

BETON DAYANIMININ MOMENT TAŞIMA KAPASİTESİNE ETKİSİ

Fuat DEMİR

Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü 32260 Isparta
E-mail: fudemir@mmf.sdu.edu.tr

ÖZET

Betonarme hesaplarında yapılan kabullerden birisi; beton ile donatı arasında aderansın tam olduğudur. Aderansı etkileyen önemli etkenlerden birisi beton basınç dayanımıdır. Ülkemizde yapılan incelemelerde, özensiz yapılan yapıların beton dayanımları 8-10 MPa civarında olduğu tespit edilmektedir. Bu yapıların incelenmesinde Taşıma Gücü Yöntemi'ndeki bağıntılar aynen uygulanmaktadır. Taşıma gücü yönteminde kullanılan birçok bağıntının aslında betonun belirli bir alt sınır dayanımı için geçerli olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla düşük beton dayanımları için hesaplamalarda taşıma gücü için verilen bağıntıların kullanılması bazen yanlış sonuçlara neden olabilmektedir. Bu çalışmada beton dayanımının moment taşıma kapasitesine etkisi, doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu amaç için fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Çatlak oluşumun gösterimi için yayılı çatlak modeli, donatının modellenmesi için ise ayrık donatı modeli kullanılmıştır. Donatı ile beton arasındaki aderans yaylarla modellenmiştir. Düşük beton dayanımlarının moment taşıma kapasitesine olan etkisi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar şekillerde verilmiştir.

ABSTRACT

One of the basic assumptions made in reinforced concrete is that perfect bond exists between concrete and steel bars. One of the important parameter which influences the bond is concrete strength. The researches were done in our country show that concrete strength of reinforced concrete structures is 8-10 MPa approximately. Generally, the equations given in the "Ultimate Strength Theory" were used in the analysis of the structures. It is known that the equations in the "Ultimate Strength Theory" are valid only for lower bound of concrete strength. Therefore the use of same equations in the analysis of structures can mislead for low concrete structures. In this study, the effect of low concrete strength to estimate on the ultimate resisting moment is investigated by using nonlinear finite element method. An algorithm was prepared in Fortran code. Concrete cracking was presented with smeared cracking model. Steel was modeled bar element. Bond between concrete and steel was modeled by link elements. The effect of low concrete on the estimating resisting moment and behavior of structures is investigated. Results were given in figures.

1. GİRİŞ

Türkiye, önemli bir kısmı deprem kuşağında bulunan, mevcut yapı stoku açısından da deprem riski oldukça yüksek olan bir ülkedir. Son yıllarda yaşanan depremler, mevcut yapıların deprem güvenliklerinin istenilen düzeyde olmadığını bir kez daha ortaya koymuştur. Deprem sonrasında yıkılan veya çeşitli seviyelerde hasar gören yapılar üzerinde yapılan incelemeler sonucunda Türkiye’deki mevcut yapıların beton kalitesinin genellikle kötü olduğu belirlenmiştir. Özensiz olarak yapılan yapılardan alınan numune sonuçlarına göre beton dayanımlarının, genellikle 8-10 MPa civarında olduğu görülmektedir. Bu nedenle depremlerdeki betonarme yapıların yıkılma nedenlerinin başında beton dayanımının projede öngörülen beton dayanımından çok düşük olması gelmektedir. Agregata olarak uygun malzemelerin kullanılmaması, betonun elle karıştırılması, beton yerleşiminde sıkıştırmanın yapılmaması, sıcak havada beton dökümünden sonra yeterli sulamanın yapılmaması, soğuk havada beton döküldükten sonra don etkisinden korunmaması gibi nedenlerle beton dayanımı olması gerekenin çok altına düşebilmektedir. Bu da dayanımın önemli bir bileşeni olan aderans kavramı ile ilgili kaygıları doğurmaktadır. Aderans kavramı çelik ve betondan oluşan malzemenin betonarme olabilmesi için, bu iki malzemenin birbirine kaynaşmış olarak, birlikte çalışması ilkesi üzerine dayanmaktadır. Beton dayanımının düşük olmasının donatıda aderans çözümlerinde de etkili olacağı açıktır. Dolayısıyla çok düşük dayanımlı betonarme yapılarda aderans olamayacağı veya olsa dahi yeteri düzeye erişemeyeceği düşüncesiyle bu tür yapılara betonarme yapı demek hatalı olabilecektir. Ayrıca yapının beton dayanımının düşük olması yapı kesitlerinin mukavemetinin düşmesinde de etkili olmaktadır. Düşük dayanımlı betonlarda elastisite modülü de düşük olacağından büyük yatay yerdeğiştirmelere neden olacaktır.

Özellikle eğilme etkisi altındaki betonarme elemanların moment taşıma kapasitesinde beton dayanımının donatı kadar etkili olmadığı bilinmektedir. Ancak düşük dayanımlı betonlar için Taşıma Gücü Yöntemi’ndeki bağıntılar kullanıldığında moment taşıma kapasitesinin çok değişmediği görülmektedir. Bu çalışmada, düşük dayanımlı betonun eğilme etkisi altındaki betonarme elemanların taşıma kapasitesine olan etkisi doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

2. BETONUN DAVRANIŞI VE MODELLENMESİ

Betonun asal çekme ve basınç gerilmeleri altındaki doğrusal olmayan davranışının incelenmesi amacıyla birçok deneysel çalışma yapılmıştır. Bu deneylere dayanılarak araştırmacılar tarafından betonun bir, iki ve üç eksenli doğrusal olmayan davranışı için bazı modeller geliştirilmiştir. Bugüne kadar, pek çok değişik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı önerilmiştir. Betonun bir eksenli gerilme şekil değiştirme davranışı modellenmesine 1 nolu denklemde verilen bağıntı örnek olarak gösterilebilir [1].

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{pm}} \right)^2} \quad (1)$$

Bu denklemin değişik bir şekli ise aşağıdaki denklemde verilmektedir [2]:

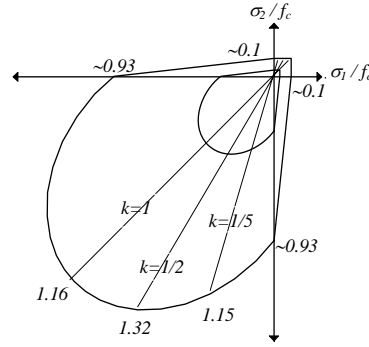
$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{E_c}{E_p} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{pm}} + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{pm}} \right)^2} \quad (2)$$

Burada σ_c beton basınç gerilmesini, ε_c birim boy kısalmasını, ε_{pm} maksimum gerilme f_c 'ye karşılık gelen birim kısalmayı, E_c başlangıç elastisite modülünü ve $E_p = f_c / \varepsilon_{pm}$ sekant modülünü göstermektedir.

Betonun iki eksenli basınç ve çekme gerilmeleri altındaki dayanımlarını belirlemek için çok sayıda deney yapılmıştır [3,4]. Bu deney sonuçları esas alınarak değişik modeller yapılmıştır. Buna örnek olarak Kupfer ve Gerstle [5] tarafından önerilen, $\sigma_1 \geq \sigma_2$

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_c} + \frac{\sigma_2}{f_c} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2}{f_c} \right) - 3.65 \left(\frac{\sigma_1}{f_c} \right) = 0 \quad (3)$$

bağıntı verilebilir. Benzer bir modelleme de Büyüköztürk [6] tarafından yapılmıştır (Şekil 1).



Şekil 1. Betonun iki eksenli gerilme durumunda güç tükenme eğrisi

Bu çalışmada, betonun iki eksenli doğrusal olmayan davranışı için Büyüköztürk [6] tarafından teklif edilen ve betonun güç tükenme bölgesini gösteren

$$f(I_1, J_2) = 3J_2 + f_c I_1 + \frac{I_1^2}{5} - \frac{f_c^2}{9} = 0 \quad (4)$$

ifadesi esas alınmıştır. Burada f_c betonun tek eksenli basınç dayanımını, σ_0 hidrostatik gerilmeler, s_{ij} sapıcı (deviatoric) gerilmeler, I_1 gerilme durumu invariantı ve J_2 sapıcı gerilme invariantı olmak üzere;

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (6)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (7)$$

$$I_1 = \sigma_{kk} = 3\sigma_0, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}), \quad I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \quad (8)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \quad J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, betonun davranışı için kullanılan bu ifadede, doğrusal davranış bölgesi güç tükenme eğrisinin küçültülmüş benzeri kabul edilerek

$$g(\bar{\sigma}, I_1, J_2) = 3J_2 + \bar{\sigma}I_1 + I_1^2/5 - \bar{\sigma}^2/9 \quad (10)$$

yazılabilir. Şekil değiştirmelerin elastik ve plastik parçalardan oluştuğu ve plastik parçanın genişleyerek büyüyen elastik sınır eğrisine normal olarak meydana geldiği kabul edilerek, betonun doğrusal olmayan davranışı için H sertleşme fonksiyonu ve $[D]$ düzlem gerilme durumunda malzeme matrisi olmak üzere, artırımlı gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\{d\sigma\} = \left[\begin{array}{c} [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \\ [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left(\frac{2\bar{\sigma}}{9} - I_1 \right) H + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \end{array} \right] \{d\varepsilon\} \quad (11)$$

$$\{d\sigma\} = [D_p] \{d\varepsilon\} \quad (12)$$

şeklinde hesaplamalarda dikkate alınmıştır.

3. BETONUN ÇATLAMA ÖTESİ DAVRANIŞININ MODELLENMESİ

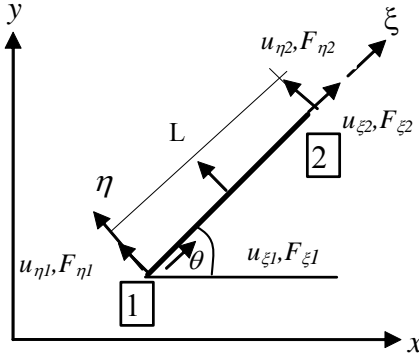
Betonun çatlamasının modellenmesi için genellikle ayrık ve yayılı olmak üzere iki gösterim şekli kullanılmaktadır [7]. Bu çalışmada, betonun çatlamasının gösteriminde yayılı çatlak modeli kullanılmıştır. Bu gösterim şeklinde; yükler iki boyutlu olduğu kabul edilen mevcut gerilme durumu asal gerilmelere dönüştürülür ve elemandaki (veya eleman içinde belirli noktalardaki) çekme gerilme durumu betonunun çekme dayanım bölgesinin dışına çıktığı zaman, çekme gerilmesine dik yönde çatlak oluştuğu kabul edilmektedir. Bu durum betona ait malzeme matrisinde bu doğrultuya ait elastisite modülü sıfıra eşitlenerek yapılmaktadır [8,9]. Örneğin, bir doğrultuda bu tür bir çatlak durumunda betona ait malzeme matrisi

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta D_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

şeklini almaktadır. Kayma teriminin sıfır olması bazı sayısal problemlere neden olmasından dolayı araştırmacılar bu terimin bir β katsayısıyla azaltılmasını uygun görmüşlerdir ve bu değer genellikle 0.5 olarak alınmaktadır. Asal gerilmelerin basınç olması durumunda meydana gelen güç tükenmesi sınırına erişilmesi malzeme matrisinin bütün terimlerinin sıfır olmasıyla temsil edilmektedir [10,11].

4. DONATININ MODELLENMESİ

Betonarme elemanların sonlu elemanlar yöntemiyle modellenmesinde genellikle ayırık ve yayılı olmak üzere iki gösterim şekli kullanılmaktadır [7]. Ayırık gösterimde, donatı düğüm noktalarında bir veya iki serbestlik dereceli çubuk eleman şeklinde düşünülmektedir. Bu çalışmada donatı ayırık olarak modellenmiştir. Donatının kesiti A_s , boyu L ve elastisite modülü E_s olmak üzere 1 ve 2 noktalarındaki, u_1 ve u_2 yerdeğiştirmeleri ile F_1 ve F_2 eksenel kuvvetleri arasındaki ilişki yerel ve sistem koordinatlarında,



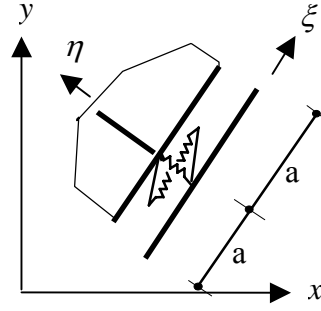
Şekil 2. Yerel koordinatlarda eleman

$$\begin{bmatrix} F_{\xi 1} \\ F_{\eta 1} \\ F_{\xi 2} \\ F_{\eta 2} \end{bmatrix} = \frac{A_s E_s}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix} \quad c = \cos \theta, s = \sin \theta \quad (14)$$

şeklinde modellenmiştir (Şekil 2).

5. ADERANSIN MODELLENMESİ

Aderansın belirlenmesi için yapılan en yaygın deney, çekip çıkarma deneyidir. Aderansın modellenmesi genellikle aderans-sıyırılma ilişkisinden bulunan bağıntılar kullanılarak yapılmaktadır. Bu amaç için yapılan deneylerde, donatının betondan sıyırılması durumunda ölçülen çelik gerilmesinden hesaplanan ortalama kayma aderans gerilmesi τ_b ile donatının betondan sıyırılması Δ arasındaki ilişkiden aderans-sıyırılma bağıntıları elde edilmektedir [12]. Aderans değerinin bu yöntemlerle belirlenmesinde betonun kalitesi, donatı çeliğinin çapı ve kalitesi, donatı yüzeyi, betonun agrega düzeni, donatının beton içerisindeki konumu gibi faktörlerin de aderansı etkilediği bilinmektedir [13].



Şekil 3. Aderansın modellenmesi

Bu çalışmada, aderansın modellenmesi donatı ile beton arasında bu davranışı temsil edecek yaylar kullanılarak dikkate alınmıştır.

Aderansı temsil eden yay kuvvetleri ile uzamalar arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} F_{\xi} \\ F_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\xi} & 0 \\ 0 & K_{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{\xi} \\ \Delta_{\eta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{\xi} c^2 + K_{\eta} s^2 & K_{\xi} sc - K_{\eta} sc & -K_{\xi} c^2 - K_{\eta} s^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc \\ K_{\xi} s^2 + K_{\eta} c^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc & -K_{\xi} s^2 - K_{\eta} c^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc \\ K_{\xi} c^2 + K_{\eta} s^2 & K_{\xi} sc - K_{\eta} sc & K_{\xi} c^2 + K_{\eta} s^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc \\ K_{\xi} s^2 + K_{\eta} c^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc & -K_{\xi} s^2 - K_{\eta} c^2 & -K_{\xi} sc + K_{\eta} sc \end{bmatrix} \quad c = \cos\theta, s = \sin\theta$$

simetrik

(16)

olmak üzere, 15 nolu denklemde yerel koordinatlar için hesaplanan $[K]$ matrisi 16 nolu denklemde sistem koordinatları için düzenlenebilir.

Buradaki yay sabitleri donatı yüzeyindeki birim alana karşı gelen eşdeğer yay sabitleri k_{ξ}

$$K_{\xi} = 2a \pi \phi k_{\xi} \quad (17)$$

şeklindedir. Perçin etkisi ile ilgili olan k_{η} terimi ise genellikle ihmal edilmektedir. Aderans gerilmesi sıyrılmaya göre türetilerek, sıyrılmaya rijitliği, $d\tau_b/d\Delta$ ile,

$$K_{\xi} = 2a \pi \phi \frac{d\tau_b}{d\Delta} \quad (18)$$

şeklinde kullanılmıştır.

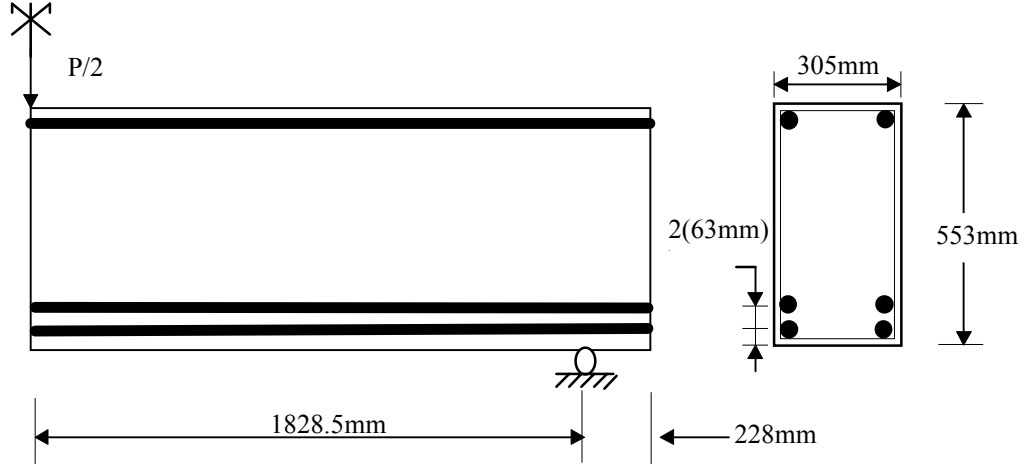
Aderans gerilmesi - sıyrılmaya ilişkisi için Bresler, Bertero [14] tarafından yapılan deneysel çalışmaların sonuçları kullanılarak Nilson [15] tarafından düz donatı ve ortalama bir beton için

$$\tau_b = 979 \Delta - 57241 \Delta^2 + 835627 \Delta^3 \quad (19)$$

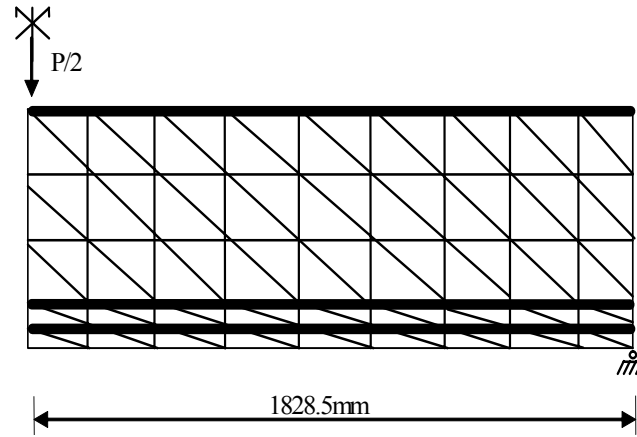
ifade kullanılmıştır. Burada τ_b (N/mm^2) ve Δ ise (mm) birimindedir.

6. SAYISAL UYGULAMA

Sayısal uygulama için deneysel çalışmaları Bresler ve Scordelis [16] tarafından yapılan iki ucundan sabit mesnetli, 3.7m açıklıklı ve ortasında tekil yük bulunan Şekil 4.' de yarısı verilen basit kiriş dikkate alınmıştır. Çözümlenelerde 6 serbestlik dereceli üçgen sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Kiriş sonlu eleman modeli ise Şekil 5.'de verilmiştir.

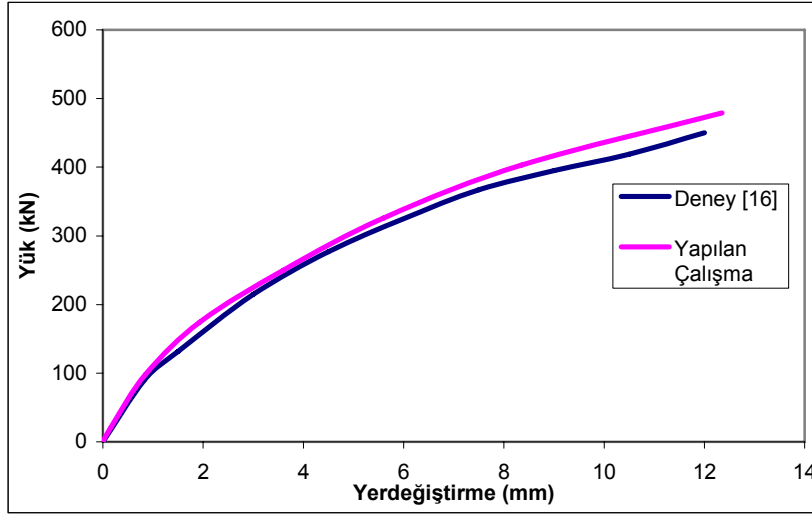


Şekil 4. Betonarme kiriş kesiti ve ölçüleri



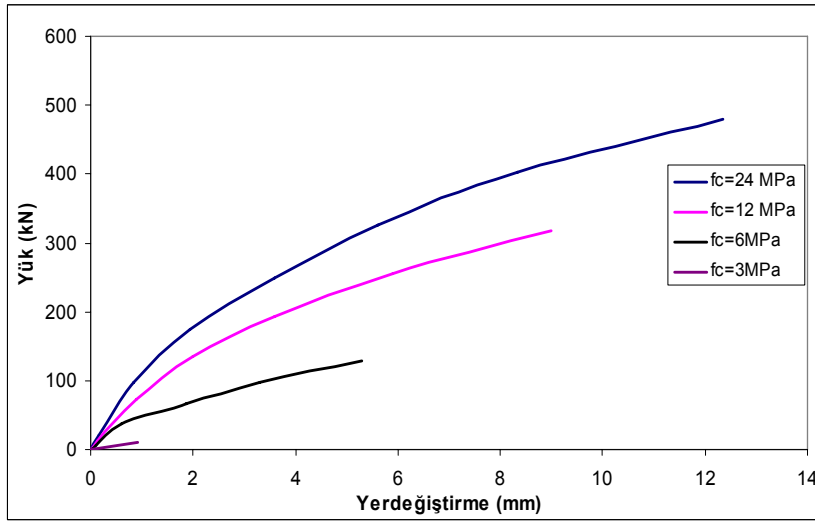
Şekil 5. Sonlu eleman modeli

Yapılan çözümlerden elde edilen yük-yerdeğiştirme ilişkisi deney sonuçlarıyla karşılaştırılarak Şekil 6 da verilmiştir.

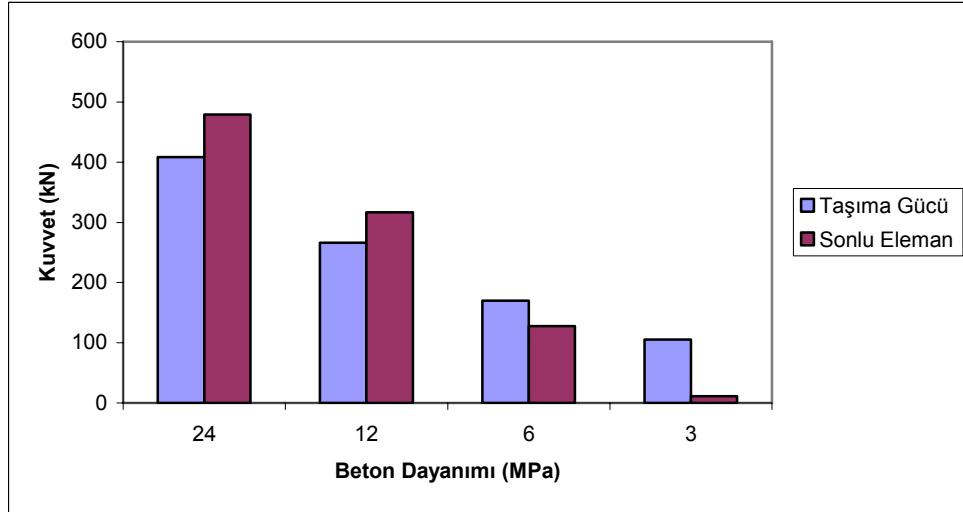


Şekil 6 Yük yerdeğiştirme ilişkisi

Yapılan çözümler sadece beton dayanımı değiştirilerek yenilenmiştir. Bu çözümlerden elde edilen farklı beton dayanımına ait yük yerdeğiştirme eğrileri Şekil 7'de gösterilmiştir. Bu şekilden de görüleceği gibi, beton dayanımındaki azalmalar oranında kirişin kuvvet taşıma kapasitesinde azalmalar ortaya çıktığı görülmüştür.



Şekil 7 Farklı beton dayanımları için yük yerdeğiştirme ilişkisi



Şekil 8 Farklı beton dayanımları için Taşıma Gücü Yöntemi ve Sonlu Eleman çözümüne ait kuvvetlerin karşılaştırılması

Şekil 4’ de verilen kiriş kesitini mevcut donatı şekli, dayanımı ve boyutları göz önüne alınarak “Taşıma Gücü Yöntemi”nin öngördüğü bağıntılar kullanılarak farklı beton dayanımları için moment taşıma kapasitesi hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak kirişin kuvvet taşıma kapasitesi belirlenmiştir. Aynı kişinin farklı beton dayanımı için yapılan doğrusal olmayan sonlu eleman çözümünden elde edilen kuvvet taşıma kapasitesi karşılaştırmalı olarak Şekil 8’de verilmiştir. Bu şekilden de görülebileceği gibi Taşıma Gücü Yöntemindeki bağıntılar kullanılması durumunda beton dayanımındaki çok büyük azalmaların olması moment taşıma kapasitesinde çok büyük değişikliklere neden olmamaktadır. Yine bu bağıntılar kullanılarak beton dayanımı 3 MPa olduğunda kirişin yaklaşık 70 kN yük taşıdığı gibi bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Daha düşük dayanımlı betonlar içinde durum yine aynıdır. Bu durumun gerçeği yansıtmayacağı açıktır. Sonlu eleman çözümlerinde bu dayanımda bir beton çok düşük yük seviyelerinde kiriş ortalarında çatlakların attığı ve aderans sıyrılmaları da ortaya çıkarak taşıma kapasitesine eriştiği görülmüştür.

7. SONUÇ

Binaların deprem güvenliklerinin belirlenmesi, son zamanlarda yaygın olarak kullanılan performansa dayalı tasarım esaslarına göre yapılmaktadır. Bu yöntemde genel olarak; binanın yatay yük taşıma kapasitesinin belirlenmesi amaçlanır. Binanın yatay yük taşıma kapasitesi ise kolon ve kiriş elemanlarının moment taşıma kapasitesine göre değişmektedir. Taşıma Gücü Yönteminde verilen bağıntılar kullanılarak çok düşük dayanımlı betonların dahi büyük mertebelerde yatay yük taşıdığı şeklinde yanlış neticeler elde edilebilmektedir. Bu yüzden belirli bir beton dayanımından daha düşük dayanıma sahip binalar için performansa dayalı tasarım esaslarının doğrudan uygulanmaması veya kiriş ve/veya kolon kesitine etki eden normal kuvvetin kolon normal kuvvet taşıma kapasitesine oranı küçük olan kolonların moment taşıma kapasitesinin belirlenmesinde bir azaltma yapılması daha uygun olacaktır. Aksi takdirde deprem açısından güvensiz olan bir çok yapı güvenli olduğu şeklinde yanlış yorumlamalara neden olunabilecektir.

8. KAYNAKLAR

- [1] Desayi, P. and S. Krishnan, "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete", ACI J. 61, 345-350, 1964.
- [2] Saenz, L. P. "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete", ACI J. 61, 1229-1235, 1964.
- [3] Kupfer, H. B., H. K. Hildsdrof, and H. Rüsç, "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", ACI J. 66, 556-566, 1969.
- [4] Liu, T. C., A. H. Nilson and F. O. Slate, Stress Strain Response and Fractures of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression, ACI J. 69, 291-295, 1972.
- [5] Kupfer, H. B., K. H. Gerstle; "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", J. Eng. Mech. Div. 99, 552-866, 1973.
- [6] Büyüköztürk, O.; "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structure", Comp. and Struc. 7, 149-156, 1977.
- [7] Chen, W. F.; Plasticity of In Reinforced Concrete, McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.
- [8] Rashid, Y. R.; "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", Nuclear Engineering and Design. 7, 334-344, 1968.
- [9] Al-Mahaidi.; "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Deep Members", Research Report No. 79-1, Department of Structural Engineering, Cornell University 1979.
- [10] Mufti, A. A., M. S. Mirza, J. O. McCutcheon and J. A. Houde; Study of the Behavior of Reinforced Concrete Elements, Structural Concrete Series No.7-5, Mc Gill University, 1970.
- [11] Mufti, A. A., M. S. Mirza, J. O. McCutcheon and J. A. Houde; Study of the Nonlinear Behavior of Structural Concrete Elements, Proceeding of the Specialty Conference of Finite Element Method in Civil Engineering, Montreal, Canada, 1972.
- [12] Bangash, M. Y. H.; Concrete and Concrete Structures: Numerical Modelling And Application, Elsevier Applied Science, London and New York 1989.
- [13] Allwood, R. J. And A. A. Bajarwan, "Modeling Nonlinear Bond-Slip Behavior for Finite Element Analyses of Reinforced Concrete Structures", ACI Structural J. 93, 538-544, 1996.
- [14] Bresler, B., V.V Bertero, "Behavior of Reinforced Concrete Under Repeated Load", ASCE J. Struc. Div. 94, 1567-1590, 1968.
- [15] Nilson, A. H.; "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by Finite Element Method", ACI J. 65, 757-766, 1968.
- [16] Bresler, B., A. C. Scordelis, "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams", J. ACI. 60, 51-72, 1963.