

TERMOELASTİSİTE VE TERMOVİSKOELASTİSİTE ANALİZİNDE İKİLİ KARŞITLIK SINIR ELEMAN YÖNTEMİNİN KULLANIMI

Besim Baranoğlu ve Yalçın Mengi

Atılım Üniversitesi Üretim Mühendisliği Bölümü, ANKARA

ODTÜ Mühendislik Bilimleri Bölümü, 06530 - ANKARA

ÖZ

Bu çalışmada termoviskoelastisite problemlerinin analizi için bir sınır eleman yöntemi sunulmaktadır. Sunulan formülasyon, hem girişimli hem de girişimsiz durumları kapsamakta ve termoelastik malzemeyi özel bir durum olarak içermektedir. Termoviskoelastisite denklemlerindeki girişim terimleri ikili karşıtlık yöntemi ile ele alınmaktadır. Formülasyon Fourier uzayında ele alınmakta ve zaman uzayındaki davranış ters Fourier dönüşümü kullanılarak bulunabilmektedir. Elde edilen denklemlerin çözümü için iki yöntem önerilmiştir: İteratif ve direk. İteratif yöntemde önceden belirlenen bir yakınsama kriterine ulaşana kadar ısı ve mekanik denklemler ayrı ayrı olarak tekrarlı bir şekilde çözülmektedir. Direk metotta ise elde edilen denklemler tek bir denklem içinde birleştirilmektedir. Bu sayede çözüm tek adımda elde edilebilmektedir. Değerlendirme için bazı girişimli ve girişimsiz örnek problemler ele alınmış ve literatürdeki en basit baz fonksiyonun performansı denenmiştir.

ABSTRACT

A boundary element method is presented for the analysis of thermoviscoelasticity problems. The formulation covers both uncoupled and coupled cases; and contains thermoelastic material as a special case. The coupling terms in the equations of thermoviscoelasticity are handled with the use of dual reciprocity approximation. The formulation is presented in Fourier Space, where the determination of the response in time space requires the inversion which can be carried out conveniently by Fast Fourier Transform algorithm. Two methods are proposed to solve the resulting equations: Iterative and direct. In the iterative algorithm, the thermal and the mechanical equations are solved separately in an iterative manner until a selected convergence criterion is obtained. In the direct method, the equations are combined in such a way that a single set of equations is obtained. This way, the solution can be obtained in one step. For assessment, some sample problems, both coupled and uncoupled, are considered and the performance of a simple base function in literature is tested.

1. GİRİŞ

Sınır eleman yöntemi (SEY), mekaniğin birçok alanında kullanılmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir [1]. Matematiksel formülasyonu diğer sayısal metodlara (örn. sonlu fark ve sonlu eleman metodlarına) göre daha karmaşık ve elde edilen integral denklemler içerdikleri tekil integraller yüzünden sayısal olarak hesaplanmaları daha zor olmasına rağmen, SEY özellikle tüm çözüm bölgesi yerine sadece sınır bölgesini ayrıklaştırması, üç boyutlu problemleri daha iyi çözebilmesi, gerilim konsantrasyonu problemlerinde daha iyi sonuçlar vermesi ve sonsuz veya yarı-sonsuz çözüm bölgelerine uygulanabilmesi sebebiyle özellikle katı ve akışkanlar mekaniğinin pek çok problemlerinde kendisine dikkate değer derecede uygulama alanı bulmuştur.

Sınır eleman yönteminin bir dezavantajı, önceden bulunmuş olması gereken temel çözümler (TÇ) içermesidir. Bu TÇ, çözülmek istenen matematiksel modelin bünye denklemlerine (BD) bağlı olarak çok karmaşık fonksiyonlar içerebilmektedirler. Karmaşık TÇ iki önemli sorun ortaya çıkarmaktadır: TÇ'in hesaplanması uzun sürmekte, ve bu hesaplamalar sırasında özellikle tekil integrallerde karmaşık birtakım sayısal yöntemler uygulanması gerekmektedir. Bu sebeple, ilk olarak 1982 yılında İkili Karşıtlık Sınır Eleman Yöntemi (İKSEY), elastodinamik TÇ'den daha basit olan elastostatik TÇ'i kullanmak için ortaya atılmıştır [2]. Bu çalışmada, ve bundan sonra 1983 yılındaki çalışmalarında [3] Nardini ve Brebbia elastodinamik BD'ndeki ivme terimlerini ($\rho \ddot{u}_i$) birer homojen olmayan terim, *iç kaynak*, olarak düşünmüş ve bu iç kaynağı sınıra taşımak için İKSEY'ni kullanmışlardır. Bu sayede, elastostatik TÇ'ini kullanmak mümkün olmuştur. 1987 yılında girişimsiz termoelastisite (TE) problemleri için ilk İKSEY çözümünü D. Henry doktora tezinde uygulamıştır [4]. 1988 yılındaki çalışmalarında kullandıkları yönteme farklı bir isim (particular integral method) vermelerine karşın yapılan işlemin temelde aynı olması sebebiyle yine İKSEY olarak adlandıracağımız yöntem ile Henry ve Banerjee bu metodu elastoplastisite problemlerine uygulamışlardır [5]. Bu çalışmalarda homojen olmayan terimler (girişimsiz TE probleminde mekanik denklemlerdeki ısı girişim terimi ve elastoplastisite denklemlerinde plastik terim) birer iç kaynak terimleri olarak kabul edilip sayısal olarak çözülmektedir. 1992 yılında İKSEY konusunda yayınlanan kitapta, metodun birçok türdeki kaynak terimi için nasıl uygulanacağı gösterilmiştir [6].

Girişimli TE problemleri için TÇ 1983 yılında yayınlanmıştır [7]. Laplace transform uzayında verilmiş olan bu TÇ çok karmaşık matematiksel fonksiyonlar ve sayısal olarak hesaplanması çok zor olan tekil fonksiyonlar içermektedir. TE problemlerinde İKSEY kullanımı ilk olarak yukarıda bahsi geçen 1987 tarihli doktora teziyle olmuş, daha sonra 1988'de makale olarak yayınlanmıştır [8]. Bu çalışmalarda yatışkın haldeki (steady state) girişimsiz TE problemi dikkate alınmıştır. Daha sonra Golberg, Chen ve Bowman TE problemlerinde kullanılabilecek bazı fonksiyonları konusunda bir çalışma yapmışlardır [9]. İKSEY yönteminin TE problemlerinde kullanılması hususundaki çalışmaların bir özeti 2001 yılında yayınlanmıştır [10]. Tüm bu çalışmalarda İKSEY yatışkın haldeki girişimsiz TE problemlerine uygulanmış ve mekanik denklemlerdeki ısı girişim terimi bir iç kaynak olarak düşünülmüş ve sayısal olarak çözülmüştür. Girişimli, dinamik ve termoviskoelastik (TVE) malzemeyi içerecek şekilde bir İKSEY çalışması, iteratif çözüm içerecek şekilde 2003 yılında doktora tezine konu olmuştur [11]. Aynı metod, bu sefer direk çözüm uygulanarak 2006 yılında yayınlanmıştır [12].

Bu çalışmada, TE ve TVE problemlerinin İKSEY ile analizi için geliştirilen formülasyon

gösterilmiştir. Bu formülasyon sayesinde literatürdeki karmaşık temel çözümlerin kullanımı yerine daha basit yapıya sahip olan elastodinamik ve Helmholtz denklemlerinin temel çözümlerinin kullanılması mümkün olmuştur. Problemin sayısal çözümünde iki ayrı yöntem (iteratif ve direk) önerilmiş ve iki yöntem örnek problemler yardımı ile karşılaştırılmıştır.

2. FORMÜLASYON

TVE bünye denklemleri, Fourier uzayında ve Cartesian koordinatlarda aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\nabla^2 u_i + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\partial_i(\partial_k u_k) - \tilde{\beta}\partial_i\theta + f_i + \rho\omega^2 u_i &= 0 \\ C_v i\omega\theta + T_0\beta i\omega\partial_k u_k &= r + k\nabla^2\theta + W_D\end{aligned}\quad (1)$$

Bu denklemlerde u_i deplasman bileşenlerini, θ referans sıcaklığından sapmayı, $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\lambda}$ sırasıyla kompleks kayma ve Lamé modüllerini, ρ ise malzeme yoğunluğunu temsil etmektedir. Kompleks modüller, malzeme modeline bağlı olarak kayma ve Lamé modüllerinin denge değerlerine (μ ve λ) bağlı olarak ifade edilebilir. Denklemlerde C_v sabit hacimdeki ısı kapasitesini, T_0 referans sıcaklığını, k ısı iletkenlik katsayısını göstermektedir. $\tilde{\beta}$ ve β , $\tilde{\beta} = (2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda})\alpha$ ve $\beta = (2\mu + 3\lambda)\alpha$ olarak verilmekte, burada α malzemenin ısı genleşme katsayısını ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemlerde r terimi ısı üretimini, f_i kütleli kuvvetleri ve W_D dissipasyonu, ω ve i , sırasıyla açısal frekansı (Fourier parametresini) ve imajiner sayıyı temsil etmektedir; tekrar eden bir indis, o indisin sınırları dahilinde toplama işlemi, ∂_k ise $\partial/\partial x_k$ operatörünü ifade etmektedir. Yukarıdaki denklemlerden birincisi mekanik denklemler (MD) ikincisi ise ısı denklemleri (ID) olarak adlandırılacaktır.

Isı üretimi, kütleli kuvvetler ve dissipasyon gözardı edildiği takdirde, (1) denklemleri aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$L_{ij}(u_j) = \tilde{\beta}\partial_i\theta \quad ; \quad L(\theta) = \eta\partial_k u_k \quad (2)$$

Bu denklemlerde $L_{ij} = \delta_{ij}\tilde{\mu} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\partial_{ij} + \rho\omega^2\delta_{ij}$ ve $L = k\nabla^2 - i\omega C_v$ operatörlerini tanımlamaktadır. Bu iki denklem, MD'deki ısı, $\tilde{\beta}\partial_i\theta$, ve ID'deki mekanik $\eta\partial_k u_k$, girişim terimleri ile birbirine bağlıdır. ID'deki $\eta = T_0\beta i\omega$ terimini girişim katsayısı (GK) olarak adlandıracağız. Girişimsiz TE BD'nde bu katsayı sıfıra eşit kabul edilir. Bu durumda denklemlerin çözümü ID'den sıcaklıkların elde edilerek MD'de yerine konulması şekline döndürür ve problemin analizi basitleşir.

Denklem (2)'deki $\tilde{\beta}\partial_i\theta$ ve $\eta\partial_k u_k$ terimleri iç kaynak olarak düşünülürse (θ ve u_i) çözümleri homojen (θ_c ve u_i^c) ve homojen olmayan (θ_p ve u_i^p) çözümlerin toplamı olarak ifade edilebilir:

$$\theta = \theta_c + \theta_p \quad ; \quad u_i = u_i^c + u_i^p \quad (3)$$

Bu çözümler, aşağıdaki denklemleri sağlamalıdır:

$$\begin{aligned}L(\theta_c) &= 0 & L(\theta_p) &= \eta\partial_k u_k \\ L_{ij}(u_j^c) &= 0 & L_{ij}(u_i^p) &= \tilde{\beta}\partial_i\theta\end{aligned}\quad (4)$$

Sol taraftaki denklemler Helmholtz (üstte) ve Elastodinamik (altta) problemlerin BD'dir ve literatürde SEY formülasyonları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$C(B)\theta_c(B) - \int_S G^t(B,P)q_c(P)dA + \int_S H^t(B,P)\theta_c(P)dA = 0 \quad (5)$$

$$C_{ij}(B)u_j^c(B) - \int_S G_{ij}(B,P)t_j^c(P)dA + \int_S H_{ij}(B,P)u_j^c(P)dA = 0$$

Burada G^t ve H^t Helmholtz denkleminin, G_{ij} ve H_{ij} ise elastodinamik problemin temel çözümleridir. B noktası sabit noktayı, P noktası ise integrasyon noktasını temsil etmektedir. C katsayısı B noktası çözüm bölgesinin içindeyse 1, dışındaysa 0 ve eğer köşe içermeyen düzgün bir sınır noktasıysa 1/2 değerine sahip olmaktadır ve $C_{ij} = \delta_{ij}C$ olarak verilebilir; q_c sıcaklığın homojen kısmına bağlı $q_c = k\frac{\partial\theta_c}{\partial n}$ şeklinde tanımlanan ısı akısı, $t_j^c = \tilde{L}_{ij}(u_j^c)$ homojen deplasman bileşenine bağlı gerilme vektörü bileşenidir ($\tilde{L}_{ij} = \tilde{\mu}(n_j\partial_i + \delta_{ij}n_k\partial_k) + \tilde{\lambda}n_i\partial_j$). Benzer şekilde homojen olmayan sıcaklık farkına bağlı ısı akısını $q_p = k\frac{\partial\theta_p}{\partial n}$, ve homojen olmayan deplasmana bağlı gerilme vektörü bileşenlerini $t_j^p = \tilde{L}_{ij}(u_j^p)$ şeklinde tanımlarsak toplam ısı akısı ve toplam gerilme vektörü bileşenleri için

$$q = q_c + q_p \quad ; \quad t_j = t_j^c + t_j^p - \tilde{\beta}n_j\theta \quad (6)$$

ilişkilerini elde ederiz. Denklem (3) ve (6) denklem (5) içine yerleştirildiğinde aşağıdaki entegral denklemler elde edilir:

$$C\theta - \int_S G^t q dA + \int_S H^t \theta dA = C\theta_p - \int_S G^t q_p dA + \int_S H^t \theta_p dA \quad (7)$$

$$C_{ij}u_j - \int_S G_{ij} t_j dA + \int_S H_{ij} u_j dA - \tilde{\beta} \int_S G_{ij} n_j \theta dA = C_{ij}u_j^p - \int_S G_{ij} t_j^p dA + \int_S H_{ij} u_j^p dA$$

Bu denklemlerdeki integrallerin tamamı sınır bölgesinde alınmaktadır ve homojen olmayan θ_p ve u_i^p çözümleri elde edildiği takdirde uygun sınır koşulları dahilinde çözülebilir. Ancak bu homojen olmayan çözümlerin elde edilmesi birçok durum için mümkün değildir. Bu sebepten dolayı *yaklaşık* ya da *sayısal* bir çözüm olarak ikili karşıtlık yöntemi uygulanabilir. Bunun için öncelikle sıcaklık farkı ve deplasman dağılımları seri açılımı olarak ifade edilir:

$$\theta(P) \cong \sum_{n=1}^{N+M} \phi_n \psi_n(P) \Rightarrow \partial_i \theta(P) = \sum_{n=1}^{N+M} \phi_n \partial_i \psi_n(P) \quad (8)$$

$$u_i(P) \cong \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i^n \psi_n(P) \Rightarrow \partial_i u_i(P) = \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i^n \partial_i \psi_n(P) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Bu açılımlarda $\psi_n(P)$ seçilmiş olan baz fonksiyonlarının P noktasındaki değerlerini, ϕ_i^n ise seri açılımındaki katsayıları temsil etmektedir. N sınır üzerinde M ise ek olarak

çözüm bölgesi içinde seçilmiş kolokasyon noktası sayısıdır. Seri açılımlarında kullanılan baz fonksiyonları bu çalışmada *radyal baz fonksiyonları* olarak tercih edilmiştir. Bu noktada $\hat{\theta}_i^n$ çözümlerini $L(\hat{\theta}_i^n) = \eta \partial_i \psi_n$ denkleminin çözümleri ve $\hat{q}_i^n = k \frac{\partial \hat{\theta}_i^n}{\partial n}$, ayrıca \hat{u}_i^n çözümlerini $L_{ij}(\hat{u}_j^n) = \tilde{\beta} \partial_i \psi_n$ denkleminin çözümleri ve $\hat{t}_i^n = \tilde{L}_{ij}(\hat{u}_j^n)$ olarak kabul edelim. Bu tanımlar ve (4) ve (8) denklemleri ışığında aşağıdaki bağıntılar matematiksel olarak elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \theta_p(\mathbf{P}) &= \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i^n \hat{\theta}_i^n(\mathbf{P}) \quad ; \quad q_p(\mathbf{P}) = \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i^n \hat{q}_i^n(\mathbf{P}) \\ u_i^p(\mathbf{P}) &= \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i \hat{u}_i^n(\mathbf{P}) \quad ; \quad t_i^p(\mathbf{P}) = \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i \hat{t}_i^n(\mathbf{P}) \end{aligned} \quad (9)$$

Bu ifadeler, (7)'de yerlerine konulursa

$$C\theta - \int_S G^t q dA + \int_S H^t \theta(\mathbf{P}) dA = \sum_{n=1}^{N+M} \phi_i^n \left(C \hat{\theta}_i^n - \int_S G^t \hat{q}_i^n(\mathbf{P}) dA + \int_S H^t \hat{\theta}_i^n dA \right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & C_{ij} u_j - \int_S G_{ij} t_j dA + \int_S H_{ij} u_j dA - \tilde{\beta} \int_S G_{ij} n_j \theta dA \\ &= \sum_{n=1}^{N+M} \phi_n \left(C_{ij} \hat{u}_j^n - \int_S G_{ij} \hat{t}_j^n dA + \int_S H_{ij} \hat{u}_j^n dA \right) \end{aligned} \quad (11)$$

denklemleri elde edilir. Bu noktada eğer deplasman dağılımının bilindiği varsayılırsa kolokasyon metodu ile ϕ_i^n katsayıları elde edilebilir. Bunun için $\phi_i = \underline{\psi}^{-1} \cdot \underline{u}_i$ ilişkisi kullanılabilir. Burada \underline{u}_i ve ϕ_i sırasıyla deplasman bileşenlerini ve seri açılım katsayılarını içeren kolon vektörlerini, $\underline{\psi}$ ise baz fonksiyonu değerlerini içeren kare matrisi ifade etmektedir. Benzer şekilde, sıcaklık dağılımının bilindiği varsayılırsa ϕ_n katsayıları da benzer bir şekilde $\phi = \underline{\psi}^{-1} \cdot \underline{\theta}$ matris denkleminde elde edilebilir. Uygun sınır elemanları seçimi ile sınır ayrıklaştırması yapıldıktan sonra (10) ve (11) denklemleri aşağıdaki matris denklemleri haline dönüşür:

$$\begin{aligned} \underline{H}^b \cdot \underline{\theta}^b - \underline{G}^b \cdot \underline{q}^b &= \underline{S}^t \cdot \underline{u} \quad ; \quad \underline{S}^t = \left(\underline{H}^b \cdot \hat{\underline{\theta}} - \underline{G}^b \cdot \hat{\underline{q}} \right) \cdot \hat{\underline{\psi}}^{-1} \\ \underline{H}^b \cdot \underline{u}^b - \underline{G}^b \cdot \underline{t}^b - \tilde{\beta} \tilde{\underline{G}}^b \cdot \underline{\theta}^b &= \underline{S} \cdot \underline{\theta} \quad ; \quad \underline{S} = \left(\underline{H}^b \cdot \hat{\underline{u}} - \underline{G}^b \cdot \hat{\underline{t}} \right) \cdot \hat{\underline{\psi}}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Burada $\hat{\underline{\psi}}^{-1}$ matrisi diagonal alt matrisleri iki boyutlu problemlerde iki, üç boyutlu problemlerde üç $\hat{\underline{\psi}}^{-1}$ matrisi tarafından oluşturulmuş diğer elemanları 0 olan bir kare matristir. $\tilde{\underline{G}}^b$ matrisinin bileşenleri $\tilde{G}_{ij} = n_1^j G_{i,d(j-d+1)} + \dots + n_d^j G_{i,dj}$ ($i = 1..(dN)$; $j = 1..N$) bağıntısıyla elde edilebilir. Burada d çözülen problemin boyutunu ifade eder (iki boyutlu problemler için $d = 2$, üç boyutlu problemler için $d = 3$). Matris denklemindeki b üsteli ilgili matrisin sınır noktalarında hesaplandığı anlamına gelmektedir. Bu çalışmada $\psi_n = 1+r/a$

olarak seçilmiştir. Burada r kollokasyon noktasından ölçülen radyal mesafeyi ve a analizi yapılan problemle ilgili olarak seçilen karakteristik bir boyutu göstermektedir. Bu baz fonksiyonu için $\hat{\theta}_i^n$ ve \hat{u}_i^n çözümleri ve bunlara bağlı \hat{q}_i^n ve \hat{t}_i^n literatürde verilmiştir [12]. Denklem (12)'deki $\hat{\theta}$, \hat{q} , \hat{u} ve \hat{t} matrisleri bu çözümler hesaplanarak elde edilirler. Uygun sınır şartları dahilinde Denklem (12) sınır değerleri için çözülebilirse, elde edilen sınır değerleri

$$\begin{aligned}\underline{\theta}^i &= \underline{G}^i \cdot \underline{q}^b - \underline{H}^i \cdot \underline{\theta}^b + \underline{Y}^t \cdot \underline{u} & ; & \quad \underline{Y}^t = \left(\hat{\theta}^i + \underline{H}^i \cdot \hat{\theta} - \underline{G}^i \cdot \hat{q} \right) \cdot \hat{\psi}^{-1} \quad (13) \\ \underline{u}^i &= \underline{G}^i \cdot \underline{t}^b - \underline{H}^i \cdot \underline{u}^b + \tilde{\beta} \underline{G}^i \cdot \underline{\theta}^b + \underline{Y} \cdot \underline{\theta} & ; & \quad \underline{Y} = \left(\hat{u}^i + \underline{G}^i \cdot \hat{t} - \underline{H}^i \cdot \hat{u} \right) \cdot \hat{\psi}^{-1}\end{aligned}$$

matris denkleminde yerleştirilerek iç noktalardaki sıcaklık ve deplasman dağılımları elde edilebilir. Bu denklemlerdeki i üsteli, ilgili matrisin çözüm bölgesi içi noktalarında hesaplandığı anlamına gelmektedir.

TE ve TVE bir problemin analizinin yapılması için Denklem (12) ve (13)'in problemin sınır şartları ışığı altında çözülmesi gerekir. Bunun için iki ayrı yöntem kullanılabilir:

Yöntem 1: İteratif yöntem

Bu yöntemde Denklem (12) ve (13) iteratif olarak çözülür. Bunun için şu basamaklar izlenebilir:

1. Denklem (12)₁ ve (13)₁ i mekanik terimi ihmal ederek çöz ve kollokasyon noktalarındaki sıcaklıkları bul
2. Bu sıcaklık dağılımını kullanarak (12)₂ ve (13)₂ 'den kollokasyon noktalarındaki deplasmanları bul
3. Bulunan deplasman dağılımını ışığı altında (12)₁ ve (13)₁ i tekrar çöz ve sıcaklık dağılımını yeniden elde et
4. Basamak 2'ye git ve iterasyonlara seçilen bir yakınsama kriteri sağlanana kadar devam et

Yöntem 2: Direk yöntem

Bu yöntemde Denklem (12) ve (13) direk olarak problemin bilinmeyenleri için çözülür. Bunun için önce aşağıdaki matris satır/kolon düzenlemeleri yapılır

$$\begin{aligned}\underline{\theta} &= \left\{ \begin{matrix} \underline{\theta}^b \\ \underline{\theta}^i \end{matrix} \right\} ; \underline{S}^t = \left[\begin{matrix} \underline{S}^b & \underline{S}^i \end{matrix} \right] ; \underline{Y}^t = \left[\begin{matrix} \underline{Y}^b & \underline{Y}^i \end{matrix} \right] \\ \underline{u} &= \left\{ \begin{matrix} \underline{u}^b \\ \underline{u}^i \end{matrix} \right\} ; \underline{S} = \left[\begin{matrix} \underline{S}^b & \underline{S}^i \end{matrix} \right] ; \underline{Y} = \left[\begin{matrix} \underline{Y}^b & \underline{Y}^i \end{matrix} \right]\end{aligned}$$

ve bu düzenlemeler ışığında tek bir matris denklemi yazılır:

$$\left[\begin{array}{cccc} \underline{H}^b & -\left(\tilde{\beta}\underline{G}^b + \underline{S}^b\right) & \underline{0} & -\underline{S}^i \\ \underline{S}^t & \underline{H}^t & -\underline{S}^t & \underline{0} \\ \underline{H}^i & -\left(\tilde{\beta}\underline{G}^i + \underline{Y}^b\right) & \underline{I} & -\underline{Y}^i \\ \underline{Y}^t & \underline{H}^t & -\underline{Y}^t & \underline{I} \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \underline{u}^b \\ \underline{\theta}^b \\ \underline{u}^i \\ \underline{\theta}^i \end{matrix} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \underline{G}^b & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}^t \\ \underline{G}^i & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}^t \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \underline{t}^b \\ \underline{q}^b \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

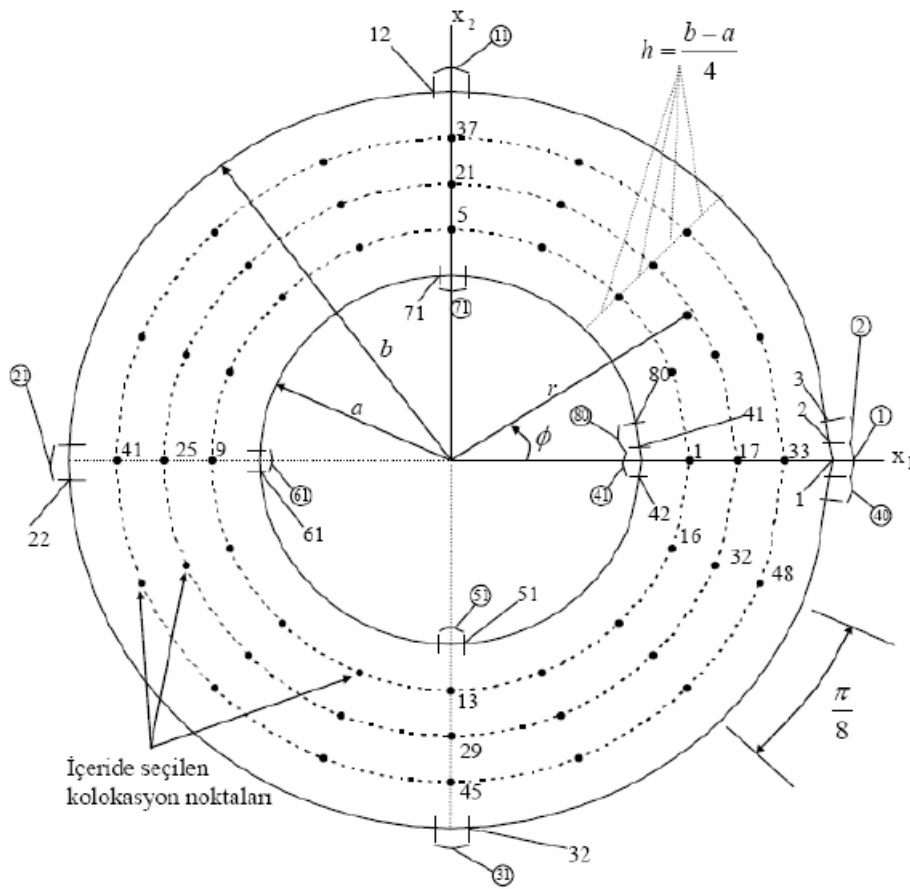
Elde edilen bu matris denklemi, verilen sınır şartları ışığı altında tek adımda çözülebilir.

3. SAYISAL ANALİZ

Bu çalışma kapsamında yukarıda sunulan İKSEY formülasyonu biri iteratif diğeri direk yöntemi kullanan iki ayrı bilgisayar programı olarak kodlanmıştır. Kodlamalar sırasında C++ ve FORTRAN programlama dilleri ortak olarak kullanılmıştır. Her iki program da çözüm bölgesinin geometrisini, malzeme özelliklerini ve sınır koşullarını girdi olarak almaktadır; çıktı olarak ise istenilen noktalarda sıcaklık, deplasman ve gerilme bileşenleri elde edilmektedir. Her iki program da çözümü Fourier uzayında vermektedir.

Sunulan iki formülasyonu karşılaştırmak amacıyla aşağıdaki örnek gözönüne alınmıştır: Sonsuz uzunluktaki silindirik bir tüp (şekil-1) aşağıda verilen şekilde sınır koşullarına tabi tutulmuştur:

- iç yüzey ($r = a$) : $\theta = \theta^* = \theta_0 e^{i\omega t}$ (ısııl sınır koşulu), $t_1 = t_2 = 0$ (mekanik sınır koşulu)
- dış yüzey ($r = b$) : $\theta = 0$ (ısııl sınır koşulu), $t_1 = t_2 = 0$ (mekanik sınır koşulu)



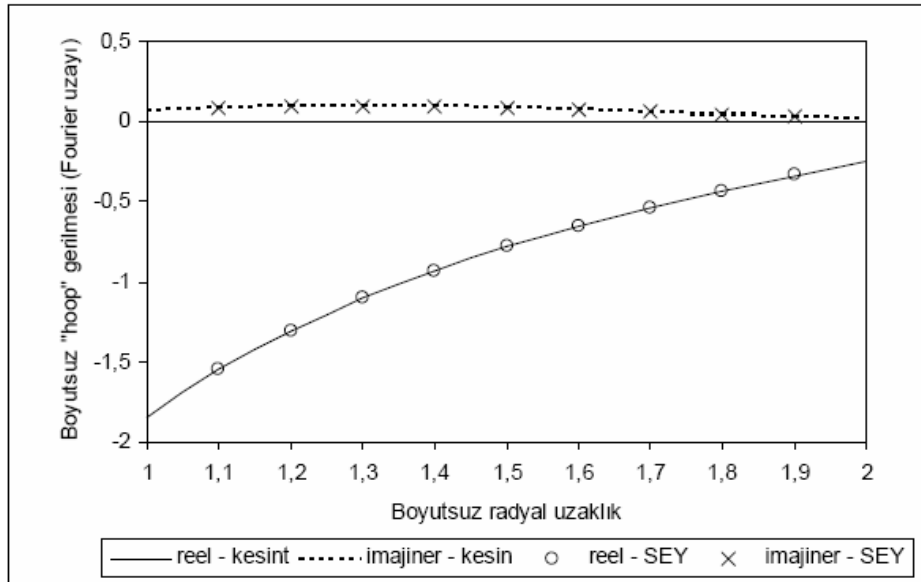
Şekil 1: Çözüm bölgesi ve İKSEY eleman ve iç nokta dağılımı

Malzeme elastik ve analiz girişimsiz olduğu durumda bu problemin analitik olarak çözülmesi mümkündür [12]. Sonuçlar boyutsuz büyüklükler cinsinden elde edilmiştir. Bunun için aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

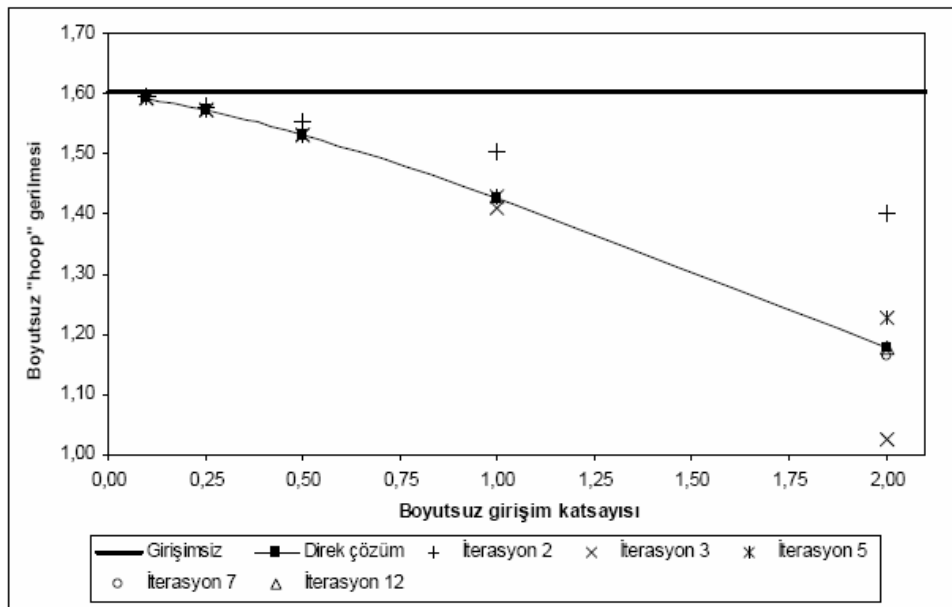
boyutsuz zaman: $\bar{t} = \frac{C_p^2 t}{\chi}$, boyutsuz uzunluk: $\bar{x}_i = \frac{C_p x_i}{\chi}$,
boyutsuz radyal koordinat: $\bar{r} = \frac{C_p r}{\chi}$

Bu tanımlamalarda $C_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ dilatasyonel dalga hızını, $\chi = k/C_v$ ısı difüzyon katsayısını göstermektedir. Analizde Poisson oranı $\nu = 0$, $b/a = 2$ ve boyutsuz iç yarıçap $\bar{a} = \frac{C_p a}{\chi} = 1$ olarak alınmıştır. Boyutsuz GK, $B = \frac{\beta^2 T_0}{C_v(2\mu+\lambda)}$ şeklinde ifade edilmektedir.

Elastik malzeme için $\bar{\omega} (= \chi\omega/C_p^2) = 1$ boyutsuz frekans değerinde elde edilen boyutsuz "hoop" gerilmesi, $\bar{\tau}_{\phi\phi} = \tau_{\phi\phi}/\beta\theta_0$ için İKSEY sonuçlarının analitik sonuçlarla karşılaştırılması $B = 0$ için Şekil-2'de sunulmuştur. Sonuçların çok yakın olduğu şekilden görülebilir.



Şekil-2: Boyutsuz "hoop" gerilmesinin radyal yöndeki dağılımı



Şekil-3: Boyutsuz "hoop" gerilmesinin reel kısmının boyutsuz GK ile değişimi

Şekil-3 değişik B değerleri için direk ve iteratif yöntemlerin bir karşılaştırmasını içermektedir. Bu karşılaştırma $\bar{\omega} = 0.6$ ve $\bar{\tau} = 1.9$ için yapılmıştır. Şekilde görüldüğü üzere, boyutsuz GK büyüdükçe, iterasyon sayısı artmaktadır. Yapılan çalışmada, bu problem için iterasyon sayısı 7'den az olduğu sürece iteratif yöntemin daha hızlı sonuç verdiği görülmüştür (Tablo-1). Bunun temel sebebi, iteratif yöntemde çözülen matris sistem boyutunun direk yöntemle çözülen sisteme göre çok daha küçük olmasıdır.

Tablo-1: İteratif ve direk yöntemlerin zaman karşılaştırmaları

Girdi bilgilerin alınması ve sistem matrislerinin teşkili	Lineer denklem sisteminin doğrudan çözümü	Her iterasyon için gereken yaklaşık zaman	İç noktadaki çözümün elde edilmesi ve sonuçların yazılması	Toplam süre (n : iterasyon sayısı)
43 s.	21 s.	3 s.	1 s.	65s. DOĞRUDAN 44 + 3 · n sec. ITERATIF

SONUÇLAR

Bu çalışmada termoelastisite ve termoviskoelastisite problemlerinin çözümünde kullanılmak üzere bir sayısal metod olarak ikili karşıtlık sınır eleman yöntemi gösterilmiştir. Formülasyon üç boyut için genel olmakla birlikte, uygulamaları iki boyutlu problemler için yapılmıştır. Çözümlerde sınır ayrıklaştırması sabit elemanlarla yapılmış ve ikili karşıtlık metodunun uygulanabilmesi için çözüm bölgesi içinde ek kollokasyon noktaları yerleştirilmiştir. İkili karşıtlık metodunun uygulanması sırasında literatürdeki en basit baz fonksiyonu kullanılmıştır. Çözülen problem sonucunda

- İkili karşıtlık sınır eleman yönteminin hem termoelastisite hem de termoviskoelastisite analizlerinde kullanılabileceği

- İkili karşıtlık sınır eleman analizinde, baz fonksiyonu olarak literatürde verilen en basit baz fonksiyonunun kullanımının yeterli olabileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Brebbia C. A., Telles J. C. F. and Wrobel L. C., "Boundary element techniques - theory and applications in engineering", Springer-Verlag, 1984.
- [2] Nardini D. and Brebbia C. A., "A new approach to the free vibration analysis using boundary elements", Boundary element methods in engineering, Computational mechanics publications, 1982.
- [3] Brebbia C. A. and Nardini D. "Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure", International journal of soil dynamics and earthquake engineering 2(4), 228-233, 1983.
- [4] Henry D. P. Jr. "Advanced development of the boundary element method for elastic and inelastic thermal stress analysis", Doktora tezi, State University of New York at Buffalo, 1987.
- [5] Henry D. P. Jr. and Banerjee P. K. "A new BEM formulation for two- and three-dimensional elastoplasticity using particular integrals", International journal for numerical methods in engineering 26 2079-2096, 1998.

- [6] Partridge P. W., Brebbia C. A. and Wrobel L. C., "The dual reciprocity boundary element method", Computational mechanics publications, 1992.
- [7] Sladěk V and Sladěk J, "Boundary integral equation method in thermoelasticity part I: general analysis", Applied Mathematical Modelling 7(4) 241-253, 1983.
- [8] Henry D. P. and Banerjee P. K., "A boundary element formulation for two-and three-dimensional thermoelasticity using particular integrals", International journal for numerical methods in engineering 26 2061-2077, 1988.
- [9] Golberg M. A., Chen C. S. and Bowman H., "Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM", Engineering analysis with boundary elements, 23 285-296, 1999.
- [10] Cheng A. H. D., Chen C. S., Golberg M. A. and Rashed Y. F., "BEM for thermoelasticity and elasticity with body force - a revisit", Engineering analysis with boundary elements, 25, 377-387, 2001.
- [11] Baranoglu B., "The use of dual reciprocity boundary element method in thermoelasticity and thermoviscoelasticity", Doktora tezi, ODTÜ, 2003.
- [12] Baranoglu B. and Mengi Y., "The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity", Computer methods in applied mechanics and engineering, 196, 379-392, 2006.