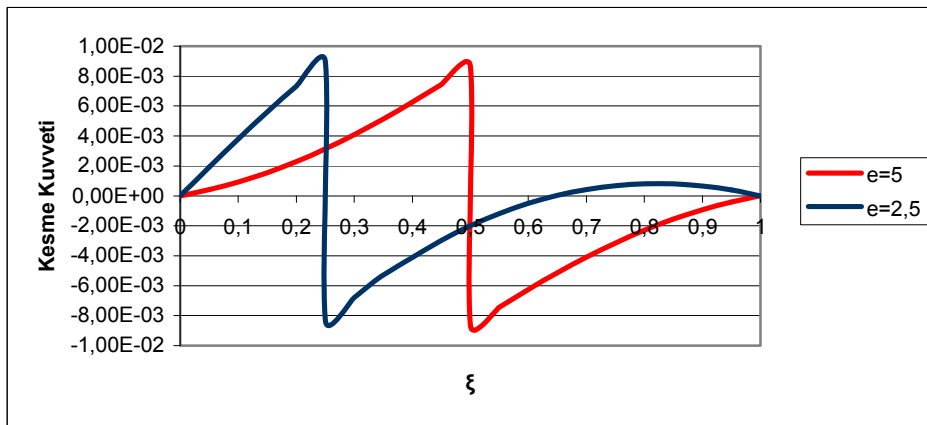
Elastik eğri fonksiyonları için $e = 2,5$ ve $e = 5m$ seçilerek ve sekiz adet sınır koşulu kullanılarak $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ diferansiyel sabitlerinin sayısal değerleri bulunup yerine yazılır. Excel programı ile grafikler çizilir.

Şekil 4.1 – 4.3 diyagramlarında tekil yükün etkime noktasına göre çökme, moment ve kesme kuvvetinin değişimi görülmektedir. Etkime noktasının kenara yaklaşması halinde çökme hemen hemen doğrusal olmaktadır.

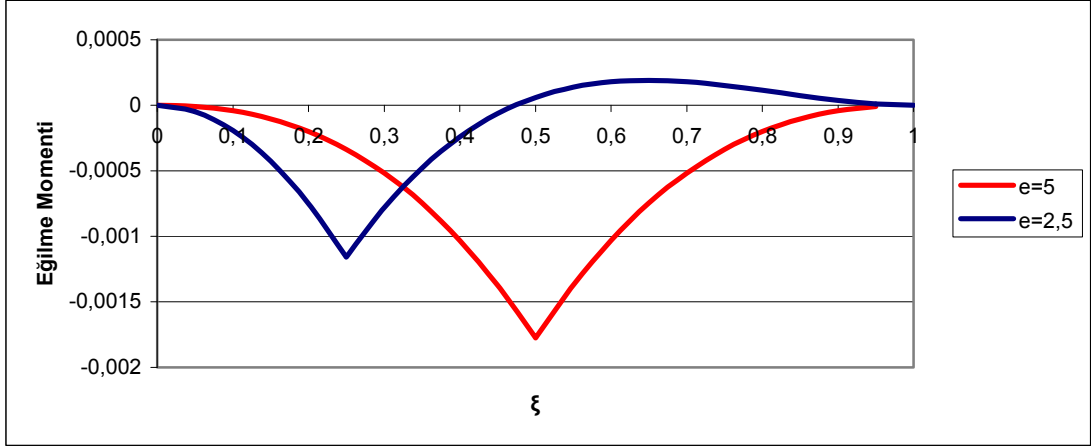
Şekil 4.4 – 4.6 diyagramlarında yatak katsayısının etkisi görülmektedir. Yatak katsayısının büyümesinin önemli olarak çökmeyi etkilediği, moment ve kesme kuvvetini daha az etkilediği görülmektedir.



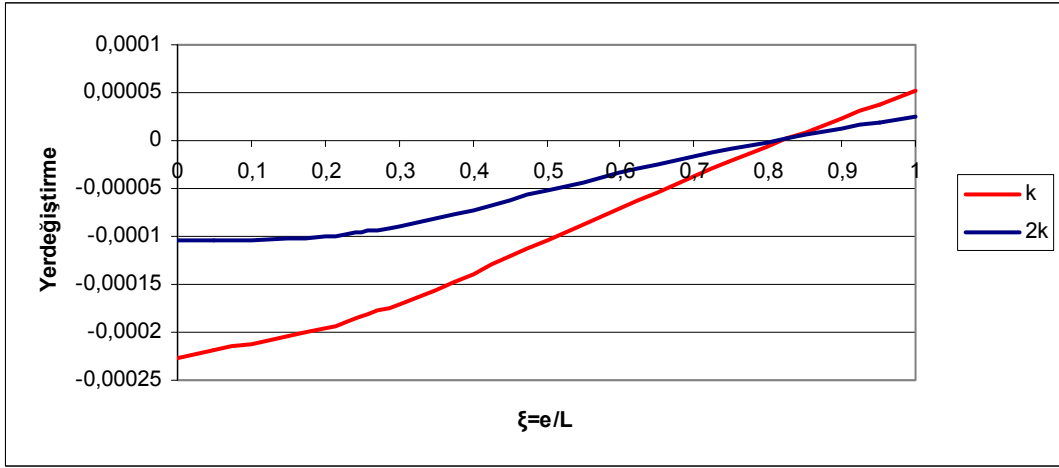
Şekil 4.1: Uygulama noktasının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği



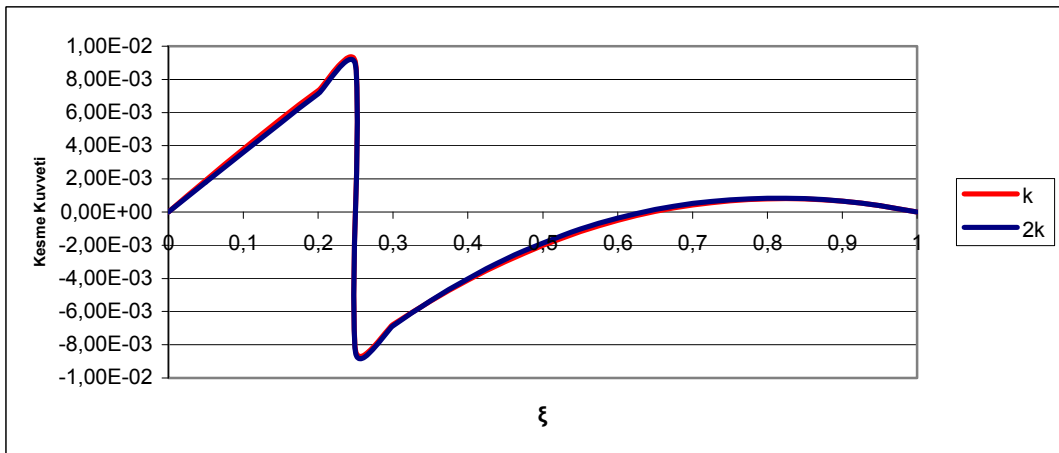
Şekil 4.2 : Uygulama noktasının değişimine göre kesme kuvveti grafiği



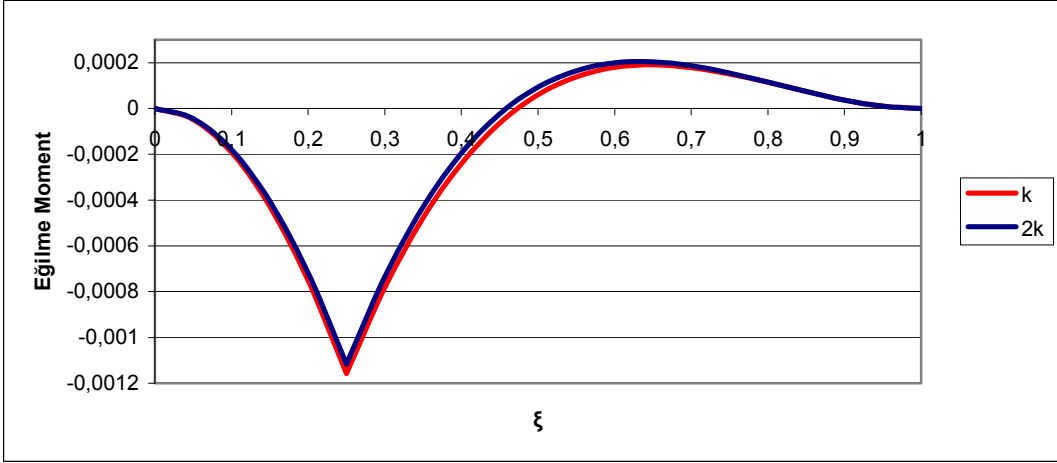
Şekil 4.3 : Uygulama noktasının değişimine göre eğilme momenti grafiği



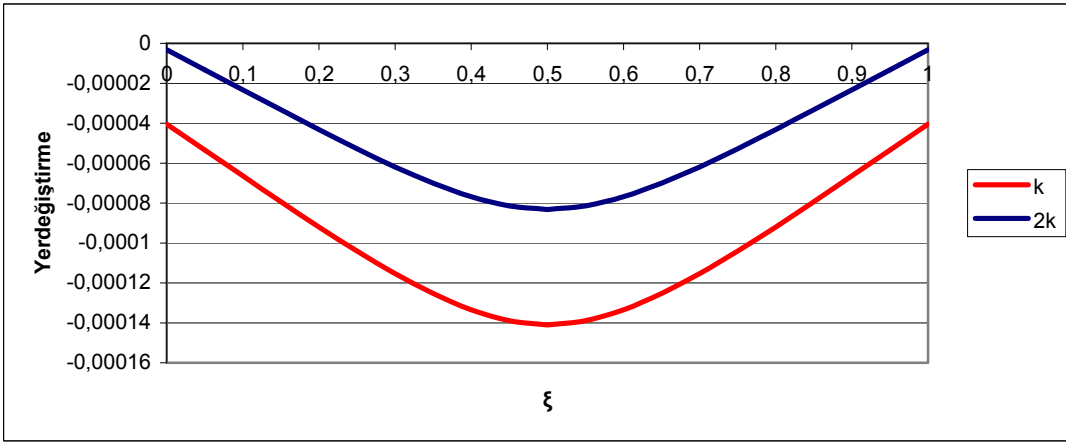
Şekil 4.4 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği



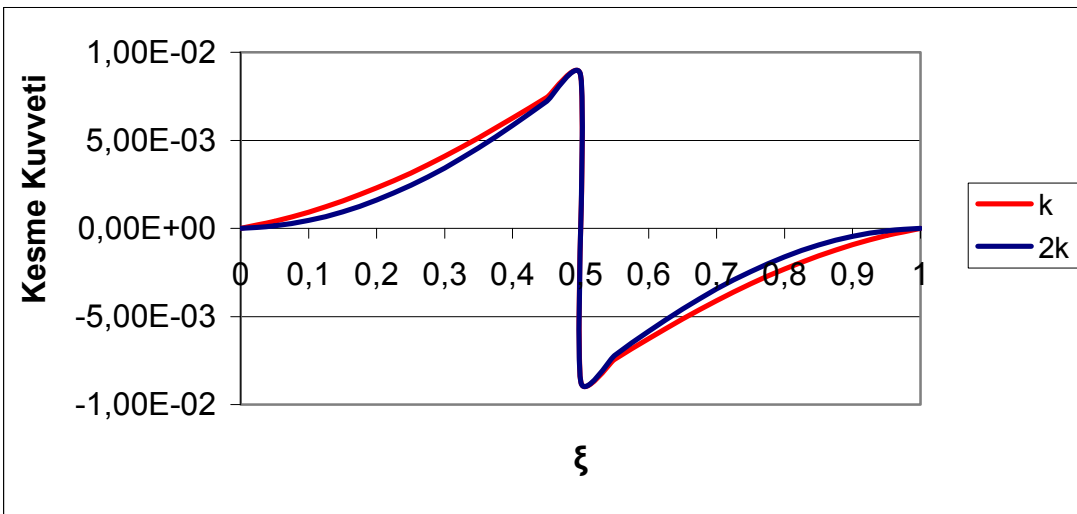
Şekil 4.5 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği



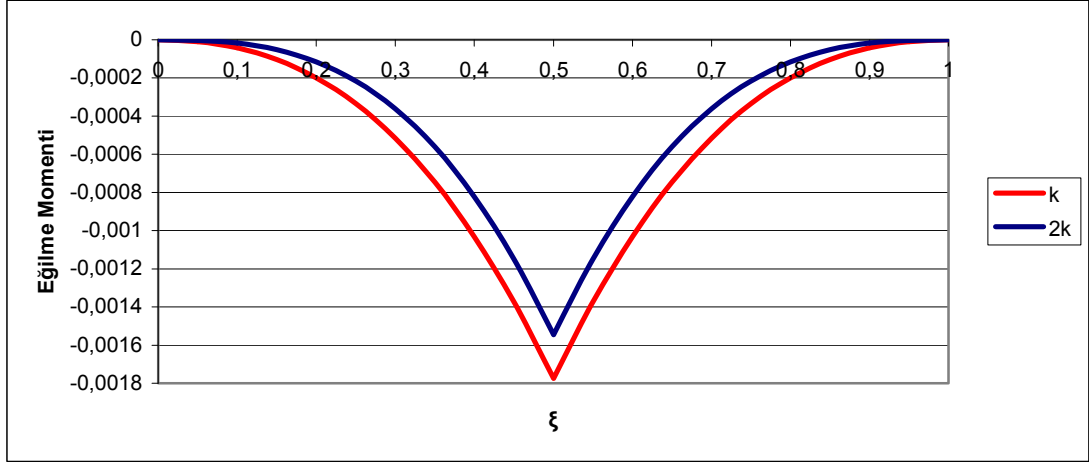
Şekil 4.6 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği



Şekil 4.7 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği



Şekil 4.8 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği



Şekil 4.9 : $e=5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği

4.2.2 Dinamik Yükleme Hali

4.2.2.1 Durum I: $\Omega = w$ olması hali (rezonans hali)

Bu kısım inceleme dışındadır.

4.2.2.2 Durum II: $\Omega > w$ olması hali

Sayısal değerlerden sonra $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{EI}}$ ve $\beta = \lambda \sqrt[4]{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)}$ değerlerini de bulduktan

sonra ;

$0 \leq \xi_1 \leq e/L$ arasında;

$$V_1(\xi_1) = A_1 \sinh \beta \xi_1 + B_1 \cosh \beta \xi_1 + C_1 \cos \beta \xi_1 + D_1 \sin \beta \xi_1 \quad (4.4)$$

ve $e/L \leq \xi_2 \leq 1$ arası ise;

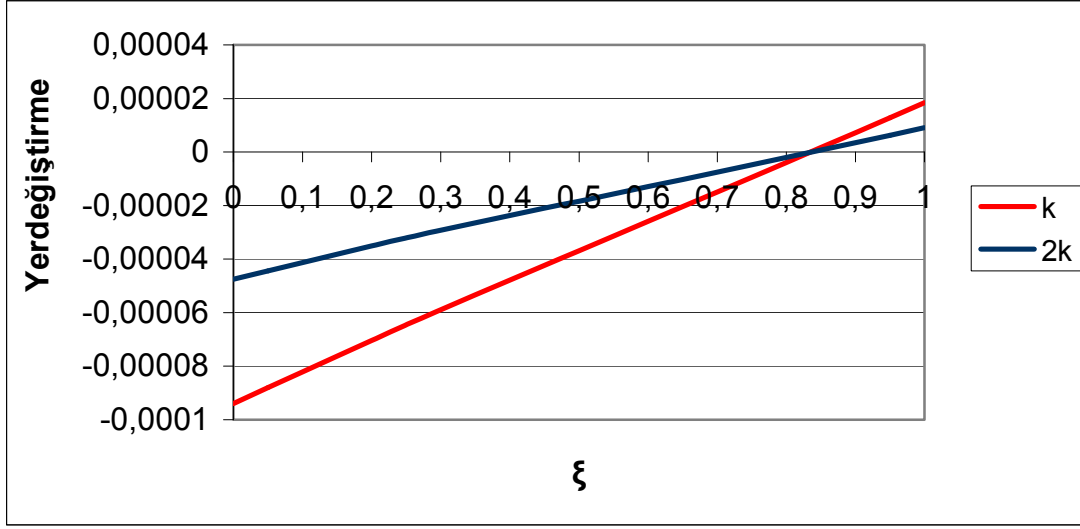
$$V_2(\xi_2) = A_2 \sinh \beta \xi_2 + B_2 \cosh \beta \xi_2 + C_2 \cos \beta \xi_2 + D_2 \sin \beta \xi_2 \quad (4.5)$$

$e=2,5$ ve $e=5m$ seçilerek ve sekiz adet sınır koşulu kullanılarak $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ diferansiyel sabitlerinin sayısal değerleri bulunup yerine yazılır. Excel programı ile grafikler çizilir.

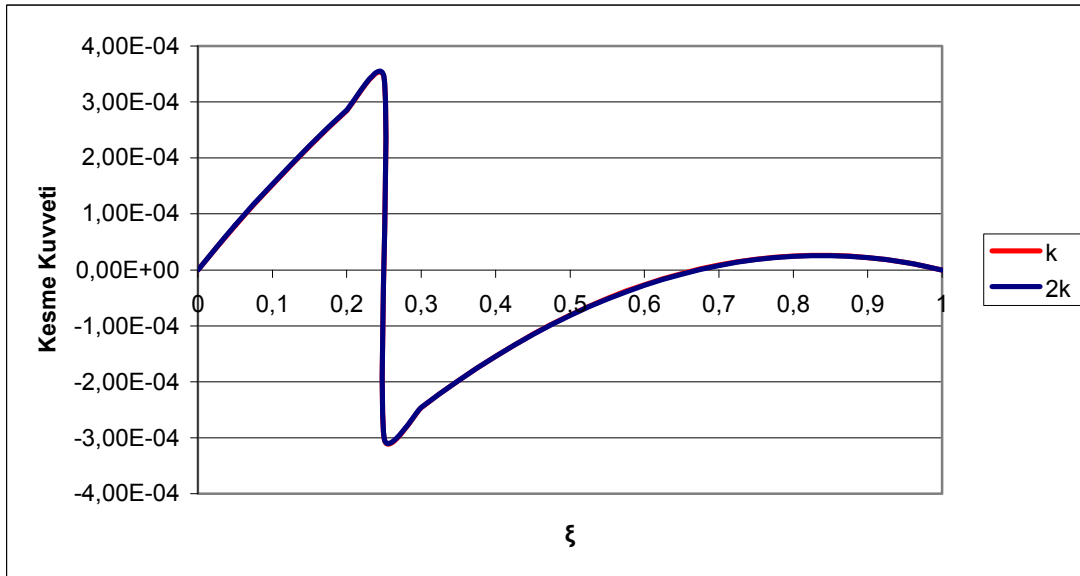
$\Omega^2 / w^2 = 1,1$ için yatak katsayısının k ve $2k$ olması hallerinde çökme, kesme kuvveti ve momentin değişimi Şek. 4.10 – 4.12 de incelenmiştir. Yatak katsayısının değişimi

ile çökmenin etkilendiği, diğer büyüklüklerin hemen hemen etkilenmediği görülmektedir.

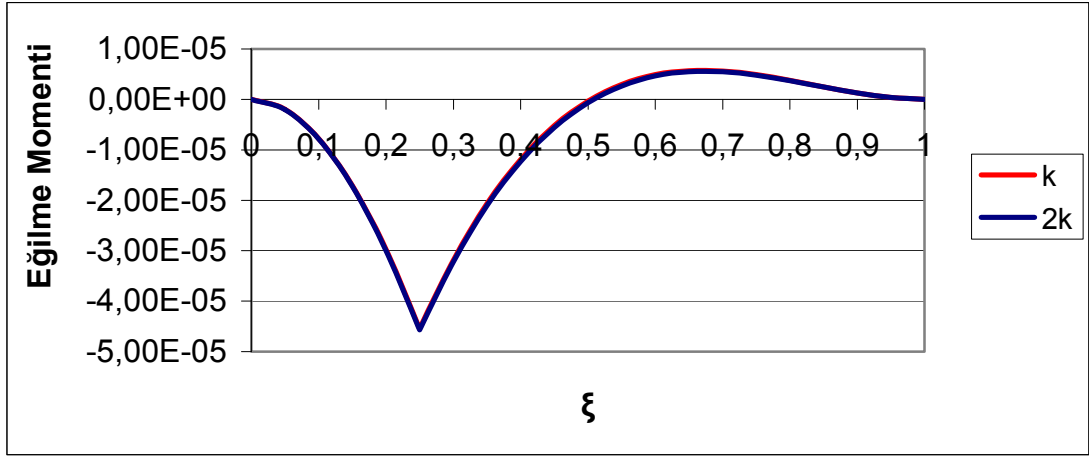
Şekil 4.13 – 4.15 de zorlama frekansının doğal frekansa göre değişimi hallerinde çökme, moment ve kesme kuvvetinin değişimi görülmektedir. Zorlama frekansının artması halinde çökmenin de arttığı görülmektedir. Kesme kuvveti ve momentin de değişimi görülmektedir.



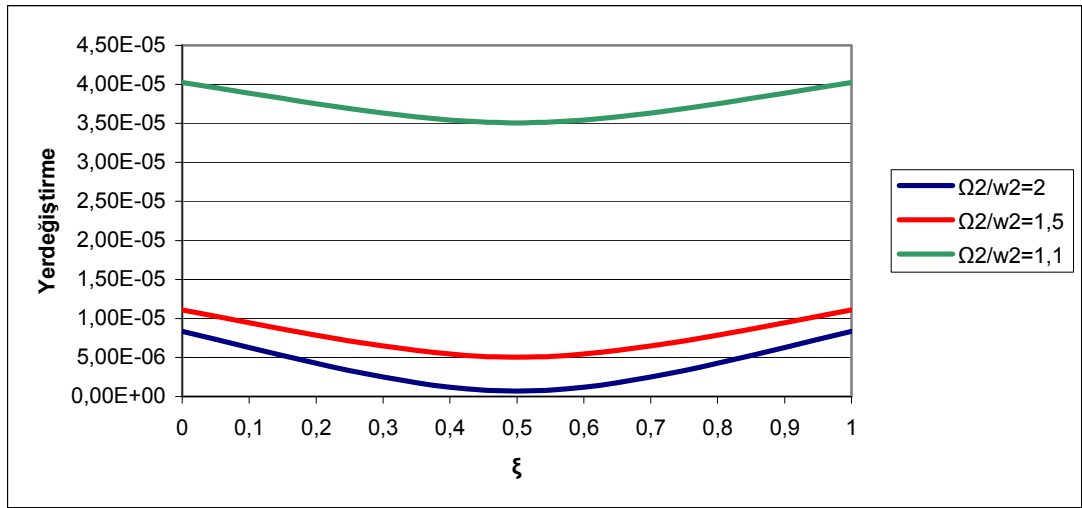
Şekil 4.10 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre yerdeğiştirme grafiği



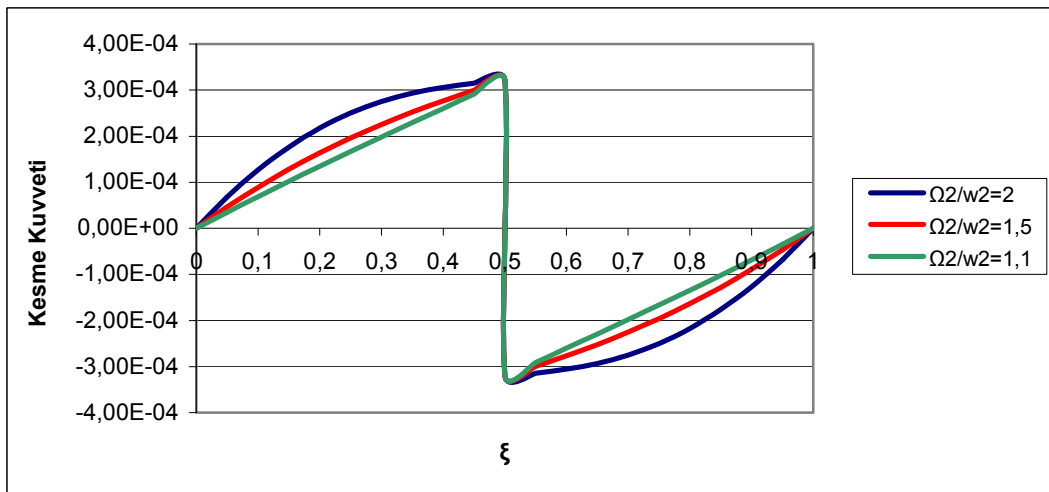
Şekil 4.11 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre kesme kuvveti grafiği



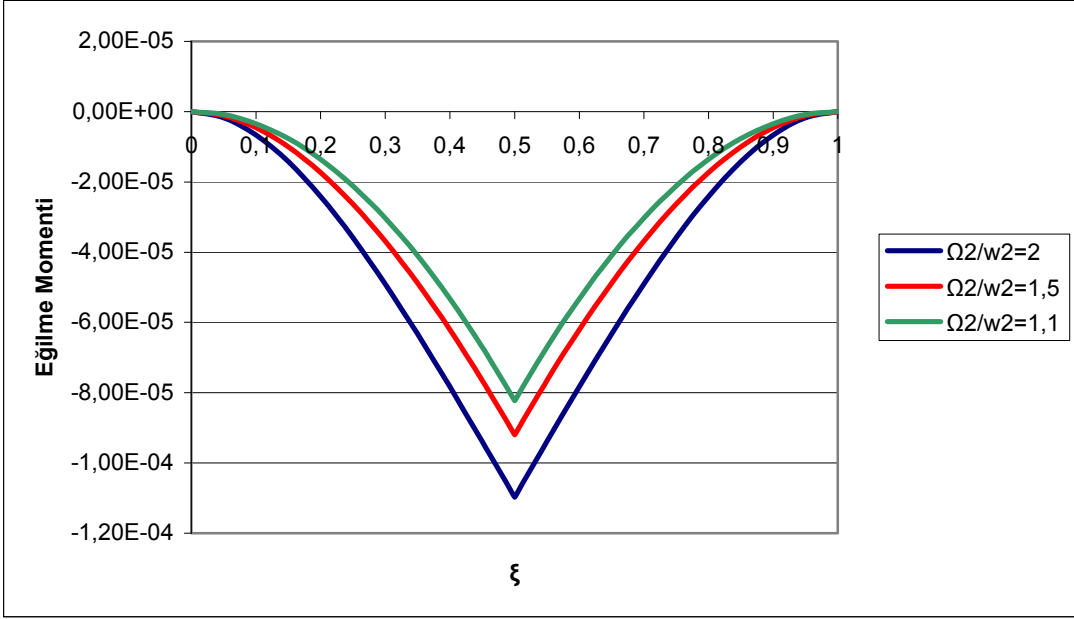
Şekil 4.12 : $e=2,5m$ 'de zemin yatak katsayısının değişimine göre eğilme momenti grafiği



Şekil 4.13 : $e=5m$ 'de Ω^2 / w^2 değişimi için yerdeğiştirme grafiği



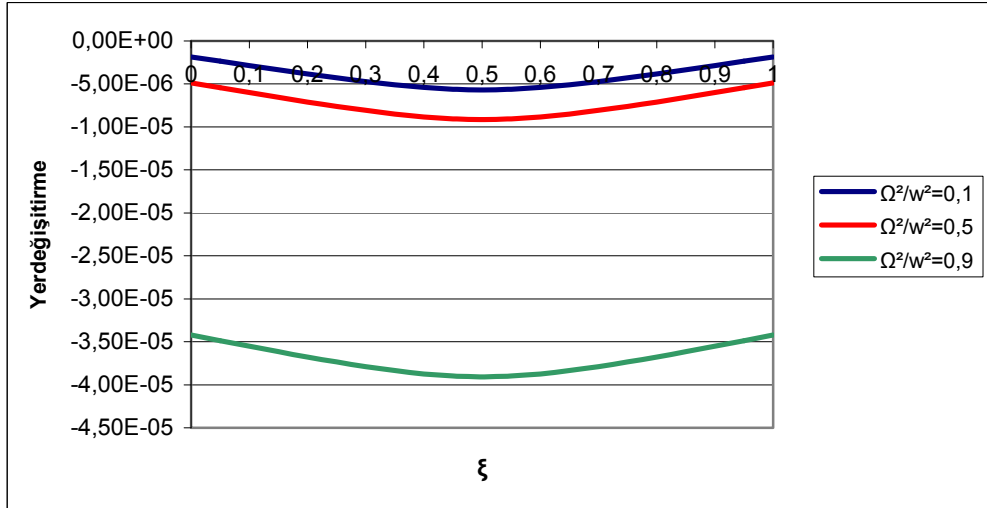
Şekil 4.14 : $e=5m$ 'de Ω^2 / w^2 değişimi için kesme kuvveti grafiği



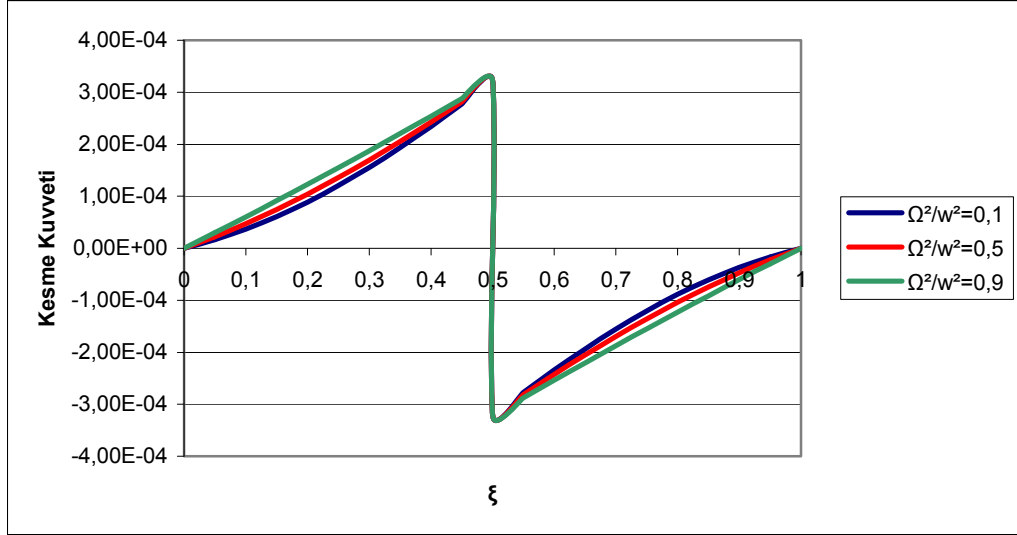
Şekil 4.15 : e=5m'de Ω^2 / w^2 değişimi için eğilme momenti grafiği

4.2.2.3 Durum III: $\Omega < w$ olması hali

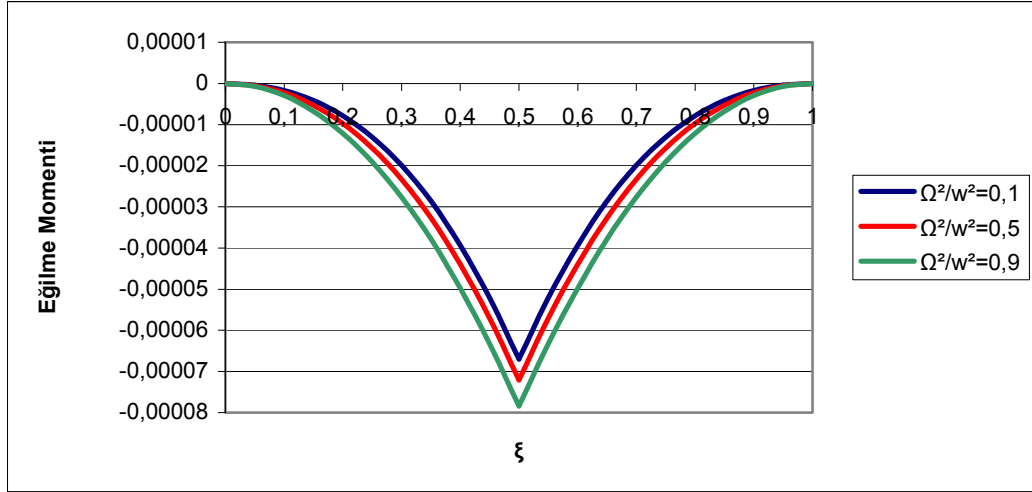
$\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right) > 0$ olur. Bu durum çözüm yöntemi olarak statik yüklü haldekinin aynısıdır.



Şekil 4.16 : e=5m'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre yerdeğiştirme grafiği



Şekil 4.17 : $e=5m$ 'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre kesme kuvveti grafiği

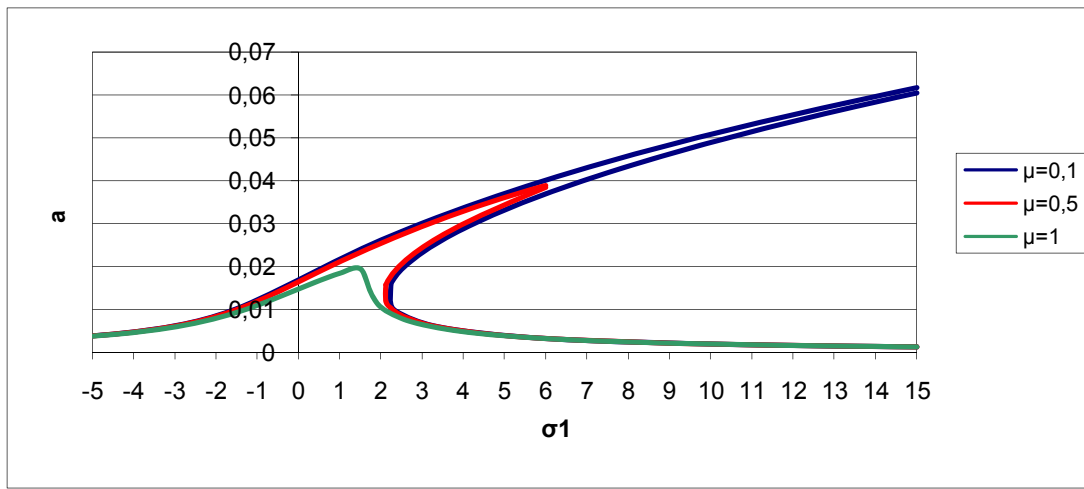


Şekil 4.18 : $e=5m$ 'de $\Omega < w$ için Ω^2 / w^2 değişimine göre eğilme momenti grafiği

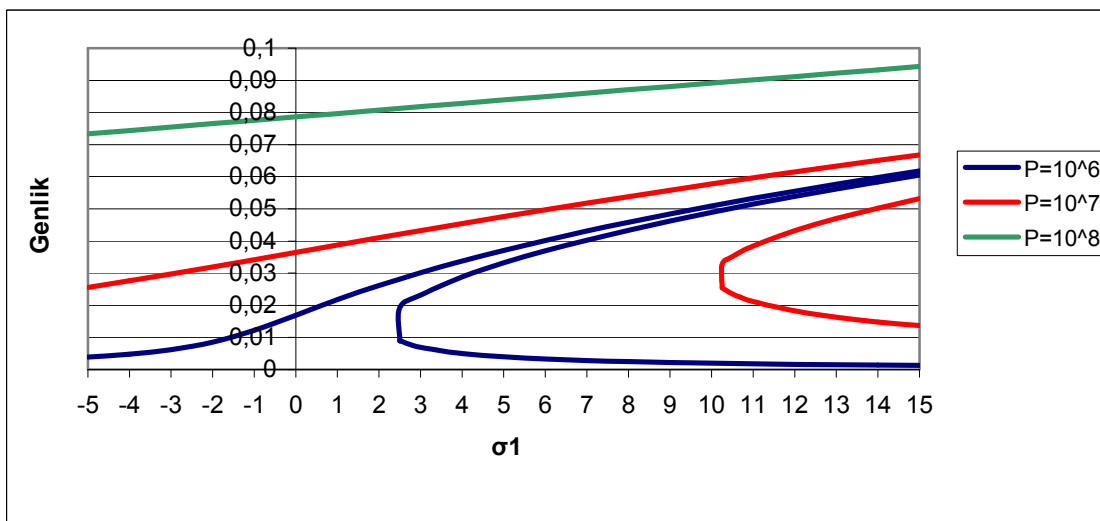
4.2.3 Sonlu Yerdeğiştirme Hali

Sonlu yerdeğiştirme halinde sadece rezonans bölgesine ait sonuçlar burada verilmiştir. İlk olarak μ sönüm katsayısı, σ_1 frekans kayması ve P zorlama genliğinin çeşitli değerleri için (3.104) denkleminin kökleri elde edilmiştir. Katsayıların değerlerine göre bir veya üç gerçel kök elde edilmiştir. Buna göre sonlu yerdeğiştirme hali için birden fazla çözüm elde edilebilmektedir. Şekil 4.19'de çeşitli sönüm katsayılarına göre (3.104) denkleminin köklerinin σ_1 ile değişimi verilmiştir. örneğin $\mu=0.1$ halinde $\sigma_1 \leq 2$ için tek çözüm elde edilirken $\sigma_1 > 2$ için üç çözüm elde edilmektedir. $\mu=0.5$ halinde ise $\sigma_1 \leq 2$ ve $\sigma_1 > 6$ bölgelerinde tek çözüm elde

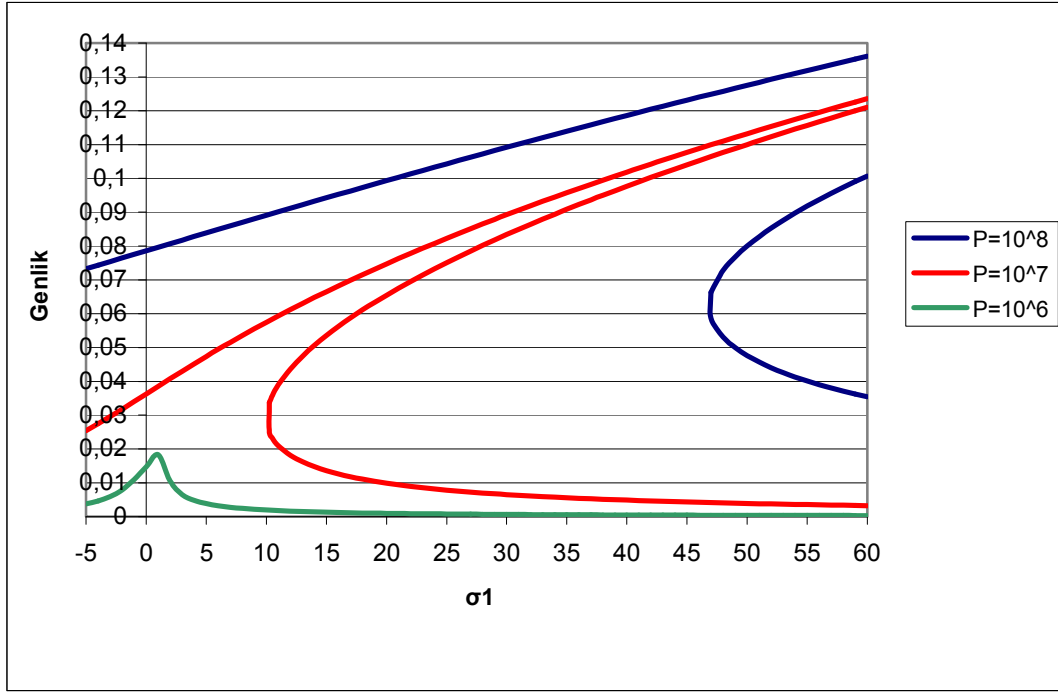
edilirken $2 < \sigma_1 < 6$ bölgesinde üç çözüm elde edilmektedir. $\mu=1$ halinde ise Şekil 4.19'da da görüldüğü gibi tek çözüm elde edilmektedir. Buna göre sönüm katsayısı büyüdükçe nonlineerliğin etkisi azalmaktadır. Çok çözüm halinde ortadaki çözüm dalı kararsız çözümlere karşı gelmektedir. Yani bu çözümün deneysel yoldan inceleme imkanı yoktur. Şekil 4.20'de zorlama genliğinin değişimine göre çözüm verilmiştir. Zorlamanın genlik üzerindeki etkisi grafiklerde açık olarak görülmektedir. Şekil 4.22'de sonlu yerdeğiştirme halinde katlı ölçek yöntemine göre hesaplanan genlikler kullanılarak $\sigma_1 = 6$ için elde edilen üç farklı çözüme ait elastik eğriler verilmiştir. $v_i = |a_i|V_1(x) \quad i = 1, 2, 3$



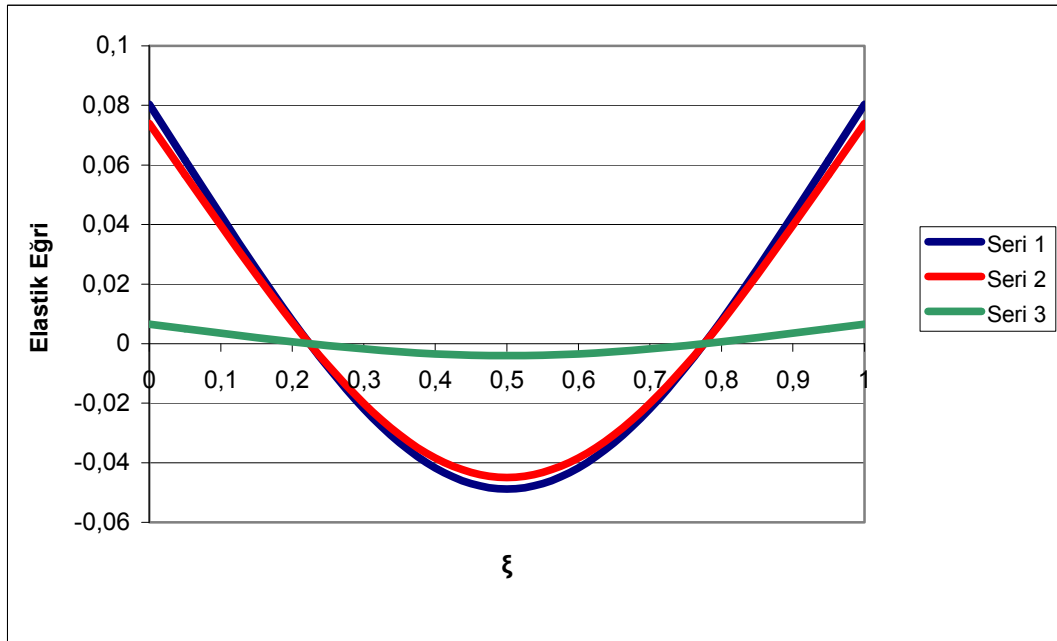
Şekil 4.19 : Sönüm katsayısının değişimine göre $P=10^6$ 'da genlik - frekans kayması eğrileri



Şekil 4.20 : Zorlama genliğinin değişimine göre $\mu=0,1$ 'de genlik - frekans kayması eğrileri



Şekil 4.21 : Zorlama genliğinin değişimine göre $\mu=1$ 'de genlik- frekans kayması eğrileri



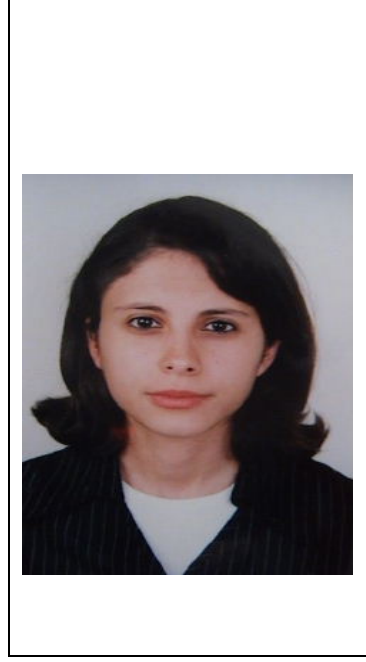
Şekil 4.22 : Sonlu yerdeğiştirme halinde üç çözüme ait elastik eğriler

KAYNAKLAR

- Bakioğlu, M. ve Özkan, T.**, 1980. Sonlu Kalınlıkta Zemin Üzerine Oturan Yüzeysel Temellerin Hesabı Hakkında Bir Yöntem, Tubitak, VII. Bil. Kong.
- Bowles, J.E.**, 1988. Foundation Analysis and Design, Mc-Graw Hill International Edition.
- Celep, Z.**, 1988. Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, J. of Eng. Mech., Vol.114, No:12, December.
- De Rosa, M.A.**, 1989. Stability and Dynamics of Beams on Winkler Foundations, Earth. Eng. Struct. Dyn. Vol. 18, pp. 377-388.
- Ding, Z.A.**, 1993. A General Solution to Vibrations of Beams on Variable Winkler Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol.47, No:1, pp. 83-90.
- Dodge, A.**, 1964. Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp. 63-101.
- Donalt, D., Ely, F.J., Sergev, S. ve Barberito, B.**, 1965. Influence Functions for Beams on Elastic Foundation, Diss. ASCE, April, pp. 187-194.
- Durelli, A.j., Parks, V.j. ve Mok, C.K.C.**, 1966. Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August pp. 1713-1725.
- Elmas, M.**, 1988. Elastoplastik Zemine Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Heteyni, M.**, 1946. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- Katsikadelis, J.T. ve Armenakas, A.E.**, 1984. Plates on Elastic Foundations by BIE Method, J. of Eng. Mech., Vol.110, No:7, July.
- Karamanlis, D. ve Prakash, V.**, 1988. Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space, Earth. Eng. Struct. Dyn. Vol. 16, pp. 1103-1114.
- Keskinel, F. ve Kumbasar, N.**, 1970. Elastik Zemine Oturan Sonlu Kiriş Tesir Çizgileri ve Sürekli Temellerin Çözümüne Uygulanması, İstanbul
- Krashennikova G.V.**, 1964. Analysis of Beams on Elastic Foundations of Finite Depth, Energiye.
- Lai, C.L., Ting, B.Y., Lee, W.S. ve Becker, B.R.**, 1992. Dynamic Response of Beams on Elastic Foundation, Journal of Struct. Eng., Vol. 118, No:3, pp. 853-858.
- Lin, L. ve Adams, G.G.**, 1987. Beam on Tensionless Elastic Foundation, J. of Eng. Mech., Vol.113, No:4, April, pp. 542-553.
- Miranda, C.K. ve Nair, K.**, 1946. Finite Beams on Elastic Foundations J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Vol.92, no.ST2, APRİL, pp. 131-142.

- Munther, J.H.**, 1970. Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussions ASCE, Vol. 96 April, pp 864-870.
- Nayfeh, A.H. ve Mook, D.T.**, 1933. Nonlinear Oscillations.
- Severn, R.T.**, 1966. The Solution of Foundation Mat. Problems by Finite Elements Methods, Struc. Eng. London, June.
- Terzaghi, K. ve Peck, R.B.**, 1984. Soil Mechanics in Engineering Practice, J. Wiley, New York.
- Ting B.V. ve Mockry, E.F.**, 1984. Beam on Elastic Foundation Finite Element, Journal of Struct. Eng., Vol. 110, No:10, pp. 2324-2339.
- Ting B.Y.**, 1982. Finite Beams on Elastic Foundation With Restraints, J. Struc. Div. Proceedings of ASCE, Vol. 108, No:st3, March, pp. 611-621.
- Vlasov, V.Z. ve Leontev, U.N.**, 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation, Jerusalem.
- Winkler, E.**, 1867. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag.
- Zhaohua, F. ve Cook, R.D.**, 1983. Beam Elements on Two-Parameter Elastics Foundations, J. of Eng. Mech., Vol.109, No:6, December.
- Zimmerman,K.**, 1942. Die Berechnung der soldruckverteilung unter Grundungskörpern, Der Bauingeneuer.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Öznur Özdemir

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1982

Adres: Üsküdar / İstanbul

Lisans Üniversitesi: Sakarya Üniversitesi