İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN DALDIRMALAR ve TOTAL JEODEZİK AFİN DALDIRMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. HAKAN DEMİRBÜKER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdülkadir Özdeğer

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Afet Özok

: Doç. Dr. Aynur Uysal

HAZİRAN 1994

ÖNSÖZ

Bu çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Abdülkadir Özdeğer'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tezimin yazımı esnasındaki yardımlarından dolayı değerli arkadaşım Özcan Başkonuş'a teşekkür ederim.

HAKAN DEMİRBÜKER

İÇİNDEKİLER

ÖZET

İki bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde afin daldırmalar ve eş-afin yapılara ait bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, (M, ∇) afin manifoldunun $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ afin manifolduna bir total jeodezik afin daldırması gözönüne alınmış ve $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ total jeodezik afin daldırmasında $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ manifoldunun rekürant eğrilikli olması halinde, (M, ∇) nin rekürant eğrilikli veya düz olması gerektiğini ifade eden teoremin ispatı verilmiştir. Ayrıca, bu koşullara ilave olarak, f nin ombilik ve M nin boyutunun üç veya üçten daha büyük olması halinde, (M, ∇) manifoldunun bir yerel projektif düz uzay olduğu sonucu elde edilmiştir.

AFFINE IMMERSIONS and TOTALY GEODESIC AFFINE IMMERSIONS

SUMMARY

In this work, after having given the fundamental concepts concerning the affine immersions, totaly geodesic affine immersions and equiaffine stuructures, some properties related to them are studied.

By an affine manifold, we mean a pair (M, ∇), where M is a (connected) differentiable manifold and ∇ an affine connection on M.

Let (M, ∇) and $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ be (connected) differentiable manifolds with torsion-free affine connections ∇ and $\overline{\nabla}$ and of respective dimensions n and m.

An immersion $f : M \to \overline{M}$ is called affine immersion if around each point of M there is a field of transversal subspaces $x \to N_x$:

$$T_{f(x)}\overline{M} = f_*(T_x(M)) \dot{+} N_x$$

such that for vectors fields X and Y on M we have a decomposition

$$\overline{\nabla}_{f_*(X)} f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y)$$

where $\alpha(X, Y) \in N_x$ at each point $x.\alpha$ is said to be the second fundamental form of the immersion f. $N_x(M)$ will be called the normal space (rather than the transversal subspace) at $x \in M$, and the assignment $x \in M \to N_x(M)$ will be called the normal bundle and will be denoted simply by $N(M)$.

If $\xi : x \to \xi_x$ is a normal vector field, then we write

$$\overline{\nabla}_X \xi = -f_*(A_\xi X) + \overset{\perp}{\nabla}_X \xi$$

where $A_\xi X \in T_x(M)$ and $\overset{\perp}{\nabla}_X \xi N_x$ at each point, A being the shape tensor, A_ξ the shape operator for ξ and $\overset{\perp}{\nabla}$ is the connection in the normal bundle.

We identify M, locally, with the image $f(M)$ and simplify the denotations by dropping the sign of the differential f_* of the immersion f from the formulas and write

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

If M is a hypersurface of $\overline{M}$, then the formulas above take the form

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -S(X) + \tau(X)\xi$$

Where S is a tensor field of type (1,1) and τ is a 1-form. We call S the shape operator and τ, the transversal connection form for f.

If $\alpha = 0$ at a point x, we say that f is totaly geodesic at x. If $\alpha = 0$ at any point of M, we say that f is totaly geodesic.

f is said to be umbilical at $x \in M$ if there is a 1–form ρ on $N_x(M)$ such that $A_\xi = \rho(\xi)I$ for any $\xi \in N_x(M)$, where I denotes the identity transformation. If f is umbilical at every point of M, we say that f is umbilical.

An affine manifold (M, ∇) is said to be of recurrent curvature if its curvature tensor R is non-zero and satisfies the condition $\nabla R = \phi \otimes R$. for certain 1–form ϕ (called the recurrence form).

Two affine connections ∇ and ∇' on a differentiable manifold M are said to be projectively equivalent if there is a 1-form θ such that

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X$$

for all vector fields X, Y, on M. It is known that two affine connections are projectively equivalent if and onl if they have the same family of curves as pregeodesics.

The Weyl projective curvature tensor P of an affine connection ∇ on a manifold M is defined by

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - (L(X,Y) - L(Y,X))Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y$$

where

$$L(X,Y) = -(n^2-1)^{-1}[n\mathrm{Ric}(X,Y) + \mathrm{Ric}(Y,X)]$$

Ric being the Ricci tensor given by

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \dot{I}z\{Z \to R(Z,X)Y\}$$

An affine manifold (M, ∇) is said to be locally projectively flat if in a neighborhood of each point of M the connection ∇ is projectively equivalent to an affine connection ∇' which is flat, that is, the curvature tensor tensor R' of ∇' is identically zero.

Fundamental equations of Gauss and Codazzi for the affine immersion f can be written as

$$\begin{aligned}
\tan \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X \\
\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)Z &= (\nabla_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y \alpha)(X,Z) \\
\tan \overline{R}(X,Y)\xi &= (\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y \\
\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)\xi &= \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y) + R^\perp(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

for arbitrary vector fields X, Y, Z on M and a normal vector field ξ, Where $\overline{R}, R, R^\perp$ are the curvature tensors of the connections $\overline{\nabla}, \nabla$ and $\nabla^\perp$ respectively.

In case (M, ∇) is a hypersurface of $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ the above equations reduce to

$$\begin{aligned}
\tan \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + h(X,Z)SY - h(Y,Z)SX \\
\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)Z &= (\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) - \tau(Y)h(X,Z) \\
\tan \overline{R}(X,Y)\xi &= -(\nabla_X S)(Y) + \tau(X)SY + (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX \\
\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)\xi &= -h(X,SY) + h(SX,Y) + 2\tau(X)\tau(Y).
\end{aligned}$$

The covariant derivatives $\nabla_x \alpha, \nabla_x A$ are defined by

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \alpha)(Y,Z) &= \overset{\perp}{\nabla}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
(\nabla_X A)_\xi Y &= \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\overset{\perp}{\nabla}_X \xi} Y
\end{aligned}$$

In the case where $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is projectively flat (with symmetric Ricci Tensor), we have

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\gamma}(Y,Z)X - \overline{\gamma}(X,Z)Y$$

, where $\overline{\gamma}$ is normalized Ricci tensor for $(\overline{M}, \overline{\nabla})$.

In this case, all the formulus above become simpler. Thus we have

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \overline{\gamma}(Y,Z)X - \overline{\gamma}(X,Z)Y + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y \\
(\nabla_X \alpha)(Y,Z) &= (\nabla_Y \alpha)(X,Z) \\
(\nabla_X A)_\xi Y + \overline{\gamma}(Y,\xi)X &= (\nabla_Y A)_\xi X + \overline{\gamma}(X,\xi)Y \\
R^\perp(X,Y)\xi &= \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)
\end{aligned}$$

Following[4], equiaffine structures are considered, and the following results are obtained:

(1) If M is a hypersurface of $\overline{M}$, $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ an affine immersion and $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ an equiaffine structure, then

$$\nabla_x W = \tau(X)W.$$

Consequently, (M, ∇, W) is an equiaffine sturucture, if and only if $\tau = 0$.

(2) If (M, ∇, W) and $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ are equiaffine stuructures and if $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ is an affine immersion, then an associated transversal vector field ξ can be chosen to be equiaffine.

For a totaly geodesic affine immersion $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ the following results are obtained.

(a) For a totaly geodesic affine immersion, the fundamental formulas of Gauss and Codazzi become simpler and take the forms

$$\begin{aligned} &\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z) \\ &\overline{R}(X,Y)\xi = -(\nabla_X A)_\xi Y + (\nabla_Y A)_\xi X + R^\perp(X,Y)\xi \end{aligned}$$

(b) Assume that $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ is a totaly geodesic affine immersion and $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is an affine manifold of recurrent curvature, say $\overline{\nabla}\,\overline{R} = \overline{\phi} \otimes \overline{R}$. Then (M, ∇) is (a) flat or (b) of recurrent curvature, more precisely $\nabla R = \phi \otimes R$, ϕ being the pull-back of the recurrence form $\overline{\phi}$ onto M.

(c) For a totaly geodesic affine immersion, we have

$$(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)Z = (\nabla_W R)(X,Y)Z$$

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi =& (R(X,Y)A)_\xi W + A_\xi R(X,Y)W - (\nabla^2_{WX} A)_\xi Y \\ &+ (\nabla^2_{WY} A)_\xi X + (\overset{\perp}{\nabla}_W R^\perp)(X,Y)\xi \end{aligned}$$

(d) Let $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ be a totaly geodesic affine immersion, where $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is an affine manifold of recurrent curvature, say $\overline{\nabla}\,\overline{R} = \overline{\phi} \otimes \overline{R}$. Then we have

$$\begin{aligned} A_\xi R(X,Y)W =& -(R(X,Y)A)_\xi W - (\nabla^2_{WY} A)_\xi X + (\nabla^2_{WX} A)_\xi Y \\ &+ \phi(W)((\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y) \\ (\overset{\perp}{\nabla}_W R^\perp)(X,Y)\xi =& \phi(W) R^\perp(X,Y)\xi \end{aligned}$$

In particular, when f is additionaly umbilicial, i.e. $A_\xi = \rho(\xi) I$ then

$$\begin{aligned} \rho(\xi)R(X,Y)W =& -(\overset{\perp}{R}(X,Y)\rho)(\xi)W \\ &- ((\overset{\perp 2}{\nabla}_{WY})\rho)(\xi) - \phi(W)(\overset{\perp}{\nabla}_Y \rho)(\xi))X \\ &+ ((\overset{\perp 2}{\nabla}_{WX})\rho)(\xi) - \phi(W)(\overset{\perp}{\nabla}_X \rho)(\xi))Y. \end{aligned}$$

(e) A sufficient condition for vanishing of weyl projective curvature tensor

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - (L(X,Y) - L(Y,X))Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y$$

is given by the following theorem:

Let P be the Weyl projective curvature tensor of an affine manifold (M, ∇). $n = dim$ M ≥ 3, and x a point of M. If there exist $(0,2)$-tensors B and C such that

$$R_x(X,Y)Z = B(X,Y)Z - C(Y,Z)X + C(X,Z)Y$$

for any $X, Y, Z \in T_x(M)$, then $P_x = 0$.

(f) Morever, let $f : (M, \nabla) \rightarrow (\overline{M}, \overline{\nabla})$ be an affine immersion. Then, if f is a totaly geodesic and umbilical with $A \neq 0$ (M, ∇) will be locally projectively flat if (a) $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is of recurrent curvature and $n = dim$ M $\geq$ 3 or (b) $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is an affine locally symmetric space.

BÖLÜM 1
AFİN DALDIRMALAR VE EŞ–AFİN YAPILAR

1.1 AFİN DALDIRMALAR

Bilindiği gibi, diferensiyellenebilen, irtibatlı bir M manifoldu ile bunun üzerinde tanımlı bir ∇ afin konneksiyonunun oluşturduğu (M, ∇) çiftine bir afin manifold denir.

M ve $\overline{M}$, sırasıyla, n ve $n+p$ boyutlu, irtibatlı, diferensiyellenebilen iki manifold, ∇ ve $\overline{\nabla}$ de, sırasıyla, M ve $\overline{M}$ de tanımlı burulmasız afin konneksiyonlar olsun.

$f : M \to \overline{M}$ bir daldırmasını gözönüne alalım. $\forall_x \in M$ noktasının bir U civarında tanımlı bir $N : x \to N_x$ transversal altuzay alanı (Normal Uzay)

$$T_{f(x)}\overline{M} = f_*(T_x(M)) + N_x \tag{1.1.1}$$

ve $X, Y \in \chi(M)$ (M üzerinde düzgün vektör alanları cümlesi), $\alpha(X,Y) \in N_x$ olmak üzere,

$$\overline{\nabla}_{f_*(X)} f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + \alpha(X,Y) \tag{1.1.2}$$

olacak şekilde varsa, f daldırmasına bir **afin daldırma** adı verilir [1]. Burada α, $T_x(M)$ teğet uzayı üzerinde tanımlı, bir simetrik, bilineer form olup, ikinci esas form olarak adlandırılır.

TEOREM 1.1.1 $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve $x \in M$ olsun. Bu takdirde, $X, Y \in T_x(M)$ olmak üzere bütün $\alpha(X,Y)$ ler tarafından gerilen N_x normal uzayı tek türlü bellidir.

İSPAT : N'_x , x noktasında N_x den farklı bir normal uzay ve α' ise N'_x 'e karşı gelen ikinci esas form olsun. $\tau(X,Y) \in T_x(M)$ ve $\beta(X,Y) \in N'_x$ olmak üzere, $\alpha(X,Y) = \tau(X,Y) + \beta(X,Y)$ koyalım.
Buradan $\tau(X,Y) = 0$ ve $\alpha(X,Y) = \beta(X,Y) = \alpha'(X,Y)$ elde edilir. N_x normal uzayı bütün $\alpha(X,Y)$ ler tarafından, N'_x normal uzayıda bütün $\alpha'(X,Y)$ ler tarafından gerildiğinden, $N_x = N'_x$ elde edilir.

$f : (M,\nabla) \to (\overline{M},\overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve $\xi : x \to \xi_x \in N_x$ bir normal vektör alanı ise, $A_\xi X \in T_x(M)$, $\overset{\perp}{\nabla}_X \xi \in N_x$ olmak üzere,$\forall x \in M$ için

$$\overline{\nabla}_X \xi = -f_*(A_\xi X) + \overset{\perp}{\nabla}_X \xi \tag{1.1.3}$$

olsun. Burada, $\forall x \in M$ için,

$$A : (\xi, X) \in N_x \times T_x(M) \to A_\xi X \in T_x(M)$$

şeklinde tanımlanan A tasviri bilineer olup A ya **şekil tensörü**; A_ξ ye ise ξ için **şekil operatörü** denir. $\nabla^{\perp}$, normal demet üzerinde bir konneksiyon olup, **normal konneksiyon** olarak adlandırılır. M ile $f(M)$ özdeşlenebileceğinden, (1.1.2) ve (1.1.3) denklemleri $f_*(X) = X, f_*(Y) = Y, f_*(\nabla_X Y) = \nabla_X Y, f_*(A_\xi X) = A_\xi X$ koyarak

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \tag{1.1.4}$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \overset{\perp}{\nabla}_X \xi \tag{1.1.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak, M altmanifoldu $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi ise (1.1.4), (1.1.5) denklemleri

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi \tag{1.1.6}$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -S(X) + \tau(X)\xi \tag{1.1.7}$$

şekline girer. Burada, (1.1) tipinde bir tensör alanı olan S tasvirine hiperyüzeyin **şekil operatörü**; bir 1-form olan τ ya da f daldırmasına karşı gelen **normal konneksiyon formu** denir.

$f:(M,\nabla)\to(\overline{M},\overline{\nabla})$ bir afin daldırma olduğuna göre, (1.1.4),(1.1.5) formülleriyle belirli α ve A tensörünün kovaryant türevleri, sırasıyla,

$$(\nabla_X\alpha)(Y,Z)=\overset{\perp}{\nabla}_X\alpha(Y,Z)-\alpha(\nabla_XY,Z)-\alpha(Y,\nabla_XZ) \qquad (1.1.8)$$

$$(\nabla_XA)_\xi Y=\nabla_XA_\xi Y-A_\xi\nabla_XY-A_{\overset{\perp}{\nabla}_X\xi}Y \qquad (1.1.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Diğer taraftan, $f:(M,\nabla)\to(\overline{M},\overline{\nabla})$ bir afin daldırma, R , $\overline{R}$, $R^{\perp}$ sırasıyla, ∇ , $\overline{\nabla}$, $\nabla^{\perp}$ konneksiyonlarına karşı gelen eğrilik tensörleri ve $X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z=&R(X,Y)Z+A_{\alpha(X,Z)}Y-A_{\alpha(Y,Z)}X+\\&(\nabla_X\alpha)(Y,Z)-(\nabla_Y\alpha)(X,Z)\end{aligned} \qquad (1.1.10)$$

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)\xi=&(\nabla_YA)_\xi X-(\nabla_XA)_\xi Y+\alpha(A_\xi X,Y)-\\&\alpha(X,A_\xi Y)+R^{\perp}(X,Y)\xi\end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

dir. (1.1.10) ve (1.1.11) den $\overline{R}(X,Y)Z$ ve $\overline{R}(X,Y)\xi$ nin teğetsel ve normal bileşenleri

$$\tan\overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+A_{\alpha(X,Z)}Y-A_{\alpha(Y,Z)}X \qquad (1.1.12)$$

$$\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)Z=(\nabla_X\alpha)(Y,Z)-(\nabla_Y\alpha)(X,Z) \qquad (1.1.13)$$

$$\tan\overline{R}(X,Y)\xi=(\nabla_YA)_\xi X-(\nabla_XA)_\xi Y \qquad (1.1.14)$$

$$\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)\xi=\alpha(A_\xi X,Y)-\alpha(X,A_\xi Y)+R^{\perp}(X,Y)\xi \qquad (1.1.15)$$

olarak elde edilir. (1.1.12), (1.1.14) Gauss denklemleri, (1.1.13), (1.1.15) Codazzi denklemleri olarak adlandırılır.

Özel olarak M altmanifoldu $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi ise (1.1.12,) (1.1.13), (1.1.14), (1.1.15) formülleri sırasıyla

$$\tan\overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+h(X,Z)SY-h(Y,Z)SX \qquad (1.1.16)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)Z=&(\nabla_Xh)(Y,Z)+\tau(X)h(Y,Z)-(\nabla_Yh)(X,Z)\\&-\tau(Y)h(X,Z)\end{aligned} \qquad (1.1.17)$$

$$\tan\overline{R}(X,Y)\xi=-(\nabla_XS)(Y)+\tau(X)SY+(\nabla_YS)(X)-\tau(Y)SX \quad (1.1.18)$$

$$\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)\xi=-h(X,SY)+h(SX,Y)+2\tau(X)\tau(Y) \qquad (1.1.19)$$

şekline girer.

M diferensiyellenebilen bir manifold,∇ ve ∇' M üzerinde tanımlı iki afin konneksiyon olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X$$

bağıntısını gerçekleyen bir θ 1- formu mevcutsa, ∇' ve ∇ afin konneksiyonlarına **projektif olarak eşdeğer** denir.

(M, ∇) bir afin manifold olmak üzere, $\forall x \in M$ noktasının bir civarında ∇ afin konneksiyonuna projektif eşdeğer bir ∇' düz afin konneksiyonu varsa, (M, ∇) afin manifolduna **yerel projektif düz** denir.

∇, M manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon ve R de ∇ ya karşı gelen eğrilik tensörü olsun. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \dot{I}z\{Z \to R(Z,X)Y\} \tag{1.1.20}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ tipindeki tensör alanına **Ricci tensör alanı** denir. $\mathrm{boy}(M) = n$ ve

$$L(X,Y) = -(n^2-1)^{-1}[n\mathrm{Ric}(X,Y) + \mathrm{Ric}(Y,X)] \tag{1.1.21}$$

olmak üzere

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - (L(X,Y) - L(Y,X))Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y \tag{1.1.22}$$

şeklinde tanımlı P tensörüne **Weyl projektif eğrilik tensörü** adı verilir. İleride kullanmak üzere aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

TEOREM 1.1.2 (M, ∇) bir afin manifold ve boy(M) $\geq$ 3 olsun. (M, ∇) afin manifoldunun yerel projektif düz olması için gerek ve yeter şart, 1.1.22 formülüyle tanımlanan Weyl projektif eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olmasıdır [2].

TEOREM 1.1.3 $(\overline{M}, \overline{\nabla})$, boyutu $\geq$3 olan, simetrik ve normalize edilmiş $\overline{\gamma}$ Ricci tensörüne sahip bir yerel projektif düz manifold olsun.

(M, ∇), $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ nin afin daldırılmış altmanifoldu olduğuna göre (1.1.12), (1.1.13), (1.1.14), (1.1.15) denklemleri, sırasıyla

$$R(X,Y)Z = \overline{\gamma}(Y,Z)X - \overline{\gamma}(X,Z)Y + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y \quad (1.1.23)$$

$$(\nabla_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y \alpha)(X,Z) \quad (1.1.24)$$

$$(\nabla_X A)_\xi Y + \overline{\gamma}(Y,\xi)X = (\nabla_Y A)_\xi X + \overline{\gamma}(X,\xi)Y \quad (1.1.25)$$

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) \quad (1.1.26)$$

şeklini alır.

İSPAT: Bilindiği gibi [3], simetrik Ricci tensörüne sahip $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ afin manifolduna ait Weyl projektif eğrilik tensörü

$$\overline{P}(X,Y)Z = \overline{R}(X,Y)Z - [\overline{\gamma}(Y,Z)X - \overline{\gamma}(X,Z)Y]$$

şeklinde yazılabilir. $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ yerel projektif düz afin manifold olduğundan, Teorem 1.1.2 ye göre $\overline{P}(X,Y)Z = 0$ dır. Buradan

$$\overline{R}(X,Y)Z = [\overline{\gamma}(Y,Z)X - \overline{\gamma}(X,Z)Y] \quad (1.1.27)$$

$$\overline{R}(X,Y)\xi = [\overline{\gamma}(Y,\xi)X - \overline{\gamma}(X,\xi)Y] \quad (1.1.28)$$

bulunur. Ricci tensörünün normalize edilmiş olmasından dolayı

$$\mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)Z = 0 \qquad \mathrm{nor}\overline{R}(X,Y)\xi = 0$$

dir. Buradan

$$\tan\overline{R}(X,Y)Z = \overline{R}(X,Y)Z \qquad \tan\overline{R}(X,Y)\xi = \overline{R}(X,Y)\xi$$

elde edilir. Bulunan bu denklemler (1.1.12), (1.1.13), (1.1.14), (1.1.15) de dikkate alınırsa, (1.1.23), (1.1.24), (1.1.25), (1.1.26) denklemleri bulunur.

TEOREM 1.1.4 Teorem 1.1.3 deki koşullara ilave olarak $\overline{\nabla}$ nin düz bir afin konneksiyon olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (1.1.23), (1.1.25) denklemleri, sırasıyla

$$R(X,Y)Z = A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y \quad (1.1.29)$$

$$(\nabla_X A)_\xi Y = (\nabla_Y A)_\xi X \quad (1.1.30)$$

şekline girer.

İSPAT: $\overline{\nabla}$ bir düz afin konneksiyon olduğundan (1.1.27), (1.1.28) denklemlerinin sol tarafı sıfırdır. Bu takdirde (1.1.23), (1.1.25) den (1.1.29), (1.1.30) elde edilir.

1.2 EŞ-AFİN YAPILAR

(M, ∇) bir afin manifold olsun. $\forall_x \in M$ nin bir civarında $\nabla_X W = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir W n−formu (paralel hacim elemanı) mevcutsa, (M, ∇, W) üçlüsüne bir **eş−afin yapı** adı verilir [4].

M, $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi, $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma, ξ bu afin daldırmaya ilişkin transversal vektör alanı ve $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ bir eş afin yapı olsun. M üzerindeki W hacim elemanı, $X_1, X_2, ..., X_n$ $T_x(M)$ nin herhangi bazını göstermek üzere

$$W(X_1, X_2, ..., X_n) = \overline{W}(X_1, X_2, ..., X_n, \xi) \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

TEOREM 1.2.1 M , $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi, $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ bir eş afin−yapı ise

$$\nabla_X W = \tau(X) W \tag{1.2.2}$$

dır.

İSPAT: $\overline{W}(X_1, X_2, ..., X_n, \xi)$ $(n+1)-$ formunun $X \in \chi(M)$ doğrultusundaki türevi

$$(\overline{\nabla}_X \overline{W})(X_1, X_2, ..., X_n, \xi) = X(\overline{W}(X_1, X_2, ..., X_n, \xi))$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \overline{W}(X_1, ..., \overline{\nabla}_X X_i, ..., X_n, \xi) - \overline{W}(X_1, ..., X_n, \overline{\nabla}_X \xi)$$

dir.

(1.1.6), (1.1.7), (1.2.1) kullanılırsa

$$(\overline{\nabla}_X \, \overline{W})(X_1, X_2, ..., X_n, \xi) = X(W(X_1, X_2, ..., X_n))$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \overline{W}(X_1, ..., \nabla_X X_i + h(X, X_i)\xi, ..., X_n, \xi)$$

$$-\overline{W}(X_1, ..., X_n, -S(X) + \tau(X)\xi)$$

bulunur. $\overline{W}$ nin her bileşene göre lineer olduğu ve (1.2.1) bağıntısı gözönüne alınırsa

$$(\overline{\nabla}_X \, \overline{W})(X_1, X_2, ..., X_n, \xi) = X(W(X_1, X_2, ..., X_n))$$

$$-\sum_{i=1}^{n} W(X_1, ..., \nabla_X X_i, X_n) - \tau(X) W(X_1, X_2, ..., X_n)$$

elde edilir.

$$\nabla_X \, W = X(W(X_1, X_2, ..., X_n)) - \sum_{i=1}^{n} W(X_1, ..., \nabla_X X_i, X_n)$$

olduğu hatırlanırsa

$$\overline{\nabla}_X \, \overline{W} = \nabla_X \, W - \tau(X) W$$

elde edilir. $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ nin bir eş$-$afin yapı olması nedeniyle, $\overline{\nabla}_X \, \overline{W} = 0$ olacağından

$$\nabla_X \, W = \tau(X) W$$

bulunur.

SONUÇ:1.2.1 (M, ∇, W) nın bir eş$-$afin yapı olması için gerek ve yeter şart, $\tau = 0$ olmasıdır.

$M, \overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi, (M, ∇, W) ve $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{W})$ eş afin$-$yapılar, $f : (M, \nabla) \rightarrow (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma, ξ bu afin daldırmaya ilişkin transversal vektör alanı olmak üzere, (1.2.1) bağıntısı $T_x(M)$ nin herhangibir $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bazı için gerçekleniyorsa, ξ transversal vektör alanına eş-afin denir.

TEOREM 1.2.2 M,$\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi, (M,∇,W) ve $(\overline{M},\overline{\nabla},\overline{W})$ eş afin yapılar, $f:(M,\nabla)\rightarrow(\overline{M},\overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve ξ bu afin daldırmaya ilişkin transversal vektör alanı olsun. Bu takdirde ξ transversal vektör alanı eş-afin olacak şekilde belirlenebilir.

İSPAT: $\overline{W}(X_1,X_2,...,X_n,\xi)$ ifadesinde

$$\psi=W(X_1,X_2,...,X_n,)\;/\;\overline{W}(X_1,X_2,...,X_n,\xi)$$

olmak üzere ξ yerine $\psi\xi$ konursa,

$$\overline{W}(X_1,X_2,...,X_n,\psi\xi)=\psi\overline{W}(X_1,X_2,...,X_n,\xi)=W(X_1,X_2,...,X_n)$$

bulunurki bu da $\psi\xi$ transversal vektör alanının eş-afin olduğunu gösterir.

Şimdi de afin daldırmaya ilişkin aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1.2.1 İzometrik Daldırılmış Hiperyüzey

(M,g) ve $(\overline{M},\overline{g})$, sırasıyla, n ve $n+1$ boyutlu Riemann manifoldları, ∇ ve $\overline{\nabla}$ de ,M ve $\overline{M}$ üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonu olsunlar. $f:(M,\nabla)\rightarrow(\overline{M},\overline{\nabla})$ izometrik daldırmasını gözönüne alalım. $f:(M,\nabla)\rightarrow(\overline{M},\overline{\nabla})$ izometrik daldırması, ξ birim transversal vektör alanına sahip bir afin daldırmadır.

Örnek 1.2.2 Afin Silindir

$\gamma(t)$, $R^{(n+1)}$ de düzgün bir eğri ve $\xi(t),\gamma(t)$ eğrisi boyunca tanımlı bir vektör alanı olsun. $R^{(n+1)}$ de, $(n-1)$ boyutlu parelel afin uzaylardan γ eğrisinin herhangi bir P noktasından geçenini, $R^{(n-1)}(P)$ ile gösterelim.

Ayrıca aşağıdaki şartların gerşeklendiğini kabul edelim.

i) $\gamma'(t),\xi(t)$ ve $R^{(n-1)}(\gamma(t))$ lineer bağımsız olsunlar.

ii) $\rho = \rho(t)$ diferensiyellenebilen bir fonksiyonu göstermek üzere, $\gamma''(t) = \rho(t)\xi(t)$ olsun.

$t \in R$, $y \in R^{n-1}$ olmak üzere, R^n nin herhangi bir noktası $(t, y) \in R^n$ ile gösterilebilir. $f : R^n \to R^{n+1}$ daldırması $f(t, y) = \gamma(t) + y$ şeklinde tanımlanmış ve f daldırmasına ait transversal vektör alanı $\xi(t, y) = \xi(t)$ şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde, f tasviri bir afin daldırmadır.

R^n de, $x(t) = (t, 0)$ gibi bir eğri gözönüne alınırsa

$$\overline{\nabla}_t f(x_t) = \gamma''(t) = \rho(t)\xi(t)$$

ve buradan da $h(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = \rho(t)$ dir.

Örnek 1.2.3 Graf Daldırma

Düz afin ∇ konneksiyonuna sahip n boyutlu bir manifold M^n ve $\phi : (M^n, \nabla) \to R^n$ bir afin daldırma olsun. R^n yi, R^{n+1} de bir H hiperdüzlemi olarak alalım. H hiperdüzlemine transversal olan paralel vektör alanı ξ olsun. $F : M^n \to R$ herhangibir diferensiyellenebilen fonksiyon olmak üzere, $x \in M^n$ için $f : M^n \to R^{n+1}$ tasvirini $f(x) = \phi(x) + F(x)\xi$ şeklinde tanımlayalım.

$Y \in T_x(M^n)$ için

$$f_*(Y) = \phi_*(Y) + (dF)(Y)\xi$$

olduğundan, f bir daldırmadır.

$X, Y \in \chi(M^n)$ için

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X f_*(Y) &= \overline{\nabla}_X \phi_*(Y) + \overline{\nabla}_X(YF\xi)\\ &= \phi_*(\nabla_X Y) + (XYF)\xi\\ &= f_*(\nabla_X Y) + (XYF - (\nabla_X Y)F)\xi\end{aligned}$$

olduğundan, $f : M^n \to R^{n+1}$ tasviri ikinci esas formu

$$h(X,Y) = XYF - (\nabla_X Y)F$$

olan bir afin daldırmadır.

Tersine olarak, ∇ nın bir düz konneksiyon ve $f : (M^n, \nabla) \to R^{n+1}$ tasviri de $S = 0$ olacak şekilde bir afin daldırma olsun. Bu takdirde f afin daldırması, uygun bir $F : M^n \to R$ için graf daldırmaya eşdeğerdir. Gerçekten, ξ transversal alanının eş-afin olduğunu kabul edersek, $S = 0$ koşulundan $\overline{\nabla}_X \xi = 0$ bulunur ki, buda ξ nin sabit (paralel) bir vektör alanı olduğunu gösterir. $H = R^n$, R^{n+1} uzayının ξ ye transversal olan bir hiperdüzlemi olsun. $\Pi : R^{n+1} \to R^n$ tasviri de ξ doğrultusundaki izdüşüm tasviri, yani $\Pi o f_{.} : M^n \to R^n$ görüntüsü W (R^n de bir açık cümle) olan bir afin daldırma olsun. Bu takdirde, $f(x) = (\Pi o f)(x) + F(x)\xi$ olacak şekilde diferensiyellenebilen bir $F : M^n \to R$ tasviri bulunabilir. O halde f tasviri bir graf daldırmadır.

BÖLÜM 2
TOTAL JEODEZİK AFİN DALDIRMALAR

$f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve α da bu afin daldırmaya ilişkin ikinci esas form olsun. $x \in M$ için $\alpha = 0$ ise, $f : M \to \overline{M}$ afin daldırmasına, $x \in M$ noktasında **total jeodezik** dir denir. Eğer $\forall x \in M$ için $\alpha = 0$ ise, $f : M \to \overline{M}$ afin daldırmasına **total jeodezik afin daldırma** adı verilir [5].

$f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir total jeodezik afin daldırma ise $\alpha = 0$ olacağından (1.1.4), (1.1.10), (1.1.11) denklemleri, sırasıyla

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \tag{2.1}$$

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z \tag{2.2}$$

$$\overline{R}(X,Y)\xi = -(\nabla_X A)_\xi Y + (\nabla_Y A)_\xi X + R^{\perp}(X,Y)\xi \tag{2.3}$$

şekline girer.

$f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma ve A da bu afin daldırmaya ilişkin şekil tensörü olsun. $X, Y, W \in \chi(M)$ ve ξ bir normal vektör alanı olmak üzere A şekil tensörünün ikinci mertebeden kovaryant türevi

$$(\nabla^2_{XY} A)_\xi W = (\nabla_X(\nabla_Y A))_\xi W - (\nabla_{\nabla_X Y} A)_\xi W \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. (1.1.9) u kullanarak (2.4) ifadesi

$$\begin{aligned}(\overset{2}{\nabla}_{XY}A)_\xi W =& \nabla_X(\nabla_Y A)_\xi W - (\nabla_Y A)_\xi \nabla_X W \\ & - (\nabla_Y A)_{\nabla^\perp_X \xi} W - (\nabla_{\nabla_X Y} A)_\xi W \\ =& \nabla_X \nabla_Y A_\xi W - \nabla_X A_\xi \nabla_Y W \\ & - \nabla_X A_{\nabla^\perp_Y \xi} W - \nabla_Y A_\xi \nabla_X W \\ & + A_\xi \nabla_Y \nabla_X W + A_{\nabla^\perp_Y \xi} \nabla_X W \\ & - \nabla_Y A_{\nabla^\perp_X \xi} W + A_{\nabla^\perp_X \xi} \nabla_Y W \\ & + A_{\nabla^\perp_Y \xi\, \nabla^\perp_X \xi} W - \nabla_{\nabla_X Y} A_\xi W \\ & + A_\xi \nabla_{\nabla_X Y} W + A_{\nabla^\perp_{\nabla_X Y} \xi} W \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir.

$f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir afin daldırma, A bu afin daldırmaya ilişkin şekil tensörü ve R de ∇ konneksiyonuna karşı gelen eğrilik tensörü olsun. $X, Y, W \in \chi(M)$ ve ξ bir normal vektör alanı olmak üzere, $((R(X,Y)A)_\xi$

$$(R(X,Y)A)_\xi W = (\overset{2}{\nabla}_{XY} A)_\xi W - (\overset{2}{\nabla}_{YX} A)_\xi W \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. (2.5) i kullanarak, (2.6) ifadesinden

$$(R(X,Y)A)_\xi W = R(X,Y)A_\xi W - A_\xi R(X,Y)W - A_{R^\perp(X,Y)\xi} W \tag{2.7}$$

bulunur.

TEOREM 2.1 $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir total jeodezik afin daldırma, A bu afin daldırmaya ilişkin şekil tensörü, R ve $\overline{R}$ de, sırasıyla, ∇ ve $\overline{\nabla}$ afin konneksiyonlarına karşı gelen eğrilik tensörleri olsun. $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve ξ bir normal vektör alanı olmak üzere,

$$(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)Z = (\nabla_W R)(X,Y)Z \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi =& (R(X,Y)A)_\xi W + A_\xi R(X,Y)W - (\nabla^2_{WX} A)_\xi Y \\
&+ (\nabla^2_{WY} A)_\xi X + (\nabla^{\perp}_{W} R^{\perp})(X,Y)\xi
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

dir.

İSPAT: Bilindiği gibi [6], $\overline{R}(X,Y)Z$ nin W doğrultusundaki kovaryant türevi,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)Z =& \overline{\nabla}_W \overline{R}(X,Y)Z - \overline{R}(\overline{\nabla}_W X,Y)Z \\
&- \overline{R}(X,\overline{\nabla}_W Y)Z - \overline{R}(X,Y)\overline{\nabla}_W Z
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

şeklindedir. (2.1), (2.2) denklemleri (2.10) da dikkate alınırsa (2.8) bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi =& \overline{\nabla}_W \overline{R}(X,Y)\xi - \overline{R}(\overline{\nabla}_W X,Y)\xi \\
&- \overline{R}(X,\overline{\nabla}_W Y)\xi - \overline{R}(X,Y)\overline{\nabla}_W \xi
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

bağıntısında (2.1), (2.3) ve (1.1.5) formülleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi =& -\nabla_W(\nabla_X A)_\xi Y + \nabla_W(\nabla_Y A)_\xi X \\
&- A_{R^{\perp}(X,Y)\xi} W + \nabla^{\perp}_{W} R^{\perp}(X,Y)\xi \\
&+ (\nabla_{\nabla_W X} A)_\xi Y - (\nabla_Y A)_\xi \nabla_W X \\
&- R^{\perp}(\nabla_W X, Y)\xi + (\nabla_X A)_\xi \nabla_W Y \\
&- (\nabla_{\nabla_W Y} A)_\xi X - R^{\perp}(X, \nabla_W Y)\xi \\
&+ R(X,Y)A_\xi W + (\nabla_X A)_{\nabla^{\perp}_{W}\xi} Y \\
&- (\nabla_Y A)_{\nabla^{\perp}_{W}\xi} X - R^{\perp}(X,Y)\nabla^{\perp}_{W}\xi
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

bulunur. (2.12) de (2.5) bağıntısı dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi =& R(X,Y)A_\xi W - A_{R^{\perp}(X,Y)\xi} W - (\nabla^2_{WX} A)_\xi Y \\
&+ (\nabla^2_{WY} A)_\xi X + (\nabla^{\perp}_{W} R^{\perp})(X,Y)\xi
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

elde edilir. Son bağıntıda (2.7) kullanılırsa (2.9) bağıntısını elde edilir.

(M, ∇) bir afin manifold ve R de ∇ konneksiyonuna ilişkin sıfırdan farklı eğrilik tensörü olsun. $\nabla R = \phi \otimes R$ bağıntısı gerçeklenecek şekilde bir ϕ 1−formu (rekürant formu) mevcutsa, (M, ∇) afin manifolduna **rekürant eğrilikli afin manifold** denir.

TEOREM 2.2 $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ bir total jeodezik afin daldırma ve $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ manifoldu rekürant eğrilikli ($\overline{\nabla}\,\overline{R} = \overline{\phi} \otimes \overline{R}$) afin manifold olsun. Bu takdirde, (M, ∇) manifoldu

(a) Düzdür,

veya

(b)Rekürant eğriliklidir. Yani, $\overline{\phi}$ rekürant formunun M üzerine geri çekilmişi ϕ olmak üzere, $\nabla R = \phi \otimes R$ dir.

İSPAT: (a) $\overline{R} = 0$ olması halinde f total jeodezik afin daldırma olduğundan, (2.2) denklemine göre $R = 0$ dır. Yani (M, ∇) afin manifoldu düzdür.

(b) $\overline{R} \neq 0$ ve $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ rekürant eğrilikli bir afin manifold olsun. (2.2) ve (2.8) denklemleri gözönüne alınırsa, $\overline{\phi}$ nin M üzerine geri çekilmişi ϕ olmak üzere, $\nabla R = \phi \otimes R$ elde edilir. Bu da (M, ∇) afin manifoldunun rekürant eğrilikli olduğunu gösterir.

$x \in M$ ve $\forall \xi \in N_x(M)$ için, I birim tasviri göstermek üzere, $A_\xi = \rho(\xi)I$ bağıntısını sağlayacak şekilde, N_x normal uzayı üzerinde tanımlı bir ρ 1−formu mevcutsa, f ye $x \in M$ noktasında **ombilik** denir. $\forall x \in M$ için f ombilik ise, f ye **ombilik** denir.

f bir afin daldırma ve ρ da $N(M)$ normal demeti üzerinde tanımlı bir 1− form olsun. Bu takdirde, ρ nun $\nabla^\perp$ konneksiyonuna göre birinci ve ikinci mertebeden kovaryant türevleri, sırasıyla

$$(\overset{\perp}{\nabla}_X \rho)(\xi) = X((\rho(\xi)) - \rho(\overset{\perp}{\nabla}_X \xi) \qquad (2.14)$$

$$\overset{\perp 2}{\nabla}_{XY}\rho = \overset{\perp}{\nabla}_{X}(\overset{\perp}{\nabla}_{Y}\rho) - \overset{\perp}{\nabla}_{\nabla_X Y}\rho \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır.

f bir afin daldırma ve ρ, $N(M)$ normal demeti üzerinde tanımlı bir 1−form, $R^{\perp}$ de $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna karşı gelen eğrilik tensörü olmak üzere

$$R^{\perp}(X,Y)\rho = \overset{\perp 2}{\nabla}_{XY}\rho - \overset{\perp 2}{\nabla}_{YX}\rho \tag{2.16}$$

şeklinde olsun.

f, afin daldırması ombilik,yani $A_\xi = \rho(\xi)I$ ise,

$$(\nabla_X A)_\xi Y = (\overset{\perp}{\nabla}_X \rho)(\xi)Y \tag{2.17}$$

$$(\overset{2}{\nabla}_{XY} A)_\xi Z = (\overset{\perp 2}{\nabla}_{XY}\rho)(\xi)Z \tag{2.18}$$

$$(R(X,Y)A)_\xi Z = (R^{\perp}(X,Y)\rho)(\xi)Z \tag{2.19}$$

bağıntıları elde edilir.

TEOREM 2.3 $f : (M,\nabla) \to (\overline{M},\overline{\nabla})$ bir total jeodezik afin daldırma ve $(\overline{M},\overline{\nabla})$ rekürant eğrilikli ($\overline{\nabla}\ \overline{R} = \overline{\phi}\otimes\overline{R}$) bir afin manifold olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} A_\xi R(X,Y)W = &-(R(X,Y)A)_\xi W - (\overset{2}{\nabla}_{WY} A)_\xi X + (\overset{2}{\nabla}_{WX} A)_\xi Y \\ &+ \phi(W)((\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y) \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$(\overset{\perp}{\nabla}_W R^{\perp})(X,Y)\xi = \phi(W)R^{\perp}(X,Y)\xi \tag{2.21}$$

elde edilir.

İSPAT: (2.9) bağıntısından

$$\begin{aligned} A_\xi R(X,Y)W = &-(R(X,Y)A)_\xi W - (\overset{2}{\nabla}_{WY} A)_\xi X + (\overset{2}{\nabla}_{WX} A)_\xi Y \\ &+ (\overline{\nabla}_W \overline{R})(X,Y)\xi - (\overset{\perp}{\nabla}_W R^{\perp})(X,Y)\xi \end{aligned} \tag{2.22}$$

bulunur. $\overline{\phi}$ rekürant formunun (M,∇) manifolduna geri çekilmişi ϕ olmak üzere, (2.3) gereğince (2.22) nin teğetsel ve normal kısımlarının eşitlenmesiyle (2.20) ve (2.21) bağıntıları elde edilir.

Teorem 2.3 deki koşullara ilave olarak f nin ombilik olduğunu kabul edilirse (2.17), (2.18), (2.19) bağıntıları gereğince,(2.20) bağıntısı

$$\begin{aligned}\rho(\xi)R(X,Y)W = &-(\overset{\perp}{R}(X,Y)\rho)(\xi)W \\ &-((\overset{\perp 2}{\nabla}_{WY})\rho)(\xi)-\phi(W)(\overset{\perp}{\nabla}_{Y}\rho)(\xi))X \\ &+((\overset{\perp 2}{\nabla}_{WX})\rho)(\xi)-\phi(W)(\overset{\perp}{\nabla}_{X}\rho)(\xi))Y\end{aligned} \tag{2.23}$$

şekline girer.

(M,∇) bir afin manifold ve $x\in M$ olsun. $\gamma(0)=x$ olmak üzere her γ jeodeziği için $(s_x o\gamma)(t)=\gamma(-t)$ olacak şekilde bir $s_x:(M,\nabla)\to(M,\nabla)$ afin tasviri mevcutsa, bu tasvire (M,∇) nın x'e göre **afin simetriği** denir. Eğer (M,∇) nın $\forall x\in M$ ye göre bir afin simetriği varsa (M,∇) ya bir **afin simetrik uzay** adı verilir.

(M,∇) bir afin manifold olsun. $\forall x\in M$ nin bir V civarında tanımlı bir $s_x:(V,\nabla)\to(M,\nabla)$ afin tasviri,$\forall v\in T_x(M)$ için $(s_x)_* v=-v$ bağıntısını gerçekleyecek şekilde mevcutsa,(M,∇) manifolduna **yerel simetrik afin uzay** denir.

TEOREM 2.4 Boyutu üç veya üçten büyük olan (M,∇) afin manifolduna ilişkin Weyl projektif eğrilik tensörü P, ∇ konneksiyonuna karşı gelen eğrilik tensörü R ve $x\in M$ olsun. $(0,2)$ tipinde B ve C tensörleri, $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R_x(X,Y)Z=B(X,Y)Z-C(Y,Z)X+C(X,Z)Y \tag{2.24}$$

bağıntısını gerçekleyecek şekilde mevcutsa, $P_x=0$ dır.

İSPAT: Birinci Bianchi özdeşliğine göre

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0 \tag{2.25}$$

dir. (2.25) den (2.24) yardımıyla

$$B(X,Y) = C(X,Y) - C(Y,X) \tag{2.26}$$

bulunur.

Buradan, (1.1.20) de tanımlanan Ricci tensörü

$$\begin{aligned} Ric_x(Y,Z) &= iz\{X \to R_x(X,Y)Z\} \\ &= B(Z,Y) - (n-1)C(Y,Z) \qquad (2.27) \\ &= -nC(Y,Z) + C(Z,Y) \end{aligned}$$

şekline girer. (2.27) bağıntısı kullanılarak, (1.1.21) denklemi ile tanımlanan L tensörü

$$\begin{aligned} L_x(Y,Z) &= -(n^2-1)^{-1}(nRic_x(Y,Z) + Ric_x(Z,Y)) \\ &= C(Y,Z) \end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklinde yazılabilir. (1.1.22) de (2.24),(2.26) ve (2.28) bağıntıları gözönüne alınırsa $P_x = 0$ elde edilir.

TEOREM 2.5 $f : (M,\nabla) \to (\overline{M},\overline{\nabla})$ total jeodezik ve ombilik ($A \neq 0$) bir afin daldırma olsun. Bu takdirde,

(a) $boyM \geq 3$ ve $(\overline{M},\overline{\nabla})$ rekürant eğrilikli bir afin manifold

veya

(b) $(\overline{M},\overline{\nabla})$ yerel simetrik bir afin manifold

ise, (M,∇) afin manifoldu yerel projektif düzdür.

İSPAT:Eğer $(\overline{M},\overline{\nabla})$ manifoldu düz ise (2.2) denkleminden (M,∇) manifoldunun da düz olduğu kolayca görülür. $\overline{R} \neq 0$ ve $\overline{\nabla}\ \overline{R} = \overline{\phi} \otimes \overline{R}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (2.2) ve (2.8) den, $\overline{\phi}$ nin M üzerine geri çekilmişi ϕ olmak üzere, $\nabla R = \phi \otimes R$ dir. Buradan, sırasıyla (1.1.20), (1.1.21),(1.1.22) denklemleri ile tanımlanan Ricci tensörü, L tensörü ve P Weyl Projektif eğrilik tensörü $\nabla Ric = \phi \otimes Ric$, $\nabla L = \phi \otimes L$, $\nabla P = \phi \otimes P$ bağıntılarını gerçekler. $\nabla P = \phi \otimes P$ olduğundan, P tensörü M üzerinde ya heryerde sıfırdır, yada hiçbir yerde sıfır değildir [7],[8]. Diğer taraftan, f total jeodezik afin daldırması ombilik olduğundan, (2.23) formülü ile belirli R_x eğrilik tensörünün $x \in M$ noktasında (2.24) formunda olduğu görülür. Buradan, Teorem 2.4 ye göre, $x \in M$ noktasında $P_x = 0$ olur. $x \in M$ için $P_x = 0$ olduğundan M üzerinde P özdeş olarak sıfırdır. O halde, (M, ∇) afin manifoldu yerel projektif düz bir afin manifolddur. İki boyutlu yerel simetrik afin uzayın daima yerel projektif düz olduğu gözönüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada (M, ∇) afin manifoldunun $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ afin manifolduna bir total jeodezik afin daldırması gözönüne alınmış ve $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ total jeodezik afin daldırmasında $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ manifoldunun rekürant eğrilikli olması halinde,(M, ∇) nin rekürant eğrilikli veya düz olması gerektiğini ifade eden teoremin ispatı verilmiştir. Ayrıca, bu koşullara ilave olarak, f nin ombilik ve M nin boyutunun üç veya üçten daha büyük olması halinde, (M, ∇) nun bir yerel projektif düz uzay olduğu sonucu elde edilmiştir.

Burada ele alınan problemlerin Weyl altmanifoldlarına genelleştirilmesi düşünülebilir.

KAYNAKLAR

[1] NOMIZU, K. _PINKAL, U.: Cubic form theorem for affine immersions. Results in Math. 13, 338-362 (1988)

[2] EINSENHART, L.P.: Non -Riemannian geometry. Amer. Math. Soc. (1986)

[3] NOMIZU, K._PINKAL, U.: On a certain class of homegeneous pro - jectively flat manifolds, SFB/MPI Preprint 85/44; to appear in Tohoku Math. J. (1969)

[4] NOMIZU, K. _PINKAL, U.: On the geometry of affine immersions. Math. Z 195, 165-178 (1987)

[5] OLSZAK, Zbigniew: On totaly geodesic affine immersions, Journal of geometry, Vol. 47 (1993)

[6] KOBAYASHI, S._NOMIZU, K.: Foundations of differential geometry, Vol I. and II. Interscience Publ., New York,(1963 and 1969)

[7] WONG, Y.C.: Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold. Trans. Amer. Math. Soc. 99 325-341 (1969)

[8] WONG, Y.C.: Linear connections with zero torsion and recurrent curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 102, 471-506 (1962)

ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında İstanbul'da doğdu. 1982 yılında Pertevniyal Lisesi'ni bitirdikten sonra, aynı yıl girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünden 1987 yılında mezun oldu. 1990 yılından beri İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

AFİN DALDIRMALAR ve TOTAL JEODEZİK AFİN DALDIRMALAR

Hakan DEMİRBÜKER

Anahtar Kelimeler: Afin Manifold, Total Jeodezik Afin Daldırma, Rekürant Eğrilikli Afin Manifold, Yerel Projektif Düz Uzay.

Özet: İki bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde afin daldırmalar ve eş-afin yapılara ait bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, (M, ∇) afin manifoldunun $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ afin manifolduna bir total jeodezik afin daldırması gözönüne alınmış ve $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$ total jeodezik afin daldırmasında $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ manifoldunun rekürant eğrilikli olması halinde, (M, ∇) nin rekürant eğrilikli veya düz olması gerektiğini ifade eden teoremin ispatı verilmiştir. Ayrıca, bu koşullara ilave olarak, f nin ombilik ve M nin boyutunun üç veya üçten daha büyük olması halinde, (M, ∇) manifoldunun bir yerel projektif düz uzay olduğu sonucu elde edilmiştir.

AFFINE IMMERSIONS and TOTALY GEODESIC AFFINE IMMERSIONS

Hakan DEMİRBÜKER

Keywords: Affine Manifold, Totally Geodesic Affine Immersion, Affine Manifold of Recurrent Curvature, Locally Projectively Flat Space.

Abstract: In this work, after having given the fundamental definitions related to affine immersions and equiaffine structures, some theorem concerning these concepts are proved. We next consider the totaly geodesic affine immersion $f : (M, \nabla) \to (\overline{M}, \overline{\nabla})$, where $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ is an affine manifold of recurrent curvature and prove that (M, ∇) is flat, or of recurrent curvature. Moreover, if f is additionally umbilicial with the shape tensor $A \neq 0$ and $\dim M \geq 3$, then (M, ∇) is locally projectively flat.