



İZOGEOMETRİK ANALİZ İLE KONSOL KİRİŞ İÇİN TİMOSHENKO'NUN KESİN ÇÖZÜMÜNÜN KULLANIMI

Ülkü BABUŞCU YEŞİL¹ ve Ayfer TEKİN ATACAN²

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği, İstanbul

²Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği, İstanbul

ABSTRACT

In this study, the problem related to bending of a cantilever subjected to end shearing forces was investigated by using various boundary conditions and types of loading. The boundary condition and type of loading of the above-mentioned problem are determined in order to obtain the exact solution given by Timoshenko. In the solution of the problem, the method of isogeometric analysis, relatively new method, has been used. The main purpose of isogeometric analysis is to combine Computer Aided Design (CAD) and Finite Elements Method (FEM) tools and join them in a single tool by using the functions, which describe the geometry, as the shape functions of the analysis, as well. The problem was also solved by using the classical finite elements method in order to compare the deflection and stress values obtained by the isogeometric analysis method. The results obtained from both methods were compared by the analytical solution. Isogeometric analysis has distinguished features for convergence and accuracy since high-order splines are assigned as the shape functions of the analysis. It is seen that the method gives results very close to the exact solution even in sparsely formed meshes.

ÖZET

Bu çalışmada, serbest ucundan etkiyen kayma kuvvetinin etkisindeki bir konsol kirişin eğilmesi problemi, çeşitli sınır koşulları ve yükleme tipleri kullanılarak incelenmiştir. Belirtilen probleme ait, Timoshenko tarafından verilen kesin çözümü elde edebilmek için gerekli olan sınır koşulu ve yükleme tipi belirlenmiştir. Problemin çözümünde, nispeten yeni bir yöntem olan izogeometrik analiz yöntemi kullanılmıştır. İzogeometrik analizin temel amacı, geometrik tanım için kullanılan fonksiyonları, aynı zamanda analizin şekil fonksiyonları olarak kullanarak, Bilgisayar Destekli Tasarım (BDT) ile Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ni bir çatı altında birleştirmektir. İzogeometrik analiz yöntemi ile elde edilen çökme ve gerilme değerlerini karşılaştırmak amacıyla, ilgili problem standart sonlu elemanlar yöntemiyle de çözülmüştür. Her iki yöntemden elde edilen sonuçlar analitik çözümle kıyaslanmıştır. İzogeometrik analiz, yüksek mertebeden eğrilerin, analizin şekil fonksiyonları olarak atanmasından dolayı yakınsama ve hassasiyet konusunda üstün özelliklere sahiptir. Seyrek olarak oluşturulmuş ağ yapılarında bile kesin çözüme çok yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

GİRİŞ

Serbest ucundan etkiyen kayma kuvvetinin etkisindeki bir konsol kirişin eğilmesi problemine ait kesin çözüm Timoshenko [1] tarafından verilmiştir. Ele alınan çalışmada, izogeometrik analiz yönteminin bu probleme ait uygulamaları incelenmiştir. İzogeometrik analizin amacı, geometrik tanım için kullanılan fonksiyonları, aynı zamanda analizin şekil fonksiyonları olarak kullanarak, Bilgisayar Destekli Tasarım (BDT) ile Sonlu Elemanlar Yöntemini (SEY) bir çatı altında toplamaktır. SEY mevcut geometriye, düşük mertebeli Lagrange polinomları ile yakınsamaya çalışırken, BDT yüksek mertebeli (Bezier, B-Spline, uniform olmayan B-spline veya T-Splines) eğriler kullanır. İzogeometrik analiz ile BDT yardımıyla oluşturulan geometrinin, direk sistemin analizi için de kullanılması sağlanır ve böylece klasik SEY’nde yer alan, geometriyi düşük mertebeli fonksiyonlarla tanımlamaya çalışma ve sonrasında gerekli olan ağ yapısı oluşturma işlemleri de ortadan kalkmış olur. BDT teknolojisinin temeli, eğri ve yüzey oluşturmak için Bernstein polinomlarını kullanan Bezier’in çalışmalarına dayanmaktadır [2]. B-spline eğrileri, genel olarak Bézier eğrilerinin geliştirilmesi sonucunda, ilk olarak Schoenberg [3] tarafından önerilmiştir. BDT alanında, B-splines eğrileri ile 1970’lerde çalışılmaya başlanmıştır [4-5]. B-spline eğrileri, eğriyi oluşturan bir noktanın yeri değiştirildiğinde veya yeni noktalar eklendiğinde, eğrinin geometrisi bozulmadığı için, yerel kontrollerde Bézier eğrilerine göre daha üstündür. Kagan vd. [6] B-Spline tabanlı sonlu eleman formülasyonu ile lineer çubuk ve plak problemini incelemiştir. İzogeometrik analiz ile ilgili pek çok katı mekaniği problemleri çalışılmıştır [7-11]. Bu çalışmada, B-Spline tabanlı izogeometrik teori kullanılmıştır.

İZOGEOMETRİK FORMÜLASYON

Knot Vektörleri

B-Spline’lerin tanımlanabilmesi için, $\xi_i \in \mathbb{R}$, i . knot olmak üzere, çözüm bölgesi parametrik koordinatların $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ ($i=1,2,\dots,n+p$) azalmayan dizisi şeklinde knot vektörleriyle belirtilmelidir. Burada p polinomun derecesi, n ise temel fonksiyonların (kontrol noktalarının) sayısıdır. Knot vektörü $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ şeklindedir. Genel olarak periyodik ve açık olmak üzere iki çeşit knot vektör tipi bulunmaktadır. Bu her iki tip knot vektörü uniform veya non-uniform olabilir. Knotlar eşit aralıklı ise uniform, değilse non-uniform olurlar. İlk ve son knot değerlerinin $(p+1)$ kere tekrar etmesi durumunda, ‘açık knot vektörü’ adını almaktadır. Bu çalışmada açık knot vektörü kullanılmıştır. Açık knot vektörlerinin önemli bir özelliği parametrik uzayın sınırlarında temel fonksiyonların interpolate edilebilmesidir.

Temel Fonksiyonlar

B-spline temel fonksiyonları olan $N_{i,p}(\xi)$ değerleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$p = 0 \text{ iken, } N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1)$$

$$p \geq 1 \text{ iken, } N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

(2)’deki bu ifadeye ‘Cox-de Boor Tekrarlama Formülü’ denir. Bu fonksiyonlar hesaplanırken 0/0 oranı, 0 olarak tanımlanır.

B-spline temel fonksiyonlarının önemli bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1) Birim Özellik: $\forall \xi$ için $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$

2) Tüm bölgede temel fonksiyonlar pozitifdir: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$

3) B-Spline temel fonksiyonları lineer bağımsızdır: $\sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$

4) $N_{i,p}(\xi)$ şekil fonksiyonu, $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ aralığının içinde 0'dan farklıdır.

5) (p). dereceden temel fonksiyonlar (p- m_i). dereceden sürekli türevlere sahiptir. Burada m_i , ξ_i knotunun tekrarlanma sayısını göstermektedir.

6) B-Spline temel fonksiyonları genellikle sadece yaklaşık değerler alır ve interpolate edilemez. Kronecker delta özellikleri karşılanmaz. $N_{i,p}(\xi_j) \neq \delta_{ij}$. Ancak $m_i = p$ olursa $N_{i,p}(\xi_i) = 1$ olur.

7) B-Spline temel fonksiyonlarının birinci türevi:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

8) B-Spline temel fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevi:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right)$$

B-Spline Eğrileri

B-spline eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (3)$$

Burada B_i , Kontrol Noktaları (Kontrol Ağı), $N_{i,p}(\xi)$ p.-dereceden B-Spline temel fonksiyonudur. Kontrol noktaları, SEY'ndeki düğüm noktası değerleriyle aynı role sahiptir.

B-Spline Yüzeyleri

Kontrol ağı $B_{i,j}$, parametrik bölgedeki knot vektörleri $\Xi = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n+p+1}]$ ve $\kappa = [\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{m+q+1}]$ olan B-Spline yüzeyi,

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N_{i,p}(\xi)$ ve $M_{j,q}(\eta)$, Ξ ve κ knot vektörlerine ait sırasıyla p. ve q. dereceden tek değişkenli B-Spline temel fonksiyonlarıdır. (4) ifadesi

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $N_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$ iki değişkenli B-Spline temel fonksiyonudur. İki değişkenli B-Spline temel fonksiyonlarının, parametrik koordinatlara bağlı türevleri;

$$\frac{\partial N_{i,j}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{d}{d\xi} (N_i(\xi)) M_j(\eta), \quad \frac{\partial N_{i,j}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{d}{d\eta} (M_j(\eta)) N_i(\xi) \quad (6)$$

İzoparametrik Ayrıklaştırma

İzogeometrik analiz, sonlu elemanlar literatüründe oldukça popüler olan izoparametrik sonlu elemanlar yaklaşımını temel alır. İzoparametrik kavram, aynı temel fonksiyonların hem geometride hem de bilinmeyen değerlerin ayrıklaştırması için kullanılmasına olanak sağlar. Hem SEA hem de IGA formülasyonları izoparametrik konsepti kullanır. Fakat, kullanılan temel fonksiyonların türü bakımından bu iki formülasyon birbirinden farklıdır. SEY'nde bilinmeyen değerler için seçilen temel fonksiyonlar, aynı zamanda yaklaşık geometri için de kullanılır. IGA'de ise temel fonksiyonlar geometriyi tam olarak belirtecek şekilde seçilir ve bunlar aynı zamanda bilinmeyen değerler için de kullanılır.

Analizde; fiziksel, parametrik ve doğal koordinatları barındıran üç farklı tanım bölgesi vardır. Parametrik uzayda ($\hat{\Omega}$), B-Spline şekil fonksiyonları tanımlanır ve hesaplanır; fiziksel uzaydaki (Ω) tanım, kontrol noktaları ile sağlanır. Parametrik uzaydaki değerler elde edilebildiği için integrasyon bu uzayda gerçekleştirilir ve dönüşüm matrisi (jacobian) yardımıyla fiziksel uzaydaki değerler elde edilir. Parametrik uzaydan fiziksel uzaya geçiş; Ω , yüzeyse, $N_I(\xi, \eta)$ iki değişkenli temel fonksiyonlar ve B_I kontrol noktaları olmak üzere

$$x = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) B_I \quad (7)$$

şeklinde. (7)'de n kontrol noktalarının sayısıdır. İzoparametrik formülasyonda, yer değiştirme alanı aynı şekil fonksiyonlarıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$u(x) = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) u_I \quad (8)$$

Burada, u_I , B_I kontrol noktasındaki yer değiştirmenin değerini gösterir. (7) ifadesi için dönüşüm matrisi, B_{II} I kontrol noktasının i. koordinatı ve $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \xi_j} B_{II}$ olmak üzere

$$J_{\xi} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

şeklinde. Böylece fiziksel koordinatlarda temel fonksiyonların türevleri,

$$\begin{bmatrix} N_{I,x} & N_{I,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} & N_{I,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} & N_{I,\eta} \end{bmatrix} J_{\xi}^{-1} \quad (10)$$

dir. Sayısal integrasyon ise doğal koordinatları barındıran eşlenik uzayda gerçekleştirilir, bunun için de yine ayrı bir dönüşüm matrisi tanımlanır. Dönüşüm,

$$\xi = \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i) \tilde{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i)], \quad \eta = \frac{1}{2} [(\eta_{j+1} - \eta_j) \tilde{\eta} + (\eta_{j+1} + \eta_j)] \quad (11)$$

olmak üzere bu dönüşümün jakobiyesi;

$$|J_{\tilde{\xi}}| = \frac{1}{4} (\xi_{i+1} - \xi_i) (\eta_{j+1} - \eta_j) \quad (12)$$

şeklinde. Böylece,

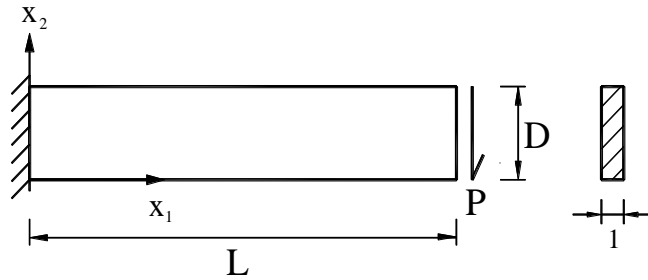
$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega_e$$

$$= \sum_{e=1}^n \int_{\hat{\Omega}_e} f(x(\xi), y(\eta)) |J_\xi| d\hat{\Omega}_e = \sum_{e=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_e} f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) |J_\xi| |J_{\tilde{\xi}}| d\tilde{\Omega}_e \quad (13)$$

elde edilir. Bu son integral Gauss-Legendre alan hesabı kullanılarak hesaplanır.

PROBLEMİN TANIMI

Uzunluğu L , yüksekliği D , kesiti birim kalınlıklı olan ve serbest ucuna etkiyen P kuvveti tarafından eğilmeye maruz bırakılan bir konsol kiriş ele alalım (Şekil 1). Kirişe, $x = L$ ucu boyunca bileşkesi P olan kayma kuvvetleri etkimektedir. Kirişe bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı ve kirişin geometrik boyutlarının Şekil 1’de gösterildiği gibi olduğu kabul edilsin.



Şekil 1. Konsol kirişin geometrisi ve koordinat sistemi.

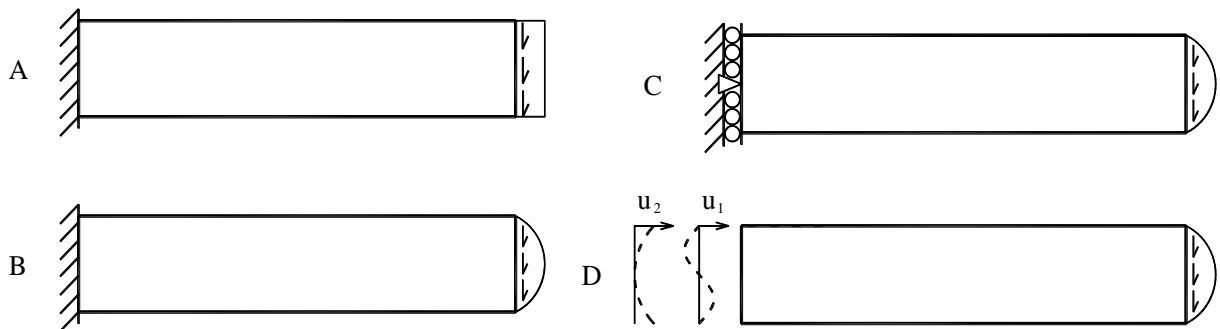
Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq L; 0 \leq x_2 \leq D\} \quad (14)$$

Çözüm bölgesinde sağlanan denge denklemleri, bünye bağıntıları ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları sırasıyla,

$$\partial \sigma_{ji,j} = 0, \sigma = C \varepsilon, C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), i,j=1,2 \quad (15)$$

σ_{ij} , ε_{ij} ve u_i değerleri, ele alınan yapı elemanının dış yükler etkisinde yapısında oluşan sırasıyla gerilme, şekil değiştirme tansörleri ile yer değiştirme vektörü bileşenleridir. Şekil 2’de görülen sınır koşulları ve yüklemeler kullanılarak, her birine karşı gelen yer değiştirme ve gerilme değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 2. Ele alınan konsol kiriş probleminde kullanılan sınır koşulları ve yüklemeler. Şekil 2’de verilen durumlara ait sınır koşulları aşağıda verilmiştir:

| | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A | $u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = u_2 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = 0, \sigma_{12} _{\substack{x_1=L \\ x_2 \in [0,D]}} = P$ |
| B | $u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = u_2 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = 0, \sigma_{12} _{\substack{x_1=L \\ x_2 \in [0,D]}} = -\frac{P}{2I}(D-x_2)x_2$ |
| C | $u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2=D/2}} = u_2 _{\substack{x_1=0 \\ x_2=D/2}} = 0, u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D/2]}} = u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [D/2,D]}} = 0, \sigma_{12} _{\substack{x_1=L \\ x_2 \in [0,D]}} = -\frac{P}{2I}(D-x_2)x_2$ |
| D | $u_1 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = \frac{P(x_2 - D/2)}{6EI} [(6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu)x_2(x_2 - D)],$ $u_2 _{\substack{x_1=0 \\ x_2 \in [0,D]}} = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu \left(x_2 - \frac{D}{2} \right)^2 (L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right],$ $\sigma_{12} _{\substack{x_1=L \\ x_2 \in [0,D]}} = -\frac{P}{2I}(D-x_2)x_2$ |

(16)

Dolayısı ile ele alınan problemin matematiksel modeli, (15) denklem takımının (16) sınır koşulları çerçevesinde çözülmesine getirilir.

Ele alınan sınır değer probleminin matematiksel modeli için, dış kuvvetler etkisinde, cisimde biriken toplam potansiyel enerjiyi gösteren fonksiyonelden yararlanılır.

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_S u^T T dS = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon^T \sigma dx_1 dx_2 - \int_S u^T T dS \quad (17)$$

(17)'deki çözüm bölgesi Ω , (14)'de verilmiştir. (17)'deki S sınırları ise aşağıda verilmiştir:

$$L_1 = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0; x_1 \in [0, L]\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 = L; x_2 \in [0, D]\},$$

$$L_3 = \{(x_1, x_2) | x_2 = D; x_1 \in [0, L]\}, \quad L_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0; x_2 \in [0, D]\}$$

$$S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \quad (18)$$

u ve δu için aynı şekil fonksiyonlarını alarak, Galerkin yöntemi ile,

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i, \quad \delta u = \sum_{i=1}^n \delta u_i N_i \quad (19)$$

yazabiliriz. Bu denklemleri (17) fonksiyoneline yerine koyarsak,

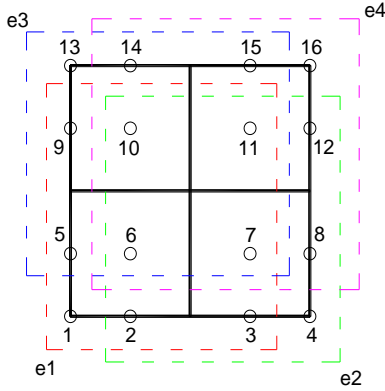
$$K u = F \quad (20)$$

lineer denklem sistemine ulaşılır. **K**-Rijitlik, **u**-bilinmeyenleri içeren ve **F**-sağ taraf matrisleridir. Burada

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} B_i^T C B_j d\Omega, \quad F_i = \int_S N_i T dS, \quad B_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

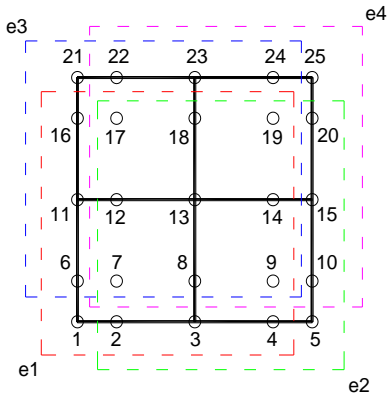
şeklinde. Temel fonksiyonların türevleri (10) ifadesinden hesaplanır.

Problemin izogeometrik analiz ile çözümü için yapılan ayrıklaştırma polinomun derecesine göre farklılık gösterir. $p=q=1$ için, ayrıklaştırma işlemi sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibidir. Aşağıda $p=q=2, 3$ için yapılan ayrıklaştırmalar ise aşağıda gösterilmektedir.



$$\text{elemanlar} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}_{4 \times 9}$$

Şekil 3. $p=q=2$ durumunda $knotu_1=[0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$, $knotu_2=[0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$ için, parametrik uzaydaki ağ yapısı ve her elemandaki (e_1, e_2, e_3, e_4) düğüm noktalarının numaralandırılması



$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 & 17 & 18 & 19 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 17 & 18 & 19 & 20 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}_{4 \times 16}$$

Şekil 4. $p=q=3$ durumunda $knotu_1=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $knotu_2=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ için, parametrik uzaydaki ağ yapısı ve her elemandaki (e_1, e_2, e_3, e_4) düğüm noktalarının numaralandırılması

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada Şekil 1’de görülen uzunluğu L , yüksekliği D , kesiti birim kalınlıklı olan ve serbest ucuna etkiyen P kuvveti tarafından eğilmeye maruz bırakılan bir konsol kirişin, çeşitli yüklenme koşulları ve sınır şartları altında bazı noktalarındaki çökme ve gerilme değerleri sonlu elemanlar ve izogeometrik analiz yöntemi ile incelenmiştir. Bu amaçla izogeometrik sayısal analizleri gerçekleştirecek Matlab kodları tarafımızdan geliştirilmiş ve bu kodlardan elde edilen sonuçlar analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

[1]’de bu probleme ait analitik çözümler, aşağıdaki bağıntılar ile verilmektedir:

$$u_1 = \frac{P(x_2 - D/2)}{6EI} \left[(6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu)x_2(x_2 - D) \right] \quad (22)$$

$$u_2 = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu \left(x_2 - \frac{D}{2} \right)^2 (L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right] \quad (23)$$

Bu yer değiştirmelere karşılık gelen gerilmeler:

$$\sigma_{11} = \frac{P(L-x_1)}{I} \left(x_2 - \frac{D}{2} \right), \quad \sigma_{22} = 0, \quad \tau_{12} = -\frac{P}{2I} (D-x_2) x_2 \quad (24)$$

Sayısal sonuçların elde edilmesinde konsol kirişe ait değerler $L/D=1$, $P=2$, $E=1000$, $\nu=0.25$ şeklinde alınmıştır. Konsol kirişin uzunluğu boyunca 2, genişliği boyunca da 2 eleman alınarak hesaplar yapılmıştır. Çizelge 1’de, Şekil 2’de belirtilen durumlar sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplanmıştır. Sol tarafından ankastre mesnetli olan A ve B durumları kıyaslandığında, sağ tarafında parabolik yükleme olması (Şekil 2-B) durumundaki çökme değerlerinin analitik çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Eleman sayımız az olduğundan, sonlu elemanlar çözümünde C ve D için elde edilen çökmeler aynı olmaktadır. C ve D’deki sınır koşulları ve yüklemelerden elde edilen çökmeler, sol tarafın ankastre mesnetli olduğu A ve B durumlarındaki sonuçlara kıyasla analitik çözüme daha yakındır.

Çizelge 1. Çeşitli yükleme koşulları ve sınır şartları altında (Şekil 2), konsol kirişteki çökmelerin SEY ile incelenmesi.

| (x_1, x_2) | Analitik Çözüm | | A | | B | | C | | D | |
|--------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 |
| (0,0) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,0) | -0.00450 | -0.00550 | -0.00734 | -0.00869 | -0.00394 | -0.00472 | -0.00404 | -0.00508 | -0.00404 | -0.00508 |
| (L,0) | -0.00600 | -0.01325 | -0.01004 | -0.02225 | -0.00526 | -0.01143 | -0.00535 | -0.01198 | -0.00535 | -0.01198 |
| (0,D/2) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (L/2,D/2) | 0 | -0.00512 | 0 | -0.00802 | 0 | -0.00421 | 0 | -0.00471 | 0 | -0.00471 |
| (L,D/2) | 0 | -0.01325 | 0 | -0.02123 | 0 | -0.01171 | 0 | -0.01222 | 0 | -0.01222 |
| (0,D) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,D) | 0.00450 | -0.00550 | 0.00734 | -0.00869 | 0.00394 | -0.00472 | 0.00404 | -0.00508 | 0.00404 | -0.00508 |
| (L,D) | 0.00600 | -0.01325 | 0.01004 | -0.02225 | 0.00526 | -0.01143 | 0.00535 | -0.01198 | 0.00535 | -0.01198 |

Çizelge 2’de aynı incelemeler polinomun derecesini $p=q=2$ alarak, kuadratik izogeometrik analiz ile yapılmıştır. Eleman sayısı az olduğu için, sonlu elemanlarda elde edemediğimiz, her bir sınır koşulunda farklı bir çökme değerinin bulunması, izogeometrik analizin daha hassas olduğunu göstermektedir. Çizelge 2’de kuadratik izogeometrik analiz ile elde edilen çökmeler, sonlu elemanlarla elde edilenlere göre analitik çözüme daha yakındır.

Çizelge 2. Çeşitli yükleme koşulları ve sınır şartları altında (Şekil 2), konsol kirişteki çökmelerin kuadratik izogeometrik analiz ile incelenmesi.

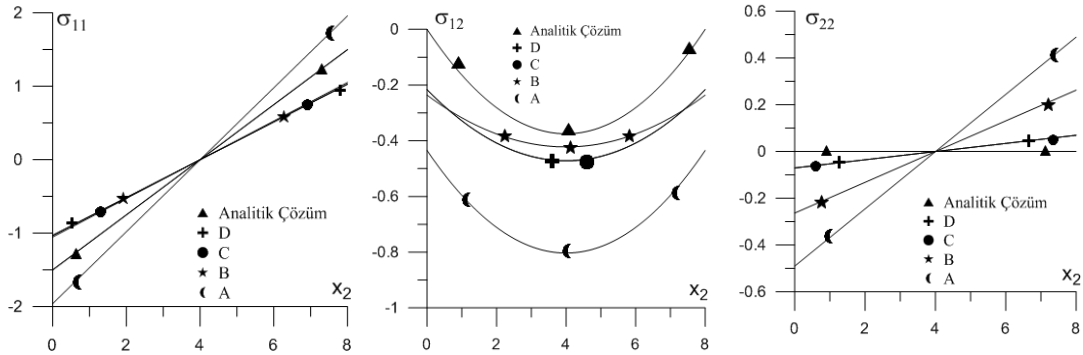
| (x_1, x_2) | Analitik Çözüm | | A | | B | | C | | D | |
|--------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 |
| (0,0) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,0) | -0.00450 | -0.00550 | -0.00776 | -0.00863 | -0.00483 | -0.00550 | -0.00489 | -0.00574 | -0.00453 | -0.00552 |
| (L,0) | -0.00600 | -0.01325 | -0.01080 | -0.02332 | -0.00632 | -0.01353 | -0.00638 | -0.01386 | -0.00603 | -0.01328 |
| (0,D/2) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (L/2,D/2) | 0 | -0.00512 | 0 | -0.00821 | 0 | -0.00508 | 0 | -0.00539 | 0 | -0.00514 |
| (L,D/2) | 0 | -0.01325 | 0 | -0.02126 | 0 | -0.01355 | 0 | -0.01392 | 0 | -0.01331 |
| (0,D) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,D) | 0.00450 | -0.00550 | 0.00776 | -0.00863 | 0.00483 | -0.00550 | 0.00489 | -0.00574 | 0.00453 | -0.00552 |
| (L,D) | 0.00600 | -0.01325 | 0.01080 | -0.02332 | 0.00632 | -0.01353 | 0.00638 | -0.01386 | 0.00603 | -0.01328 |

Çizelge 3’de polinomun derecesini arttırıp, $p=q=3$ olarak kübik izogeometrik analiz ile çökme değerleri hesaplanmıştır. Polinomun derecesini arttırıp, Şekil 2-D’deki sınır koşullarını uyguladığımızda elde edilen çökme değerleri analitik çözümle birebir aynı olmaktadır.

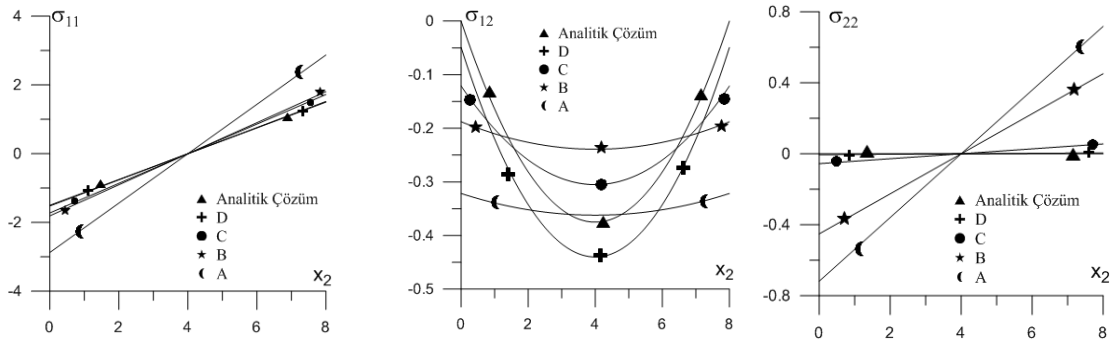
Çizelge 3. Çeşitli yükleme koşulları ve sınır şartları altında (Şekil 2), konsol kirişteki çökmelerin kübik izogeometrik analiz ile incelenmesi.

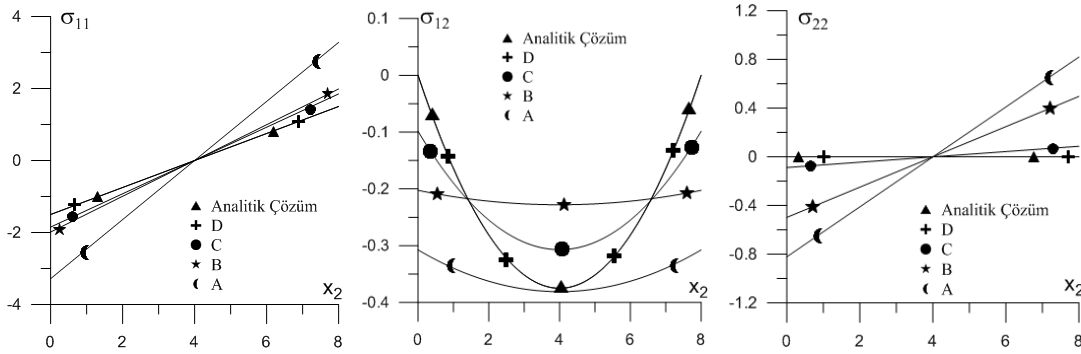
| (x_1, x_2) | Analitik Çözüm | | A | | B | | C | | D | |
|--------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|
| | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 | u_1 | u_2 |
| (0,0) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,0) | -0.00450 | -0.00550 | -0.00793 | -0.00904 | -0.00487 | -0.00555 | -0.00493 | -0.00582 | -0.0045 | -0.0055 |
| (L,0) | -0.00600 | -0.01325 | -0.01132 | -0.02429 | -0.00636 | -0.01367 | -0.00643 | -0.01400 | -0.0060 | -0.01325 |
| (0,D/2) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (L/2,D/2) | 0 | -0.00512 | 0 | -0.00845 | 0 | -0.00518 | 0 | -0.00545 | 0 | -0.00512 |
| (L,D/2) | 0 | -0.01325 | 0 | -0.02158 | 0 | -0.01355 | 0 | -0.01399 | 0 | -0.01325 |
| (0,D) | 0 | -0.00075 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.00075 | 0 | -0.00075 |
| (L/2,D) | 0.00450 | -0.00550 | 0.00793 | -0.00904 | 0.00487 | -0.00555 | 0.00493 | -0.00582 | 0.0045 | -0.0055 |
| (L,D) | 0.00600 | -0.01325 | 0.01132 | -0.02429 | 0.00636 | -0.01367 | 0.00643 | -0.01400 | 0.0060 | -0.01325 |

Şekil 5-6 ve 7’de $x_1=0$ kesitinde σ_{11} , σ_{12} ve σ_{22} gerilme değerleri, ele alınan her bir sınır koşulu için sonlu elemanlar, kuadratik ve kübik izogeometrik analiz ile incelenmiş ve analitik çözüm ile kıyaslanmıştır. Buna göre, her üç analizde de, Şekil 2-D sınır koşulundan elde edilen çözüm, analitik çözüme daha yakındır. Bununla birlikte, kübik izogeometrik analizden elde edilen gerilme değerleri, analitik çözümle birebir örtüşmektedir.



Şekil 5. Sonlu elemanlar analizi ile $x_1=0$ ’da σ_{11} , σ_{12} ve σ_{22} gerilme değerleri.



Şekil 6. Kuadratik izogeometrik analiz ile $x_1=0$ 'da σ_{11} , σ_{12} ve σ_{22} gerilme değerleri.Şekil 7. Kübik izogeometrik analiz ile $x_1=0$ 'da σ_{11} , σ_{12} ve σ_{22} gerilme değerleri.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, konsol kiriş problemi için analitik çözüme ulaşmakta sınır koşullarının etkisi, izogeometrik analiz ve sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir. [1]'de verilen kesin çözüme ancak, serbest uçtaki kayma kuvvetlerinin, τ_{xy} kayma gerilmesiyle aynı parabolik kanunla yayılmaları ve ankastre uçtaki normal kuvvetlerin x_2 ile orantılı olmaları halinde ulaşılır. Nihai sonuçlar göstermektedir ki, izogeometrik analiz, yakınsama ve hassasiyet konusunda üstün özelliklere sahiptir. Bunun da en önemli sebebi yüksek mertebeden eğrilerin, analizin şekil fonksiyonları olarak atanmasıdır. Seyrek olarak oluşturulmuş ağ yapılarında bile doğru sonuca çok yakın sonuçlar verdiği ortaya konmuştur. Bu durum fonksiyonların derecelerini arttırarak, düşük serbestlik dereceleri ve dolayısıyla düşük yoğunluklu ağ yapısı elde ederek işlem hacminin küçültülmesine de olanak sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [2] P. Bézier, *Numerical Control: Mathematics and Applications*, Wiley. Translated from the French by A. R. Forrest, 1972.
- [3] I.J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.* IV 112–141, 1946.
- [4] R. F. Riesenfeld, *Application of B-spline approximation to geometric problems of computer aided design*, Doktora tezi, Syracuse University, 1972.
- [5] W. Gordon, R. Riesenfeld, B-spline curves and surfaces: *Proceedings of Utah Conference*, New York: Academic Press, 1974: s. 95–126.
- [6] P. Kagan, A. Fischer, P.Z. Bar-Yoseph, New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 41 (1998) 435-458. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19980215)41:3 <435.
- [7] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 194 (2005) 4135-4195. doi: 10.1016/j.cma.2004.10.008.
- [8] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2007) 4160–4183. doi: 10.1016/j.cma.2007.04.007.

- [9] S. Lipton, J.A. Evans, Y. Bazilevs, T. Elguedj, T.J.R. Hughes, Robustness of isogeometric structural discretizations and severe mesh distortion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 199 (2010) 357–373. doi:10.1016/j.cma.2009.01.022.
- [10] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs, *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, West Sussex, UK: Wiley, 2009.
- [11] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, (2nd ed.), Germany: Springer-Verlag, 1997.