



XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ  
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

## SİLİNDİRİK HELİSLERİN FARKLI VİSKOELASTİK MODELLEMELERİNİN SE ANALİZİ

Hakan Arge<sup>o</sup>  
Atılım Ü.  
Ankara

Nihal Eratlı<sup>†</sup>  
İstanbul Teknik Ü.  
İstanbul

Kutlu Darılmaz<sup>‡</sup>  
İstanbul Teknik Ü.  
İstanbul

Mehmet H. Omurtag<sup>§</sup>  
İstanbul Teknik Ü.  
İstanbul

### ÖZET

*Bu çalışmada, dik kesiti kare ve daire olan, silindirik viskoelastik helislerin farklı viskoelastik modeller için Timoshenko çubuk varsayımı kullanılarak sonlu eleman analizi yapılmıştır. Fourier dönüşüm yöntemi kullanılarak yapılan analizde, helisel viskoelastik çubuklar için fonksiyonel Fourier uzayında elde edilmiştir. İki düğüm noktalı eğrisel çubuk elemanı için, eleman matrisleri elde edilmiş ve Fourier uzayında karışık sonlu eleman çözümü yapılarak, zaman uzayına geri dönüş için Fast Fourier dönüşümü (FFT) kullanılmıştır. Silindirik helis problemi Kelvin ve standart modeller için çözülmüştür.*

### 1. Giriş

Helisel yaylar, mühendislik uygulamalarında önemli görevlere hizmet ederler. Makine mühendisliğinde titreşimi azaltmak için mekanik aksamlarda, helisel taşıyıcı sistem olarak da inşaat mühendisliği uygulamalarında kullanılmaktadırlar. Elastik helisel yayların statik analizi [17-19,29-31] ve serbest titreşim analizi [1,2,23] çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Silindirik olmayan elastik helisel yayların serbest titreşim analizleri de [3,4,9,10,13-15,21] tarafından farklı yöntemler kullanılarak araştırılmıştır. Malzemelerin mekanik davranışları elastik, plastik veya viskoelastik olabilir. Söz konusu mekanik davranışlardan elastik malzeme davranışı en basit varsayım olup, diğerleri gittikçe karmaşılaşır. Gerçekte ise, bünyelerindeki iç sürtünmeden dolayı malzemelerde az ya da çok viskoelastik davranışlar gözlenir. Dolayısıyla viskoelastik tavrı görmezden gelmek doğru olmaz [22,25,28]. Doğrusal ve eğri eksenli viskoelastik çubukların kuazi-statik ve dinamik analizi, sonlu elemanlar ve tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemleri ile yapılmıştır [5,7,8,11,12,16].

Bu çalışmada, dik kesiti kare ve daire olan, silindirik viskoelastik helislerin sonlu eleman analizi Timoshenko çubuk varsayımı kullanılarak yapılmıştır. Fourier dönüşüm yöntemi ile yapılan bu analizde viskoelastik malzeme davranışları incelenmiştir [6,28]. Elastik helisel çubuklar için [18] de geliştirilmiş olan fonksiyonel, viskoelastik problemler için Fourier uzayına taşınmış ve karışık sonlu eleman formülasyonu yapılarak iki düğüm noktalı eğrisel çubuk elemanı için eleman matrisleri elde edilmiştir. Malzemenin viskoelastik olarak modellenmesi karşigelim prensibi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Sonlu eleman formülasyonu kullanılarak, viskoelastik davranış Kelvin ve

<sup>o</sup> Yrd. Doç.Dr. Mühendislik Fak. İmalat Müh. Böl., E-posta: [ahargeso@atilim.edu.tr](mailto:ahargeso@atilim.edu.tr)

<sup>†</sup> Doç.Dr. İnşaat Fak. İnş. Müh. Böl., E-posta: [eratli@itu.edu.tr](mailto:eratli@itu.edu.tr)

<sup>‡</sup> Doç.Dr. İnşaat Fak. İnş. Müh. Böl., E-posta: [darilmazk@itu.edu.tr](mailto:darilmazk@itu.edu.tr)

<sup>§</sup> Prof.Dr. İnşaat Fak., İnş. Müh. Böl., E-posta: [omurtagm@itu.edu.tr](mailto:omurtagm@itu.edu.tr)

standart modelleri ile simüle edilmiştir. Fourier uzayında çözüm yapıldıktan sonra zaman uzayına Fast Fourier dönüşümü (FFT) algoritması [26] kullanılarak geri dönülmüştür.

## 2. Fourier uzayında alan denklemleri ve fonksiyonel

Helis geometrisi ile ilgili detaylı bilgi ve Timoshenko çubuk kuramını esas alan denklemler [4,18,27] de yer almaktadır. Bu denklemlerin Fourier dönüşüm uzayındaki karşılıkları

$$\begin{aligned} \text{Denge denklemleri} \quad & -\frac{d\bar{\mathbf{T}}}{ds} - \bar{\mathbf{q}} - \rho A \omega^2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ & -\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{ds} - \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}} - \bar{\mathbf{m}} - \rho \mathbf{I} \omega^2 \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Kinematik ilişkiler} \quad & \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{ds} + \mathbf{t} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}} - \bar{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0} \\ & \frac{d\bar{\boldsymbol{\Omega}}}{ds} - \bar{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Bünye bağıntıları} \quad & \bar{\boldsymbol{\gamma}} - \bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \\ & \bar{\boldsymbol{\kappa}} - \bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. (1), (2) ve (3) de frekans uzayında tanımlanmış vektörel büyüklükler  $\bar{\mathbf{u}}$  yer değiştirme,  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$  dönme,  $\bar{\mathbf{T}}$  kuvvet,  $\bar{\mathbf{M}}$  moment vektörleri olup, açık ifadeleri  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_i \mathbf{t} + \bar{u}_n \mathbf{n} + \bar{u}_b \mathbf{b}, \dots$ ,  $\bar{\mathbf{M}} = \bar{M}_i \mathbf{t} + \bar{M}_n \mathbf{n} + \bar{M}_b \mathbf{b}$  şeklindedir.  $\rho$  malzemenin yoğunluğu,  $A$  kesit alanı,  $\mathbf{I}$  eylemsizlik moment vektörüdür. Yine frekans uzayında tanımlanmış diğer vektörler,  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  birim kayma vektörü,  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$  birim dönme vektörü,  $\bar{\mathbf{C}}_\gamma$  ve  $\bar{\mathbf{C}}_\kappa$  sünme matrisleri,  $\bar{\mathbf{q}}$  ve  $\bar{\mathbf{m}}$  yayılı dış kuvvet ve moment vektörleri olup,  $\omega$  açısal frekanstır. Laplace uzayında tanımlanmış bu denklemler  $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{f}}$  biçiminde operatör formda yazılıp, potansiyellik koşulu  $\langle d\bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}^*), \bar{\mathbf{y}}^* \rangle = \langle d\bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}^*), \bar{\mathbf{y}}^* \rangle$  sağlatılarak, Fourier uzayındaki fonksiyonel

$$\bar{\mathbf{I}}(\bar{\mathbf{y}}) = \int_0^l \langle \bar{\mathbf{Q}}(\eta \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{f}}), \bar{\mathbf{y}} \rangle d\eta \quad (4)$$

bağıntısı kullanılarak bulunur [20,24]. İfadenin açık hali, iç çarpım biçiminde yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\bar{\mathbf{y}}) = & -[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}_s] + [\mathbf{t} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{T}}] - [\bar{\mathbf{M}}_s, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] - \frac{1}{2}[\bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}] - \frac{1}{2}[\bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}}] \\ & + \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}] + \frac{1}{2} \rho \omega^2 [\mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] \\ & - [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}] - [\bar{\mathbf{m}}, \bar{\boldsymbol{\Omega}}] + [(\bar{\mathbf{T}} - \hat{\bar{\mathbf{T}}}), \bar{\mathbf{u}}]_\sigma + [(\bar{\mathbf{M}} - \hat{\bar{\mathbf{M}}}), \bar{\boldsymbol{\Omega}}]_\sigma + [\hat{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\mathbf{T}}]_e + [\hat{\bar{\boldsymbol{\Omega}}}, \bar{\mathbf{M}}]_e \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. Sonlu eleman formülasyonu

Sonlu eleman formülasyonunda, iki düğüm noktalı eğrisel eleman için  $\theta_j > \theta_i$  ve  $\Delta\theta = (\theta_j - \theta_i)$  olmak üzere (6) ifadesindeki doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmıştır.

$$\phi_i = (\theta_j - \theta) / \Delta\theta, \quad \phi_j = (\theta - \theta_i) / \Delta\theta \quad (6)$$

$i$  ve  $j$  indisleri çubuk elemanın düğüm noktalarını göstermektedir. Bir düğüm noktasındaki bilinmeyenler  $\{u_i, u_n, u_b, \Omega_i, \Omega_n, \Omega_b, T_i, T_n, T_b, M_i, M_n, M_b\}$  olmak üzere, iki düğüm noktalı elemandaki bilinmeyen sayısı  $2 \times 12$  dir. Eleman matrisleri ile ilgili detay bilgi için [4,18] kullanılabilir.

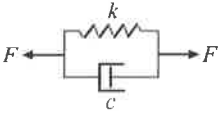
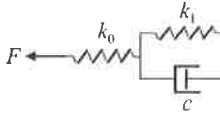
#### 4. Viskoelastik modeller – karşılımlı ilkesi

Malzemenin viskoelastik olarak modellenmesi, karşılımlı ilkesi (*correspondence principle*) kullanılarak gerçekleştirilebilir. Karşılımlı ilkesine göre viskoelastik davranış, Fourier dönüşüm uzayındaki elastik alan denklemlerinde görünen elastik sabitlerin, seçilen malzeme modeline göre, kompleks karşılımlılarıyla değiştirilmesiyle elde edilebilir [6,28]. İsootropik viskoelastik malzeme için kayma ( $\mu$ ) ve Lamé ( $\lambda$ ) modüllerinin frekansa bağlı kompleks modüller,  $\bar{\mu}(\omega)$  ve  $\bar{\lambda}(\omega)$  ile değiştirilmesi gerekir ve eğer Poisson oranı  $\nu$  sabit olarak kabul edilirse, kompleks kayma ve Lamé modülleri  $\bar{\mu}$  ve  $\bar{\lambda}$  modülleri birbirlerine, Fourier uzayında,

$$\bar{\lambda} = \frac{2\nu\bar{\mu}}{1-2\nu} \quad (7)$$

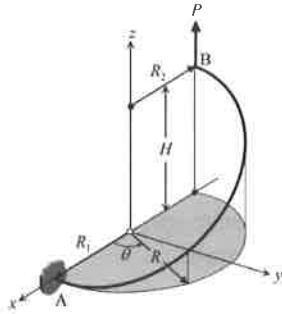
ilişkisi ile bağlıdır. Literatürde viskoelastik malzeme modelleri için yay ve sönüm kutusu benzetimleri kullanılır [28]. Tablo 1 de, literatürde sıklıkla kullanılan Kelvin ve standart model için yay ve sönüm kutusu benzetimleri ve bu modellere bağlı olarak kullanılan kompleks kayma modülünün formları verilmiştir (Poisson oranının sabit kabul edilmesi durumunda). Tabloda,  $i$ , imajiner sayıyı,  $\tau$ , gecikme zamanını (*retardation time*),  $\beta = \mu_g / \mu > 1$  olmak üzere  $\mu_g$ , kayma modülü ile ilgili gevşeme fonksiyonunun (*relaxation function*) ilk değerini belirtmektedir.

**Tablo 1.** Kelvin ve Standart model

 <p>Kelvin modeli</p>	 <p>Standart model</p>
$\bar{\mu} = \mu(1 + i\omega\tau)$	$\bar{\mu} = \mu \left[ (\beta - 1) \frac{i\omega}{i\omega + 1/\tau} + 1 \right]$

#### 5. Sayısal örnekler

Çalışmada uygulama olarak Şekil 1'de görülen silindirik ( $R_1 = R_2$ ) konsol helis problemi ele alınmış ve iki farklı problem çözülmüştür. Helis,  $A$  noktasında sabit ve  $B$  ucundan serbesttir. Her iki problem için, helis yarıçapları  $R_1 = R_2 = 200$  cm, helis yüksekliği  $H = 300$  cm, elastisite modülü  $E = 2.06 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , malzeme yoğunluğu  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> alınmış ve serbest uç  $B$  den şiddeti  $P = 10^6$  N olan birim adım fonksiyonu ile yükleme yapılmıştır (Şekil 2). Sonlu eleman çözümleri Fourier uzayında yapılmış ve zaman uzayına geri dönüş için FFT algoritması kullanılmıştır [26].



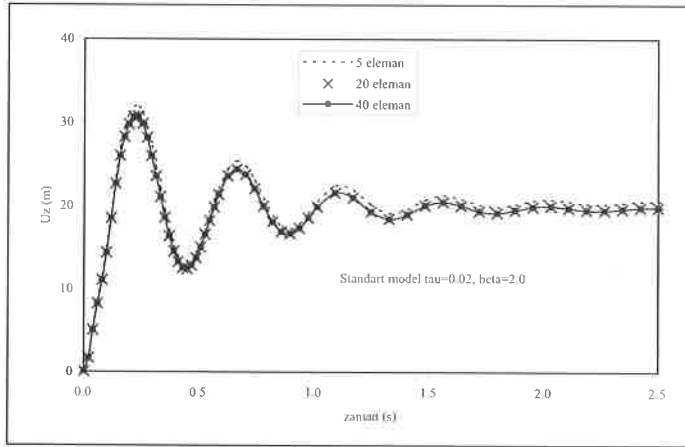
Şekil 1. Konsol helis



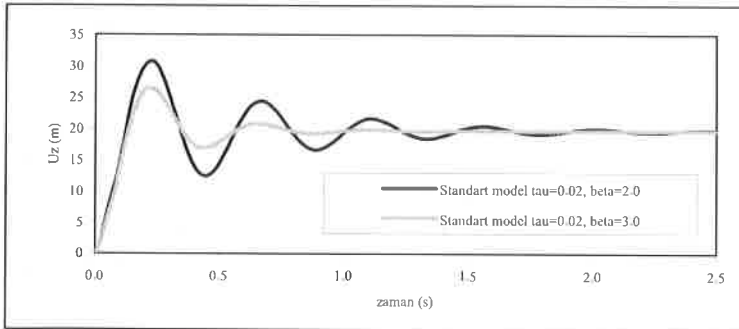
Şekil 2. Konsol helisin  $B$  ucundan uygulanan birim adım fonksiyonu yükleme

Her iki problem için, helisin serbest  $B$  ucunda düşey deplasmanın ( $u_z$ ), sabit  $A$  noktasındaki momentlerinin ( $M_y$  ve  $M_z$ ) zamana göre değişimleri  $0 \leq t \leq 2.5$  saniye aralığında bulunmuştur. Fourier dönüşümleri için birim adım fonksiyonunun  $t=5$  saniyede sonlandığı kabul edilmiş ve period  $T=10$  saniye alınmıştır. Fourier uzayında  $2^9 = 512$  frekansta çözüm yapılmıştır.

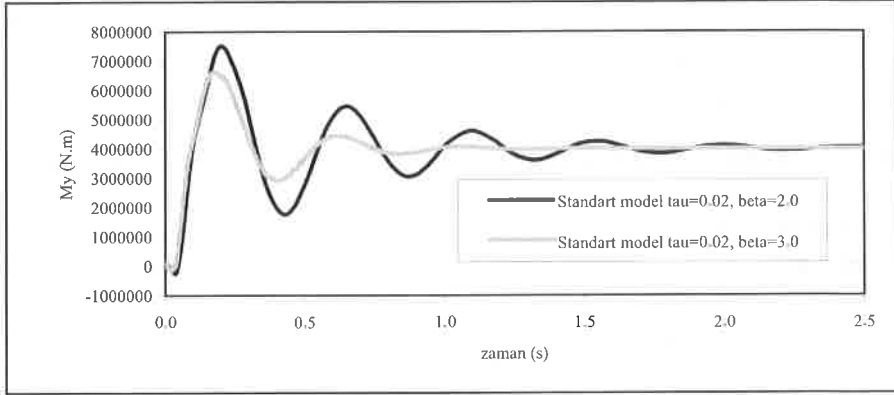
**1. Daire kesitli silindirik konsol helis problemi:** Bu örnekte helisin dik kesiti daire şeklinde ve alanı  $A=144\text{cm}^2$  dir. Viskoelastik davranış standart model ile simüle edilmiştir (Tablo 1). Sonlu eleman formülasyonun yakınsamasını incelemek için standart model parametreleri  $\tau = 0.02$  ve  $\beta = 2.0$  alınmış ve 5, 20 ve 40 eleman kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Helisin  $B$  ucundaki düşey deplasman  $u_z$  için yakınsama grafiği Şekil 3 te verilmiştir. Şekil 3 incelendiğinde 20 ve 40 eleman için elde edilen sonuçların üst üste düştüğü, 5 eleman için elde edilen sonuçlarında 20 ve 40 elemanla elde edilen sonuçlara çok yakın olduğu gözlenmiştir. Şekil 4, 5 ve 6 sırasıyla, helisin  $B$  ucundaki  $u_z$ ,  $A$  noktasındaki  $M_y$  ve  $M_z$  nin zamana göre değişimlerini farklı standart model parametre değerleri için vermektedir. Bu şekillerdeki sonuçlar 40 eleman kullanılarak bulunmuştur. Sonuçlarda  $\beta$  değeri arttıkça sönümlenmenin daha hızlı olduğu görülmektedir.



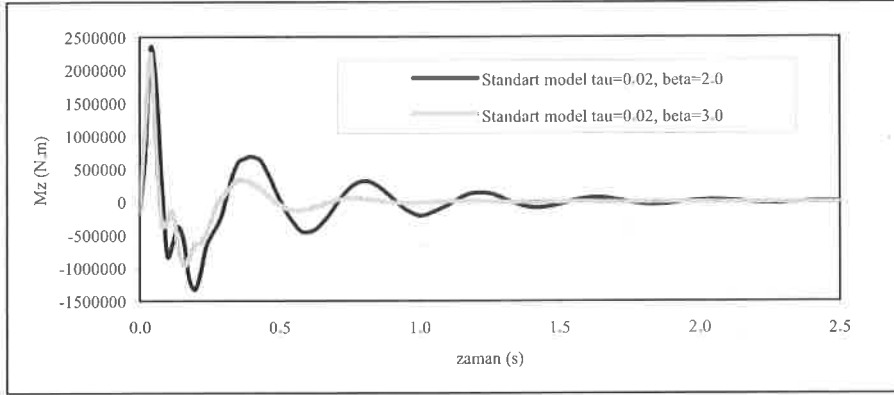
Şekil 3. Daire kesitli silindirik helisin 5, 20, 40 sonlu eleman kullanılarak bulunan  $B$  noktasındaki  $u_z$  deplasmanlarının zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması. Viskoelastik malzeme standart model ile simüle edilmiştir ( $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 2.0$ ).



Şekil 4. Daire kesitli silindirik helisin farklı standart model parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 2.0$  ve  $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 3.0$ )  $B$  noktasındaki  $u_z$  deplasmanlarının zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.

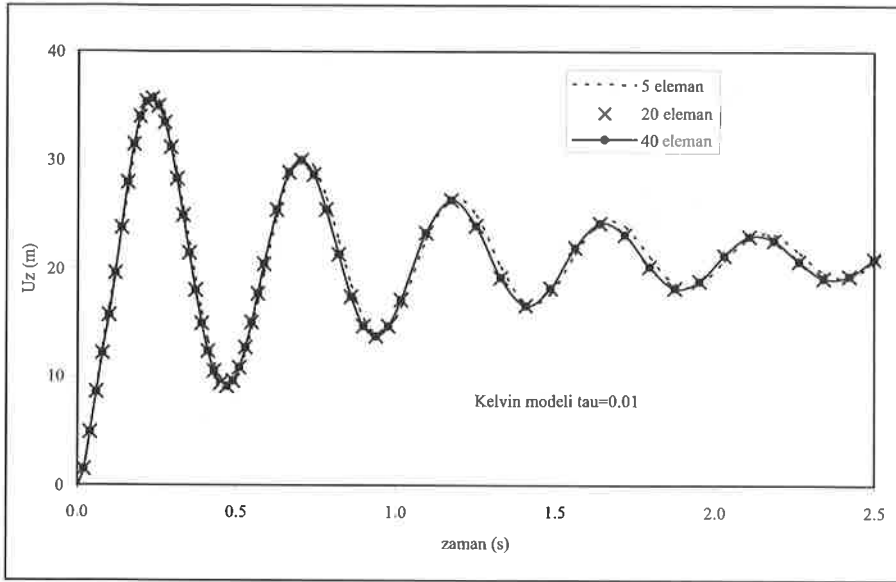


Şekil 5. Daire kesitli silindirik helisin farklı standart model parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 2.0$  ve  $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 3.0$ )  $A$  noktasındaki  $M_y$  momentlerinin zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.

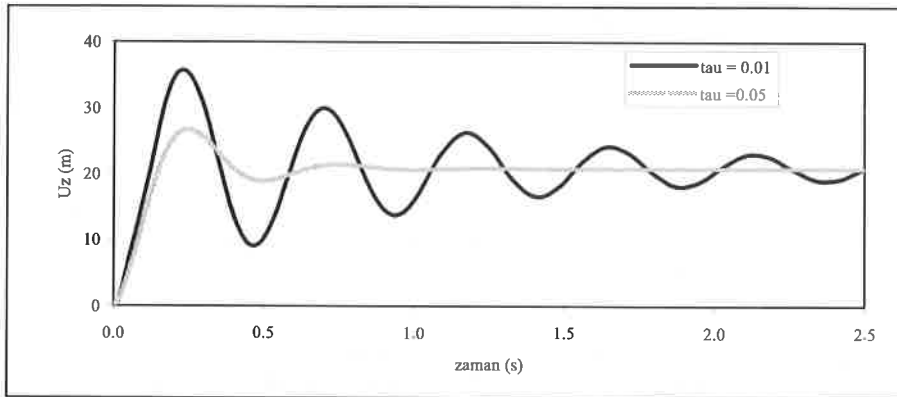


Şekil 6. Daire kesitli silindirik helisin farklı standart model parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 2.0$  ve  $\tau = 0.02$ ,  $\beta = 3.0$ )  $A$  noktasındaki  $M_z$  momentlerinin zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.

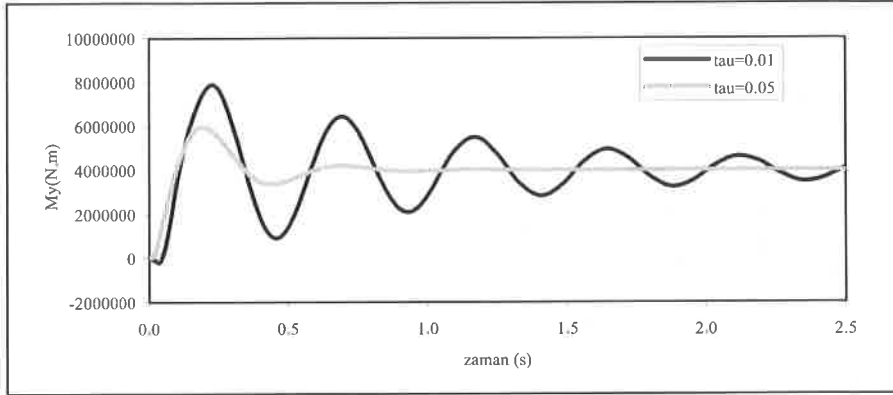
**2. Kare kesitli silindirik konsol helis problemi:** Bu örnekte helisin dik kesiti kare şeklinde ve alanı  $A = 144 \text{ cm}^2$  dir. Viskoelastik davranış Kelvin model ile simüle edilmiştir (Tablo 1). Sonlu eleman formülasyonunun yakınsamasını incelemek için gecikme zamanı  $\tau = 0.01$  olarak alınmış ve 5, 20 ve 40 eleman kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Şekil 3 te, helisin  $B$  ucundaki  $u_z$  düşey deplasmanı için elde edilen yakınsama grafiği gösterilmiştir. Bir önceki örnekte olduğu gibi, 20 ve 40 eleman kullanılarak elde sonuçlar üst üste düşmüş, 5 eleman kullanılan sonuçların ise bunlara çok yakın olduğu görülebilir. Şekil 8, 9 ve 10 sırasıyla, helisin  $B$  ucundaki  $u_z$ ,  $A$  noktasındaki  $M_y$  ve  $M_z$  nin zamana göre değişimlerini farklı gecikme zamanı değerleri için vermektedir. Şekillerdeki sonuçlar 40 eleman kullanılarak bulunmuştur. Sonuçlarda  $\tau$  değeri arttıkça sönümlenmenin daha hızlı olduğu görülmektedir.



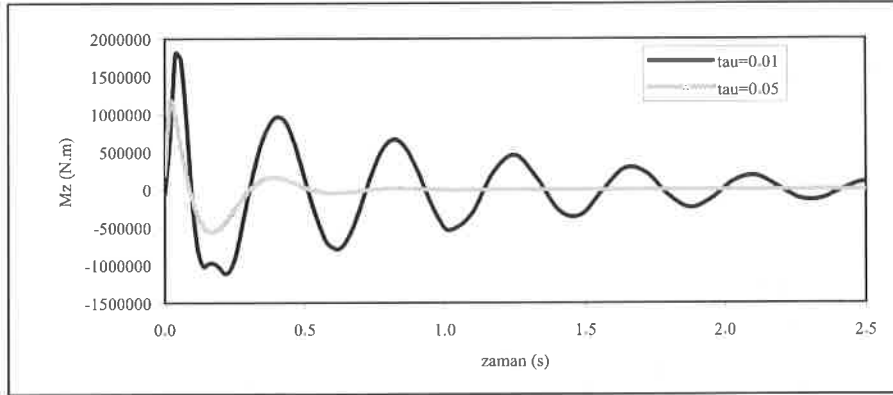
Şekil 7. Kare kesitli silindirik helisin 5, 20, 40 sonlu eleman kullanılarak bulunan  $B$  noktasındaki  $u_z$  deplasmanlarının zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması. Viskoelastik malzeme Kelvin modeli ile simüle edilmiştir ( $\tau = 0.01$ ).



Şekil 8. Kare kesitli silindirik helisin farklı Kelvin modeli parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.01$  ve  $\tau = 0.05$ )  $B$  noktasındaki  $u_z$  deplasmanlarının zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.



Şekil 9. Kare kesitli silindirik helisin farklı Kelvin modeli parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.01$  ve  $\tau = 0.05$ ) A noktasındaki  $M_y$  momentlerinin zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.



Şekil 10. Kare kesitli silindirik helisin farklı Kelvin modeli parametre değerleri ile bulunan ( $\tau = 0.01$  ve  $\tau = 0.05$ ) A noktasındaki  $M_z$  momentlerinin zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması. Çözümlerde 40 sonlu eleman kullanılmıştır.

## 6. Sonuçlar

Bu çalışmada yapılanlar ve elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa;

- Viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helislerin dinamik davranışları sonlu eleman yöntemi kullanılarak incelenmiştir.
- Problem Fourier uzayında incelenmiş, zaman uzayına geri dönüşüm için FFT algoritması kullanılmıştır.
- Viskoelastik malzeme davranışı karşigelim ilkesi ile modellenmiştir. Viskoelastik malzeme davranışını simüle etmek için Kelvin ve standart modeller kullanılmış, bu modellere ait parametrelerin etkisi incelenmiştir. Karşigelim prensibi uygulanırken Poisson oranı sabit kabul edilmiştir.
- Çalışmada uygulama olarak ele alınan silindirik konsol kesit için iki farklı kesit geometrisi, daire ve kare, ele alınmıştır.
- Ele alınan problemlerde az sayıda eleman kullanıldığında dahi iyi bir yakınsama olduğu gözlemlenmiştir.

**Teşekkür-** Yazarlar bu araştırmayı Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederler. Proje No:111M308

## Kaynaklar

- [1] Yu A. ve Yang C. Formulation and evaluation of an analytical study for cylindrical helical springs, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 23(1), 85-94, 2010.
- [2] Lee J. Free vibration analysis of cylindrical helical springs by the pseudospectral method, *J. Sound and Vibration*, Vol. 302, 185-196, 2007.
- [3] Lee J. Free vibration analysis of non-cylindrical helical springs by the pseudospectral method, *J. Sound and Vibration*, Vol. 305, 543-551, 2007.
- [4] Girgin K. Free vibration analysis of non-cylindrical helices with, variable cross-section by using mixed FEM, *J. Sound and Vibration*, Vol. 297, 931-945, 2006.
- [5] Temel B. Çalim, F.F. ve Tütüncü N. Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods, *J. Sound and Vibration*, Vol. 271, 921-935, 2004.
- [6] Argeso, H. A unified boundary element formulation for viscoelastic and poroviscoelastic interaction problems, Doktora Tezi, ODTÜ, Ankara, 2003.
- [7] Kadioğlu, F. ve Aköz, A.Y. The mixed finite element for quasi-static dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 15(6), 735-752, 2003.
- [8] Çalim, F.F. Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi, Doktora Tezi, ÇÜ, Adana, 2003.
- [9] Busool W. ve Eisenberger M. Free vibration helicoidal beams of arbitrary shape and variable cross section, *J. Vib. and Acoustics*, Vol. 124, 397-409, 2002.
- [10] Yıldırım V. Expressions for predicting fundamental natural frequencies of non-cylindrical helical springs, *J. Sound and Vibration*, Vol. 252(3), 479-491, 2002.
- [11] Kadioğlu, F. Viskoelastik Çubukların Kuazi-Statik ve Dinamik Analizi, Doktora Tezi, İTÜ, İstanbul, 1999.
- [12] Aköz Y. ve Kadioğlu F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, Vol. 44, 1909-1932, 1999.
- [13] Yıldırım V. A parametric study on the free vibration of non-cylindrical helical springs, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 65, 157-163, 1998.
- [14] Yıldırım V. ve İnce N. Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape, *J. Sound and Vibration*, Vol. 204(2), 311-329, 1997.
- [15] Yıldırım V. Free vibration analysis of non-cylindrical coil springs by combined use of the transfer matrix and the complementary functions methods, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 13, 487-494, 1997.
- [16] Chen T.M. The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 38, 509-522, 1995.
- [17] Haktanır V. ve Kiral E. Statical Analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods, *Comp. and Struct.*, Vol. 49(4), 663-677, 1993.
- [18] Omurtag M.H. ve Aköz A.Y. The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Comp. and Struct.*, Vol. 43(2), 325-331, 1992.
- [19] Eisenberger M. Exact solution for general variable cross-section members, *Comp. and Struct.*, Vol. 41(4), 765-772, 1991.
- [20] Ertepinar, A., Demiray, H., İnan, E., Aksoğan, O. ve Aköz, Y. *Şekil Değiştiren Cisimler Mekaniği*, KTÜ, Trabzon, 1987.
- [21] Nagaya K., Takeda S. ve Nakata Y. Free vibration of coil springs of arbitrary shape, *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, Vol. 23, 1081-1099, 1986.
- [22] Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York, 1982.
- [23] Mottershead J.E. Finite elements for dynamical analysis of helical rods, *Int. J. Mechanical Science*, Vol. 22, 267-283, 1980.
- [24] Oden J.T. ve Reddy J.N. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer, 1976.
- [25] Flügge W. *Viscoelasticity*, Springer: Berlin, Heidelberg, 1975.
- [26] Cooley, J.W., Lewis, P.A.W. ve Welch, P.D. The Fast Fourier transform and its applications, *IEEE Transactions on Education*, Vol.12, 27-34, 1969.
- [27] İnan, M. *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, Berksoy Matbaası, 1966.



- [28] Fung Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [29] Cinemre V. Helisel ubukların transfer matris metodu ile statik analizi, Doktora tezi, İTÜ, İstanbul,1960.
- [30] Scordelis A.C. Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders, *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 56, 1013-1026, 1960.
- [31] Holmes A.M.C. Analysis of helical beams under symmetrical loading, *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 83, 1-37, 1957.