

75366

SONSUZ UZUNLUKTA SİLİNDİRİK TÜP İÇERİSİNDE
SIKIŞMAZ İKİNCİ DERECE AKIŞKANIN DAİMİ AKIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Saadet S. ÖZER

75366

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Ocak 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Şubat 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erdoğan S. ŞUHUBİ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY

Prof. Dr. Hüsnü Ata ERBAY

ŞUBAT 1998

ÖNSÖZ

Çalışmam boyunca desteğini ve hoşgörüsünü esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Erdoğan Şuhubi'ye teşekkürlerimi sunarım. Her aşamada beni yalnız bırakmayan arkadaşlarıma da tüm yardımları için teşekkür ederim.

Mat. Müh.
Saadet Özer

Ocak 1998



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Non-Newtonyen Akışkanlar	1
1.2 Rivlin-Ericksen Akışkanları ya da Diferansiyel Tipte Akışkanlar	4
1.3 Rivlin-Ericksen Akışkanlarının Termodinamik Analiz ve Stabilitate Çalışmalarına Tarihsel Bir Bakış	12
BÖLÜM 2 TERMODİNAMİK ANALİZ VE STABİLİTE	18
BÖLÜM 3 SIKIŞMAZ İKİNCİ DERECE AKIŞKANLAR İÇİN ALAN DENKLEMLERİ	23
BÖLÜM 4 İKİNCİ DERECE AKIŞKANIN SİLİNDİRİK TÜP İÇERİSİNDE HAREKETİ	28
4.1 Örnek Problemin Hareket Denklemleri	28
4.2 Pertürbasyon Açılımı	32
4.3 Analitik Fonksiyonlarla Çözüm	37
4.3.1 Basit Bağımlı Bölgede Analitik Fonksiyonların Yapıları	40
4.3.2 Çok Bağımlı Bölgelerde Analitik Fonksiyonların Yapıları	41
4.4 Sınır Koşulları	45
4.4.1 Homojen Sınır Koşulları Altında Problemin İncelenmesi	45
4.4.2 Akışkanın Tüpün Yüzeyleri Boyunca Emildiği Durumda Problemin İncelenmesi	46
4.5 Konform Dönüşüm Aracılığıyla Problemin Keyfi Bölgelere Aktarılması	60

BÖLÜM 5 POISEUILLE AKIMININ STABİLİTESİ	66
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	95



SEMBOL LİSTESİ

θ	: Sıcaklık
$\mathbf{t}$	: Akışkanın bir noktasındaki Cauchy gerilme tansörü
$\mathbf{q}$	: Isı akısı vektörü
ε	: İç enerji yoğunluğu
η	: Entropi yoğunluğu
Ψ	: Helmholtz serbest enerji yoğunluğu
$\mathbf{g}$	: Sıcaklık gradyanı
$\mathbf{L}$	: Hız gradyanı tansörü
p	: Basınç
$\bar{p}$	: Karakteristik basınç
μ	: Viskozite katsayısı
ρ	: Yoğunluk
ψ	: Akım fonksiyonu
α	: Sıcaklığa bağlı malzeme modülü
$\mathbf{f}$	: Kütle kuvveti
L	: Karakteristik tüp en kesiti
U	: Karakteristik hız
$\mathbf{v}$	: Hız fonksiyonu
$\mathbf{w}$	: Çevri vektörü
w	: Boyuna hız bileşeni
ω	: Kompleks hız
$\mathbf{A}_i$	: i . Rivlin-Ericksen Tansörü
$f(s)$	: Emme fonksiyonu
$F(s)$	: Emme fonksiyonunun integrali
Re	: Reynolds sayısı
a_n, b_n, c_n	: Analitik fonksiyonların katsayıları

C_n	: Emme fonksiyonunun katsayıları
f_0	: Sabit emme fonksiyonu
$h(\sigma)$	: Konform dönüşüm fonksiyonu
d_k	: Dönüşüm fonksiyonunun katsayıları
J, Y	: 1. ve 2. tip Bessel fonksiyonları
K, I	: 1. ve 2. tip modifiye Bessel fonksiyonları
m	: Dalga sayısı



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 4.1 Silindirik tüp kesiti	28
Şekil 4.2 Basit bağımlı bölge.	41
Şekil 4.3 Çok bağımlı bölge	41
Şekil 4.4 w_0 boyuna hız bileşeninin hız profili	75
Şekil 4.5 Emme halinde ψ_1 akım çizgileri	76
Şekil 4.6 Birinci mertebe eksenel hızların profili	78
Şekil 4.7 Birinci mertebe teğetsel ve çembersel hızların grafiği	80
Şekil 4.8 w_1 birinci mertebe boyuna hız profili	82
Şekil 4.9 Konform dönüşüm	60
Şekil 5.1 Poiseuille akımının stabil halde akım çizgileri	83
Şekil 5.2-Şekil 5.14 Değişik dalga sayılarına karşı gelen akım çizgileri	84

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1 Poiseuille Akımının Stabilite Analizi

91



ÖZET

Bu çalışmada bir Newtonyen olmayan akışkan modeli olan, ikinci derece Rivlin-Ericksen akışkanının sonsuz uzunlukta bir silindirik tüp içerisinde sabit karakteristik basınç gradyanı altında hareketi incelenmiştir.

Giriş bölümünde genel olarak non Newtonyen akışkan modellerinden kısaca bahsedildikten sonra, Rivlin-Ericksen akışkan modeli elde edilmiş ve özellikle termodinamik uyum ve stabilite tartışmalarının tarihsel gelişimi üzerinde durulmuştur.

İkinci Bölümde termodinamik uyum şartlarının malzemenin bünye denklemlerine getirdiği kısıtlar elde edilmiştir. Akışkana ait hareket denklemleri 3. Bölümde elde edildikten sonra 4. Bölümde silindirik tüp içinde akım için düzenlenmiştir. Bu aşamada akışkanın ikinci derece boyutsuz malzeme sabitinin yeterince küçük olduğu, yani ya malzeme sabitinin çok küçük, yada karakteristik çapın çok büyük olduğu durumlar gözönüne alınarak pertürbasyon açılımı yapılmıştır. Çözümlerde analitik fonksiyonlar kullanılmıştır. Problem özelinde analitik fonksiyonların basit bağımlı bölgelerde ve çok bağımlı bölgelerde yapıları belirlenmiştir.

Bölüm 4.4'de basit bağımlı dairesel bölgede önce homojen sınır koşulu altında, yani tüpün hareketsiz olduğu ve tüp yüzeyinde hızların sıfır olduğu halde ardından da akışkanın tüpün yüzeylerinde emildiği durum için çözümler aranmıştır. Homojen sınır koşulları ele alındığı takdirde problemin pertürbasyon açılımının yeni bir çözüm vermediği ve sadece klasik hız alanını ürettiği gözlenmiştir. Bölüm 4.5 de ise konform dönüşüm aracılığıyla dairesel bölgenin keyfi basit bağımlı bölgelere dönüşümü ele alınmıştır.

5. Bölümde Poiseuille akımının stabilitesi incelenmiş, akım fonksiyonunun ζ 'ye bağlı olmayan çözümleri araştırılmıştır.

SUMMARY

THE STEADY FLOW OF SECOND ORDER FLUID IN AN INFINITELY LONG CYLINDRICAL TUBE

Some materials, in Nature, show some fluid characteristics that can not be defined by a linear viscous flow model. Such fluids are generally called non-Newtonian fluids. The non-Newtonian fluid model is defined by the relation between the stress and velocity gradient tensor at a point not being linear in the constitutive equation, which defines the character of the fluid.

A model, which has not a viscoelastic component in non-Newtonian fluids, is Rivlin-Ericksen fluids which is defined by

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A}_1 + \alpha_3\mathbf{A}_2 + \alpha_4\mathbf{A}_1^2 + \alpha_5\mathbf{A}_2^2 + \alpha_6(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) + \alpha_7(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2) + \alpha_8(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1) \quad (1)$$

The fluid which is obtained by second order truncation of the expansion (1) represented by

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (2)$$

is called second order fluid. Here $\mathbf{t}$ represents the Cauchy stress tensor at a point, α_1 , α_2 and μ are some materials constants, which may depend on temperature. The tensors $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_r$ are defined as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= 2\mathbf{d} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \mathbf{A}_2 &= \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{L}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{L}^T \\ &\dots\dots \\ \mathbf{A}_{r+1} &= \dot{\mathbf{A}}_r + \mathbf{L}\mathbf{A}_r + \mathbf{A}_r\mathbf{L}^T \end{aligned}$$

and is called Rivlin-Ericksen tensors.

There are many studies in which the thermodynamic analysis and the stability of Rivlin-Ericksen fluids are treated. These can be seen in the list of references. One of them, Dunn and Fosdick [23] have shown that the following conditions must be satisfied

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0 \quad (3)$$

for the second order fluid to be consistent with thermodynamics. For this case the constitutive equation (2) for second order fluid can be written as

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) \quad (4)$$

The equation of motion for a second order Rivlin-Ericksen fluid can be obtained in vectorial notation as follows

$$\begin{aligned} \rho \left[\mathbf{v}_t + \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \mathbf{f} \right] = & -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \\ & + \alpha \left[\nabla^2 \mathbf{v}_t + \nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4} |\mathbf{A}_1|^2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Here p is the pressure, $(.)$ denotes the material derivate, $\mathbf{f}$ shows the external forces, $\mathbf{w}$ is the spin vector which is defined as:

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$$

To obtain non-dimensionalized equations of steady motion let us define characteristic velocity U and characteristic length L and write the equation of motion (5) in non-dimensionalized form as follows:

$$\nabla \bar{p} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \varepsilon (\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \quad (6)$$

Here

$$\bar{p} = p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4})$$

will be called the characteristic pressure. Furthermore we have also defined

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\rho L^2}.$$

By taking into consideration that the curl of the gradient is zero, the equation of motion can be written as:

$$\nabla \times \left[-\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \varepsilon (\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}) - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \right] = 0 \quad (7)$$

This is the equation of motion of steady flow for a second order incompressible fluid.

Flow in a Cylindrical Tube

In the case of the steady flow of a second order fluid in a cylindrical tube, if we assume that $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$, it is possible to define the velocity field in terms of a stream function ψ as follows

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$$

where the unit vectors $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ and $\mathbf{k}$ are along the cartesian axes x , y , ξ . ξ axis coincides with the axis of the cylinder whereas x, y axes are chosen within the cross section. Then the equations of motion (7) become:

$$(\psi_y w_x - \psi_x w_y)_y = \frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_y + \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y)_y \quad (8)$$

$$(\psi_x w_y - \psi_y w_x)_x = -\frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_x + \varepsilon (\psi_x (\nabla^2 w)_y - \psi_y (\nabla^2 w)_x)_x \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{Re} \nabla^4 \psi + \varepsilon (w_y (\nabla^2 w)_x - w_x (\nabla^2 w)_y + \psi_x (\nabla^4 \psi)_y - \psi_y (\nabla^4 \psi)_x) \\ & = \psi_x (\nabla^2 \psi)_y - \psi_y (\nabla^2 \psi)_x \end{aligned} \quad (10)$$

Here $(.)_{x,y,z}$ shows the partial differentiation with respect to coordinates. Considering the equations (8) and (9) together, it is seen that the following equation can be written as:

$$\psi_y w_x - \psi_x w_y - \frac{1}{Re} \nabla^2 w + \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y) = C \quad (11)$$

Where the constant C is actually characteristic pressure gradient assumed to be constant. We can see that by using equation (6). As a special case in which the non-dimensional second order constant ε is sufficiently small namely either the material constant α is small or the characteristic diameter L is very large will be taken into account. We can then employ perturbation expansions for the stream function and longitudinal velocity component as follows:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots$$

$$\psi = \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$$

$$C = \bar{P} = \bar{P}_0 + \varepsilon \bar{P}_1 + \varepsilon^2 \bar{P}_2 + \dots$$

When the equations (11) (10) and (6) are considered together the following equations can be obtained in accordance to various orders of the ε :

$$\nabla^2 w_0 = -Re \bar{P}_0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 w_1 = Re (w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x} - \bar{P}_1) \quad (13)$$

$$\nabla^4 \psi_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_2 &= Re (w_{0x} \psi_{2y} + w_{1x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{2x} - w_{1y} \psi_{1x} - \bar{P}_2) \\ \nabla^4 \psi_2 &= Re (w_{0y} \nabla^2 w_{1x} + \psi_{1y} \nabla^2 \psi_{1x} - \psi_{1x} \nabla^2 \psi_{1y} - w_{0x} \nabla^2 w_{1y}) \end{aligned} \quad (14)$$

Here equations (12), (13)₁, (14)₁ are Poisson's equations and the others are biharmonic equations. In this article, the solutions in terms of analytic functions of these equations will be examined. The equation (12) can be solved as by using analytical functions

$$w_0 = -\frac{\bar{P}_0 Re}{4} z\bar{z} + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$$

where $z = x + iy$ and $\bar{z}$ is its conjugate, here $\phi(z)$ is analytical function. In a similar fashion, the first order of stream function can be expressed as

$$\psi_1 = \bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \quad (15)$$

here $\Omega(z)$, $\phi(z)$ are also analytical functions.

Analytical Functions in a Simply Connected Domain

Let us take a simply connected domain R that is bounded by a closed curve C (Fig.4.2). In this case the analytic functions $\Omega(z)$ and $\phi(z)$ are single-valued and can be expanded in Taylor series around $z=0$, which is assumed to be in the domain as follows

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

here the coefficients a_n and b_n are constants which will be determined by using the boundary conditions.

Analytical Functions in a Multiply Connected Domain

Let us consider a multiply connected domain which is bounded with the curve C_0 externally and with the curves $C_1, C_2, \dots, C_n$ internally (Fig.4.3). In this case the velocities should be single-valued even if the functions $\Omega(z)$ and $\phi(z)$ are not single-valued. The conditions for complex velocity expressed by $w = u + iv$ to be the single-valued imply that:

$$[\bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + \phi'(z)]_A^A = 0, \quad [\Omega(z) + z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \phi'(z)]_A^A = 0 \quad (16)$$

Since the functions within the parenthesis are analytic, their derivatives will be continuous. We try with the logarithm function, which has the same properties of the function above. The derivative of the logarithm function is single-valued although it is not single-valued itself. If the Eqn (16) is differentiated with respect to z and $\bar{z}$ it can be seen that the following expressions have to be satisfied.

$$[\Omega'(z)]_A^A = [\bar{\Omega}'(\bar{z})]_A^A = 0$$

$$[\phi''(z)]_A^A = [\bar{\phi}''(\bar{z})]_A^A = 0$$

In a multiply connected region the structure of the functions $\Omega(z)$ and $\varphi(z)$ is determined as

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \Omega_0(z), \quad \bar{\Omega}(\bar{z}) = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \bar{\Omega}_0(\bar{z}) \quad (17)$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k}{2\pi} (z - z_k) \log(z - z_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \varphi_0(z) \quad (18)$$

Here the functions $\Omega_0(z)$ and $\varphi_0(z)$ are single-valued and analytic in the domain and can be defined by a Laurent expansion:

$$\Omega_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_k)^m, \quad \varphi_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z - z_k)^m$$

The problem now is to combine the separate Laurent expansions written around the contours and find a solution for the whole domain. This seems rather difficult.

In order to give an example to our problem we consider flow in an impermeable pipe. It is straightforward to see that all the terms of perturbation expansion for stream function are identically zero. At this stage the only difference between the solution of this problem and the solution for ideal viscous fluid problem is that a constant pressure gradient inducing the longitudinal velocity distribution is replaced now by a constant characteristic pressure gradient. For second grade and third grade Rivlin-Ericksen fluids solutions are possible for which the particle velocities are those of the longitudinal flow. However, if the fourth grade constitutive equation is valid, for the fluid, a steady flow in transverse planes is superposed on the longitudinal flow [31].

As another example, the problem of suction or injection of the fluid along the boundary of the tube is studied. If a layer of a permeable solid material is used as the boundary of a region of fluid flow, fluid may be sucked or injected through the boundary. In this case the normal component of the velocity will be the function of a suction function at the boundary and the tangential component of the velocity will be zero [37]. Therefore, the boundary conditions for the case of suction will be as follows:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = f(s), \quad u_t = 0 \quad (19)$$

If we expand the suction function, which is the function of the arc length s to a perturbation series in ε the boundary conditions (19) can be written as

$$\begin{aligned}
w_i|_{\partial R} &= 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
\frac{d\psi_i}{ds}\bigg|_{\partial R} &= f_i(s) \quad \psi_i|_{\partial R} = F_i(s) \quad i = 1, 2, \dots \\
\psi_{iz} \frac{dz}{ds}\bigg|_{\partial R} &= \psi_{i\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds}\bigg|_{\partial R} \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

Here $F_i(s)$ defined as, $F_i(s) = \int f_i(s) ds$.

Here the problem will be examined in a circular cylindrical tube. Then the parameter s will be equal to θ . Since $F(\theta)$ should a 2π periodic function it is can be expanded in Fourier Series. By employing the boundary conditions (20) the component of velocity and stream function are determined as follows

$$\begin{aligned}
w_0(z, \bar{z}) &= (1 - z\bar{z}), & w_0(x, y) &= (1 - x^2 - y^2) \\
\psi_1 &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(C_n z^n + C_{-n} \bar{z}^n)}{2} ((n+2) - nz\bar{z}) \right] \\
\psi_1(x, y) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right] \\
u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2} (-2y(C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) + \right. \\
&\quad \left. i(C_n (x+iy)^{n-1} - C_{-n} (x-iy)^{n-1}) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right] \\
v_1(x, y) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2} (-2x(C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) + \right. \\
&\quad \left. (C_n (x+iy)^{n-1} + C_{-n} (x-iy)^{n-1}) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right] \\
w_1(z, \bar{z}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} \left[z\bar{z} (n(1+n)z\bar{z} - 2(2+n)^2) + (n^2 + 7n + 8) (C_n z^n - C_{-n} \bar{z}^n) \right. \\
&\quad \left. + (1 - z\bar{z}) \right] \\
w_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} \left[(n^2 + 7n + 8) + (x^2 + y^2) [n(1+n)(x^2 + y^2) - \right. \\
&\quad \left. 2(2+n)^2] (C_n (x+iy)^n - C_{-n} (x-iy)^n) + (1 - x^2 - y^2) \right]
\end{aligned}$$

Here C_n are the constants of $F(\theta)$ function in the Fourier expansion. For a special case, if $F(\theta)$ function only has first two degree terms the functions above will be simplified. The graphics of these functions are given in appendices .

Conformal Transformation

After having obtained the solution corresponding to the circular tube, the solution for an arbitrary simply connected domain can be obtained through the well-known conformal transformation Fig (4.9).

The expression $z=h(\sigma)$ establishes a correspondence between the points of complex planes σ and z . Consequently the analytical functions under this transformation will be written as follows:

$$\Omega(z) = \Omega[h(\sigma)] = \Omega_1(\sigma), \quad \varphi(z) = \varphi[h(\sigma)] = \varphi_1(\sigma),$$

And their derivatives can be evaluated by

$$\Omega'(z) = \frac{\Omega'_1(\sigma)}{h'(\sigma)}, \quad \varphi'(z) = \frac{\varphi'_1(\sigma)}{h'(\sigma)}, \quad \overline{\Omega}'(\bar{z}) = \frac{\overline{\Omega}'_1(\bar{\sigma})}{\overline{h}'(\bar{\sigma})}, \quad \overline{\varphi}'(\bar{z}) = \frac{\overline{\varphi}'_1(\bar{\sigma})}{\overline{h}'(\bar{\sigma})}$$

The suction function along the boundary ∂R can be written as $F(s)=F[h(\sigma)]=F_1(\sigma)$. Hence the boundary conditions (20) on arbitrary simply connected domain under conformal transformation take the form

$$\begin{aligned} \overline{h}(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\overline{\Omega}_1(\bar{\sigma}) + \varphi_1(\sigma) + \overline{\varphi}_1(\bar{\sigma}) \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} &= F_1(\theta) \\ \left(\overline{h}(\bar{\sigma})\Omega'_1(\sigma) + h'(\sigma)\overline{\Omega}'_1(\bar{\sigma}) + \varphi'_1(\sigma) \right) \sigma \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} &= \\ - \left(\overline{h}'(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\overline{\Omega}'_1(\bar{\sigma}) + \overline{\varphi}_1(\bar{\sigma}) \right) \overline{\sigma} \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} & \end{aligned} \tag{21}$$

This means that the flow at a circular tube can be transformed to an arbitrary simply connected domain by the transformation mentioned above. By taking a special transform function solution for a special domain can be obtained.

The Stability of Poiseuille Flow

In this section we have studied the linear stability solutions for the Poiseuille flow. By using δ parameter to add small perturbations to Poiseuille flow, then the stream function and the longitudinal flow can be written as follows:

$$w = w_0 + \delta w_1, \quad \psi = \delta \psi_1$$

The equations of motion (10) and (11) for different orders of δ can be written as:

$$\begin{aligned}\nabla^2 w_0 &= -CRe, & w_{0y} \nabla^2 w_{0x} &= w_{0x} \nabla^2 w_{0y} \\ \nabla^2 w_1 &= Re(w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x}) \\ \nabla^4 \psi_1 &= \varepsilon Re(w_{0y} \nabla^2 w_{1x} - w_{0x} \nabla^2 w_{1y})\end{aligned}$$

The equation governing the stability of motion turns out to be:

$$\nabla^4 \psi_1 = -N^2 \left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial y} - w_{0y} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_1$$

Here N^2 is defined as $N^2 = \varepsilon Re^2$.

If we consider circular cross section as an example, the stability equation becomes

$$\left(\nabla^4 + 2N^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ik \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - ik \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi_1 = 0$$

Here $2N^2 = k^2$. The stream function for linear stability analysis in Fourier modes can be written as:

$$\psi_1 = \Psi(r) e^{im\theta}$$

Here m shows the wave number. Because of the operator obtained in this case is being linear, the factors are being commutative, the spectrums are being discrete and simple eigenvalues being entirely different, the general solution can be expressed as an arbitrary sum of separate solutions of factors:

$$\Psi(r) = \Psi_1(r) + \Psi_2(r)$$

Where the function $\Psi_1(r)$ and $\Psi_2(r)$ satisfy

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(km - \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \Psi_1(r) = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(km + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \Psi_2(r) = 0$$

So, the solution can be expressed in terms of Bessel's functions as follows :

$$\Psi(r) = AJ_m(\sqrt{km}r) + CY_m(\sqrt{km}r) + BI_m(\sqrt{km}r) + DK_m(\sqrt{km}r) \quad (22)$$

$\Psi(r)$ has to be finite. Since

$$r \rightarrow 0, \quad Y_m(\sqrt{km}r) \rightarrow \infty, \quad K_m(\sqrt{km}r) \rightarrow \infty$$

then we have to take $C=D=0$. The boundary conditions are applied for a circle with radius equal to 1

$$u_r = \frac{1}{r} \psi_\theta, \quad u_\theta = -\psi_r, \quad u_r|_{r=R} = u_\theta|_{r=R} = 0$$

the equation (22) can be written as:

$$AJ_m(\sqrt{km}) + BI_m(\sqrt{km}) = 0, \quad AJ'_m(\sqrt{km}) + BI'_m(\sqrt{km}) = 0$$

In this case, in order to have a non-zero solution the determinant of coefficient matrix must vanish. Here the smallest root was reached for $m=3$, $k=17.01001182792537309334832959$. The other values are given in Table 1. It is possible to say that the instability begins after this value. The graphic of the stability are given in Figure 5.1 and the other instability graphics can be seen on Appendices.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bazı jeolojik malzemeler, sıvı sabunlar, polimerik akışkanlar, hamur, bal mayonez, ketçap gibi bazı yiyecek maddeleri, asfalt, boya, kan gibi günlük hayatımızda bolca karşılaştığımız maddeler akışkan özelliklerine sahiptirler fakat lineer viskoz akış modeli ile yeterince tanımlanamayacak akışkan karakteristikleri gösterirler. Bu Newtonyen davranıştan ayrılan etkileri ifade edebilmek için değişik modeller öne sürülmüştür.

Bu tipte akışkanlar Non-Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılır. Gerçekte sürekli ortamın bir noktasındaki gerilme tansörü ile hız gradyanı arasındaki bağıntının lineer olduğu akışkanlara Newtonyen, lineer olmadığı akışkanlara ise Non-Newtonyen akışkanlar adı verilir.

Non-Newtonyen akışkanlar mekaniği yakın bir zamanda özellikle madde akışı ile moleküler yapı arasında bir bağ kurmak isteyen fiziksel kimyacıların polimerik malzeme çalışmaları ile gelişmeye başlamıştır denilebilir.

1.1 NON-NEWTONYEN AKIŞKANLAR

Madde akışını inceleyen reoloji Non-Newtonyen akışları belli sınıflara ayırmıştır. Non-Newtonyen akışkanların genel olarak üç grupta toplanabileceği söylenir.

1. Herhangi bir noktadaki hız gradyanının o noktadaki kayma gerilmesine bağlı olduğu akışkanlar.
2. Kayma gerilmesi ve hız gradyanı arasındaki ilişkinin, akışkana uygulanan kayma etkisi süresine veya akışkanın geçmişine bağlı olduğu akışkanlar.

3. Hem sıvı hemde katı özellikleri gösteren, deformasyondan sonra kısmen elastik yapısına dönen akışkanlar. Bu tür akışkanlar genellikle viskoelastik akışkanlar olarak adlandırılır.

Zamandan bağımsız Newton tipi olmayan akışkanların bünye denkleminde akışkanın bir noktasındaki hız gradyanı o noktasındaki kayma gerilmesinin basit bir fonksiyonu olarak alınır. Bu tür akışkanlar Bingham plastikleri, pseudoplastik (sankiplastik) akışkanlar ve dilatant akışkanlar olarak üç grupta incelenebilir. Bingham plastiklerinin bünye denklemi τ_y akma gerilmesine ve hız gradyanına bağlıdır. Durağan haldeki akışkan τ_y akma gerilmesinden daha küçük bir gerilmeye uygun bir rijitlikle karşı koyabilecek yapıdadır. Eğer τ_y akma gerilmesi aşılsa yapı parçalanır ve $\tau - \tau_y$ kayma gerilmesi altında Newtonyen bir akışkan gibi davranır. Örnek olarak sulu çimento, çamur, yağlı boya gibi akışkanların davranışının Bingham plastiğine yakın olduğu gösterilebilir. Sankiplastiklerde ise hız gradyanı arttıkça viskozite düşmektedir. Bu durum *kayma inceliği* olarak adlandırılır. Bu tür akışkanlar *kuvvet yasası* olarak bilinen ve ilk olarak Oswald ve Reiner tarafında ortaya konmuş bir yapı ile tanımlanır.

$$\tau = kL^n$$

Bu tip akışkanlara erimiş polietilen, polipropilen, bazı süspansiyonlar örnek olarak gösterilebilir. Dilatant akışkanlarda ise hız gradyanının artması ile viskozite artış gösterir. Sankiplastiklerdekinin tersi olarak anlaşılacağı üzere bu duruma *kayma kalınlığı* adı verilir. Bu tür akışkanlar da kuvvet yasası denklemi ile ifade edilebilir. Ancak burada $n > 1$ olmalıdır. Bu tip akışkanlara sukroz eriği ile titanyum oksidin oluşturduğu süspansiyonlar örnek verilebilir. Bu tür akışkanlara düşük hızda kayma uygulandığında akışkan bir parçacıktan diğerine olan hareketi kolaylaştırıcı etkide bulunur. Yüksek hız gradyanında yoğun parçacık grupları parçalanırlar, boşluklar artar ve malzeme yavaş yavaş genişler.

Zamana bağlı Newtonyen olmayan akışkanlarda ise viskozite sadece hız gradyanına değil, kayma etkisinin uygulanma süresine de bağlıdır. Bu tip akışkanlar da, kayma etkisiyle yapısının bozulmasına veya düzene girmesine göre sırasıyla Thixotropic akışkanlar ve Rheopectic akışkanlar olarak iki grupta ele alınabilir.

Thixotropic akışkanların temel özelliği sabit hızda kayma etkisi uygulandığında yapısının sürekli olarak bozulması ve viskozitesinin zamanla azalmasıdır. Yüksek kayma gerilmesi altında yapıları tamamen bozulur. Rheopectic akışkanlarda ise akışkanın yapısı kayma etkisiyle kademeli olarak düzene girer. Vanadyum pentoksit ve bentonitin sulandırılmış çözeltileri bu tip malzemelere örnek olarak verilebilir.

Ayrı bir grup olarak viskoelastik akışkanlardan söz edilebilir. Polimer kimyacıları makromoleküler yapıyı incelemek için, küçük genlikli hareketlerde geçici mekanik cevabın deneysel olarak ve kinetik teori ile elde edilmesi için incelemeler yapmışlardır.

Newtonyen olmayan akışkanlar için en eski lineer viskoelastik model

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \eta_0 \mathbf{A}_1$$

bünye denklemi ile ifade edilen *Maxwell* modelidir. Burada $\mathbf{T}$ bir noktadaki gerilme tansörü, λ ve η_0 sırasıyla gevşeme zamanı parametresi ve viskozite, $\mathbf{A}_1$ 1. Rivlin Ericksen tansörü, $(\overset{\nabla}{\cdot})$ ise

$$\overset{\nabla}{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{X} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

şeklinde tanımlanan Oldroyd türevidir. Viskoelastik akışkan modeline bir örnek

$$\mathbf{T} = - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{t-t'}{\lambda}} + 2\lambda_2 \delta(t-t') \right] \mathbf{L}(t') \right\} dt'$$

bünye denklemi ile ifade edilen *Jeffreys* modelidir. Burada $\eta_0, \lambda_1, \lambda_2$ malzeme sabitleri, δ dirac delta fonksiyonu, $\mathbf{L}$ ise hız gradyanı tansörüdür

Newtonyen olmayan akışkanlar için geliştirilmiş diğer bünye denklemlerinden örnekler verilebilir. *Oldroyd-B* akışkanında bünye denklemi

$$\lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} = 2\mu(\mathbf{L} + \lambda_r \overset{\nabla}{\mathbf{L}})$$

ile verilir. Burada λ gevşeme zamanı, λ_r ise geciktirme zamanı olarak adlandırılan parametreler, $(\cdot)^\nabla$ sembolü ise Oldroyd türevini göstermektedir. Ayrıca

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta_0\mathbf{L} - 2k_0 \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

bünye denklemi ile ifade edilen *Walters' B* akışkanı da ilk akla gelen kullanışlı modellerdendir.

Newtonyen olmayan akışkan modelleri için Kaynak [1-4]'e başvurulabilir.

1.2 RİVLİN-ERICKSEN AKIŞKANLARI YA DA DİFERANSİYEL TİPTE AKIŞKANLAR

Newtonyen olmayan akışkanlar içerisinde elastik bileşen içermeyen bir model olarak *Rivlin Ericksen* ya da başka bir deyişle *diferansiyel tipte akışkanlar* önemli bir yer tutar. Bu modelde akışkana ait bünye denklemi gerilme tansörünün deformasyon tansörü ve onun zamana göre değişik mertebe türevlerine bağlılığı ile ifade edilir.

Rivlin Ericksen akışkanının bünye denklemleri için bağımsız bünye değişkenleri hareket ve sıcaklık olan termomekanik malzemeler esas alınmıştır. Bağımlı değişkenler ise gerilme, entropi, ısı akısı ve iç enerji yoğunluğu olup sürekli ortamların nedensellik aksiyomu gereğince bu iki bağımsız bünye değişkenine bağlı olarak ifade edilir. Bu durumda termomekanik malzemeler için

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{X}, t) &= \mathfrak{T}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t] \\ \mathbf{q}(\mathbf{X}, t) &= \mathcal{Q}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t] \\ \varepsilon(\mathbf{X}, t) &= \wp[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t] \\ \eta(\mathbf{X}, t) &= \mathcal{N}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t] \end{aligned} \tag{1.1}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{t}$ gerilme tansörü, $\mathbf{q}$ ısı akısı vektörü, ε iç enerji yoğunluğu, η entropi yoğunluğudur. $\mathbf{X}$ maddesel koordinatları, $\mathbf{x}$ uzaysal koordinatları, θ sıcaklığı

ifade etmektedir. Hareket ve sıcaklığın $\mathfrak{I}$ tansör değerli, Q vektör değerli, $\wp$ ve N ise skaler değerli fonksiyonelleridir.

Bu aşamada sürekli ortamların bazı aksiyomlarından kaynak [5]'i referans alarak kısaca bahsedelim. Bu aksiyomlar da tüm aksiyomlarda olduğu gibi doğadan edindiğimiz bazı izlenimlere dayanır.

Objektivite Aksiyomu

Bu aksiyom uzaysal koordinat takımının herhangi bir rijid hareketi altında bünye denklemlerinin form-invaryant kalması gerektiğini ifade eder. Bu birbirine göre rijid hareket eden koordinat takımlarına yerleşmiş gözlemcilerin bünye denklemlerine göre gözledikleri davranışların birbirinin aynısı olması gerektiği anlamındadır. Objektif olarak eşdeğer $\bar{\mathbf{x}}$ ve $\mathbf{x}$ hareketleri için her $Q(t)$ ortogonal matrisi, her $\mathbf{b}(t)$ vektörü ve a sayısı için

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, \bar{t}) = Q(t)\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{b}(t), \quad \bar{t} = t - a \quad (1.2)$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır. (1.1) ile ifade edilen bağımlı bünye değişkenlerinin objektif olması için objektif olarak eşdeğer herhangi iki harekette

$$\bar{\mathbf{t}} = Q\mathbf{t}Q^T, \quad \bar{\mathbf{q}} = Q\mathbf{q}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \bar{\eta} = \eta \quad (1.3)$$

bağıntıları sağlanmalıdır. Burada $\bar{\mathbf{t}}$, $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\varepsilon}$ ve $\bar{\eta}$ büyüklükleri sırasıyla $\bar{\mathbf{x}}$ koordinat takımında ölçülen gerilme tansörü, ısı akısı vektörü, iç enerji ve entropi yoğunluklarını ifade eder. Bu bağımlı değişkenler (1.1) denkleminde $\mathbf{x}$ yerine $\bar{\mathbf{x}}$ koordinatı (1.2) tanımı dikkate alınarak yerleştirildiği takdirde

$$\mathfrak{I}[\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}), \bar{\theta}(\mathbf{X}', \bar{t}); \mathbf{X}, \bar{t}] = Q(t)\mathfrak{I}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t); \mathbf{X}, t]Q^T(t),$$

$$Q[\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}), \bar{\theta}(\mathbf{X}', \bar{t}); \mathbf{X}, \bar{t}] = Q(t)Q[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t); \mathbf{X}, t],$$

$$\wp[\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}), \bar{\theta}(\mathbf{X}', \bar{t}); \mathbf{X}, \bar{t}] = \wp[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t); \mathbf{X}, t],$$

$$N[\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}), \bar{\theta}(\mathbf{X}', \bar{t}); \mathbf{X}, \bar{t}] = N[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t]$$

veya

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}[Q(t')\mathbf{x}(\mathbf{X}', t') + \mathbf{b}(t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t - a] &= Q(t)\mathfrak{Z}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t]Q^T(t), \\ Q[Q(t')\mathbf{x}(\mathbf{X}', t') + \mathbf{b}(t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t - a] &= Q(t)Q[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t], \\ \wp[Q(t')\mathbf{x}(\mathbf{X}', t') + \mathbf{b}(t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t - a] &= \wp[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t], \\ N[Q(t')\mathbf{x}(\mathbf{X}', t') + \mathbf{b}(t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t - a] &= N[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'); \mathbf{X}, t] \end{aligned} \quad (1.4)$$

bağıntılarını sağlamalıdır.

Maddesel Simetri Aksiyomu

Maddesel simetri aksiyomu aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir.

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (1.5)$$

Burada $\mathbf{S}$ ortogonal bir transformasyon grubunu, $\mathbf{B}$ ise $\mathbf{X}$ koordinat takımından ötelemeyi ifade eder. $\mathbf{S}$ tam ortogonal grup ise malzeme izotropdur. Malzemenin izotrop olması ise malzeme özelliklerinin doğrultuya göre değişmediği anlamına gelir, malzeme özellikleri doğrultuya göre değişiyorsa anizotropdur denir.

Bünye denklemleri maddesel koordinat takımının bütün dönmeleri altında invariant kalıyorsa malzeme hemitropdur.

Yöresellik Aksiyomu

Bu aksiyom bağımlı bünye değişkenlerinin sürekli ortamın bir parçasındaki değerinin ancak o parçasığın yakın yöresindeki bağımsız bünye değişkenlerinden etkileneceğini ifade eder. Aksiyoma matematiksel bir yapı kazandırabilmek için bünye fonksiyonelinin $\mathbf{X}$ parçasığındaki değerinin, bağımsız bünye değişkenlerinin

yalnızca $\mathbf{X}$ noktasını çevreleyen Δ yarıçaplı bir açık yuvar içindeki $\mathbf{X}'$ parçacıklarındaki değerlere bağlı olduğunu kabul edilir. Cismin karakteristik uzunluğu D ile gösterildiğinde $\Delta/D \ll 1$ olduğu varsayılırsa ortamın bir noktasındaki hareket Taylor serisine açılabilir ve Δ uzunluğunun çok küçük olduğu göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}', t') &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t') + \mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t')(X'_K - X_K) + \\ &\frac{1}{2} \mathbf{x}_{,KL}(\mathbf{X}, t')(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots, \quad |\mathbf{X}' - \mathbf{X}| < \Delta \end{aligned} \quad (1.6)$$

yazılabilir. Aynı açılım benzer şekilde sıcaklık içinde yapılırsa

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{X}', t') &= \theta(\mathbf{X}, t') + \theta_{,K}(\mathbf{X}, t')(X'_K - X_K) + \\ &\frac{1}{2} \theta_{,KL}(\mathbf{X}, t')(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots, \quad |\mathbf{X}' - \mathbf{X}| < \Delta \end{aligned} \quad (1.7)$$

elde edilir. Bu yaklaşıklık çerçevesinde (1.6) ve (1.7) eşitlikleri fonksiyoneller üzerine uygulanırsa, fonksiyonlar artık $\mathbf{X}'$ maddesel koordinatlarının belirsiz fonksiyonları olmak yerine bunların polinom türü fonksiyonlarına dönüşür. Burada açıktır ki Δ aralığı ne kadar küçükse malzeme uzak komşuluklarından o kadar az etkilenir ve bünye denklemlerine giren gradyanların mertebesi de o kadar küçük olur. Δ aralığı tamamıyla malzemenin yapısına bağlıdır. Basit malzemelerin özelliği olarak (1.6) ve (1.7) eşitliklerinde sadece birinci gradyanlar bulunur.

Bellek Aksiyomu

Sürekli ortamların bu aksiyomu da malzemenin şimdiki hareket ve sıcaklığına uzak geçmişteki hareket ve sıcaklığının etkisinin yakın geçmiştekine oranla daha az olduğunu ifade eder. Burada temel sorun malzemenin uzak geçmişinden ne kadar etkilendiğini belirleyebilmektir. Yöresellik aksiyomunda kullanılan yaklaşıma benzer bir yaklaşımla, bünye fonksiyonellerinin t anındaki değerlerinin hareket ve sıcaklığın t' den ancak $\delta > 0$ öncesine kadar aldığı değerlere bağlı olduğu kabul edilir. Yani ortam gözönüne alınan andan δ kadar öncesinde başından geçenleri

hatırlayacak, daha öncesini hatırlamayacaktır. Bu durumda $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t')$ fonksiyonu t anı civarında Taylor serisine açılabilir.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t') = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t - \tau) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)\tau^2 - \dots, \quad 0 \leq \tau \leq \delta \quad (1.8)$$

yazılabilir.

Şimdi (1.1) eşitliklerine yukarıda bahsettiğimiz aksiyomları sırasıyla uygulayacak olursak, ilk olarak objektivite aksiyomunun uygulanması ile

$$\begin{aligned} Q(t) \mathfrak{I}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t - \tau) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t - \tau), \theta(\mathbf{X}', t - \tau); \mathbf{X}] Q^T(t) = \\ \mathfrak{I}[Q(t - \tau)[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t - \tau) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t - \tau)], \theta(\mathbf{X}', t - \tau); \mathbf{X}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. Yukarıdaki hal (1.1)₁ gerilme tansörünün bünyesel ifadesinin objektivite aksiyomu altında aldığı haldir. Diğer (1.1)_{2,3,4} ifadeleri de yani ısı akısı vektörü, entropi ve iç enerji yoğunluğu da benzer şekilde yazılabilir. Bundan sonraki ifadelerde sadece (1.1)₁ gerilme tansörünün bünyesel ifadesini ele alınacaktır.

Maddesel simetri aksiyomu gereğince

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t - \tau) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t - \tau), \theta(\mathbf{X}', t - \tau); \mathbf{X}] = \\ \mathfrak{I}[\mathbf{x}(\mathbf{SX}' + \mathbf{B}, t - \tau) - \mathbf{x}(\mathbf{SX} + \mathbf{B}, t - \tau), \theta(\mathbf{SX}' + \mathbf{B}, t - \tau); \mathbf{SX} + \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (1.10)$$

olur. Yöresellik aksiyomunun uygulanması ile $\mathfrak{I}$ fonksiyoneli

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\mathbf{x}_{,K}(t - \tau), \mathbf{x}_{,KL}(t - \tau), \dots, \mathbf{x}_{,KLM\dots T}(t - \tau), \\ \theta(t - \tau), \theta_{,K}(t - \tau), \dots, \theta_{,KLM\dots T}(t - \tau); D_K, \mathbf{X}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

haline gelir. D_K terimleri Taylor açılımından gelen $X' - X$ terimlerinden dolayı alınmıştır. Burada $F_{KL} = X_{K,k}(\mathbf{x}, t)X_{L,l}(\mathbf{x}, t)\mathfrak{I}_{kl}$ fonksiyoneli tanımlayalım. Ayrıca basit malzemeler için

$$C_{KL}(t-\tau) = \delta_{kl} x_{k,K}(t-\tau) x_{l,L}(t-\tau) \quad (1.12)$$

$$\det |x_{k,K}(t-\tau)| = \sqrt{[\det C_{KL}(t-\tau)]} = \frac{\rho_0}{\rho(t-\tau)}$$

tanımları geçerlidir. Bu durumda basit malzemeler için bünye denklemleri

$$t_{kl}(\mathbf{X}, t) = F_{KL} [C_{MN}(t-\tau), \rho^{-1}(t-\tau), \theta(t-\tau), \theta_{,K}(t-\tau); \mathbf{X}] x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.13)$$

haline gelir. Son olarak düzgün bellek aksiyomu gereğince, (1.1)₁ ile ifade edilen gerilme tansörü,

$$t_{kl}(\mathbf{X}, t) = F_{KL} [C_{MN}, \dot{C}_{MN}, \ddot{C}_{MN}, \dots, C^{(p)}_{MN}, \rho^{-1}, \dot{\rho}, \ddot{\rho}, \dots, \rho^{(p)}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, \theta^{(q)}, \theta_{,K}, \dot{\theta}_{,K}, \ddot{\theta}_{,K}, \dots, \theta^{(r)}_{,K}; \mathbf{X}] x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.14)$$

yapısında ifade edilebilir. Süreklilik denklemi,

$$\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}', t')} = \det \frac{\partial x_k(\mathbf{X}', t')}{\partial X'_K} \quad (1.15)$$

şeklinde. Bu denklem ısı iletimi ihmal edilerek (1.14)'e uygulanacak olursa,

$$t_{kl} = j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} [C, \dot{C}, \ddot{C}, \dots, C^{(p)}, \theta, \mathbf{X}] \quad (1.16)$$

elde edilir.

Akışkan tanımı gereğince, yoğunluğunu değiştirmeyen her konum referans konumu olarak seçilebilir. Bu ise uzaysal konumların maddesel koordinatları belirlediği anlamına gelir. Dolayısıyla herhangi bir t anı için $x_{k,K} = \delta_{kK}$ matris formunda ise $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda (1.16) eşitliğinde $j = \det |\mathbf{F}| = 1$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$ olacaktır. O halde Green deformasyon tansörlerinin çeşitli mertebe türevleri için

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}} &= 2\mathbf{F}^T \mathbf{d}\mathbf{F} = 2\mathbf{d} \\ \mathbf{C}^{(r)} &= \mathbf{F}^T \mathbf{A}_r \mathbf{F} = \mathbf{A}_r, \quad r = 1, 2, \dots, p\end{aligned}\quad (1.17)$$

eşitlikleri geçerli olur. Burada $\mathbf{A}_r$, r . mertebe Rivlin-Ericksen tansörüdür. Rivlin-Ericksen tansörleri yay elemanının zamana göre türevleri alınarak elde edilir:

$$\frac{d^r}{dt^r}(\mathbf{ds}^2) = d\mathbf{x}^T \mathbf{A}_r d\mathbf{x}$$

(1.17) eşitlikleri (1.14) denkleminde gerilmenin aşağıdaki gibi Rivlin-Ericksen tansörleri cinsinden ifade edilebileceğini gösterir:

$$\mathbf{t} = \tau[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_r, \rho, \theta, \mathbf{X}] \quad (1.18)$$

Çeşitli mertebe Rivlin-Ericksen tansörleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= 2\mathbf{d} \\ \mathbf{A}_2 &= \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{L}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{L}^T \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}_{r+1} &= \dot{\mathbf{A}}_r + \mathbf{L}\mathbf{A}_r + \mathbf{A}_r\mathbf{L}^T\end{aligned}\quad (1.19)$$

Burada $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ dir. $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^T + \mathbf{L})$ ile şekildeğiştirme gradyanı tansörü ve $(\dot{})$ maddesel türev ifade edilmektedir.

Şimdi (1.18) eşitliğinin bir özel hali olarak, sadece ilk iki Rivlin-Ericksen tansörü alınır

$$\mathbf{t} = \tau[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho, \theta, \mathbf{X}]$$

ve akışkanın homojen olduğu varsayılırsa,

$$\mathbf{t} = \tau[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho, \theta] \quad (1.20)$$

eşitliği elde edilir. Akışkan izotrop olacağından

$$\tau[QA_1Q^T, QA_2Q^T, \rho, \theta]$$

yazılabilir. Eğer t düzgün davranan izotrop bir fonksiyon ise A_1 ve A_2 nin polinomları şeklinde ifade edilebilir [6]. Bu durumda akışkanın bir noktasındaki gerilme tansörünü ifade eden bünye denklemi,

$$\begin{aligned} t = & -pI + \alpha_1 I + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2 + \alpha_4 A_1^2 + \alpha_5 A_2^2 + \alpha_6 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + \\ & \alpha_7 (A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) + \alpha_8 (A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) \end{aligned} \quad (1.21)$$

haline gelir. Burada α_i ($i = 1, \dots, n$), A_1 ve A_2 tansörlerinin invaryantlarına, yoğunluğa ve sıcaklığa bağlı olabilen malzeme katsayılarıdır. (1.21) ile elde ettiğimiz bünye denkleminin ifade ettiği akışkanlara Rivlin-Ericksen akışkanları ya da diferansiyel tipte akışkanlar adı verilir. Hem teori ve hem de deneyler tarafından ilgi gören bu akışkan sınıfı ilk olarak 1955'te Rivlin ve Ericksen [4] tarafından verilmiştir. Diferansiyel tipte akışkanlarda deformasyon gradyanının geçmişinin sadece çok kısa bir kısmı (gerçekte infinidadesimal kısmı) gerilme tansörü üzerinde etkilidir. Bu tür malzemeler yavaş yavaş sönen bir belleğe sahip olmaları yerine, bellekleri hızla kaybolur, tüm yerel hareketlerin aniden kesilmesi ile gerilme sadece hidrostatik basınca dönüşür. Akışkan modelinin elde edilmesinde daha ayrıntılı bilgi için [5,7,8] kaynaklarına başvurulabilir.

İkinci derecede akışkanlar, matematik olarak kullanışlı bir model olmasından dolayı Newtonyen olmayan akışkanlar üzerinde yapılan çalışmalarda oldukça geniş bir yer tutar. Bu çalışmalara birkaç örnek verecek olursak, Kim [9], ikinci derece akışkan içerisinde bir elipsoidin hareketini değişik Weissenberg etkileri altında incelemiştir. Kazakia ve Rivlin [10] aksenal silindirler arasındaki boyuna ve düzlem oluşların süperpozisyonunu silindirin dairesel eksenli sonsuz silindir olması halinde çalışmış ve iç silindirin boyuna kararlı hareketini, boyuna basınç gradyanıyla gözlemlemişlerdir. Rajagopal [11] ikinci derece akışkanın dönen paralel plaklar arasındaki akımını incelemiştir. Kazakia ve Rivlin [12] dikdörtgen kesitli tipte boyuna titreşimlerin Poiseuille akımına etkisi üzerinde durmuşlardır. Siddiqui ve Schwarz [13] tüple ikinci derece akışkanın peristaltik akımını çalışmışlar ve Christie

ve arkadaşları [14] ise eksenel dönen silindirler arasındaki akımı Reynolds sayısının daha önce Fosdick ve Rajagopal [15] tarafından tanımlanan absorpsiyon sayısına oranı üzerinde pertürbasyon yaklaşımı ile incelemişlerdir. Chandra ve Oku-Ukpong [16] çalışmalarında von Mises koordinat dönüşümünü kullanarak ikinci derece sıkışmaz akışkanın akım eğrilerini elde etmişler ve değişik problemlere uygulamışlardır. Pakdemirli ve Şuhubi [17] özel bir koordinat sistemi tanımlamışlar ve bu sistemde ikinci derece akışkanlar için sınır tabakası çözümü yapmışlardır. Yine aynı yıl kaynak [18]'deki çalışmalarında ise bir önceki çalışmalarında elde ettikleri denklemler için benzerlik çözümleri geliştirmişlerdir.

Biz bu çalışma kapsamında sıkışmaz bir ikinci derece akışkanın sonsuz uzunlukta silindirik tüpte değişik sınır koşulları altında çözümlerini ve bunların bazılarının kararlılığını inceleyeceğiz.

1.3 RİVLİN-ERICKSEN AKIŞKANLARININ TERMODİNAMİK ANALİZ VE STABİLİTE ÇALIŞMALARINA TARİHSEL BİR BAKIŞ

Akışkana ait bünye denklemi elde edildikten sonra, bu kısımda J. E. Dunn ve K. R. Rajagopal'in kaynak [19]'da belirtilen çalışması temel alınarak Rivlin-Ericksen akışkan modeli alınarak yapılan çalışmalardan ve deneylerden bahsedilecektir. Dunn ve Rajagopal adı geçen çalışmalarında diferansiyel tipte akışkanın termomekaniği ve stabilitesi üzerinde durmuşlar, bu tür akışkanların tarihi boyunca ortaya çıkmış bazı karışıklıkları kaldırmaya, belirsizlikleri netleştirmeye çalışmışlar ve bazı yeni teoremler ortaya atmışlardır.

Kullanımdaki matematiksel kolaylığına bağlı olarak son yıllarda bu türde akışkanların termomekaniği ve stabilitesi üzerine incelemeye değer veriler elde edilmiştir. “Bu çalışmaların bazılarının sonuçları bazen paradokslar, fiziksel imkansızlıklar, bazen de gerçek ile teori arası çakışmalar olarak açıklanmıştır. Bu çalışmalara dikkatli bir bakış, tüm bu problemlerin diferansiyel tipte akışkana ait deneysel ve teorik sonuçların, hayal ve belirsizliği ortadan kaldırmada hatalı açıklamalar olduğunu gösterir.” [19].

(1.21) denkleminin bir özel hali olan ikinci derece akışkanlar için bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (1.22)$$

eşitliği ile verilmiştir. (1.22) denklemini tam bir model olarak ele aldığımızda onun bir alt sınıfı olarak ($\alpha_1=\alpha_2=0$ alındığında) Navier Stokes akışkanına ulaşılır. İlk olarak Criminale, Ericksen ve Filbey [20] 1958'deki çalışmalarında, (1.22) ifadesinin daimi, viskometrik akış olarak bilinen diferansiyel tipte akışkanın gerilmesini tam olarak ifade ettiğini göstermişlerdir. Daha sonra akışkanların bir özel sınıfı için yeterince yavaş akışlarda (1.22) denklemini, Coleman ve Noll [21] sönen belleğin özel bir çeşidi ile ideal akışkanda gerilme açılımının ikinci mertebede kesilmesi ile ele almış ve kullanmışlardır (Gerçekte ikinci derece akışkan bir matematik yaklaşım değil de özel bir ilgi olarak sunulmuştur). İkinci derece akışkanlar üzerinde yapılan bazı çalışmalarda, belli bir hipotetik malzemenin genel hareketinde bazı özel durumlar gözönüne alındığında, (1.22) eşitliğinin bir noktadaki gerilme tansörü ile aynı noktadaki hız gradyanı arasındaki ilişkiyi tanımlayan bünye denklemi olarak alınması beklenen sonuçlar vermemiştir. Fakat (1.22) eşitliği objektiflik özelliğine sahip olduğundan bir akışkan davranışını incelemek için motive edici bir model olduğu söylenebilir.

Deneysel ve teorik çalışmalarda (1.22)'in katsayılarının işareti yaklaşılmaması gereken sonuçlarla farklılık göstermiştir. Klasik lineer viskoelastisite içeren özel bünye teorisiyle çalışmaları ile Coleman ve Markovitz [22] bünye denklemlerinde bir lineerleştirmeyle birlikte malzeme sabiti α_1 ve kayma gevşeme modülü $G(\cdot)$ arasında bir bağ kurdular. Sönen belleği belli özel tipte olan malzemeler için (1.22) formunda α_1 katsayısı Coleman ve Noll [21] tarafından

$$\alpha_1 = -\int_0^\infty sG(s)ds \quad (1.23)$$

şeklinde verilmiştir. Normalde $G(\cdot)$ 'nin pozitif olduğunun bir ispatı olmadığı halde önseziyle pozitif olması gerektiği düşünülmüştür. Coleman ve Markovitz [22] bu noktada tatminkar bir ispat yapılamıyorsa termodinamik bir önseziyle pozitif kabul edilmiştir diyerek bu görüşü doğrulamışlardır. (1.23) ifadesi Coleman ve Markovitz

tarafından çalışılan sönen bellek teorisi için önemliyken, bu aşamada (1.22) bir özel akışkan tanımı olarak sağlanıyorsa, $G(\cdot)$ 'nin analizi α_1 'in işareti üzerine yol gösterir.

Rajapogal ve Dunn çalışmalarında x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinat takımında

$$\begin{aligned} v_1 &= v(x_2) \\ v_2 &= v_3 = 0 \end{aligned}$$

hız alanı ile ifade edilen bir basit kayma akımı ele almışlardır. Burada Truesdell ve Noll [8] tarafından tanımlanmış genel bir basit akışkan hareketi gerilmenin bünyesel karşılığı üç karakteristik fonksiyon $N_1(\cdot), N_2(\cdot), \tau(\cdot)$ ve kayma oranı $\kappa \equiv v'(x_2)$ ile gösterilebilen türde bir harekete karşılık gelir. t 'nin kartezyen bileşenleri yerine sırasıyla birinci ve ikinci normal gerilme farkları

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(\kappa) = T_{11} - T_{22} \\ N_2 &= N_2(\kappa) = T_{22} - T_{33} \end{aligned} \quad (1.24)$$

ve kayma gerilmesi fonksiyonu

$$\tau = \tau(\kappa) = T_{12}$$

şeklinde dir.

Eğer basit bir akışkan uygulaması söz konusu ise akışkanın viskometrik fonksiyonu olarak alınan $N_1(\cdot), N_2(\cdot), \tau(\cdot)$ 'nin analizinde, objektiflik, $\tau(\cdot)$ 'nin tek fonksiyon olmasını ve $N_1(\cdot)$ ile $N_2(\cdot)$ 'nin sıfıra giden çift fonksiyonlar olmasını gerektirir. Ayrıca basit kayma akımında sadece kayma gerilmesi olduğundan, akışın mekanik enerjiyi yayması durumu, $\tau(\kappa)$ 'nın κ ile aynı işaretli olmasını gerektirir. $\tau(\cdot)$ 'nin ve $N_1(\cdot)$ ile $N_2(\cdot)$ 'nin her ikisinin birden orijinde sürekli türetilbilir oldukları varsayılınsın. Bazı akışkanlar için, birinci ve ikinci normal gerilme katsayıları ve sıfırıncı derece viskozite aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\psi_1 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{N_1(\kappa)}{\kappa^2}, \quad \psi_2 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{N_2(\kappa)}{\kappa^2}, \quad \mu^0 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} \quad (1.25)$$

$\phi_1 = -\frac{1}{2}\Psi_1$, $\phi_2 = \Psi_1 + \Psi_2$ olsun. ϕ_1 ve ϕ_2 'yi sırasıyla 1. ve 2. normal gerilme katsayıları olarak alabiliriz:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(\kappa) = -2\phi_1\kappa^2 + O(\kappa^2) \\ N_2 &= N_2(\kappa) = (2\phi_1 + \phi_2)\kappa^2 + O(\kappa^2) \\ \tau &= \tau(\kappa) = \mu^0\kappa + O(\kappa) \end{aligned} \quad (1.26)$$

(1.22) formu için hesaplanması kolay bir örnek alalım.

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(\kappa) = -2\alpha_1\kappa^2 \\ N_2 &= N_2(\kappa) = (2\alpha_1 + \alpha_2)\kappa^2 \\ \tau &= \tau(\kappa) = \mu\kappa \end{aligned} \quad (1.27)$$

alalım. İkinci derece akışkanlar için $\phi_1 = \alpha_1$, $\phi_2 = \alpha_2$, $\mu^0 = \mu$ olduğundan, $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$ ya da $\tau(\cdot)$ karakteristik fonksiyonları daha yüksek mertebe terimleri barındırmaz. İkinci derece akışkanda μ, α_1, α_2 malzeme modülleri $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$ ve $\tau(\cdot)$ 'dan elde edilen μ^0, ϕ_1, ϕ_2 sayılarından belirlenir.

Böylece (1.22) benzeri formda, bilinen akışkanın gerilmesinde bir geciktirme açılımında ϕ_1, ϕ_2 ve μ^0 ifadeleri iyi tanımlıdır denilebilir. Diğer bir deyişle Coleman-Noll'un geciktirme teoreminin hipotezlerine karşılık, bir malzeme için (1.22) tanımı geciktirme parametresinde ikinci derece terimleri tutar. Ayrıca düzgün basit kayma ailesinde (1.26) nin türetilabilir kabulünün belirmesiyle, öyle malzemeler için (1.22)'nin ikinci mertebede kesilmesinde $(\mu, \alpha_1, \alpha_2)$ katsayılar üçlüsü (μ^0, ϕ_1, ϕ_2) üçlüsüne eşit olmalıdır. O halde bazı basit akışkanlarda, viskometrik fonksiyonların en düşük mertebeli terimleri akışkanın malzeme sabitlerini belirlemeye yaradığı söylenebilir.

İkinci derece akışkan modeli, içerik ve teoremin konularıyla olduğu kadar deneylerle de önemli bir etkileşim içindedir. Markovitz ve Brown 1963'deki çalışmaları-rının verilerinde N_1 ve N_2 nin κ üzerinde quadratik bağımlılığından bahsederken, Tanner'in 1970 verisinde bu bağımlılığı destekleyecek birşey yoktur.

Bunun yerine Tanner'ın verisi, düşük kayma oranlarında, polyisobutylene-cetane solüsyonunda $N_1(\kappa)$ ve $N_2(\kappa)$ için sırasıyla, $|\kappa|^1, |\kappa|^7$ sonuçlarını, %1 polyethylene-oxid su solüsyonunda ise yine $N_1(\kappa)$ ve $N_2(\kappa)$ için $|\kappa|^{0.86}$ ve $|\kappa|^{1.1}$ sonuçlarını vermiştir [19].

Son olarak (1.26) eşitliğindeki, Coleman ve Markovitz'in α_1 'in işaretine dair görüşleri kabul edildiği takdirde, yeteri kadar düşük kayma oranından N_1 'in pozitif olması gerektiği görülür. Bu, N_2 'nin pozitif değerleri boyunca kayma aralığının üzerinde çalışılan bir polyisobutylene-cetane çözümü için deneysel olarak bulunan sonuçtur. Yani, teori ve deneyin “bu görünüşte mükemmel” uyumu izlenimine ulaşılır, ya da öyle görünür ki 30 yılın sonunda uzaktan bakıldığında (1.22) formu sadece $\alpha_1 < 0$ değerlerinde kullanılmalıdır [19].

Rajagopal ve Dunn bunları anlatırken tarihin kaybedildiğine dair bir başlık atar. Coleman ve Markovitz'in sonucu (1.22) nin yapısının sınırlanmasında, bu akış geciktirmesinde önemli ise de, (1.26) sonucu çok özel malzemeler sınıfına uygulamada α_1 'in işareti hakkında birşey söylemez. İkinci olarak, (1.22) nin kendisi sönen bellek üzerine bir görüş benimsemediğinden (ve bunu yapmakla kayma gerilmesi modülü $G(\cdot)$ ile ilişkilendirmede başarısızdır). (1.26) sonucu herhangi gerçek bir ikinci derece akışkanda α_1 'in işareti üzerine bir yol göstericilik yapmaz [19]. Dunn ve Fosdick [23] Coleman ve Markovitz [21] ve Ting [24], (1.22) ile modellenmiş bazı daimi olmayan akımları incelediler ve $\alpha_1 < 0$ olduğunda göz önüne aldıkları hiçbir problemde sınırlı çözüm olmadığını, $\alpha_1 > 0$ olduğu halde ise Navier-Stokes benzeri fakat daha iyi davranışları gözlediler. Coleman ve arkadaşları sonraki çalışmalarında ikinci derece akışkanın bir kanaldaki laminar kayma akımının ayrıntılarını incelediler ve Ting'in sonuçlarına dayanarak $\alpha_1 < 0$ halinde kuvvetli kararsızlık ve çözümsüzlük sonuçları buldular.

Ting [24] ve Coleman ve arkadaşları [25] (1.22) formunun bünye denklemi olarak alınması durumunda en azından $\alpha_1 \geq 0$ olması gerektiğini saptadılar.

Coleman $\alpha_1 < 0$ olduğunda belirli kanal genişlikleri için sınırlı çözümün mümkün olmadığını belirtir. Bu görüşünün sırası geldiğinde “ancak ve ancak” gücünde de ifade edilebileceğini söyler. Bu son nitelendirme son derece kritiktir.

Yani ona göre çözümler $\alpha_1 > 0$ olduğunda herhangi kanal genişliği için hem mevcut hem de iyi davranışlı olmalıdır.

Burada gelinen son nokta “Rivlin-Ericksen formunun asimptotik bir yaklaşım” olduğudur. Maalesef Rivlin-Ericksen akışkanları ya da başka bir deyişle diferansiyel tipte akışkanlar 5 yıl boyunca, Coleman ve Noll’dan önce bir yaklaşım fikri olmaksızın formülasyon olarak alındı. Aslında Rivlin açıklamalarında bunun 8 yıl olduğunu söyler.

Ting ve Coleman çalışmalarını kayma tipindeki hareketlerle sınırlandırmışlardır. Aslında Coleman ve arkadaşları zamana bağlı basit kayma akışlarını incelerken, Ting bu hareketlere ek olarak zamana bağımlı, dairesel eksenli tüp boyunca Poisseuille akımını araştırmıştır. Bu yazarların çalışmalarında, genelde ne üç boyutlu hareketler, ne de (1.22) denklemindeki α_2 sabitinin değeri ele alınmıştır. 1974’de Dunn ve Fosdick [23] ikinci derece akışkanın üç boyutlu akışlarını incelediler ve $\alpha_1 < 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ halinde akışların kararlı olmadığını gösterdiler. Daha sonra Fosdick ve Rajagopal [26] Dunn ve Fosdick’in elde etmiş oldukları sonuçları genişlettiler ve $\alpha_1 < 0$ iken $\alpha_1 + \alpha_2$ değeri ne olursa olsun üç boyutlu akışların büyük bir sınıfının kararlı olmadığını gösterdiler. Ayrıca 1990’da Galdi ve arkadaşları [27] sınırlandırılmamış bölgelerde ikinci derece akışkan hareketinin stabilitesini araştırdılar ve sadece $\alpha_1 < 0$ ve $\mu > 0$ olduğunu alarak durgun halin her zaman yeteri kadar küçük uyarılar için kararlı olduğunu gösterdiler. Aynı zamanda bu sonucun sınırlı bölgelerdeki akışlar için de doğru olduğunu ifade ettiler. Dahası sınırlandırılmamış bölgelerde $\alpha_1 + \alpha_2$ değerine bakılmaksızın $\alpha_1 < 0$ ve $\mu > 0$ ise durgun halin kararlı olmadığını gösterdiler. Galdi ve arkadaşları tüm sınırlandırılmamış bölgeler için patlama yapan bazı yeteri kadar küçük uyarılar olduğunu gösterdiler. Dunn ve Fosdick [19] ise $\alpha_1 < 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ve $\mu > 0$ halinde bazı bölgelerde tüm uyarıların patlamalara neden olduğunu gösterdiler.

1981’de Joseph [28] $n \geq 2$ için n . derece akışkanların stabilitesi üzerinde çalıştı. Biz burada bu çalışmadan bahsetmeyeceğiz, fakat şunu söylemeliyiz ki, viskozite μ negatif olmaması gerektiği için Joseph’in elde ettiği sonuçlar $\alpha_1 < 0$ için ikinci derece akışkanın durgun halinde kararlı olmadığını doğruladı. Bölüm 2 de bu çalışmalardan bahsedilmiştir.

BÖLÜM 2

TERMODİNAMİK ANALİZ VE STABİLİTE

Bu bölümde ikinci derece sıkışmaz akışkanlarda termodinamik uyum koşulları Dunn ve Fosdick [23]'in çalışması temel alınarak incelenecek ve malzeme sabitleri üzerine gelen kısıtlar elde edilecektir. Bağımlı bünye değişkenlerini, (1.22) formundan yola çıkarak bağımsız bünye değişkenleri cinsinden fonksiyoneller aracılığı ile yazalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= -p\mathbf{I} + \hat{\mathbf{t}}(\theta, \mathbf{g}, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}) \\ \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}(\theta, \mathbf{g}, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}) \\ \varepsilon &= \hat{\varepsilon}(\theta, \mathbf{g}, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}) \\ \eta &= \hat{\eta}(\theta, \mathbf{g}, \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada $\mathbf{g} = \text{grad } \theta$, $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ dir. θ sıcaklığı, $\dot{\mathbf{L}}$, $\mathbf{L}$ 'nin maddesel türevini, $\mathbf{t}$ akışkanın bir noktasındaki Cauchy gerilme tansörünü, $\mathbf{q}$ ısı akısı vektörünü, ε iç enerji yoğunluğunu, η entropi yoğunluğunu, $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\eta}$ ise bunların karakteristik fonksiyonlarını temsil etmektedir. Daha önce, ikinci derece sıkışmaz akışkanlara ait bünye denklemleri elde edilirken

$$j = \det \mathbf{F} = 1, \quad \text{tr } \mathbf{L} = 0 \quad (2.2)$$

olduğu ifade edilmişti. Şimdi (2.1) ile ifade edilen bünye denlemleri Clausius-Duhem eşitsizliğine (2.2) şartlarıyla birlikte uygulanırsa

$$\rho(\dot{\psi} + \hat{\eta}\dot{\theta}) - \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \leq 0 \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\hat{\psi}$, $\hat{\psi} = \hat{\varepsilon} - \theta \hat{\eta}$ şeklinde ifade edilen Helmholtz serbest enerji yoğunluğu, $\dot{\hat{\psi}}$ ise onun maddesel türevidir. $\hat{\psi}$ değişkenleri cinsinden, türevin zincir kuralı uyarınca

$$\dot{\hat{\psi}} = \hat{\psi}_\theta \dot{\theta} + \hat{\psi}_g \cdot \dot{\mathbf{g}} + \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} + \hat{\psi}_{\dot{L}} \cdot \dot{\dot{\mathbf{L}}}$$

yazılabilir. Bu durumda Clausius-Duhem eşitsizliği

$$\rho \left\{ (\hat{\psi}_\theta + \eta) \dot{\theta} + \hat{\psi}_g \cdot \dot{\mathbf{g}} + \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} + \hat{\psi}_{\dot{L}} \cdot \dot{\dot{\mathbf{L}}} \right\} - \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \leq 0 \quad (2.4)$$

haline gelir. Bu eşitsizlik $\dot{\theta}$, $\dot{\mathbf{g}}$, $\dot{\dot{\mathbf{L}}}$ cinsinden lineer olduğundan bu terimlerin keyfi değişiminin korunabilmesi için

$$\begin{aligned} -\hat{\psi}_\theta &= \eta \\ \hat{\psi}_L &= 0 \\ \hat{\psi}_g &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

olması gerekir. Yani (2.5) ile elde edilen eşitlikler Helmholtz serbest enerji yoğunluğunun ve entropi yoğunluğunun sadece θ ve $\mathbf{L}$ 'nin bir fonksiyonu olmasını gerektirdiği kısıtını getirir. O durumda (2.3) denklemi

$$\rho \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \leq 0 \quad (2.6)$$

haline gelir. İkinci derece akışkanlar için (1.22) ile elde edilmiş olan gerilme tansörü ifadesinde Rivlin-Ericksen tansörleri $\mathbf{L}$ ve $\dot{\mathbf{L}}$ cinsinden (1.19)'dan yerine yazılırsa Cauchy gerilme tansörü

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & -p\mathbf{I} + \mu(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \alpha_1(\dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{L}}^T + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^{T^2} + 2\mathbf{L}^T\mathbf{L}) + \\ & \alpha_2(\mathbf{L}\mathbf{L}^T + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^{T^2} + \mathbf{L}^T\mathbf{L}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen (2.7) gerilme tansörü (2.6) eşitsizliğine yerleştirilirse Clausius-Duhem eşitsizliği aşağıdaki hali alır:

$$\rho \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} - \mu (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{L} - \alpha_1 (\dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{L}}^T + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^{T^2} + 2\mathbf{L}^T \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - \alpha_2 (\mathbf{L} \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^{T^2} + \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \leq 0 \quad (2.8)$$

(2.8) düzenlenirse

$$\rho \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} - \mu (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{L} - \alpha_1 (\dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{L}}^T) \cdot \mathbf{L} - (\alpha_1 + \alpha_2) (\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^{T^2} + 2\mathbf{L} \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{L} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \leq 0$$

koşulu elde edilir. Bu ifade $\mathbf{g}=0$ hali için sağlanmalıdır. Bu durumda $\dot{\mathbf{L}}$ 'ya göre eşitsizlik lineer olduğundan $\dot{\mathbf{L}}$ 'lı kısmın kaybolması gerekir. Dolayısıyla

$$\rho \hat{\psi}_L \cdot \dot{\mathbf{L}} = \alpha_1 (\dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{L}}^T) \cdot \mathbf{L} \quad (2.9)$$

elde edilir. $\alpha > 0$ ve $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ herhangi iki matris olmak üzere,

$$\hat{\psi}_L(\alpha, \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}' = \frac{\alpha_1}{\rho} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T) \cdot \mathbf{A}$$

şeklinde yazalım. Gateaux türevi ile bu ifade

$$\frac{d}{ds} \hat{\psi}(\alpha, \mathbf{A} + s\mathbf{A}') \Big|_{s=0} = \frac{\alpha_1}{\rho} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T) \cdot \mathbf{A}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{A} = r\mathbf{A}'$ ve $\lambda = s+r$ tanımlayalım. O halde

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{\psi}(\alpha, \lambda\mathbf{A}') \Big|_{\lambda=r} = \frac{\alpha_1}{\rho} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T) \cdot \mathbf{A}' r \quad (2.10)$$

yazılabilir. Elde edilen ifadenin (0,1) üzerinde integre edilmesi ile

$$\hat{\psi}(a, \mathbf{A}') = \hat{\psi}(a, 0) + \frac{\alpha_1}{2\rho} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T) \cdot \mathbf{A}'$$

elde edilir. O halde serbest enerji fonksiyonunun $\mathbf{L}$ cinsinden quadratik olması ile (2.9) ifadesinin (2.10)'a dayanarak

$$\hat{\psi}(\theta, \mathbf{L}) = \bar{\psi}(\theta) + \frac{\alpha_1}{4\rho} |\mathbf{L} + \mathbf{L}^T|^2 \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Burada $\hat{\psi}(\theta, 0) = \bar{\psi}(\theta)$ olarak alınmıştır. (2.11) eşitliği 1. mertebe Rivlin-Ericksen tansörü cinsinden

$$\tilde{\psi}(\theta, \mathbf{A}_1) = \bar{\psi}(\theta) + \frac{\alpha_1}{4\rho} |\mathbf{A}_1|^2 \quad (2.12)$$

olarak yazılabilir. (2.12)'nin bir sonucu olarak, ikinci derece akışkanlarda serbest enerji fonksiyonu $\tilde{\psi}(\cdot, \cdot)$ 'nın dengede bir minimuma sahip olması için

$$\alpha_1 \geq 0$$

olması gereklidir.

(2.9) koşulu yerine yazılınca eşitsizliğin sağlanması için $\mathbf{L}$ cinsinden kübik olan terimlerin yok olması gerekmektedir:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^T{}^2 + 2\mathbf{L}\mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (2.13)$$

Geriye ise sadece

$$\mu(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{L} \geq 0 \quad (2.14)$$

eşitsizliği kalır. (2.13), (2.14) ifadeleri aslında yukarıda α_1 için elde edilmiş olan sonuçla birlikte, ikinci derece akışkanın termodinamik uyumlu olması için

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0 \quad (2.15)$$

şartlarının sağlanması gerektiğini ifade eder. Bu durumda (1.22) ile verilmiş olan ikinci derece akışkana ait bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) \quad (2.16)$$

şeklinde ele alınabilir.

Yine benzer şekilde bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta_1 \mathbf{A}_3 + \beta_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_3 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_2$$

ile verilen ve üçüncü derece akışkanlar olarak adlandırılan özel bir Rivlin-Ericksen akışkan modeli üzerinde termodinamik uyumluluk ve stabilite şartları Fosdick ve Rajagopal [15] tarafından

$$\mu \geq 0, \quad \beta_2 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_3 \geq 0 \quad (2.17)$$

$$-\sqrt{24\mu\beta_3} \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \sqrt{24\mu\beta_3}$$

olarak elde edilmiştir. Fosdick ve Rajapogal bu çalışmalarında, 1980 yılında Serrin'in [29] Navier-Stokes teorisi için klasik sonucu ve Dunn ile Fosdick'in [23] ikinci derece akışkanlar üzerine çalışmalarını esas alarak yola çıkmışlardır. Burada üçüncü derece akışkanda (2.17) ile verilmiş olan termodinamik uyum ve stabilite şartlarının elde edilişi üzerinde durulmayacak, sadece yukarıdaki sonucun verilmesi ile yetinilecektir.

BÖLÜM 3

SIKIŞMAZ İKİNCİ DERECE AKIŞKANLAR İÇİN ALAN DENKLEMLERİ

ALAN DENKLEMLERİNİN VEKTÖREL OLARAK ELDE EDİLMESİ

İkinci derece akışkanlar için bünye denklemi ve termodinamik uyum şartları Bölüm 2 de elde edilmişti. Bünye denkleminde geçen birinci ve ikinci Rivlin-Ericksen tansörleri ise Bölüm 1'de (1.19)_{1,2} ile verilmişti. Bu durumda akışkana ait bünye denklemi (2.16) ve (1.19)_{1,2} ifadelerinden

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha \left[(\mathbf{A}_1)_t + (\text{grad} \mathbf{A}_1) \mathbf{v} + \mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{L} \mathbf{L}^T \right] \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada p basınç, μ viskozite katsayısı, $\alpha = \alpha_1$ sıcaklığa bağlı olabilen malzeme modülü, $\mathbf{A}_1$ ise (1.19)₁ de tanımlı 1. Rivlin Ericksen tansörüdür.

Akışkanın sıkıştırılamaz olduğu kabul edildiği takdirde sıkışmazlık koşulu

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Lineer momentumun korunumu yasasından elde edilen Cauchy hareket denklemi ise vektörel formda

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (3.3)$$

olarak yazılır. Burada $\mathbf{f}$ dış kuvvetleri, $\dot{\mathbf{v}}$ hızın zamana göre maddesel türevini temsil etmektedir. (3.3) hareket denkleminde gerilme tansörü yerine (3.1) ile verilen ikinci derece akışkana ait gerilme tansörü ifadesini yerleştirelim:

$$-\text{grad } p + \mu \text{div} \mathbf{A}_1 + \alpha \text{div}(\mathbf{A}_1)_t + \alpha \text{div}[(\text{grad } \mathbf{A}_1)\mathbf{v} + \mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{L} \mathbf{L}^T] = \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) \quad (3.4)$$

yazılabilir. Eşitliğin sol tarafı için gerekli olan bazı ifadeler aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\text{div } \mathbf{A}_1 = \text{div}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \text{div}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) = \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.5)$$

$$[(\text{grad } \mathbf{A}_1)\mathbf{v}]_j^i = (v_{;j}^i + v_{j; }^i)_{;k} v^k = v_{;jk}^i v^k + v_{j; }^i v_{;k}^k \quad (3.6)$$

$$[\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{L} \mathbf{L}^T]_j^i = v_{k; }^i v_{;j}^k - v_{;k}^i v_{j; }^k \quad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7) nin diverjansları sırasıyla,

$$[\text{div}((\text{grad } \mathbf{A}_1)\mathbf{v})]_j^i = (v_{;jk}^i v^k + v_{j; }^i v_{;k}^k)_{;j} = v_{;jki}^i v^k + v_{;jk}^i v_{;j}^k + v_{j; }^i v_{ki}^k + v_{j; }^i v_{;k}^k v_{;j}^k \quad (3.8)$$

$$[\text{div}(\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \mathbf{L} \mathbf{L}^T)]_j^i = (v_{k; }^i v_{;j}^k - v_{;k}^i v_{j; }^k)_{;j} = v_{k; }^i v_{;jk}^k + v_{k; }^i v_{;ji}^k - v_{;ki}^i v_{j; }^k - v_{;k}^i v_{j; }^k v_{;i}^k \quad (3.9)$$

olacaktır. (3.8), (3.9) ifadeleri toplanır ve (3.2) sıkışmazlık koşulu gözönünde bulundurulursa

$$v_{;jk}^i v_{;j}^k + v_{j; }^i v_{ki}^k + v_{k; }^i v_{;j}^k + v_{k; }^i v_{;ji}^k + v_{k;j}^i v^k - v_{k;j}^i v_{;i}^k \quad (3.10)$$

haline gelir. Elde edilen ifade

$$(v_{j; }^i - v_{k;j}^i) v^k + (v_{k; }^i v_{;j}^k + v_{k;j}^i v^k) + (v_{;jk}^i v_{;j}^k + v_{k; }^i v_{;ji}^k) \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Aslında yukarıdaki üç ifade sırasıyla

$$2\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{W}, \quad \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}), \quad \frac{1}{4}(\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2) \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$ ile tanımlı çevri tansörüdür. Bu durumda sıkışmaz ikinci derece akışkana ait olan (3.4) hareket denklemi

$$\begin{aligned} & -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha (\nabla^2 \mathbf{v})_t + \alpha (\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}) + \\ & \alpha \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4} |\mathbf{A}_1|^2) = \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

haline gelir. Burada $\mathbf{w}$ çevri vektörü olmak üzere, $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ şeklindedir ve $\dot{\mathbf{v}}$, maddesel türevin tanımından

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_t + \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (3.14)$$

olduğuna göre (3.13) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} \rho \left[\mathbf{v}_t + \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \mathbf{f} \right] &= -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \\ &+ \alpha \left[\nabla^2 \mathbf{v}_t + \nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4} |\mathbf{A}_1|^2) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

haline gelir. Elde edilen (3.15) denklemi genel bir sıkışmaz ikinci derece akışkana ait hareket denklemdir.

Bu denklemi boyutsuzlaştırmak için L karakteristik uzunluğu ve U karakteristik hızı seçelim ve denklemlere giren büyüklükleri boyutsuzlaştıralım:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad t^* = \frac{tU}{L} \quad (3.16)$$

Boyutsuz büyüklükler cinsinden (3.15) denkleminde gerekli olan bazı ifadeler

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{U}{L} \nabla \mathbf{v}^*, \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v}^*, \quad \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{U}{L} \nabla \mathbf{w}^*$$

$$\nabla^2 \mathbf{w} = \frac{U}{L^3} \nabla^2 \mathbf{w}^*, \quad \mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial(U \mathbf{v}^*)}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{U}{L^2} \mathbf{v}_t^* \quad (3.17)$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \frac{U^2}{L} (\mathbf{w}^* \times \mathbf{v}^*)$$

şeklinde olacaktır. Yukarıdaki eşitlikler (3.15) denklemine yerleştirilir ve elde edilen ifade $\frac{L}{\rho U^2}$ ile çarpılırsa daimi akım halinde $(\cdot)_t = 0$ olacağından

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} + \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = -\nabla p + \frac{\mu}{\rho UL} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\alpha}{\rho L^2} [\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) + \nabla \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4}] \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada boyutsuz hız, basınç ve zamanı temsil eden * üsler kolaylık açısından kaldırılmıştır. (3.18) deki katsayılar için

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\rho L^2}$$

tanımları verilebilir. Bu halde (3.18) denklemi

$$\nabla \left(p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \varepsilon \left(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4} \right) \right) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \varepsilon [\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}] - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. (3.20) denkleminde eşitliğin sol tarafında gradyan altındaki ifadeler için

$$\bar{p} = p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \varepsilon \left(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4} \right) \quad (3.21)$$

büyüklüğü ile belirlenen karakteristik basınç fonksiyonu tanımlandığı takdirde sol taraf sadece karakteristik basıncın gradyanı olacaktır:

$$\nabla \bar{p} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \varepsilon (\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}) - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (3.22)$$

Basınç fonksiyonu (3.21) eşitliğinden

$$p = \bar{p} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4}) \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada gradyanın rotasyonelinin sıfır olacağı, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$, göz önünde tutulursa (3.20) eşitliğinden hareket denkleminin

$$\nabla \times \left[\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \varepsilon (\nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v}) - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \right] = 0 \quad (3.24)$$

olarak ele alınabileceği görülür. Yukarıdaki eşitlik genel anlamda sıkışmaz bir ikinci derece akışkanın vektörel formda daimi akımda hareket denklemdir ve seçilen koordinat takımından bağımsızdır.

BÖLÜM 4

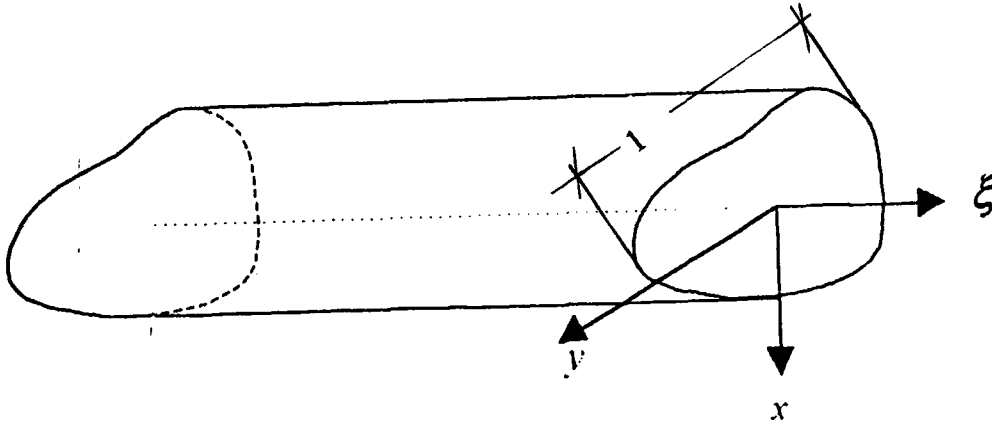
İKİNCİ DERECE AKIŞKANIN SİLİNDİRİK TÜP İÇERİSİNDE HAREKETİ

Bu bölümde ikinci derece akışkanın bir uygulaması olarak dairesel kesitli bir silindirik tüp alınmış ve akışkanın tüp içerisindeki hareketi değişik sınır koşulları altında incelenmiştir.

4.1 ÖRNEK PROBLEMİN HAREKET DENKLEMLERİ

İkinci derece bir akışkanın silindirik tüp içerisinde hareketi $\mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$ hız alanı altında incelenmiştir. Burada $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ birim vektörleri x , y , ξ kartezyen koordinatları boyuncadır. ξ koordinatı silindir eksenini boyunca alınmış olup x , y koordinatları kesit üzerinde seçilmiştir (Şekil 4.1).

Problemin çözümünde (3.24) ile elde edilmiş olan boyutsuz hareket denklemleri gözönüne alınacaktır. Uzunluklar tüpün en kesitinin çapı L , hızlar bir karakteristik U hızı ile boyutsuzlaştırılmış olarak alınacaktır.



Şekil 4.1 Silindirik Tüp Kesit.

$u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ şeklinde alındığında (3.2) süreklilik denkleminin (x,y, ξ) kartezyen koordinat takımındaki ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (4.1)$$

olarak yazılır. Burada

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir $\psi = \psi(x,y)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda (4.1) denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

olacaktır. Bu durum böylesi bir hız alanında hızın boyuna bileşeninin ξ koordinatından bağımsız, yani $w=w(x,y)$ şeklinde olması gerektiğini gösterir. Ele aldığımız ψ fonksiyonu için $\psi=\text{sabit}$ yazarak ψ fonksiyonunun üzerinde sabit değerler aldığı bir eğri ailesi elde etmiş oluruz. Bu ailenin herhangi bir noktadaki normali

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, 0 \right)$$

olacaktır. Normal vektörü ile aynı noktadaki hız vektörünün çarpımı

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

olur. Yani hız vektörleri $\psi = \text{sbt.}$ eğrilerine teğettir. O halde bu eğriler düzlemsel en kesitte akım fonksiyonu eğrileridir. Bu nedenle ψ fonksiyonuna akım fonksiyonu adı verilir [30, s.80].

3. Bölümde genel hız alanı için vektörel formda elde edilmiş olan (3.24) hareket denkleminin ψ akım fonksiyonu cinsinden

$$\mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x, w) \quad (4.3)$$

hız alanını yerleştirmeden önce (4.3) hız alanı ele alındığı takdirde (3.24) hareket denkleminde gerekli olan bazı ifadeleri hesaplayalım.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla^2 \psi_y, -\nabla^2 \psi_x, \nabla^2 w), \quad \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{1}{2}(\psi_y^2 + \psi_x^2 + w^2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{w} \times \mathbf{v} = & (-w(\nabla^2 w)_x - \psi_x \nabla^4 \psi, -w(\nabla^2 w)_y - \psi_y \nabla^4 \psi, \\ & -\psi_x (\nabla^2 w)_y + \psi_y (\nabla^2 w)_x) \end{aligned}$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = (-ww_x - \psi_x \nabla^2 \psi, -ww_y - \psi_y \nabla^2 \psi, -\psi_x w_y + \psi_y w_x)$$

$$\nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = (\psi_y \psi_{xy} + \psi_x \psi_{xx} + ww_x, \psi_y \psi_{yy} + \psi_x \psi_{xy} + ww_y, 0)$$

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 4 \operatorname{tr}(\mathbf{d}^2), \quad \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4} = 2\psi_{xy}^2 + \frac{1}{2}[(\psi_{yy} - \psi_{xx})^2 + w_x^2 + w_y^2]$$

Yukarıdaki ifadeleri kullanarak (4.3) ile verilen hız alanı için akışkanın hareket denklemlerini yazalım:

$$(\psi_y w_x - \psi_x w_y)_y = \frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_y + \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y)_y \quad (4.4)$$

$$(\psi_x w_y - \psi_y w_x)_x = -\frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_x + \varepsilon (\psi_x (\nabla^2 w)_y - \psi_y (\nabla^2 w)_x)_x \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \nabla^4 \psi + \varepsilon (w_y (\nabla^2 w)_x - w_x (\nabla^2 w)_y + \psi_x (\nabla^4 \psi)_y - \psi_y (\nabla^4 \psi)_x) \\ = \psi_x (\nabla^2 \psi)_y - \psi_y (\nabla^2 \psi)_x \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada ∇^2 kartezyen koordinatlarda

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ile tanımlı Laplace operatörü, ∇^4 ise

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

ile tanımlı biharmonik operatördür. $(\cdot)_x$, $(\cdot)_y$ ifadeleri ise sırasıyla x ve y 'ye göre kısmi türevleri temsil etmektedir. Yukarıdaki üç eşitlikten ilk ikisine dikkat edilirse aralarında bir ilişki olduğu görülür.

$$F_y = (\psi_y w_x - \psi_x w_y)_y - \frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_y - \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y)_y$$

$$G_x = (\psi_x w_y - \psi_y w_x)_x + \frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_x - \varepsilon (\psi_x (\nabla^2 w)_y - \psi_y (\nabla^2 w)_x)_x$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $F_{xy} + G_{yx} = 0$ 'dır. Bu durumda

$$F = \psi_y w_x - \psi_x w_y - \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y) - g(x) = 0 \quad (4.8)$$

$$F_x = (\psi_y w_x - \psi_x w_y)_x - \frac{1}{Re} (\nabla^2 w)_x - \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y)_x - g'(x) = 0 \quad (4.9)$$

$F_x = -g'(x) = 0$ olacaktır. Bu $g(x)=C$ yazılabileceğini gösterir. (4.8) eşitliğinden

$$\psi_y w_x - \psi_x w_y - \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \varepsilon (\psi_y (\nabla^2 w)_x - \psi_x (\nabla^2 w)_y) = C \quad (4.10)$$

yazabiliriz. Bu durumda bilinmeyen akım fonksiyonu ve boyuna hız bileşeni üzerinde iki denklem (4.10) ve (4.6) problemin hareket denklemleridir.

Basınç fonksiyonu ise (3.23) aracılığıyla

$$p = \bar{p} - \frac{1}{2}(\psi_y^2 + \psi_x^2 + w^2) + \varepsilon \left\{ \psi_y (\nabla^2 \psi)_y + \psi_x (\nabla^2 \psi)_x + w \nabla^2 w + 2\psi_{xy}^2 + \frac{1}{2}[(\psi_{yy} - \psi_{xx})^2 + w_x^2 + w_y^2] \right\} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir.

4.2 PERTÜRBASYON AÇILIMI

Denklemlerde akışkanın yoğunluğuna, karakteristik boyuna ve malzeme sabitine (3.19)₂ eşitliği ile bağlı olan ε parametresini gözönüne alalım.

Malzeme sabiti α fiziksel olarak ikinci mertebe etkileri, L uzunluğu ise dairesel kesitin karakteristik çapını ifade etmektedir. Bu aşamada ikinci mertebe etkilerin az olduğu, ya da karakteristik boru çapının çok büyük olduğu özel bir hal ele alınabilir. Bu halde ikinci mertebe etkilerin karakteristik boru çapına oranı olan ε parametresi küçük bir parametre olacaktır. O halde akım fonksiyonu ve boyuna hız bileşeni bu parametre üzerinde bir pertürbasyon serisine açılarak denklemler adım adım lineerleştirilebilir. $\varepsilon = 0$ durumu lineer viskoz akışa karşı geldiğinden burada $w = w_0$, $u = 0$, $v = 0$ olacaktır. Bu durumda ε üzerinde pertürbasyon açılımı

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ \psi &= \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (4.10) ve (4.6) hareket denklemleri

$$\begin{aligned} &(\varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots)_y (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)_x - (\varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots)_x \\ &\quad (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)_y - \\ &\frac{1}{Re} \nabla^2 (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots) - \varepsilon [(\varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2)_y (\nabla^2 (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots))_x - \\ &(\varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2)_x (\nabla^2 (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots))_y] = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots)_x (\nabla^2 (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots))_y - (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots)_y (\nabla^2 (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots))_x + \\
& \frac{1}{Re} \nabla^4 (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots) - \varepsilon \left[(\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots)_x (\nabla^4 (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots))_y - \right. \\
& (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots)_y (\nabla^4 (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots))_x + (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)_y \\
& \left. (\nabla^2 (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots))_x - (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)_x (\nabla^2 (w_0 + \varepsilon w_1 + \dots))_y \right] = 0
\end{aligned}$$

haline gelir. Elde edilen bu ifade ε 'un mertebelerine göre toparlanırsa

ε^0 mertebesinde

$$\nabla^2 w_0 = -Re C_0 \quad (4.13)$$

ε^1 mertebesinde

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w_1 &= Re (w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x} - C_1) \\
\nabla^4 \psi_1 &= 0
\end{aligned} \quad (4.14)$$

ε^2 mertebesinde

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w_2 &= Re (w_{0x} \psi_{2y} + w_{1x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{2x} - w_{1y} \psi_{1x} - C_2) \\
\nabla^4 \psi_2 &= Re (w_{0y} \nabla^2 w_{1x} + \psi_{1y} \nabla^2 \psi_{1x} - \psi_{1x} \nabla^2 \psi_{1y} - w_{0x} \nabla^2 w_{1y})
\end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitlikleri elde edilir. Karakteristik basıncın bulunduğu (3.22) denklemi (4.3) hız alanı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_x &= \frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi)_y - \varepsilon (w (\nabla^2 w)_x + \psi_x \nabla^4 \psi) + w w_x + \psi_x \nabla^2 \psi \\
\bar{p}_y &= -\frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi)_x - \varepsilon (w (\nabla^2 w)_y + \psi_y \nabla^4 \psi) + w w_y + \psi_y \nabla^2 \psi \\
\bar{p}_\xi &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \varepsilon (\psi_x (\nabla^2 w)_y + \psi_y (\nabla^2 w)_x) - w_x \psi_y + \psi_x w_y
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Burada karakteristik basınç

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \varepsilon \bar{p}_1 + \varepsilon^2 \bar{p}_2 + \dots \quad (4.17)$$

şeklinde pertürbasyon serisine açılır ve (4.12)'de verilmiş olan pertürbasyon serileri ile birlikte denklemlere yerleştirilirse (4.16) eşitlikleri ε 'un değişik merteye ifadeleri cinsinden

ε^0 mertebesinde

$$\begin{aligned} \bar{p}_{0x} &= w_0 w_{0x} \\ \bar{p}_{0y} &= w_0 w_{0y} \\ \bar{p}_{0\xi} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w_0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

ε^1 mertebesinde

$$\begin{aligned} \bar{p}_{1x} &= \frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi_1)_y - w_0 (\nabla^2 w_0)_x + w_0 w_{1x} + w_1 w_{0x} \\ \bar{p}_{1y} &= -\frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi_1)_x - w_0 (\nabla^2 w_0)_y + w_0 w_{1y} + w_1 w_{0y} \\ \bar{p}_{1\xi} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w_1 + \psi_{1x} w_{0y} - \psi_{1y} w_{0x} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ε^2 mertebesinde ise

$$\begin{aligned} \bar{p}_{2x} &= \frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi_2)_y - w_1 (\nabla^2 w_0)_x - w_0 (\nabla^2 w_1)_x + w_0 w_{2x} + \\ &\quad w_1 w_{1x} + w_2 w_{0x} + \psi_{1x} \nabla^2 \psi_1 \\ \bar{p}_{2y} &= -\frac{1}{Re} (\nabla^2 \psi_2)_x - w_0 (\nabla^2 w_1)_y - w_1 (\nabla^2 w_0)_y + w_0 w_{2y} + \\ &\quad w_1 w_{1y} + w_2 w_{0y} + \psi_{1y} \nabla^2 \psi_1 \\ \bar{p}_{2\xi} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w_2 - \psi_{1x} (\nabla^2 w_0)_y - \psi_{1y} (\nabla^2 w_0)_x - w_{0x} \psi_{2y} - \\ &\quad \psi_{1y} w_{1x} + \psi_{2x} w_{0y} + \psi_{1x} w_{1y} \end{aligned} \quad (4.20)$$

olacaktır.

Aynı şekilde basınç fonksiyonu da

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

şeklinde pertürbasyon serisine açılır ve (3.23) denklemi gözönüne alınırsa basınç fonksiyonunun değişik merteye bileşenleri sırasıyla

$$\begin{aligned} p_0 &= \bar{p}_0 - \frac{1}{2} w_0^2 \\ p_1 &= \bar{p}_1 + \frac{1}{2} (w_{0x}^2 + w_{0y}^2) \\ p_2 &= \bar{p}_2 - \frac{1}{2} (\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 + w_1^2) + w_0 \nabla^2 w_1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.18)-(4.20) ifadelerine dikkat edilirse karakteristik basıncın pertürbasyon açılımındaki terimleri

$$\bar{p}_0 = -\bar{P}_0 \xi + \frac{1}{2} w_0^2 + \text{sbt}, \quad \bar{p}_1 = -\bar{P}_1 \xi + w_0 w_1 + \text{sbt} \quad \text{ve} \quad \bar{p}_2 = -\bar{P}_2 \xi + f(x, y) + \text{sbt}$$

şeklindedir. Burada $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ klasik anlamda karakteristik basınç gradyanı olan sabitlerdir. (4.18)₃ ve (4.13)'den $C_0 = \bar{P}_0$, (4.19)₃ ve (4.14)₁ 'den $C_1 = \bar{P}_1$, (4.20)₃ ve (4.15)₁ 'den ise $C_2 = \bar{P}_2$ olduğu görülür. (4.10) hareket denkleminin sağ tarafındaki sabitin karakteristik basınçtan kaynaklandığı açıktır. Bu durumda (4.13)-(4.15) denklemleri yeniden yazılırsa

$$\nabla^2 w_0 = -Re \bar{P}_0 \quad (4.22)$$

$$\nabla^2 w_1 = Re (w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x} - \bar{P}_1) \quad (4.23)$$

$$\nabla^4 \psi_1 = 0 \quad (4.24)$$

$$\nabla^2 w_2 = Re (w_{0x} \psi_{2y} + w_{1x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{2x} - w_{1y} \psi_{1x} - \bar{P}_2) \quad (4.25)$$

$$\nabla^4 \psi_2 = Re (w_{0y} (\nabla^2 w_1)_x + \psi_{1y} (\nabla^2 \psi)_{1x} - \psi_{1x} (\nabla^2 \psi_1)_y - w_{0x} (\nabla^2 w_1)_y) \quad (4.26)$$

olacaktır.

$$\bar{p}_0 = -\bar{P}_0\xi + \dots, \quad p_0 = -P_0\xi + \dots$$

eşitliklerini ele alalım. Basınç fonksiyonunun boyutsuzlaştırılması (3.16)₂ ile

$$p^* = \frac{P}{\rho U^2}$$

şeklinde verilmişti. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho U^2 \bar{p}_0 &= -P_0 L \xi + \dots \\ \bar{p} &= -\frac{P_0 L}{\rho U^2} \xi + \dots \\ \bar{P}_0 &= \frac{P_0 L}{\rho U^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

olduğu görülür. Aynı şekilde

$$\bar{p}_1 = -\bar{P}_1\xi + \dots, \quad p_1 = -P_1\xi + \dots$$

eşitliklerinden

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1 L}{\rho U^2} \quad (4.28)$$

$$\bar{p}_2 = -\bar{P}_2\xi + \dots, \quad p_2 = -P_2\xi + \dots$$

eşitliklerinden ise

$$\bar{P}_2 = \frac{P_2 L}{\rho U^2} \quad (4.29)$$

olduğu görülür.

(4.22)-(4.26) denklemlerine dikkat edilirse, (4.22), (4.23), (4.25) denklemlerinin *Poisson denklemleri* diğerlerinin ise *biharmonik denklemler* olduğu

görülür. Bu tür denklemlerin çözümü için pratikte birçok yöntem kullanılır. Bu yöntemler yarı ters yöntem, çarpanlarına ayırma yöntemi, trigonometrik ve ortogonal fonksiyonlarla ifade edilen seri çözümler ve karmaşık düzlemde analitik fonksiyonlarla çözümler olarak özetlenebilir. Biz burada karmaşık düzlemde çözümle ilgileneceğiz. Bu amaçla bir sonraki kısımda *Laplace denkleminin*, *Poisson denkleminin* ve *biharmonik denklemin* karmaşık düzlemde analitik fonksiyonlarla çözümünden bahsedilecektir.

4.3 ANALİTİK FONKSİYONLARLA ÇÖZÜM

Laplace operatörü kartezyen koordinatlarda

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.30)$$

şeklindedir. $z = x + iy$ ve $\bar{z} = x - iy$ eşitlikleri aracılığıyla kompleks düzleme geçilirse, türevin zincir kuralı uyarınca

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} &= i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

bulunur. (4.30) denkleminde (4.32) ifadeleri yerine yazılırsa (4.30) ile verilmiş olan Laplace operatörünün

$$\nabla^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Aynı işlemler kartezyen koordinatlarda

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.34)$$

olarak ifade edilen biharmonik operatör üzerine uygulanırsa, operatörün kompleks düzlemdeki ifadesi

$$\nabla^4 = 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (4.35)$$

olacaktır. Bu durumda çözüm koordinatlara göre integre edilerek elde edilebilir. Örnek olarak $\nabla^2 \Phi = 0$ Laplace denklemi ele alınırsa kompleks düzlemde bu denklem $\Phi_{,z\bar{z}} = 0$ olacaktır. Denklem z ve $\bar{z}$ 'ye göre integre edilirse

$$\Phi = f(z) + h(\bar{z})$$

bulunur. Burada f ve h argümanlarının analitik fonksiyonlarıdır. Φ fonksiyonunun kompleks eşleniği $\bar{\Phi} = \bar{f}(\bar{z}) + \bar{h}(z)$ şeklindedir. Φ fonksiyonu reel ise $\Phi = \bar{\Phi}$ olacaktır. Bu ise $\bar{f}(\bar{z}) = h(\bar{z})$ olması gerektiğini gösterir. O halde Laplace denkleminin analitik fonksiyonlarla çözümü

$$\Phi = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) \quad (4.36)$$

şeklindedir.

Şimdi $\nabla^4 \Theta = 0$ ile ifade edilen biharmonik denklemi ele alalım. Denklemi

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= 0 \\ \chi &= \nabla^2 \Theta \end{aligned} \quad (4.37)$$

olarak ele aldığımızda

$$\chi = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$$

olacaktır. Bu durumda (4.37) eşitliğinde χ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\nabla^2(f(z) + \bar{f}(\bar{z})) = 4 \frac{\partial^2(f(z) + \bar{f}(\bar{z}))}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

olacaktır. İki kez integre edilirse Θ fonksiyonu

$$\Theta = \bar{z} \int f(z) dz + z \int \bar{f}(\bar{z}) d\bar{z} + \int h_1(z) dz + h_2(\bar{z}) \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Burada (4.38) eşitliğindeki bazı terimler için

$$\begin{aligned} \int f(z) dz &= \Omega(z), & \int \bar{f}(\bar{z}) d\bar{z} &= \Omega(\bar{z}) \\ \int h_1(z) dz &= \varphi_1(z), & h_2(\bar{z}) &= \varphi_2(\bar{z}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

tanımlarını verelim. Θ fonksiyonu reel ise kompleks eşleniğine eşit olacaktır. O durumda (4.39) da verilmiş olan fonksiyonlar

$$\varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)} = \overline{\varphi(z)} \text{ ve } \varphi_1(z) = \varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi(\bar{z})}$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde biharmonik denklemin analitik fonksiyonlarla çözümü

$$\Theta = \bar{z} \Omega(z) + z \overline{\Omega(z)} + \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} \quad (4.40)$$

şeklinde olacaktır. Şimdi yukarıda elde edilen çözümleri ele aldığımız problemin çözümüne uygulayalım. (4.22) Poisson denkleminin boyuna hızın ilk terimi (4.36) gözönüne alınarak

$$w_0 = -\frac{\bar{P}_0 Re}{4} z\bar{z} + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \quad (4.41)$$

olarak, (4.24) biharmonik denklemden ise akım fonksiyonunun birinci mertebeye terimi (4.40)'da elde edilmiş olan çözüme dayanarak

$$\psi_1 = \bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Burada $\phi(z)$, $\Omega(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonları bölge içerisinde argümanlarına göre analitik, sınır koşullarından belirlenecek fonksiyonlardır.

(4.22)-(4.26) denklemleri, karmaşık düzlemde türevler (4.31) ve (4.32)'deki gibi alınarak kompleks düzlemde yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_0 &= 4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \bar{z}} = -Re \bar{P}_0 \\ \nabla^2 w_1 &= 4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \bar{z}} = 2i Re (w_{0z} \psi_{1z} - w_{0\bar{z}} \psi_{1\bar{z}}) - Re \bar{P}_1 \\ \nabla^4 \psi_1 &= 16 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

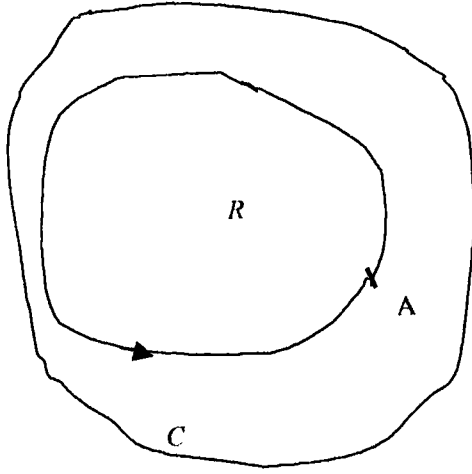
$$\nabla^2 w_2 = 4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial z \partial \bar{z}} = 2i Re (w_{0z} \psi_{2z} - w_{0\bar{z}} \psi_{2\bar{z}} + w_{1z} \psi_{1z} - w_{1\bar{z}} \psi_{1\bar{z}}) - Re \bar{P}_2$$

$$\nabla^4 \psi_2 = 16 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 2i Re (w_{0z} (\nabla^2 w_1)_{\bar{z}} - w_{0\bar{z}} (\nabla^2 w_1)_z + \psi_{1z} (\nabla^2 \psi_1)_{\bar{z}} - \psi_{1\bar{z}} (\nabla^2 \psi_1)_z)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.3.1 Basit Bağımlı Bölgelerde Analitik Fonksiyonların Yapıları

Kapalı bir C eğrisi ile sınırlanmış basit bağımlı bir R bölgesi gözönüne alalım Şekil (4.2). Bu durumda (4.41) ve (4.42) ile elde edilmiş olan sıfırıncı mertebeye boyuna hız ve birinci mertebeye akım fonksiyonlarının içinde bulunan analitik $\phi(z)$, $\Omega(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonları tek değerli olur ve Taylor açılımını kabul ederler. Bu fonksiyonlar $z=0$ civarında seriye açılırsa



Şekil 4.2

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (4.45)$$

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4.46)$$

kompleks eşlenikleri ise

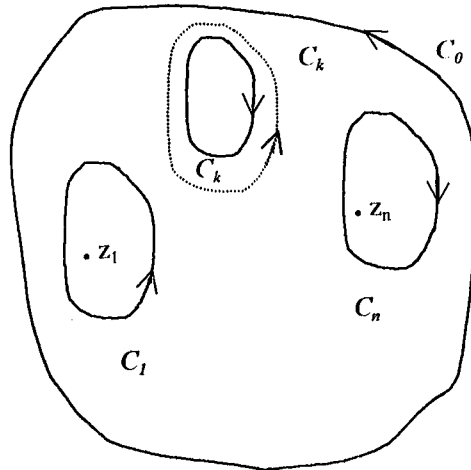
$$\overline{\Omega}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n, \quad \overline{\varphi}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n \quad (4.47)$$

$$\overline{\phi}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n \bar{z}^n \quad (4.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sorun sınır koşullarından a_n , b_n ve c_n kompleks katsayılar dizisinin belirlenmesidir.

4.3.2 Çok Bağımlı Bölgelerde Analitik Fonksiyonların Yapıları

Dıştan C_0 eğrisi içten de $C_1, C_2 \dots C_n$ eğrileriyle sınırlı çok bağımlı bir bölge gözönüne alalım (Şekil 4.3). $\Omega(z)$ ve $\varphi(z)$ fonksiyonları tek değerli olmadan hızlar sınırda tek değerli olabilir. $\omega = u - iv$ kompleks hızını tanımlayalım. ω kompleks hızının eşleniği $\bar{\omega} = u + iv$ olacaktır.



Şekil 4.3

Hız bileşenleri akım fonksiyonu cinsinden kompleks düzlemde

$$u = \psi_y = i \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$v = -\psi_x = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right)$$

şeklinde ifade edildiğine göre, kompleks hız ve eşleniği, ψ akım fonksiyonu cinsinden

$$\omega = 2i \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \bar{\omega} = -2i \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir.

Kompleks hız

$$\omega = \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2$$

şeklinde pertürbasyon serisine açılırsa (4.49) eşitliğinden kompleks hızın birinci bileşeni

$$\omega_1 = 2i \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad \bar{\omega}_1 = -2i \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} \quad (4.50)$$

olacaktır. (4.50) eşitliğinde gerekli olan türevler akım fonksiyonunun fonksiyonunun (4.42) deki yapısından

$$\psi_{1z} = \bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + \varphi'(z), \quad \psi_{1\bar{z}} = \Omega(z) + z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) \quad (4.51)$$

olacaktır. O halde (4.50) de ifade edilen kompleks hızın sınırda tek değerli olması için

$$\left[\bar{z}\Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + \varphi'(z) \right]_A^b = 0, \quad \left[\Omega(z) + z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) \right]_A^b = 0 \quad (4.52)$$

olması gerekir. Dolayısıyla analitik fonksiyonların yapıları üzerine gelecek kısıtlar (4.52) eşitlikleri yapısındadır.

Bu aşamada yardımcı olması için kendisi tek değerli olmayan fakat türevi tek değerli olan logaritma fonksiyonunu inceleyelim. $\log(z - z_k)$ fonksiyonunun kendisi tek değerli olmadan türevi $\frac{1}{z - z_k}$ tek değerlidir. z_k noktası C_k içerisinde keyfi bir noktadır. Logaritma fonksiyonu

$$\log(z - z_k) = \log|z - z_k|e^{i\theta} = \log|z - z_k| + i\theta$$

şeklinde yazılabilir. Yani bir C_k çevresi üzerinde bir kez dolanıldığında $\theta, 2\pi$ kadar arttığından, A, C_k üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere

$$[\log(z - z_k)]_A^A = 2\pi i$$

olacaktır. Eğer C_k eğrisi z_k 'yi kuşatmazsa

$$[\log(z - z_k)]_A^A = 0$$

olur. Buna göre (4.52) şartlarına dönelim. Parantez içerisindeki fonksiyonlar analitik fonksiyonlar olduklarına göre türevleri de sürekli olacaktır. Sırasıyla z ve $\bar{z}$ ye göre türevleri alınırsa

$$[\bar{z}\Omega''(z) + \varphi''(z)]_A^A = 0, \quad [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})]_A^A = 0, \quad [z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{\varphi}''(\bar{z})]_A^A = 0 \quad (4.53)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} [\Omega'(z)]_A^A &= [\bar{\Omega}'(\bar{z})]_A^A = 0 \\ [\varphi''(z)]_A^A &= [\bar{\varphi}''(\bar{z})]_A^A = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

olmalıdır. (4.54)₁ den $[\Omega'(z)]_A^A = [\overline{\Omega}'(\bar{z})]_A^A = 0$ olduğu kolayca görülür. Bu koşullar (4.52) ve (4.53)'ü sağlar. (4.54) eşitliklerini dikkate alarak

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \Omega_0(z), \quad \varphi'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \varphi'_0(z)$$

yazalım. Burada $\Omega_0(z)$ ve $\varphi'_0(z)$ ele alınan bölgede tek değerli analitik fonksiyonlardır. A_k ve B_k lar ise sınır koşullarından hesaplanacak sabitlerdir. C_k eğrisini içine alan bir C'_k eğrisi üzerinde matematik negatif yönde sıçrama

$$[\Omega(z)]_A^A = -\frac{2\pi i}{2\pi}, \quad [\overline{\Omega}(\bar{z})]_A^A = \frac{2\pi i}{2\pi}$$

$$[\varphi'(z)]_A^A = -\frac{2\pi i}{2\pi}, \quad [\overline{\varphi}'(\bar{z})]_A^A = \frac{2\pi i}{2\pi}$$

olacaktır. (4.53)₁'den $B_k = \overline{A}_k$ ve (4.53)₂'den $\overline{B}_k = A_k$ olduğu görülür. Bu durumda

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \Omega_0(z), \quad \overline{\Omega}(\bar{z}) = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A}_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \overline{\Omega}_0(\bar{z}) \quad (4.55)$$

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A}_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \varphi'_0(z), \quad \overline{\varphi}'(\bar{z}) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \overline{\varphi}'_0(\bar{z})$$

yazılabilir. İkinci ifadeler integre edilirse

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A}_k}{2\pi} (z - z_k) \log(z - z_k) - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A}_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \varphi_0(z) \\ \overline{\varphi}(\bar{z}) &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} (\bar{z} - z_k) \log(\bar{z} - z_k) - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \frac{\overline{B}'_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \overline{\varphi}_0(\bar{z}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

olacaktır. Burada $B'_k - \bar{A}_k = C_k$ tanımlayalım. O halde (4.56) ifadesi

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k}{2\pi} (z - z_k) \log(z - z_k) + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \varphi_0(z) \\ \bar{\varphi}(\bar{z}) &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{2\pi} (\bar{z} - z_k) \log(\bar{z} - z_k) + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{C}_k}{2\pi} \log(\bar{z} - z_k) + \bar{\varphi}_0(\bar{z})\end{aligned}\quad (4.57)$$

şeklinde yazılabilir. İlke olarak $\Omega_0(z)$ ve $\varphi_0(z)$ fonksiyonları Laurent açılımıyla belirlenir. Sorun A_k ve B_k katsayılarıyla birlikte bu açılımdaki katsayıları belirleyebilmektir. Ancak bu ilke yaklaşımı özellikle çok delikli bölgelerde yürümez. Bir delik civarında

$$\Omega_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_k)^m, \quad \varphi_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z - z_k)^m \quad (4.58)$$

yazılabilirken başka bir delik civarında başka bir açılım gereklidir. Tüm delikler için geçerli açılımları birleştirip bütün bölgede geçerli çözümü bulmak genellikle çok zordur.

4.4 SINIR KOŞULLARI

Bu kısımda problemin çözümünde analitik fonksiyonlarda ortaya çıkan katsayıların belirlenmesi için problemin yapısına uygun iki ayrı durum ele alınacaktır.

4.4.1 Homojen Sınır Koşulları Altında Problemin İncelenmesi

Biharmonik denklemin çözümünde sınır koşulu olarak homojen sınır koşulları alınırsa bir özel çözüm olarak sıfır çözümü alınabilir. Bu durum problemde fiziksel olarak, tüpün hareketsiz olduğu ve yüzeyde herhangi bir etkinin olmadığı halde, ele aldığımız akışkan tüpün çeperlerine yapıştığı yani viskoz olduğunu için, sınırda hızların sıfır olması haline karşılık gelir. (4.42) ile elde edilmiş olan akım fonksiyonunun birinci merteye bileşeni için sınır koşulu

$$\psi_1|_{\partial R} = 0 \quad (4.59)$$

ise $\psi_1 = 0$ (4.24) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu durumda (4.22)-(4.26) denklemleri oldukça basitleşir:

$$\nabla^2 w_0 = -\bar{P}_0 Re$$

$$\nabla^2 w_1 = -\bar{P}_1 Re$$

$$\nabla^2 w_2 = Re(-\bar{P}_2 + w_{0x}\psi_{2y} - w_{0y}\psi_{2x})$$

$$\nabla^4 \psi_2 = 0$$

Yukarıdaki eşitliklerden anlaşılacağı üzere bu özel çözüm akım fonksiyonunun ikinci mertebe bileşeni olan ψ_2 için de aynı tip denklem üretmiştir. Bu aşamada aynı şekilde $\psi_2 = 0$ çözümü ele alındığında w_0 , w_1 ve w_2 lerin yapısında da bir farklılık yoktur. O halde şu söylenebilir. Akım fonksiyonunun tüm terimleri sıfırdır ve bu çözüm sadece boyuna hız alanı üretmiştir. Bu durumda ideal viskoz akış problemi ile sadece bir noktada farklılık görülmüştür. İdeal viskoz akışta boyuna hız alanı sabit basınç gradyanı ile belirlenirken burada sabit karakteristik basınç gradyanı ile belirlenmektedir.

İkinci derece akışkan üzerinde yapılan benzer çalışmalar incelendiğinde Rivlin [31] 1976 yılındaki çalışmasında Langlois ile birlikte yaptıkları çalışmalardan bahseder. Bu çalışmada ikinci ve üçüncü derece akışkanlarda çözümün ancak boyuna hız alanı üzerinde mümkün olduğu, fakat bünye denklemi olarak dördüncü derece akışkan ele alınırsa dönüşüm düzlemlerindeki kararlı akımın boyuna akım üzerine süperpoze edilebileceği gösterilmiştir.

4.4.2 Akışkanın Tüpün Yüzeyleri Boyunca Emildiği Durumda Problemin İncelenmesi

Bazı katı malzemeler küçük delikli, geçirgendir. Teoride ve özellikle biyofizik alanında önemli uygulama alanları bulan delikli tabaka problemlerinden

ilki 1953 de Berman tarafından sınırları geçirgen bir kanalda klasik akışkan hareketi incelenerek ele alınmıştır. Güleken [32] çalışmasında daha sonra Sellers'in aynı kanalda büyük Reynolds sayıları için çalışdığını, Yuan ve Bermanın ise sırasıyla dairesel ve üçgensel kesitli borularda emme problemini incelediğinden bahseder. Nonlineer akışkanlar üzerine bu tür çalışmalar daha yakın tarihe dayanmaktadır. Narasimhan [33] 1961 yılında içiçe geçirgen iki silindir arasında Reiner akışkan için açık bir çözüm bulmuştur. Rivlin-Ericken akışkan modeli üzerine, Kaloni ve Siddiqui [34] üçüncü derece Rivlin-Ericksen akışkanının paralel, hareketsiz diskler arasında üniform emme halinde analizini yapmışlardır. Yine aynı yıl Maneschy ve arkadaşları [35] aynı akışkan modelinde sonsuz, geçirgen plaktan sabit bir hızla emme problemini sayısal yöntemle çalışmışlardır. Buggish ve Aksel [36] ise ikinci derece akışkanın Ekman tabakasından sabit bir hızla emilmesi probleminde pertürbasyon yöntemi kullanarak bir yaklaşık çözüme ulaşmışlardır.

Eğer geçirgen bir katı malzeme tabakası akışkan akışının sınır bölgesi olarak kullanılıyorsa akışkan sınır boyunca emiliyordur. O halde akım bölgesinde akışkanın hızının normal bileşeni üzerine uygun bir sınır koşulundan bahsedilebilir. Kısaca hızın normal bileşeni sınırdaki emme fonksiyonu ile aynı alınabilir. Eğer sınırdaki *geçirgenlik*, yada başka bir deyişle *emme* fonksiyonu V ise yüzeydeki hızın normal bileşeni de V 'dir, teğetsel bileşeni ise sıfırdır. Deneysel incelemelerde elde edilen sonuçlar yukarıda bahsedilen koşulların kullanılması için iyi bir yaklaşım olduğunu gösterir [37].

Bu durumda

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = f(s) \\ u_t &= 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

yazılabilir. Burada s sınır eğrisi boyunca yay parametresi, $f(s)$ ise emme fonksiyonudur. Bir noktadaki normal ve teğet vektörleri

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right), \quad \mathbf{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \quad (4.61)$$

olarak tanımlandığına göre (4.60) sınır koşulları

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} = f(s), \quad u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} = 0, \quad \partial R' \text{ de}$$

olacaktır. (4.3) hız alanından u ve v yerine yazılırsa

$$\psi_y \frac{dy}{ds} + \psi_x \frac{dx}{ds} = \frac{d\psi}{ds} = f(s), \quad \psi_y \frac{dx}{ds} - \psi_x \frac{dy}{ds} = 0, \quad \partial R' \text{ de} \quad (4.62)$$

haline gelir. (4.62)₂ eşitliği kompleks düzlemde $\psi_z \frac{dz}{ds} = \psi_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds}$ olarak yazılır.

Burada emme fonksiyonunu da zayıf emme varsayımı ile ε cinsinden

$$f(s) = \varepsilon f_1(s) + \varepsilon^2 f_2(s) + \dots$$

şeklinde seriye açar ve (4.12)₂ pertürbasyon serisi ile birlikte yukarıdaki sınır koşullarında kullanırsak bu koşullar

$$\begin{aligned} w_i|_{\partial R} &= 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{d\psi_i}{ds}\bigg|_{\partial R} &= f_i(s) \quad i = 1, 2, \dots \\ \psi_{iz} \frac{dz}{ds}\bigg|_{\partial R} &= \psi_{i\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds}\bigg|_{\partial R} \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.63)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki sınır koşulları keyfi bölgelerde emme problemini karakterize eder. Bir sonraki kısımda özel bir bölge seçilip problem çözülecektir.

Dairesel kesitli tüpte emme problemi:

Problem basit bağımlı, R yarıçaplı dairesel bölgede tüpün sınırları boyunca emme olduğu varsayılarak ele alınırsa, (4.63) ile verilen sınır koşullarında geçen $f(s)$ emme fonksiyonu θ' nın bir fonksiyonu olacaktır. Boyutsuzlaştırmada karakteristik uzunluk $L=R$ alınmıştır. Bu durumda sınırda $z = e^{i\theta}$ olacaktır. Birinci mertebe akım

fonksiyonu içerisinde geçen $\Omega(z)$ ve $\varphi(z)$ fonksiyonları $|z| \leq 1$ 'de analitiktir. Bu durumda sınır koşulları

$$\begin{aligned} w_i|_{\partial R} &= 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{d\psi_i}{d\theta}\bigg|_{\partial R} &= f_i(\theta), \quad \psi_i|_{\partial R} = \int f_i(\theta) d\theta = F_i(\theta) \quad i = 1, 2, \dots \\ \psi_{iz} \frac{dz}{d\theta}\bigg|_{\partial R} &= \psi_{i\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\theta}\bigg|_{\partial R} \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.64)$$

şeklindedir. Burada $F(\theta)$

$$F_i(\theta) = \int f_i(\theta) d\theta$$

ile tanımlı sınırdaki verilmiş bilinen bir fonksiyondur. Açık ki bu fonksiyon 2π periyodiktir. $F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$ Bu halde en genel anlamda Fourier serisine açılabilir:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (4.65)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin n\theta d\theta$$

Burada a_n ve b_n , $n=1, 2, \dots$ sabitlerdir. Seri biraz düzenlenirse

$$F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} \quad (4.66)$$

yazılabilir. Burada kompleks sabitler

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) [\cos n\theta - i \sin n\theta] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (4.67)$$

olarak tanımlanmıştır. Aynı şekilde

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{in\theta} d\theta$$

yazılabilir.

Problem basit bağımlı bölgede ele alındığından analitik fonksiyonlar ve kompleks eşlenikleri (4.45)-(4.48)'de verildiği gibidir. (4.41) denkleminde sıfırıncı mertebe boyuna hız bileşeni

$$w_0 = -\frac{\bar{P}_0 Re}{4} z\bar{z} + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$$

olarak bulunmuştu. $\phi(z)$ ve $\bar{\phi}(\bar{z})$ analitik fonksiyonları (4.46),(4.48) deki gibi alınarak, (4.64)₁ sınır koşulu uygulanırsa

$$w_0|_{z=e^{i\theta}} = -\frac{\bar{P}_0 Re}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n e^{-in\theta} = 0$$

olmalıdır. Buradan $c_0 + \bar{c}_0 = 1$, $n \geq 1$ için $c_n = \bar{c}_n = 0$ olduğu görülür. O halde

$$w_0(z, \bar{z}) = \frac{\bar{P}_0 Re}{4} (1 - z\bar{z}), \quad w_0(x, y) = \frac{\bar{P}_0 Re}{4} (1 - x^2 - y^2) \quad (4.68)$$

sonucuna ulaşılır. (4.68) ile elde edilmiş olan sıfırıncı mertebe boyuna hız bileşeninin katsayısını

$$U_0 = \frac{\bar{P}_0 Re}{4} = 1$$

olacak şekilde alalım. Bu durumda (3.19)₁ ile $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ şeklinde tanımlanmış olan

Reynolds sayısı ve (4.27) $\bar{P}_0 = \frac{P_0 L}{\rho U^2}$ şeklinde bulunmuş olan karakteristik basınç gradyanının sıfıncı mertebe bileşeni yerine yazılırsa

$$U_0 = \frac{P_0 L^2}{4U\mu} = 1$$

eşitliği elde edilir. Burada boyutsuzlaştırmada kullanılmış olan karakteristik U hızı

$$U = \frac{P_0 R^2}{4\mu} \quad (4.69)$$

ile tanımlı, tüpün yarıçapına, basınç gradyanına ve viskoziteye bağlı bilinen bir hızdır. Bu durumda (4.68) eşitlikleri

$$w_0(z, \bar{z}) = (1 - z\bar{z}), \quad w_0(x, y) = (1 - x^2 - y^2) \quad (4.70)$$

olarak yazılabilir. Boyuna hızın sıfıncı bileşeni w_0 'a ait grafik Şekil 4.4 de verilmiştir.

Akım fonksiyonunun birinci mertebe terimi (4.42) ile bulunmuştu. Akım fonksiyonu içerisinde geçen analitik fonksiyonların yapıları (4.45) ve (4.47) de verildiği gibidir. (4.64)₂ sınır koşulunda, $F(\theta)$ fonksiyonunun yapısı (4.66) da olduğu gibi alınarak kullanılırsa,

$$\bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n \Big|_{z=e^{i\theta}} = F(\theta)$$

$$e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} + e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

olacaktır. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{\infty} \bar{a}_{n+1} e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

haline gelir. Aynı mertebeli terimler toparlanırsa

$$(a_1 + \bar{a}_1) + (b_0 + \bar{b}_0) = C_0$$

$$a_0 + \bar{a}_2 + \bar{b}_1 = C_{-1}$$

$$\bar{a}_0 + a_2 + b_1 = C_1 \quad (4.71)$$

$$a_{n+1} + b_n = C_n, \dots n \geq 2$$

$$\bar{a}_{n+1} + \bar{b}_n = C_{-n}, \dots n \geq 2$$

olduğu görülür. Yüzeyde hızın teğetsel bileşeninin sıfır olması ile elde edilen (4.64)₃ sınır koşulu,

$$\Omega'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \varphi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n z^{n-1}$$

ve

$$\bar{\Omega}'(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}, \quad \bar{\varphi}'(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n \bar{z}^{n-1}$$

olduğu gözönünde tutularak uygulanırsa

$$ie^{i\theta} \left\{ e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n e^{i\theta(n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n e^{i\theta(n-1)} \right\} =$$

$$-ie^{i\theta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{a}_n e^{-i\theta(n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n e^{i\theta(n-1)} \right\}$$

yazılabilir. Elde edilen ifade düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n e^{i\theta(n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\bar{a}_n e^{-i\theta(n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} nb_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} n\bar{b}_n e^{-in\theta} = 0$$

haline gelir. Aynı mertebeli terimler toparlanırsa

$$a_1 + \bar{a}_1 = 0$$

$$a_0 + 3\bar{a}_2 + \bar{b}_1 = 0$$

$$\bar{a}_0 + 3a_2 + b_1 = 0 \quad (4.72)$$

$$(n+2)a_{n+1} + nb_n = 0, \dots n \geq 2$$

$$(n+2)\bar{a}_{n+1} + n\bar{b}_n = 0, \dots n \geq 2$$

olması gerektiği görülür. Sınır koşullarından elde edilen (4.71) ve (4.72) eşitlikleri birlikte ele alınırsa analitik fonksiyonların katsayıları $F(\theta)$ fonksiyonunun katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi belirlenir:

$$(4.71)_1 \text{ ve } (4.72)_1 \text{ den } b_0 + \bar{b}_0 = C_0$$

$$(4.71)_2 \text{ ve } (4.72)_2 \text{ den } \bar{a}_2 = -\frac{C_{-1}}{2}$$

$$(4.71)_3 \text{ ve } (4.72)_3 \text{ den } a_2 = -\frac{C_1}{2}$$

$$(4.71)_4 \text{ ve } (4.72)_4 \text{ den } n \geq 2 \text{ için } a_{n+1} = -\frac{nC_n}{2} \text{ ve } b_n = -\frac{(n+2)}{2}C_n$$

$$(4.71)_5 \text{ ve } (4.72)_5 \text{ den } n \geq 2 \text{ için } \bar{a}_{n+1} = -\frac{nC_{-n}}{2} \text{ ve } \bar{b}_n = -\frac{(n+2)}{2}C_{-n}$$

$F(\theta)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyon olduğundan artık $\Omega(z)$, $\varphi(z)$ analitik fonksiyonlarının katsayıları dolayısıyla akım fonksiyonu, katsayıları, bilinen C_n 'ler cinsinden belirlenmiştir. Ve akım fonksiyonu $(z, \bar{z})$ 'nin bir polinomu şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_1 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(C_n z^n + C_{-n} \bar{z}^n)}{2} ((n+2) - n z \bar{z}) \right] \quad (4.73)$$

$z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ olduğuna göre (4.73) ile belirlenmiş olan birinci mertebe akım fonksiyonu (x,y) düzleminde

$$\psi_1(x,y) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right] \quad (4.74)$$

şeklindedir. Akım fonksiyonunun kutupsal (r, θ) koordinatlarındaki ifadesi $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ dönüşümü ile

$$\psi_1(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^n}{2} (C_n e^{in\theta} + C_{-n} e^{-in\theta}) ((n+2) - nr^2) \right] \quad (4.75)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda hız bileşenleri, $u = \psi_y$ ve $v = -\psi_x$ 'den

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2} (-2y(C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) + i(C_n (x+iy)^{n-1} - C_{-n} (x-iy)^{n-1})) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right] \quad (4.76)$$

$$v_1(x,y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2} (-2x(C_n (x+iy)^n + C_{-n} (x-iy)^n) + (C_n (x+iy)^{n-1} + C_{-n} (x-iy)^{n-1})) ((n+2) - n(x^2 + y^2)) \right]$$

olarak bulunur. Hızın teğetsel ve çembersel bileşenleri ise

$$u_{1r} = \frac{\psi_{1\theta}}{r}, \quad u_{1\theta} = -\psi_{1r}$$

ifadelerinden (4.75) akım fonksiyonu eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_{1r} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[in \frac{r^{n-1}}{2} (C_n e^{in\theta} - C_{-n} e^{-in\theta}) (n(1-r^2) + 2) \right] \\
u_{1\theta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^{n-1}}{2} (C_n e^{in\theta} + C_{-n} e^{-in\theta}) (n^2 + 2n)(1-r^2) \right]
\end{aligned} \tag{4.77}$$

olarak elde edilir. Özel bir hal olarak, $F(\theta)$ fonksiyonunda sadece $e^{in\theta}$ 'nin $\pm$ birinci ve ikinci merteye terimleri bulunması durumunda

$$C_n = C_{-n} = 0, \quad n > 2$$

olacaktır. Bu durumda akım fonksiyonu, a, b, c, d reel katsayılar olmak üzere, $C_1 + C_{-1} = a$, $C_1 - C_{-1} = ib$, $C_2 + C_{-2} = c$, $C_2 - C_{-2} = id$ olarak ele alınabileceği-ne göre akım fonksiyonu

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{2}(ax - by)(3 - x^2 - y^2) + [c(x^2 - y^2) - 2dxy](2 - x^2 - y^2)$$

olacaktır. Akım fonksiyonuna ait grafikler Şekil 4.5'de verildiği gibidir. Bu durumda u_1 ve v_1 hız bileşenleri ise

$$u_1(x, y) = \frac{b}{2}(x^2 + 3y^2 - 3) - \frac{a}{2}xy - 2dx(2 - x^2 - 3y^2) + 4cy(1 - y^2)$$

$$v_1(x, y) = \frac{a}{2}(3x^2 + y^2 - 3) - \frac{b}{2}xy - 2dy(2 - 3x^2 - y^2) + 4dx(1 - x^2)$$

olacaktır. Hız profilleri a, b, c, d 'nin değişik değerleri için Şekil (4.6)'da verildiği gibidir. Bu özel hal için (4.77) ile elde edilmiş olan u_{1r} ve $u_{1\theta}$ bileşenleri ise

$$u_{1r} = -\frac{1}{2}(3 - r^2)(b \cos \theta + a \sin \theta) - 2r(2 - r^2)(d \cos 2\theta + c \sin 2\theta)$$

$$u_{1\theta} = -\frac{3}{2}(1 - r^2)(a \cos \theta + b \sin \theta) - 3r(1 - r^2)(c \cos 2\theta - d \sin 2\theta)$$

olacaktır. Hızın birinci merteye bileşenine ait teğetsel ve çembersel hızların grafikler a, b, c, d 'nin değişik değerleri için Şekil (4.7)'de verildiği gibidir.

Şimdi birinci merteye boyuna hız bileşeni w_1 'i belirlemeye çalışalım. w_0 ve ψ_1 fonksiyonları bilindiğine göre (4.43)₄ denkleminin sağ tarafı artık aşağıdaki şekilde bilinmektedir:

$$\nabla^2 w_1 = 4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \bar{z}} = inRe(n(z\bar{z} - 1) - 2)(C_n z^n - C_{-n} \bar{z}^n) - \bar{P}_1 Re$$

Bu ifade sırasıyla z ve $\bar{z}$ 'ye göre integre edilirse

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{in}{8(1+n)(2+n)} (n^2(z\bar{z} - 2) + (nz\bar{z} - 8))(C_n z^n - C_{-n} \bar{z}^n) - \frac{\bar{P}_1 Re}{4} z\bar{z} + \Omega(z) + \bar{\Omega}(\bar{z})$$

sonucuna ulaşılır. $\Omega(z)$ ve $\bar{\Omega}(\bar{z})$ analitik fonksiyonlarının katsayıları (4.64)₁ ($i=1$ için) sınır koşullundan yukarıdakilere benzer işlemler sonucunda

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{\bar{P}_1 Re}{4}$$

$$a_n = \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} (n^2 + 7n + 8) C_n \quad n \geq 1$$

$$\bar{a}_n = -\frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} (n^2 + 7n + 8) C_{-n} \quad n \geq 1$$

olarak belirlenir. O halde w_1 fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$w_1(z, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} [z\bar{z}(n(1+n)z\bar{z} - 2(2+n)^2) + (n^2 + 7n + 8)](C_n z^n - C_{-n} \bar{z}^n) + \frac{\bar{P}_1 Re}{4} (1 - z\bar{z})$$

Burada

$$U_1 = \frac{\bar{P}_1 Re}{4} = 1$$

olacak şekilde alalım. Bu durumda (3.19)₁ ile $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ şeklinde tanımlanmış olan

Reynolds sayısı ve (4.28) ile $\bar{P}_1 = \frac{P_1 L}{\rho U^2}$ şeklinde bulunmuş olan karakteristik basınç gradyanının birinci mertebe bileşeni yerine yazılırsa

$$U_1 = \frac{P_1 L^2}{4U\mu} = 1$$

eşitliği elde edilir. Burada boyutsuzlaştırmada kullanılmış olan karakteristik U hızı

$$U = \frac{P_1 R^2}{4\mu} \quad (4.78)$$

ile tanımlı, tüpün en kesitine, basınç gradyanına ve viskoziteye bağlı bilinen bir hızdır. O halde

$$w_1(z, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} \left[z\bar{z}(n(1+n)z\bar{z} - 2(2+n)^2) + (n^2 + 7n + 8) \right] (C_n z^n - C_{-n} \bar{z}^n) + (1 - z\bar{z}) \quad (4.79)$$

$$w_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inRe}{8(1+n)(2+n)} \left[(n^2 + 7n + 8) + (x^2 + y^2)[n(1+n)(x^2 + y^2) - 2(2+n)^2] \right] (C_n (x + iy)^n - C_{-n} (x - iy)^n) + (1 - x^2 - y^2)$$

yazılabilir. $F(\theta)$ fonksiyonunun sadece $\pm e^{in\theta}$ 'nın birinci ve ikinci mertebe terimleri bulundurması halinde (4.79) ifadesi

$$w_1(x, y) = \frac{-Re}{24} \left\{ \left(8 + (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 9) \right) (ay + bx) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(13 + (x^2 + y^2)(3x^2 + 3y^2 - 16) \right) (d(x^2 + y^2) + 2cxy) \right\} + (1 - x^2 - y^2) \quad (4.80)$$

olarak yazılabilir. Boyuna hızın birinci merteye bileşeni olan w_1 fonksiyonun grafikleri a, b, c, d 'nin değişik değerleri için Şekil (4.8)'de verildiği gibidir.

Dairesel Kesitli Silindirik Tüpte Sabit Emme Hali

Yukarıdaki çözümlerde sabit hızla emme hali çözümde yer almamaktadır. Bu kısımda ayrı bir çözüm olarak dairesel kesitli silindirik tüpte tüpün yüzeyleri boyunca akışkanın sabit bir f_0 hızı ile emildiği hal incelenecektir.

(r, θ) kutupsal koordinatlarında hız alanı akım fonksiyonu cinsinden

$$u_{1r} = \frac{\psi_{1\theta}}{r}, \quad u_{1\theta} = -\psi_{1r} \quad (4.81)$$

şeklindedir. Sabit emme fonksiyonunu

$$f(\theta) = f_0 \quad (4.82)$$

şeklinde alalım. (4.81) ve (4.82) ifadelerinden akım fonksiyonuna ait sınır koşulları; hızın normal bileşeninin emme fonksiyonuna eşitleyen sınır koşulu

$$\psi_{1\theta}|_{\partial R} = f_0 \quad (4.83)$$

ve teğetsel bileşenine ait sınır koşulu ise kutupsal koordinatlarda

$$\psi_{1r}|_{\partial R} = 0 \quad (4.84)$$

olacaktır. (4.84) koşulu ψ_1 fonksiyonunun $\psi_1 = \psi_1(\theta)$ şeklinde alınabileceğini gösterir. O halde $\nabla^4 \psi_1 = 0$ biharmonik denklemi kutupsal koordinatlarda

$$\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \psi_1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. Parametreye göre dört kez integrasyonla akım fonksiyonu

$$\psi_1 = A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3$$

şeklinde bulunur. (4.83) sınır koşulu altında yukarıda elde edilmiş olan akım fonksiyonunun katsayıları $C=D=0$, $B=f_0$ olarak bulunur. O halde birinci mertebe akım fonksiyonu, akışkanın tüpün yüzeyleri boyunca sabit bir f_0 hızı ile emilmesi durumunda

$$\psi_1 = A + f_0\theta \quad (4.85)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (4.23) denklemi kutupsal koordinatlarda

$$\nabla^2 w_1 = Re\left(\frac{1}{r} w_{0,r} \psi_{1\theta} - \bar{P}_1\right) \quad (4.86)$$

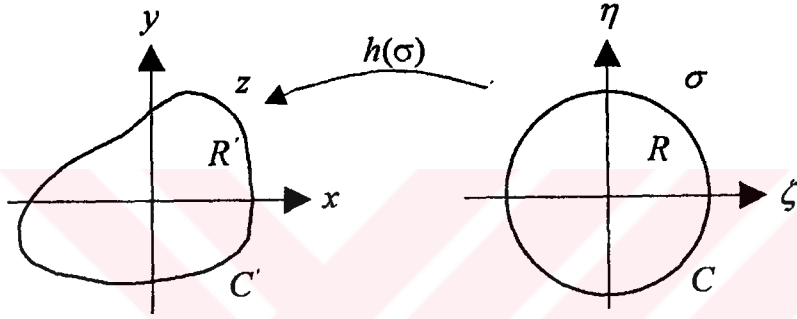
olarak yazılır. Sıfıncı mertebe boyuna hız kutupsal koordinatlarda $w_0 = (1 - r^2)$ olarak yazıldığına göre (4.86) denklemi

$$\nabla^2 w_1 = -Re(f_0 + \bar{P}_1) = ReD_1 \quad (4.87)$$

olarak elde edilir. Burada D_1 sabit karakteristik basınç gradyanı ve sabit emme fonksiyonunun toplamı olan bir sabittir. Sınırdaki $w_1|_{\partial R} = 0$ olduğundan (4.87) denkleminde w_1 fonksiyonunun, w_0 fonksiyonunun çözümünden sadece katsayı farklılığı ile ayrılacağı açıkça görülür.

4.5. KONFORM DÖNÜŞÜM ARACILIĞIYLA PROBLEMİN KEYFİ BÖLGELE- RE AKTARILMASI

Buraya kadar olan kısımlarda problem sınır eğrisi bir daire olduğu durumda ele alındı. Yukarıda elde edilmiş olan denklemleri ve sınır koşullarını herhangi bir basit bağımlı bölge için genelleştirmek mümkündür. Bu genelleştirme düzlemler arasındaki geçişi sağlayacak bir dönüşüm fonksiyonu kullanılarak yapılır.



Şekil 4.9 Konform Dönüşüm

$z = h(\sigma)$ fonksiyonel bağıntısı σ kompleks düzleminin $\sigma = \zeta + i\eta$ noktaları ile z kompleks düzleminin $z = x + iy$ noktaları arasında karşılıklı bir bağlantı kurar. (Şekil 4.9). $z = h(\sigma)$, σ düzleminin bir R bölgesinde analitik olduğu takdirde z değerlerinin hepsi z düzleminde bir R' bölgesine ait olurlar. Dolayısıyla R bölgesi $h(\sigma)$ dönüşüm fonksiyonu aracılığıyla R' bölgesine dönüşür.

(4.63) sınır koşullarının konform tasvir altında alacağı hali belirleyelim $z = h(\sigma)$ dönüşümü altında analitik fonksiyonlar

$$\Omega(z) = \Omega[h(\sigma)] = \Omega_1(\sigma), \quad \overline{\Omega}(\bar{z}) = \overline{\Omega[h(\sigma)]} = \overline{\Omega_1(\sigma)} \quad (4.88)$$

$$\varphi(z) = \varphi[h(\sigma)] = \varphi_1(\sigma), \quad \overline{\varphi}(\bar{z}) = \overline{\varphi[h(\sigma)]} = \overline{\varphi_1(\sigma)}$$

olacaktır [38]. Emmeyi karakterize eden $F(s)$ fonksiyonu ise $z = h(\sigma)$ dönüşümüyle

$F(s) = F[h(\sigma)] = F_1(\sigma)$ olacaktır. $\sigma \in C$ ile sınırlı değerlerini gösterebiliriz. (4.88) deki analitik fonksiyonların türevleri

$$\Omega'(z) = \frac{d\Omega(z)}{dz} = \frac{d\Omega_1(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dz} = \frac{\Omega'_1(\sigma)}{h'(\sigma)} \quad (4.89)$$

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi'_1(\sigma)}{h'(\sigma)}, \quad \bar{\Omega}'(\bar{z}) = \frac{\bar{\Omega}'_1(\bar{\sigma})}{\bar{h}'(\bar{\sigma})}, \quad \bar{\varphi}'(\bar{z}) = \frac{\bar{\varphi}'_1(\bar{\sigma})}{\bar{h}'(\bar{\sigma})} \quad (4.90)$$

olacaktır. O halde (4.63) sınır koşulları,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{d\bar{z}}{ds} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{ds}$$

olduğu gözönüne alınarak

$$\bar{h}(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\bar{\Omega}_1(\bar{\sigma}) + \varphi_1(\sigma) + \bar{\varphi}_1(\bar{\sigma}) = F_1(\sigma) \quad C \text{ üzerinde} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}(\bar{\sigma})\Omega'_1(\sigma) + h'(\sigma)\bar{\Omega}_1(\bar{\sigma}) + \varphi'_1(\sigma) \right) \frac{d\sigma}{ds} = \\ & \left(\bar{h}'(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\bar{\Omega}'_1(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}'_1(\bar{\sigma}) \right) \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \end{aligned} \quad C \text{ üzerinde}$$

olacaktır. Dönüşümün birim daire üzerine olması halinde $\sigma = e^{i\theta}$, $\bar{\sigma} = e^{-i\theta} = \sigma^{-1}$ ve sınır eğrisi, $C: |\sigma| = 1$ şeklindedir. s yay parametresi ise θ dir. O halde $z = h(\sigma)$ dönüşümünün keyfi basit bağımlı bölgeyi birim daireye dönüşmesi halinde problemin sınır koşulları

$$\bar{h}(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\bar{\Omega}_1(\bar{\sigma}) + \varphi_1(\sigma) + \bar{\varphi}_1(\bar{\sigma}) \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} = F_1(\sigma) \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{h}(\bar{\sigma})\Omega'_1(\sigma) + h'(\sigma)\bar{\Omega}_1(\bar{\sigma}) + \varphi'_1(\sigma) \right) \sigma \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} = \\ & - \left(\bar{h}'(\bar{\sigma})\Omega_1(\sigma) + h(\sigma)\bar{\Omega}'_1(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}'_1(\bar{\sigma}) \right) \bar{\sigma} \Big|_{\sigma=e^{i\theta}} \end{aligned}$$

olacaktır. R bölgesi sonluysa ve $z=0$ başlangıcı bölge içindeyse $h(\sigma)$ $z=0$ 'a $\sigma=0$ karşılık gelecek şekilde yazılabilir. Bölgede teklik olmadığına göre $z = h(\sigma)$ dönüşümü $\sigma=0$ civarında Taylor serisine açılabilir. Bu durumda

$$h(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sigma^k \quad (4.93)$$

yazılabilir. $F_1(\sigma)$ fonksiyonu R bölgesinin C çevresinde verilmiş, bilinen değerlerden, birim dairenin $|\sigma|=1$ sınırı üzerine $z = h(\sigma)$ bağıntısı ile tek olarak belirlenmiştir. $F_1(\sigma)$ fonksiyonu $\Omega_1(\sigma)$ ve $\varphi_1(\sigma)$ analitik fonksiyonları üzerine $|\sigma| \leq 1$ kapalı bölgesi bölgesinde sürekli olma şartının koşulmasını akla getirir. $F_1(\sigma)$ fonksiyonunu dairesel kesitli tüpte yüzeylerde emme olduğu halde ele aldığımız gibi en genel halde

$$F_1(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sigma^n \quad (4.94)$$

şeklinde alabiliriz. Fakat burada C_n katsayılarının daha önce ele almış olduğumuz C_n katsayıları ile aynı olmadığına dikkat etmek gereklidir. Analitik fonksiyonların yapısı da bölge basit bağımlı olduğundan bir önceki uygulamada ele alındığı gibidir. Bu durumda (4.92) ile belirlenen sınır koşulları, (4.93) seri açılımı yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_k \sigma^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sigma^k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \sigma^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \sigma^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sigma^n$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_k \sigma^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sigma^{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k d_k \sigma^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \sigma^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sigma^{n-1} \right\} \sigma =$$

$$- \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{d}_k \sigma^{-k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^n + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sigma^k \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n \sigma^{-n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{b}_n \sigma^{-n+1} \right\} \sigma^{-1}$$

olacaktır. Burada

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sigma^m \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \sigma^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} \bar{a}_r \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_{n+r} a_r \right) \sigma^{-n}$$

olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_k a_{n+k} \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_{k+n} a_k \right) \sigma^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_{k+n} \bar{a}_k \right) \sigma^n + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \bar{a}_{k+n} \right) \sigma^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \sigma^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sigma^n \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (n+k) \bar{d}_k a_{n+k} \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{d}_{k+n} a_k \right) \sigma^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+n) d_{k+n} \bar{a}_k \right) \sigma^n + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k d_k \bar{a}_{k+n} \right) \sigma^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{b}_n \sigma^{-n} = - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{d}_k a_{n+k} \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+n) \bar{d}_{k+n} a_k \right) \sigma^{-n} + \right. \\ & \left. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k d_{k+n} \bar{a}_k \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+n) d_k \bar{a}_{k+n} \right) \sigma^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{b}_n \sigma^{-n} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Aynı mertebeli terimlerin eşitliğinden katsayılar arasında

$$b_0 + \bar{b}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{d}_k a_k + d_k \bar{a}_k) = C_0$$

$$\bar{b}_n + \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{d}_{k+n} a_k + d_k \bar{a}_{k+n}) = C_{-n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n + \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{d}_k a_{k+n} + d_{k+n} \bar{a}_k) = C_n \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k (\bar{d}_k a_k + d_k \bar{a}_k) = 0$$

$$n \bar{b}_n + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+n) (\bar{d}_{k+n} a_k + d_k \bar{a}_{k+n}) + n (\bar{d}_n a_0 + d_0 \bar{a}_n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$n b_n + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+n) (\bar{d}_k a_{k+n} + d_{k+n} \bar{a}_k) + n (\bar{d}_0 a_n + d_n \bar{a}_0) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

ilişkileri bulunur. Yukarıda ele alınan konform dönüşüm açılımı keyfi dönüşüm fonksiyonları için geçerlidir. Daha sade olarak $d_k = \bar{d}_k$ olması halinde

$$b_0 + \bar{b}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (a_k + \bar{a}_k) = C_0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k d_k (a_k + \bar{a}_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(d_{k+n}a_k + d_k\bar{a}_{k+n}) + n(d_n a_0 + d_0 \bar{a}_n) = -nC_{-n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(d_k a_{k+n} + d_{k+n} \bar{a}_k) + n(d_0 a_n + d_n \bar{a}_0) = -nC_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.96)$$

$$b_n = C_n - \sum_{k=1}^{\infty} (d_k a_{k+n} + d_{k+n} \bar{a}_k) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\bar{b}_n = C_{-n} - \sum_{k=1}^{\infty} (d_{k+n} a_k + d_k \bar{a}_{k+n}) \quad n = 1, 2, \dots$$

yazılabilir. Uygulama açısından özel hallerde (4.96) eşitlikleri çok daha basite indirgenebilir. Eşitliklerde bulunan ve emme fonksiyonunu karakterize eden C_n katsayıları üzerine emmenin fiziğinden kaynaklanan bir takım kısıtlar getirilebilir. Fakat ilke olarak d_k lar ve C_n ler bilindiğine göre sonsuz denklem takımından sadece sonsuz a_n ve b_n bilinmeyenini bulunacaktır.

Bir uygulama olarak kenarları yuvarlatılmış $(n+1)$ kenarlı poligona benzeyen ve bölgenin içini dairenin içine çeviren

$$z = \frac{\sigma}{n + \lambda \sigma^{n+1}} \quad (4.97)$$

dönüşümünü gözönüne alalım. (4.97) dönüşümünde $\sigma=0$ a karşılık $z=0$ gelmektedir. Dönüşümün $\sigma=0$ civarında seri açılımı

$$h(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{n^{m+1}} \sigma^{(n+1)m+1} \quad (4.98)$$

olacaktır. $n=3$ alınması halinde $z = \frac{\sigma}{3 + \lambda\sigma^4}$ kenarları yuvarlatılmış dörtgeni daireye çeviren dönüşümün seri açılımını bulmak için (4.98) açılımında n yerine 3 yazmak yeterli olacaktır: $h(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{3^{m+1}} \sigma^{4m+1}$. $n=2$ halinde ise $z = \frac{\sigma}{2 + \lambda\sigma^3}$ kenarları yuvarlatılmış üçgeni daireye çeviren dönüşümün seri açılımı ise aynı şekilde (4.98) açılımında n yerine 2 yazmak suretiyle, $h(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{2^{m+1}} \sigma^{3m+1}$ şeklinde elde edilir.



BÖLÜM 5

POISEUILLE AKIMININ STABİLİTESİ

Bu bölümde Poiseuille akımı üzerine lineer stabilite analizi yapılmış, akımın ζ den bağımsız çözümlerinin stabilitesi araştırılmıştır.

Hareket denklemleri 4. Bölüm'de (4.6) ve (4.10) ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} w_x \psi_y - w_y \psi_x - \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \varepsilon (\psi_y \nabla^2 w_x - \psi_x \nabla^2 w_y) &= C \\ \psi_x (\nabla^2 \psi)_y - \psi_y (\nabla^2 \psi)_x + \frac{1}{Re} \nabla^4 \psi - \varepsilon (w_y (\nabla^2 w)_x - w_x (\nabla^2 w)_y) \\ &+ \psi_x (\nabla^4 \psi)_y - \psi_y (\nabla^4 \psi)_x = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Lineer stabilite analizinde Poiseuille akımına küçük pertürbasyonlar vereceğiz. Bunun için hızın boyuna bileşeni ve akım fonksiyonu üzerinde δ parametresi kullanarak küçük bir artım ekleyelim:

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \delta w_1 + \dots \\ \psi &= \delta \psi_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

(5.2) açılımları (5.1) hareket denklemlerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} (w_{0x} + \delta w_{1x}) \delta \psi_{1y} - (w_{0y} + \delta w_{1y}) \delta \psi_{1x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 w_0 - \frac{\delta}{Re} \nabla^2 w_1 - \\ \varepsilon [\delta \psi_{1y} ((\nabla^2 w_0)_x + \delta (\nabla^2 w_1)_x) - \delta \psi_{1x} ((\nabla^2 w_0)_y + \delta (\nabla^2 w_1)_y)] + \dots = C \end{aligned}$$

$$\delta\psi_{1x}\delta(\nabla^2\psi_1)_y - \delta\psi_{1y}\delta(\nabla^2\psi_1)_x + \frac{\delta}{Re}\nabla^4\psi_1 - \varepsilon[(w_{0y} + \delta w_{1y})(\nabla^2 w_0)_x + \delta(\nabla^2 w_1)_x) - (w_{0x} + \delta w_{1x})(\nabla^2 w_0)_y + \delta(\nabla^2 w_1)_y) + \delta^2\psi_{1x}(\nabla^4\psi_1)_y - \delta^2\psi_{1y}(\nabla^4\psi_1)_x] + \dots = 0$$

haline gelir. δ 'nın değişik mertebelerdeki terimleri düzenlenirse

$$\delta^0 = 1 \text{ mertebesinde} \quad \nabla^2 w_0 = -CRe, \quad w_{0y}(\nabla^2 w_0)_x = w_{0x}(\nabla^2 w_0)_y$$

$$\nabla^2 w_1 = Re(w_{0x}\psi_{1y} - w_{0y}\psi_{1x})$$

$$\delta \text{ mertebesinde} \quad (5.3)$$

$$\nabla^4\psi_1 = \varepsilon Re(w_{0y}(\nabla^2 w_1)_x - w_{0x}(\nabla^2 w_1)_y)$$

olduğu görülür. (5.3)₁ eşitliğinden

$$\nabla^2 w_{1x} = Re(w_{0xx}\psi_{1y} + w_{0x}\psi_{1xy} - w_{0xy}\psi_{1x} - w_{0y}\psi_{1xx})$$

$$\nabla^2 w_{1y} = Re(w_{0xy}\psi_{1y} + w_{0x}\psi_{1yy} - w_{0yy}\psi_{1x} - w_{0y}\psi_{1xy})$$

hesaplanır ve (5.3)₂ denkleminde yerleştirilirse, stabiliteyi belirleyen denklem

$$\nabla^4\psi_1 = \varepsilon Re^2[w_{0y}(w_{0xx}\psi_{1y} + w_{0x}\psi_{1xy} - w_{0xy}\psi_{1x} - w_{0xy}\psi_{1xx}) - w_{0x}(w_{0xy}\psi_{1y} + w_{0x}\psi_{1yy} - w_{0yy}\psi_{1x} - w_{0y}\psi_{1xy})] \quad (5.4)$$

olarak bulunur. Kolayca belirlenebileceği gibi bu denklem

$$\nabla^4\psi_1 = -\varepsilon Re^2\left(w_{0x}\frac{\partial}{\partial y} - w_{0y}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_1 \quad (5.5)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada ε ve Re sayısı (3.19) eşitliklerinden hatırlanacak olursa

$$\varepsilon Re^2 = \frac{\alpha}{\rho L^2} \frac{\rho^2 U^2 L^2}{\mu^2} = \alpha \rho \frac{U^2}{\mu^2}$$

olacaktır. Bu aşamada

$$\varepsilon Re^2 = N^2 \quad (5.6)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (5.5) denklemi

$$\nabla^4 \psi_1 = -N^2 \left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial y} - w_{0y} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_1 \quad (5.7)$$

olarak yazılabilir. (5.7) ifadesi

$$D^2 = \left(w_{0x} \frac{\partial}{\partial y} - w_{0y} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

şeklinde bir operatör tanımı ile

$$(\nabla^4 + N^2 D^2) \psi_1 = 0 \quad (5.8)$$

olarak yazılabilir. Dikkat edilirse (5.8) ifadesindeki operatörün

$$(\nabla^2 - iND)(\nabla^2 + iND)\psi_1 = 0$$

şeklinde iki operatörün çarpımı olarak yazılabileceği açıktır. Burada

$$D_1 = (\nabla^2 - iND), \quad D_2 = (\nabla^2 + iND)$$

operatörlerini tanımlayalım. D_1 ve D_2 operatörleri lineer, çarpanları komütatif ve D_1 ve D_2 'nin spektrumları ayrık ise çözüm aşağıdaki denklemlerin ayrı ayrı çözümlerinin bir toplamı olarak ifade edilebilir.

$$(\nabla^2 - iND)\psi_1^1 = 0, \quad (\nabla^2 + iND)\psi_1^2 = 0$$

O halde (5.8) denkleminin çözümü $\psi_1 = \psi_1^1 + \psi_1^2$ olarak yazılabilir.

Şimdi dairesel kesitli silindirik tüp için (5.7) denklemini düzenleyelim. w_0 fonksiyonunun dairesel tüpte çözümü (4.70) denklemiyle

$$w_0 = 1 - x^2 - y^2$$

olarak bulunmuştu. Gerekli türevler buradan hesaplanır ve yerine yazılırsa dairesel kesitli tüp için stabilite denklemi

$$\nabla^4 \psi_1 = -2N^2 \left(-x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_1 \quad (5.9)$$

olarak elde edilir. Kutupsal koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında dönüşüm $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ olduğuna göre (5.9)'da gerekli olan kısmi türevler türevin zincir kuralı ile

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

olarak hesaplanır. O halde (5.9) denklemi kutupsal koordinatlarda

$$\left(\nabla^4 + 2N^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi_1 = 0 \quad (5.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$2\epsilon Re^2 = 2N^2 = k^2 \quad (5.11)$$

tanımlayalım ve (5.10) daki operatörü iki operatörün çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazalım:

$$\left(\nabla^2 + ik \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left(\nabla^2 - ik \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \psi_1 = 0 \quad (5.12)$$

(5.12) eşitliği ∇^2 operatörünün kutupsal koordinatlardaki ifadesi kullanılarak

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ik \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - ik \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \psi_1 = 0 \quad (5.13)$$

haline gelir. Lineer stabilite analizinde Fourier modları formunda akım fonksiyonu

$$\psi_1 = \Psi(r) e^{im\theta} \quad (5.14)$$

şeklinde verilebilir. Burada m dalga sayısıdır.

$$\psi_{1,r} = \Psi'(r) e^{im\theta}, \quad \psi_{1,rr} = \Psi''(r) e^{im\theta}, \quad \psi_{1,\theta} = im \Psi(r) e^{im\theta}, \quad \psi_{1,\theta\theta} = -m^2 \Psi(r) e^{im\theta}$$

türevleri (5.13) eşitliğinde yerine yazılırsa (5.13) ifadesi

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(km - \frac{m^2}{r^2}\right)\right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(km + \frac{m^2}{r^2}\right)\right) \Psi(r) = 0 \quad (5.15)$$

olacaktır. Çarpanlara dikkat edilirse ilkinin *Bessel denklemi*, ikincinin ise *modifiye Bessel denklemi* olduğu görülür. (5.15) denklemindeki operatör lineer, çarpanlar komütatif, spektrumları ayırık ve basit özdeğerleri tamamen farklı olduğu için genel çözüm

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(km - \frac{m^2}{r^2}\right)\right) \Psi_1(r) = 0 \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(km + \frac{m^2}{r^2}\right)\right) \Psi_2(r) = 0$$

denklemlerinin keyfi çözümlerinin toplamı şeklinde ifade edilebilir:

$$\Psi(r) = \Psi_1(r) + \Psi_2(r)$$

Buna göre çözüm

$$\Psi(r) = AJ_m(\sqrt{kmr}) + CY_m(\sqrt{kmr}) + BI_m(\sqrt{kmr}) + DK_m(\sqrt{kmr}) \quad (5.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada J Bessel fonksiyonu, Y ikinci tip Bessel fonksiyonu, I modifiye Bessel fonksiyonu, K ise ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonudur.

İnceleme dairesel kesitli tüpte yapıldığına göre tüp yarıçapı r sıfıra giderken hızların sonsuza gitmesi söz konusu olamaz. Bu durumda $r \rightarrow 0$ iken Ψ sonlu kalmalıdır. Bessel fonksiyonları

$$r \rightarrow 0 \text{ için} \quad Y_m(\sqrt{km} r) \rightarrow \infty, \quad K_m(\sqrt{km} r) \rightarrow \infty$$

karakterindedir. O halde (5.17) denkleminde $\Psi(r)$ 'nin r sonsuza giderken sonlu kalması ancak $C=0$ ve $D=0$ alınması halinde mümkündür. Bu durumda

$$\Psi(r) = AJ_m(\sqrt{kmr}) + BI_m(\sqrt{kmr}) \quad (5.18)$$

olacaktır.

Akışkan viskoz olarak kabul edildiğinden ve tüpün çeperlerinde herhangi bir emme türü etki olmadığından hızlar tüpün yüzeyinde sıfır olacaktır. Bu durumda sınır koşulları

$$u_r = u_\theta = 0, \quad \partial R' \text{ de} \quad (5.19)$$

olacaktır. Kutupsal koordinatlarda

$$u = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta, \quad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta$$

$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad u_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

şeklinde olduğu hatırlanırsa hız bileşenleri

$$u_r = \psi_y \cos \theta - \psi_x \sin \theta, \quad u_\theta = -\psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta$$

veya

$$u_r = \frac{1}{r} \psi_\theta, \quad u_\theta = -\psi_r$$

olarak hesaplanabilir. (5.14) ifadesinden $\psi_1 = \Psi(r)e^{im\theta}$ olduğuna dikkat edilirse (5.19) sınır koşulları

$$\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0$$

olacaktır. O halde (5.18)'den 1 yarıçaplı bir dairesel silindir için

$$AJ_m(\sqrt{km}) + BI_m(\sqrt{km}) = 0, \quad AJ'_m(\sqrt{km}) + BI'_m(\sqrt{km}) = 0 \quad (5.20)$$

olmalıdır. Bu iki denklemin $A=B=0$ trivial çözümünden farklı çözümler ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması ile elde edilebilir. Yani problem aslında bir özdeğer problemidir. O halde katsayılar matrisi

$$\begin{vmatrix} J_m(\sqrt{km}) & I_m(\sqrt{km}) \\ J'_m(\sqrt{km}) & I'_m(\sqrt{km}) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla özdeğerleri belirlemek için

$$J_m(\sqrt{km})I'_m(\sqrt{km}) - J'_m(\sqrt{km})I_m(\sqrt{km}) = 0 \quad (5.21)$$

denklemini elde edilir. Değişik m dalga sayılarına karşı (5.21) denkleminin kökleri *Mathematica* programı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu değerler Tablo 1'de görülebilir. En küçük köke birinci adımda $m=3$ değerinde ulaşılmıştır: $k=17,01001182792537309334831959$. O halde stabilitenin bu değerden sonra bozulmaya başladığı söylenebilir.

(5.11) ifadesinden hatırlanacağı üzere

$$2\varepsilon Re^2 = k^2 \quad (5.22)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Tablo 1'de verilen k değerleri akışkanın ikinci mertebe malzeme sabiti ε 'a ve Reynolds sayısına (5.22) eşitliğinde verildiği gibi bağlıdır. Dolayısıyla büyük k değerleri için Reynolds sayısının da büyük olduğu söylenebilir.

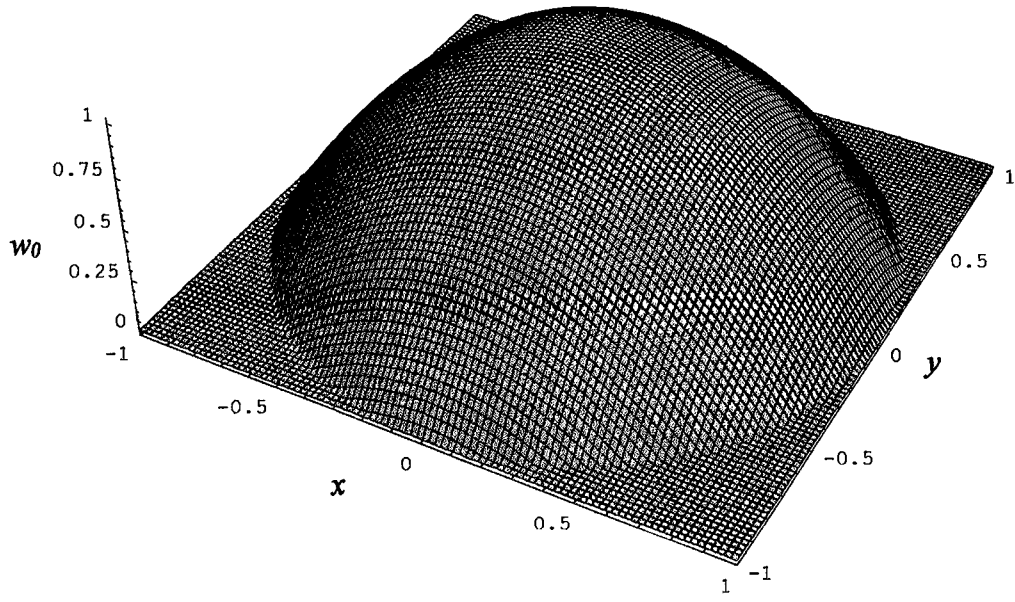
Stabil hale ait grafik Şekil 5.1'de, diğer bazı m ve k değerlerine karşı gelen grafikler ise Şekil 5.2-5.14'de verilmiştir. Grafiklere bakıldığında (5.14) de verilen akım fonksiyonunun periyodik yapısı nedeniyle, m dalga sayısının iki katı kadar hücre olduğu gözlenmektedir. Hücrelerin içindeki akışkan parçacıkları sadece o hücrenin içinde dolaşmakta, yani bir lokal hareket yapmaktadır. Burada grafiklere dikkat edilirse, özellikle Şekil (5.5)'e dayanarak, k değerinin artması ile birlikte yani büyük Reynolds sayılarında çalışıldığında hareketin yerel hareketten uzaklaştığı söylenebilir. Burada tam olarak bir türbülans söz edilemez. Ama büyük k değerleri için grafikler akımın türbülansa yaklaştığı izlenimi vermektedir. Daha ayrıntılı bir sayısal çalışma ile bu durum aydınlatılabilir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

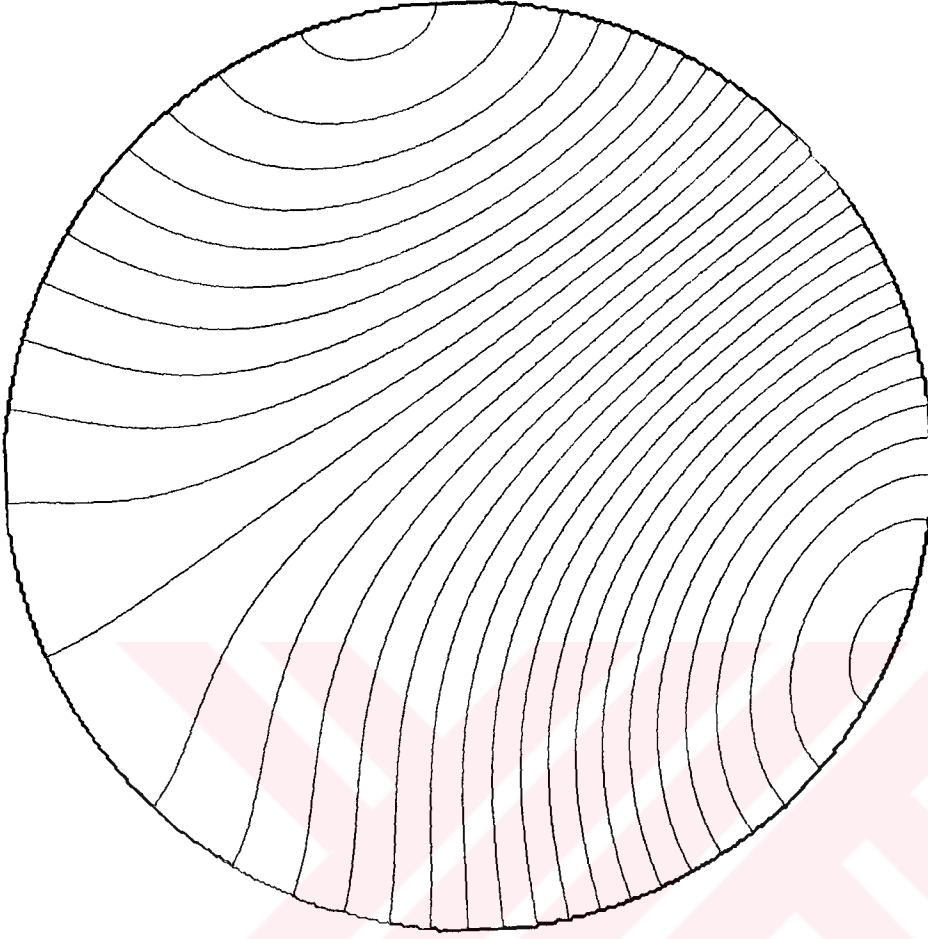
Bu çalışmada sonsuz uzunlukta silindirik bir tüpte sıkışmaz ikinci derece Rivlin-Ericksen akışkanının daimi akımı ele alındı. Problem basit bağımlı ve çok bağımlı bölgelerde genel olarak ifade edildi. Basit bağımlı bölge üzerine, tüpün dairesel kesitli olması halinde, çözümler, tüpün hareketsiz olduğu, yüzeylerinde herhangi bir emme olmadığı halde ve tüpün yüzeylerinde akışkanın genel bir niteliksel emme fonksiyonu ile emilmesi durumunda verildi. Keyfi basit bağımlı bölgelerde çözümlere ulaşmak için daire üzerine konform dönüşüm ele alınarak, problemin genel yapısı elde edildi.

Bu çalışmanın devamı olarak problemin çok bağımlı bölgelerde, bir kaç delik civarında incelenmesi önerilebilir. Bu incelemenin ardından problem burada verilen yapı ile keyfi çok bağımlı bölgelere konform dönüşüm aracılığıyla aktarılıp çözümler elde edilebilir.

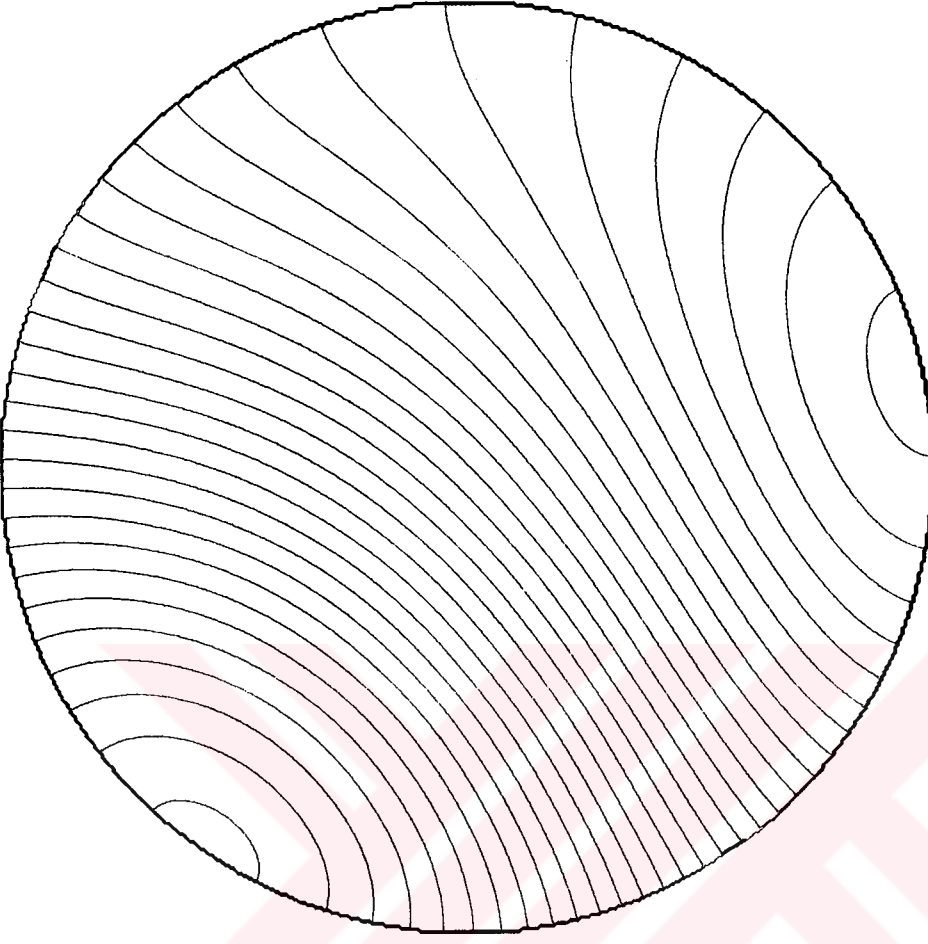
Son bölümde Poiseuille akımının stabilite analizi ele alındı. Bu çalışma kapsamında sadece ξ den bağımsız çözümlerin stabilitesi araştırıldı. Çalışmanın bir devamı olarak ξ ye bağlı çözümlerin stabilitesinin incelenmesi önerilebilir.



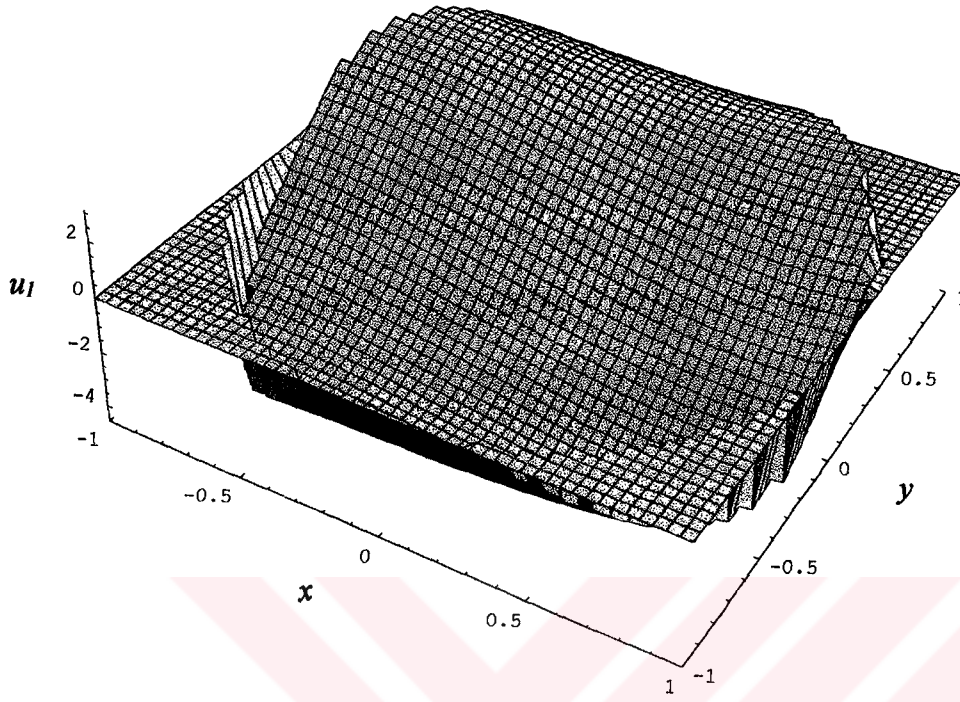
Şekil 4.4 w_0 hız profili.



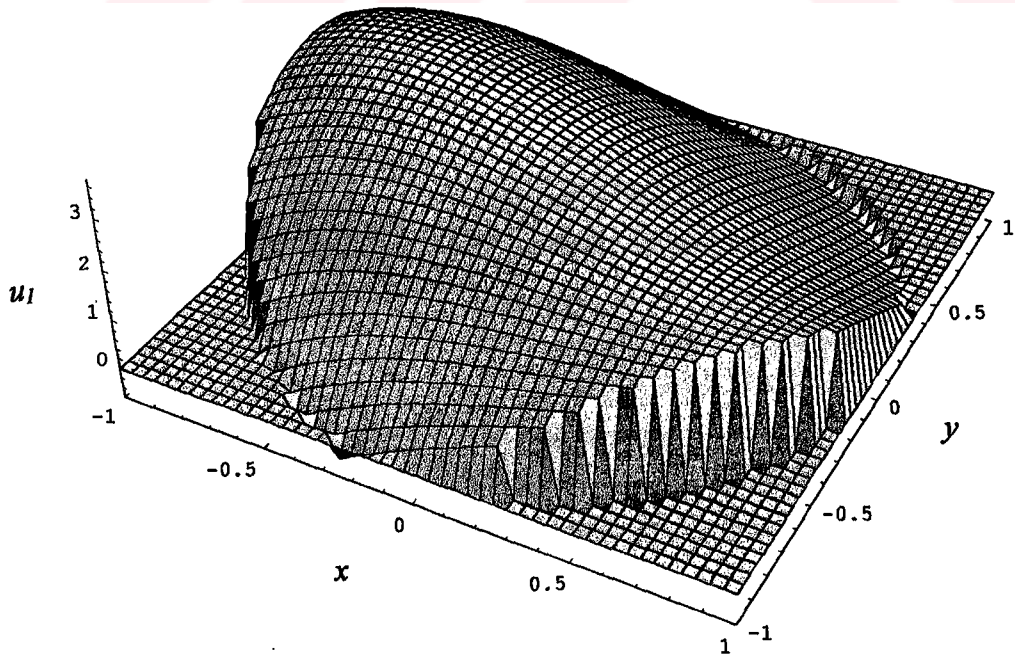
Şekil 4.5.a Akım çizgileri $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -0.5$



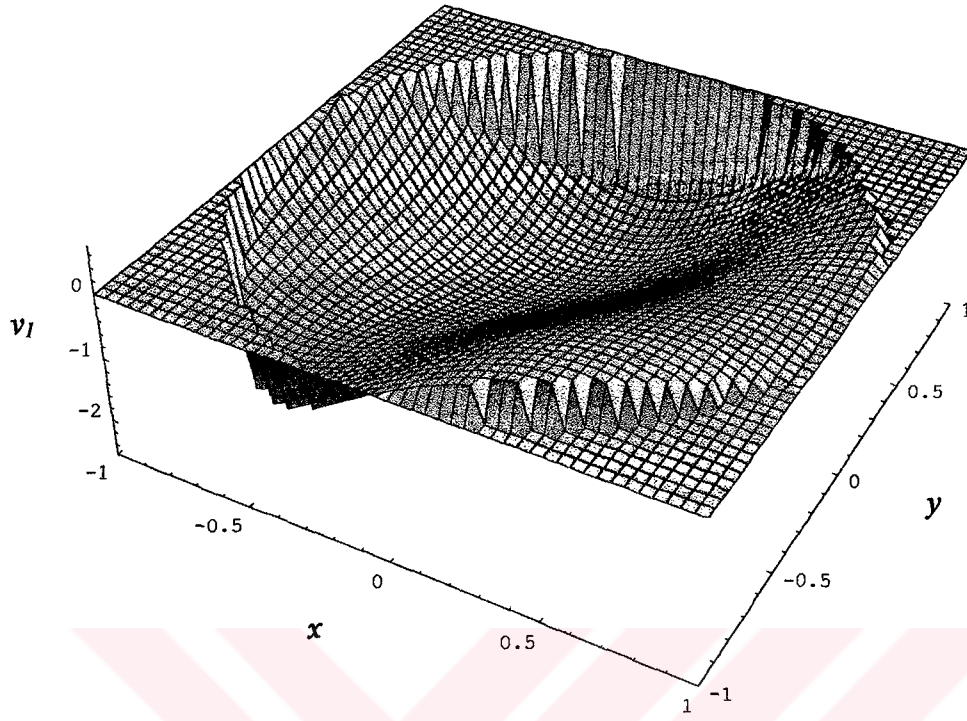
Şekil 4.5.b Akım çizgileri $a = 2$, $b = -2$, $c = 0.5$, $d = -0.15$



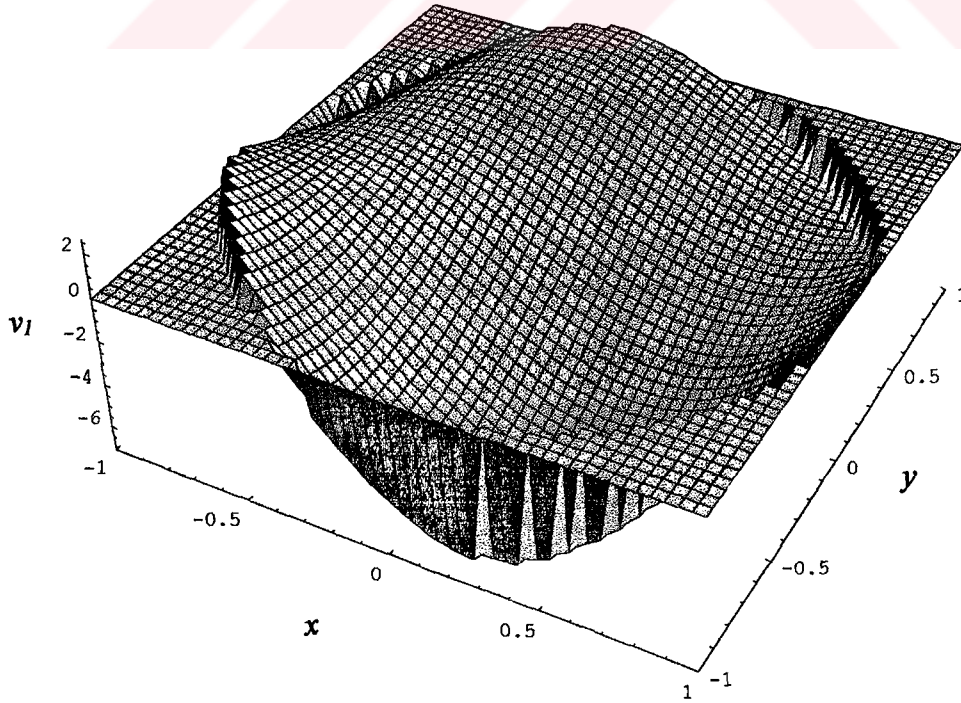
Şekil 4.6.a u_I hız profili $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 0.5$



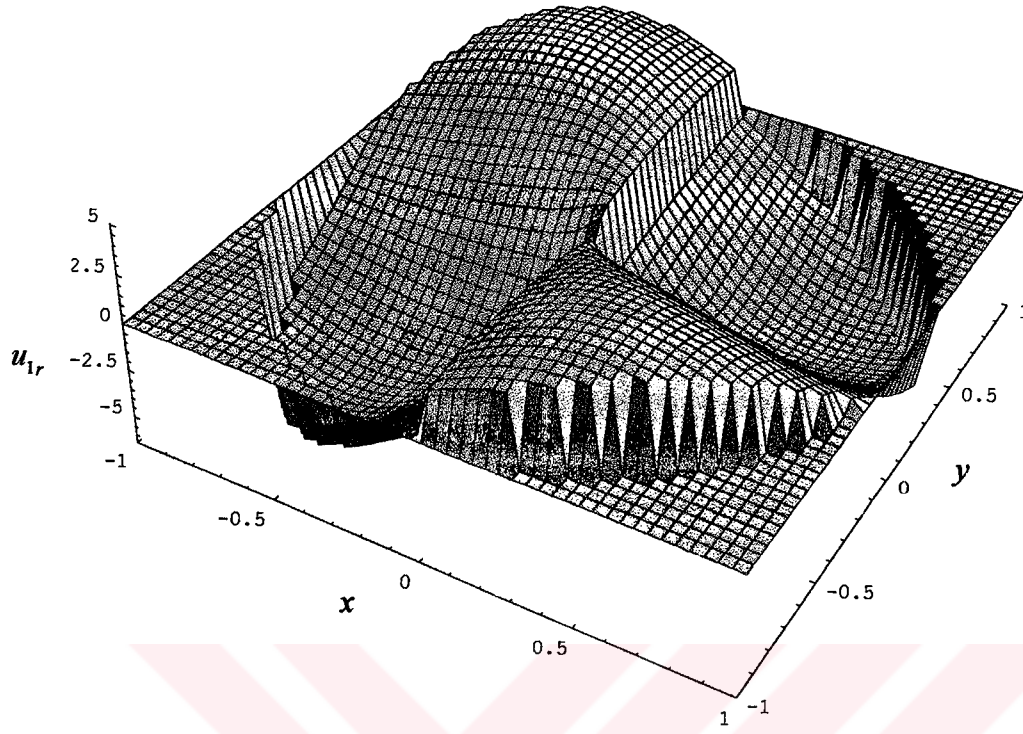
Şekil 4.6.b u_I hız profili $a = 2$, $b = -2$, $c = 0.25$, $d = -0.5$



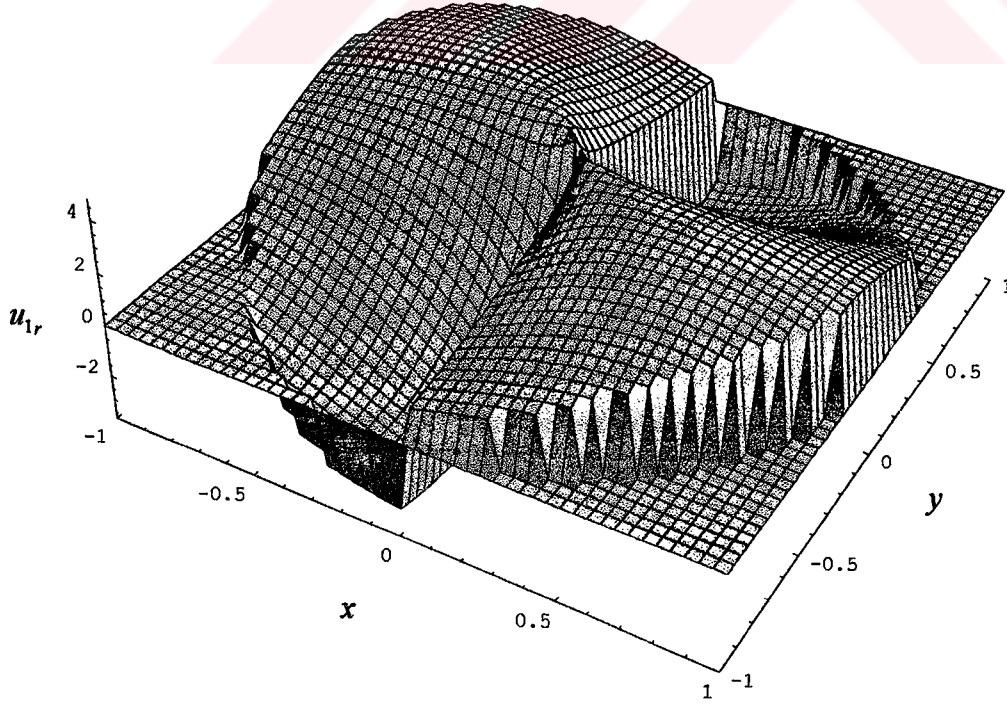
Şekil 4.6.c v_I hız profili $a = 1, b = 1, c = 2, d = 0.5$



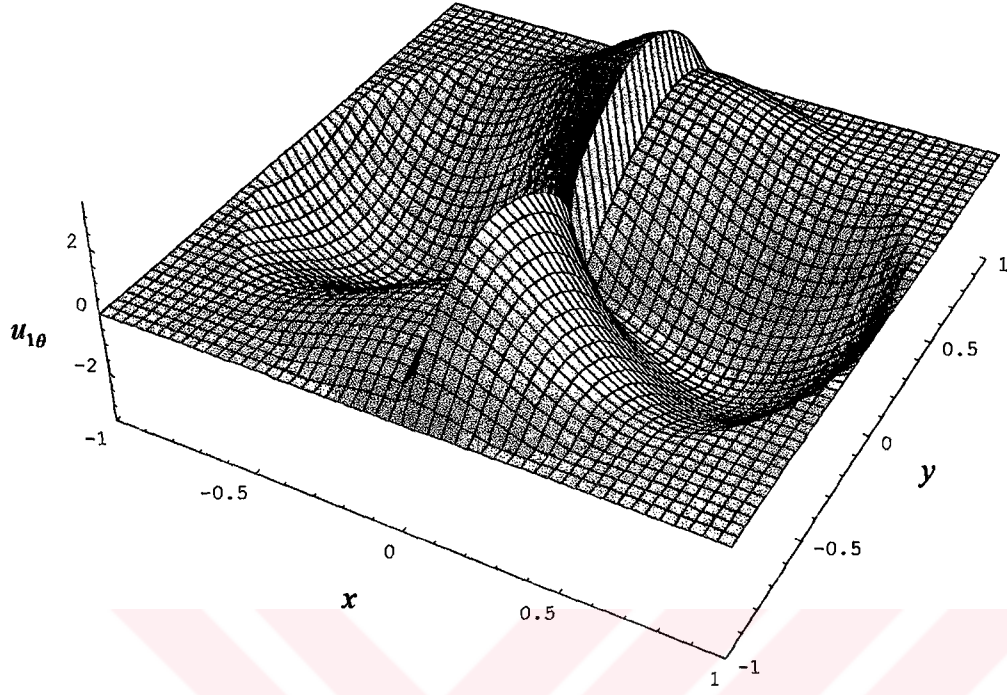
Şekil 4.6.d v_I hız profili $a = 2, b = -1, c = 0.125, d = 0.5$



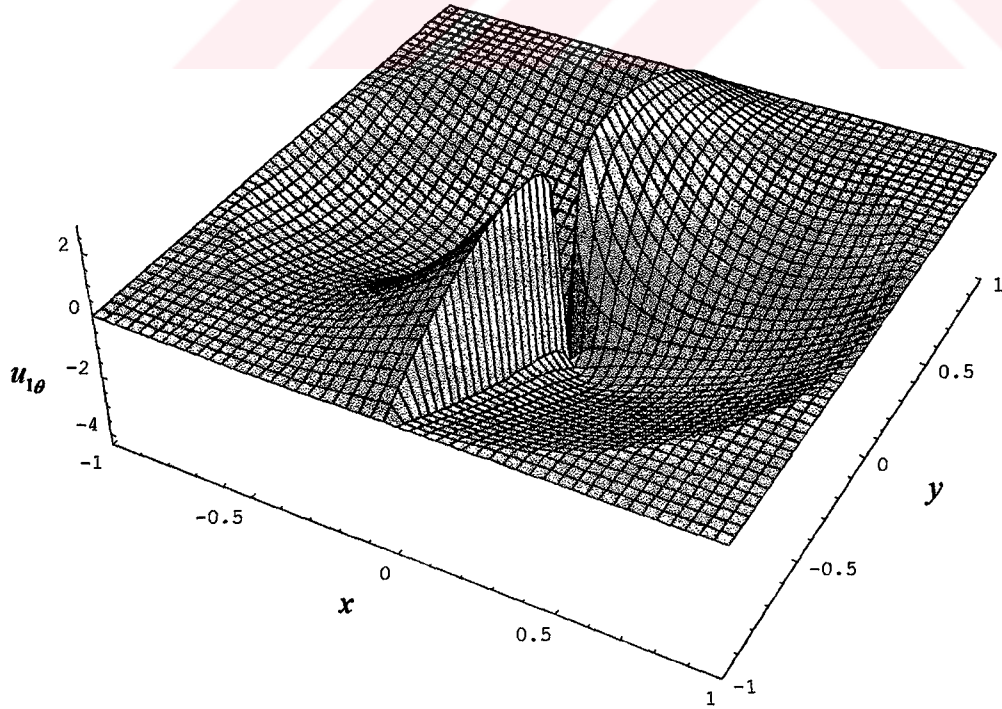
Şekil 4.7.a u_{1r} hız profili $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 0.5$



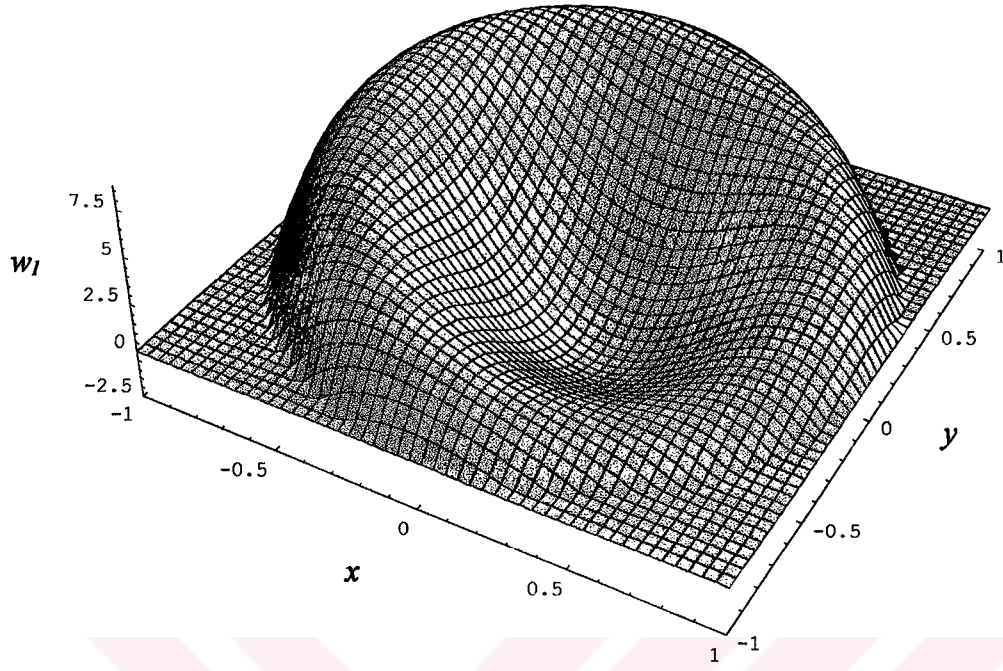
Şekil 4.7.b u_{1r} hız profili $a = 2$, $b = -2$, $c = 0.25$, $d = -0.5$



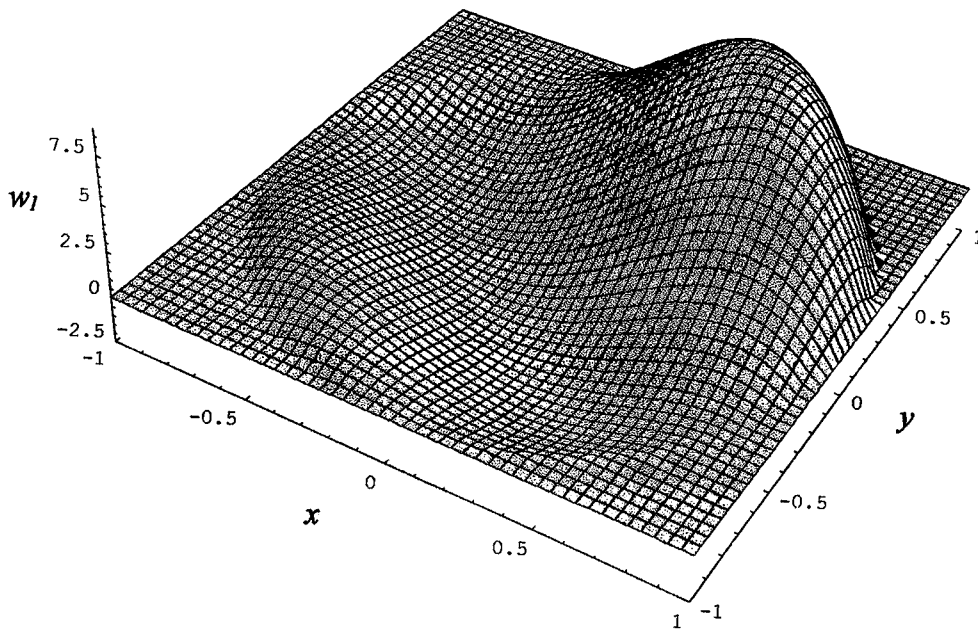
Şekil 4.7.c $u_{1\theta}$ hız profili $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 0.5$



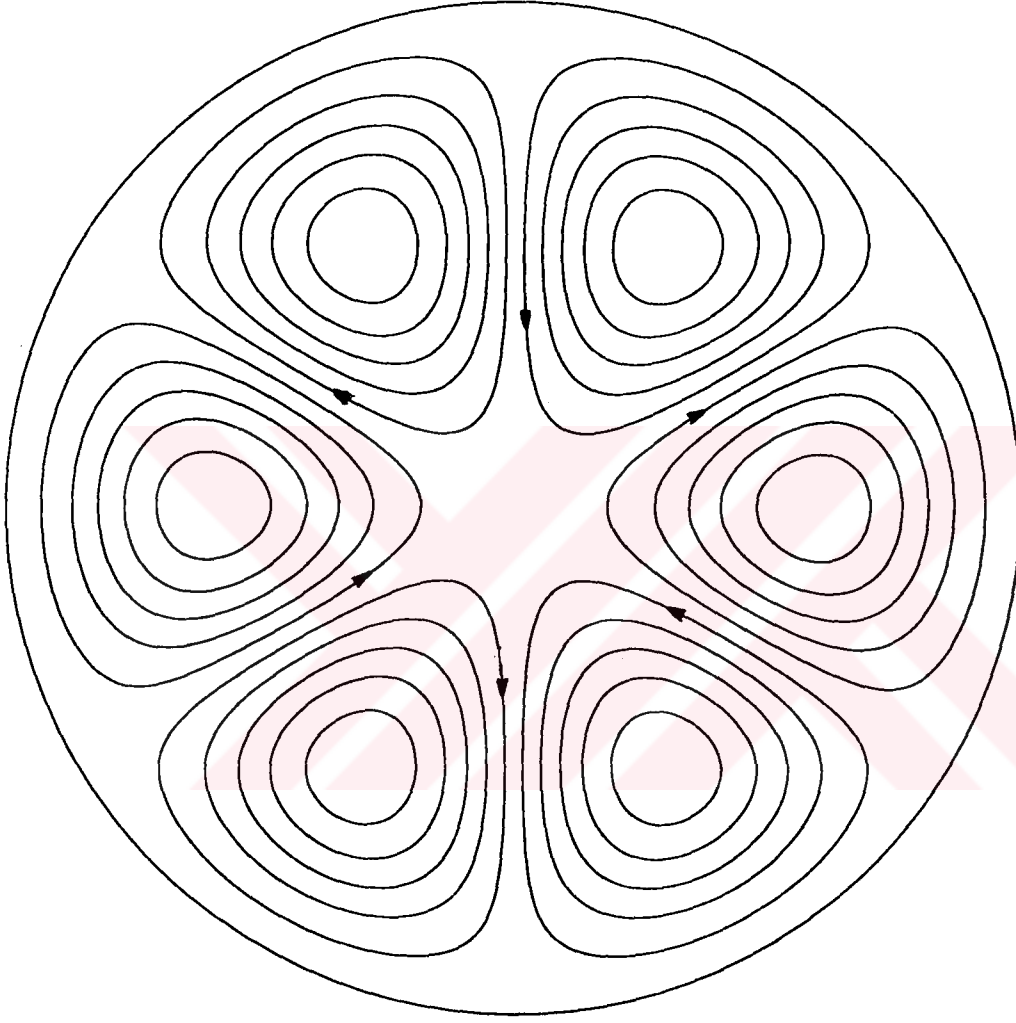
Şekil 4.7.d $u_{1\theta}$ hız profili $a = 2$, $b = -2$, $c = 0.25$, $d = -0.5$



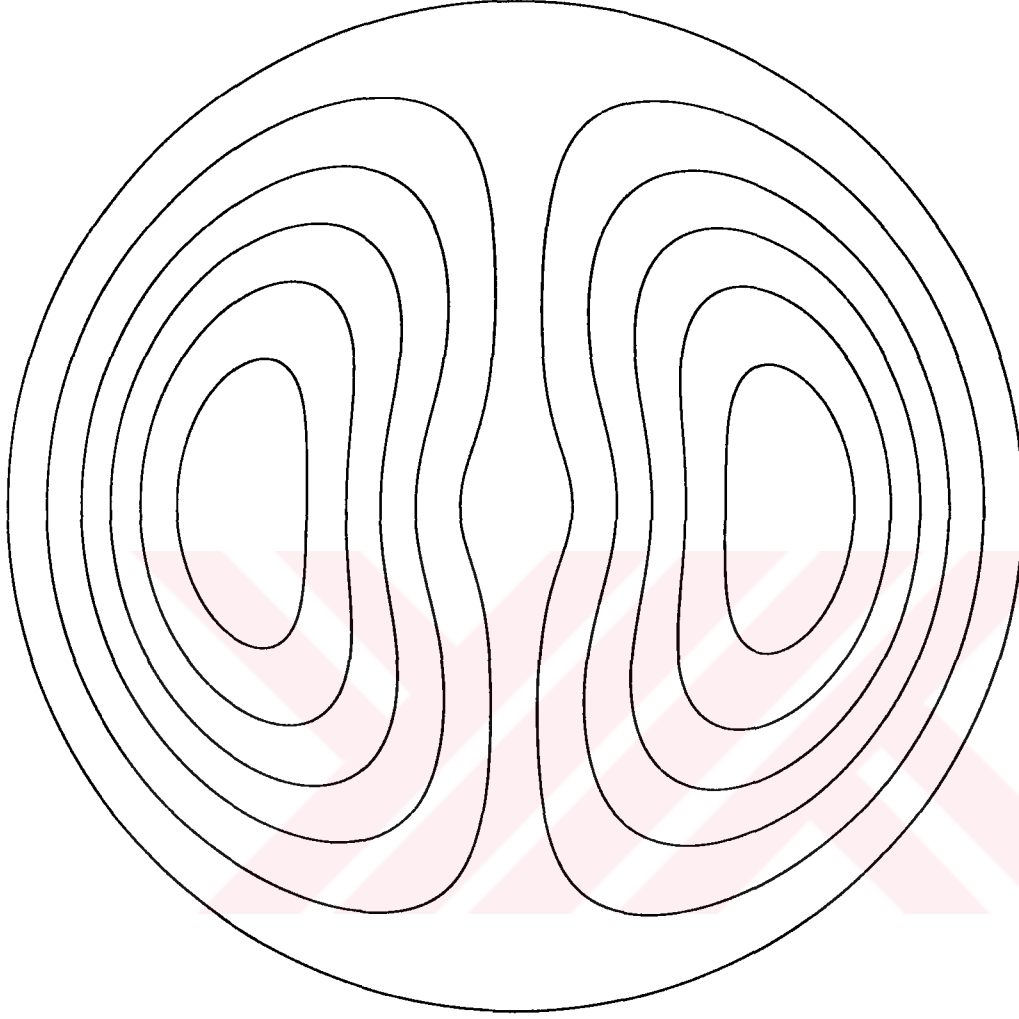
Şekil 4.8.a w_I hız profili $a = 0, b = -1, c = 0.5, d = 4$



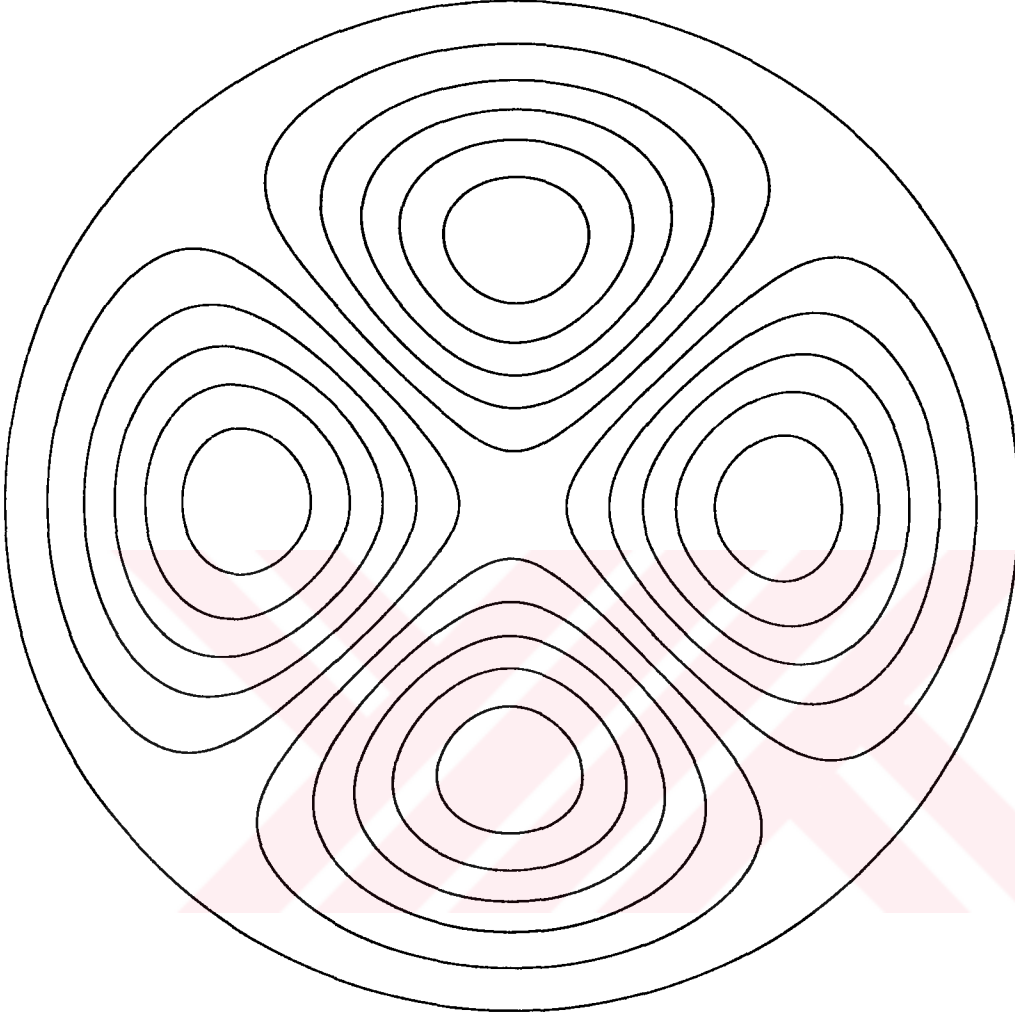
Şekil 4.8.b w_I hız profili $a = 1, b = 1, c = 2, d = 1.6$



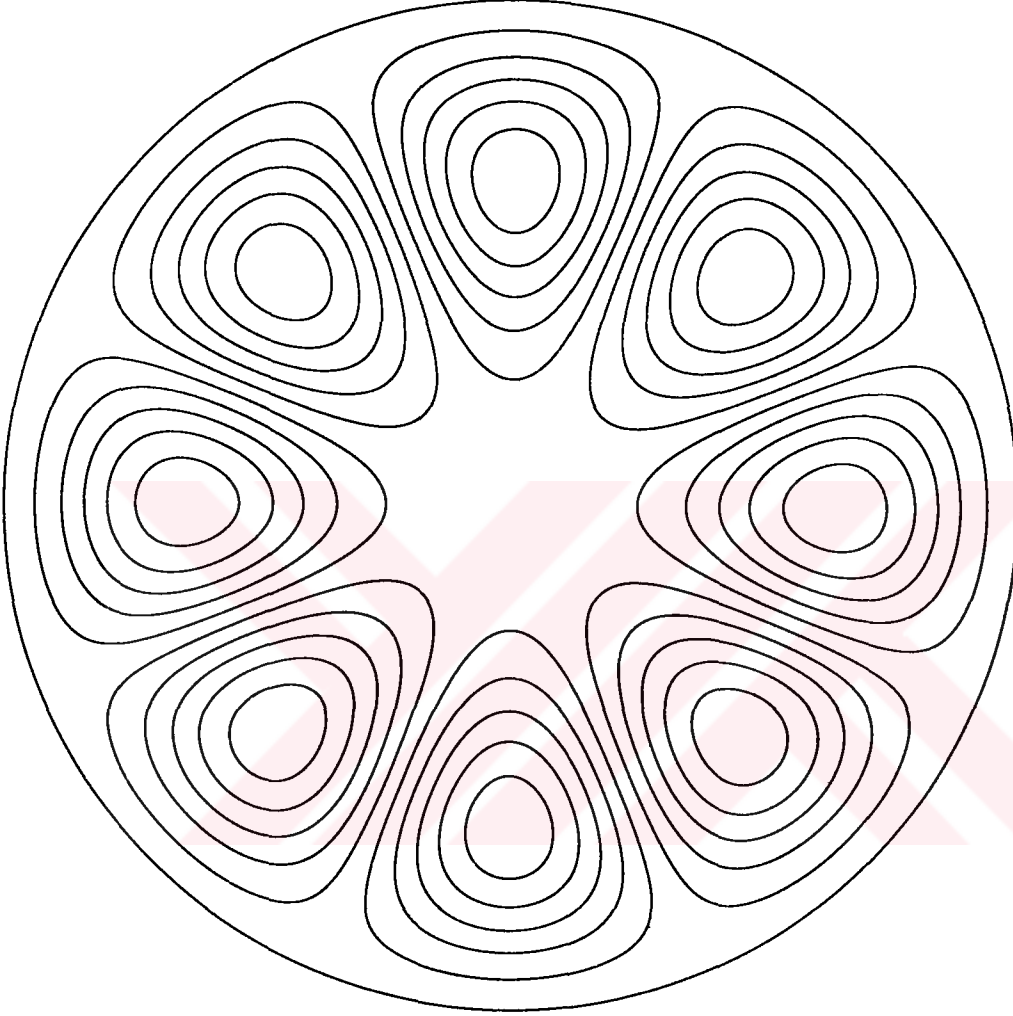
Şekil 5.1 $m=3$, $k=17,01001182792537309334831959$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



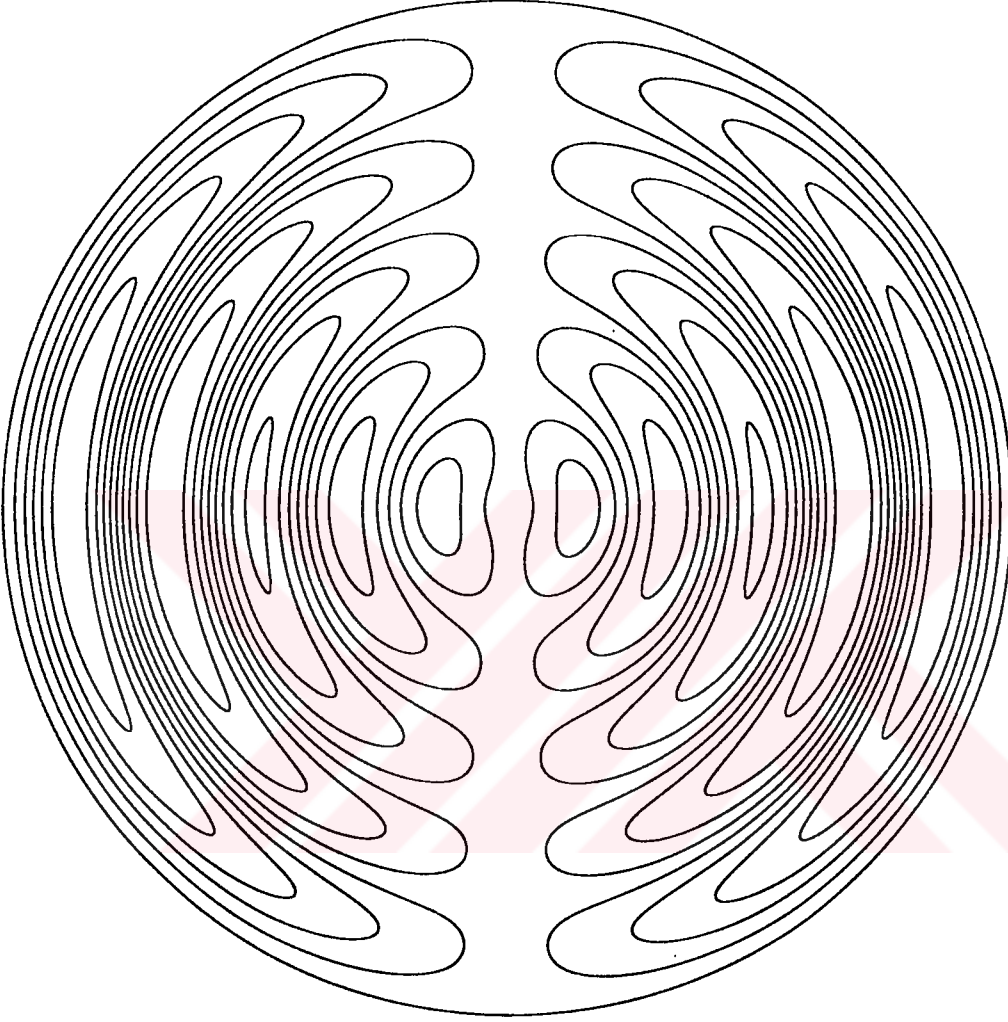
Şekil 5.2 $m=1$, $k=21.260397694611597656792400951$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



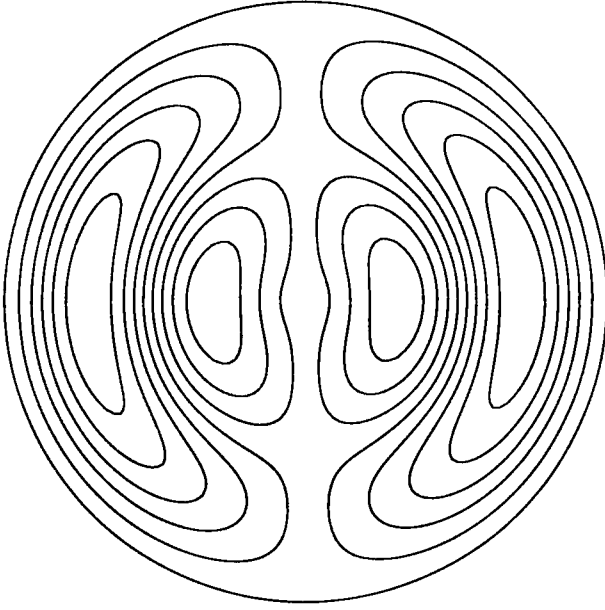
Şekil 5.3 $m=2$, $k= 17.438517710159830430431717725$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



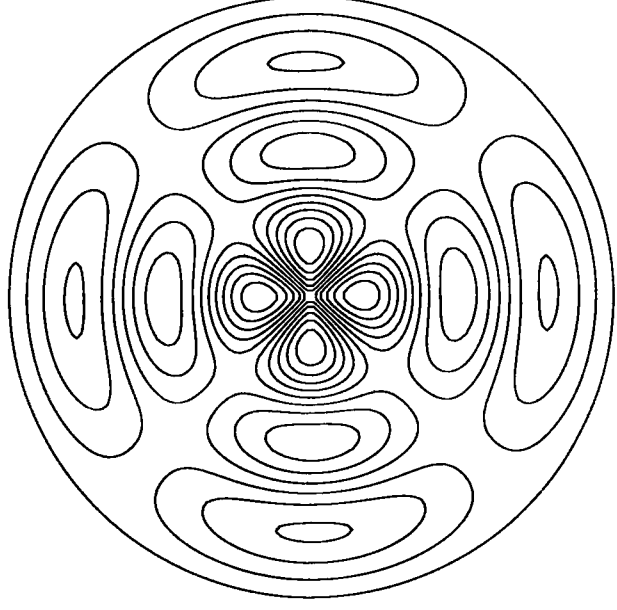
Şekil 5.4 $m=4$, $k= 17.416457674197273534627823121$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



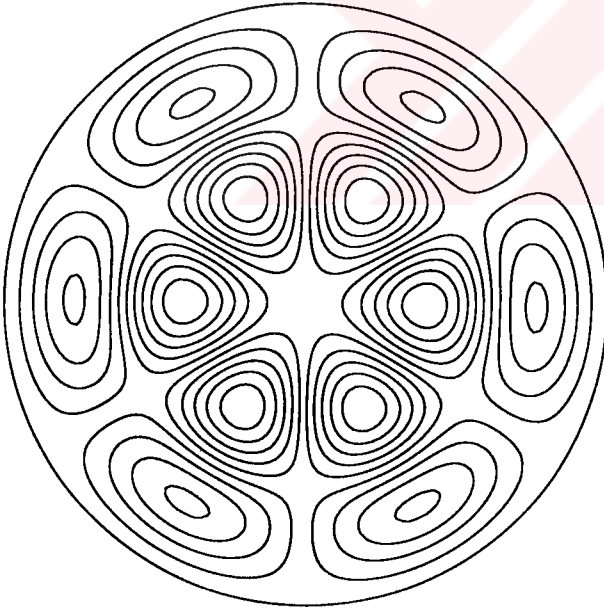
Şekil 5.5 $m=1$, $k= 297.760114605133883921946668784$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



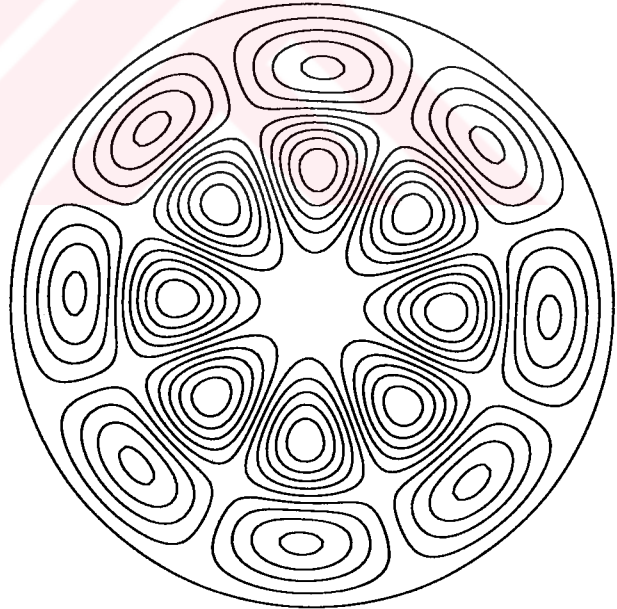
Şekil 5.6 $m=1$, $k= 60.828671820020479445998995094$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



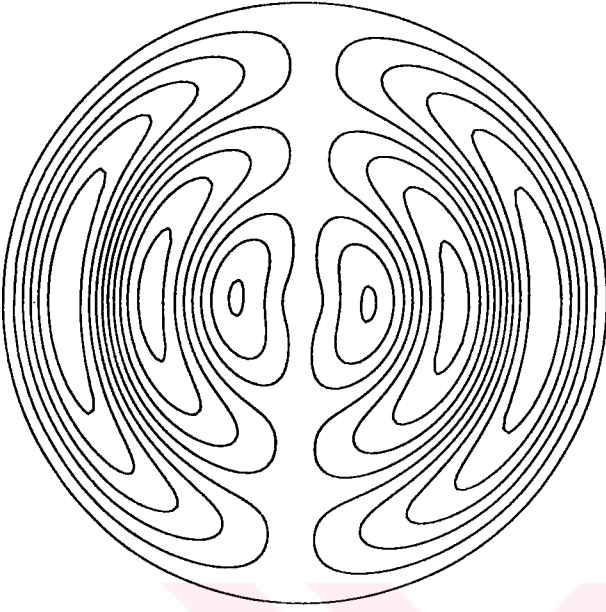
Şekil 5.7 $m=2$, $k= 42.291324775737467622761645039$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



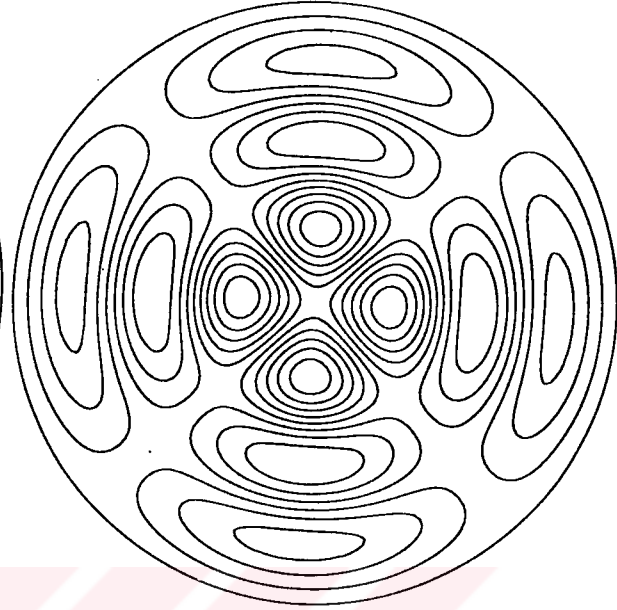
Şekil 5.8 $m=3$, $k= 37.007137292499337984636771436$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



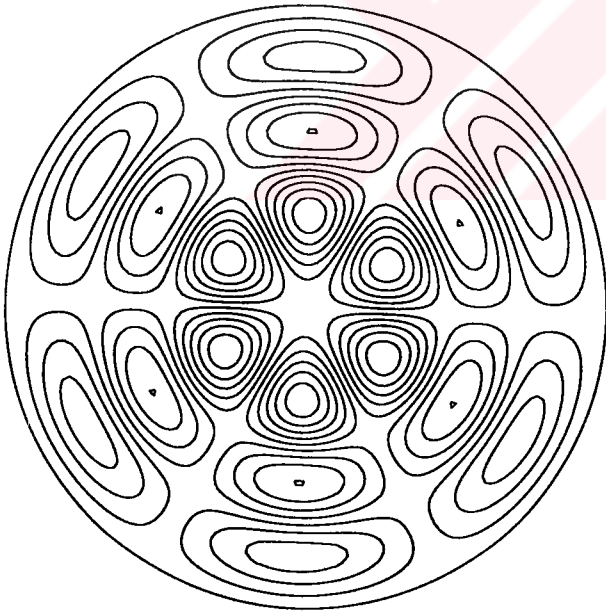
Şekil 5.9 $m=4$, $k= 35.026975956695265937741962470$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



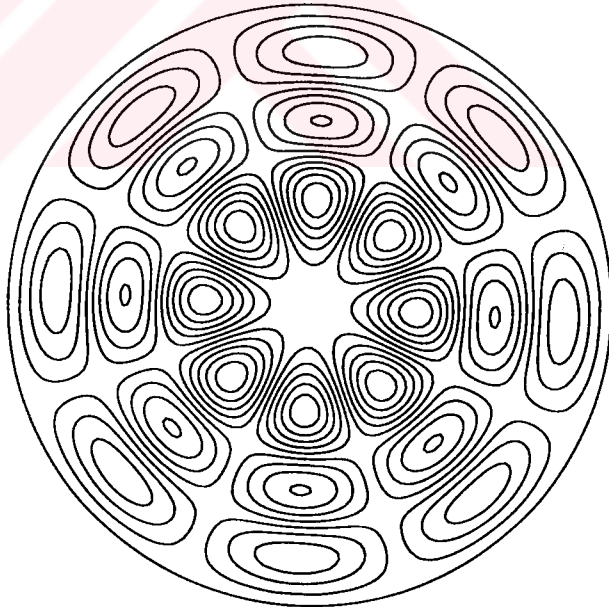
Şekil 5.10 $m=1$, $k = 120.079236582622467912541915670$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



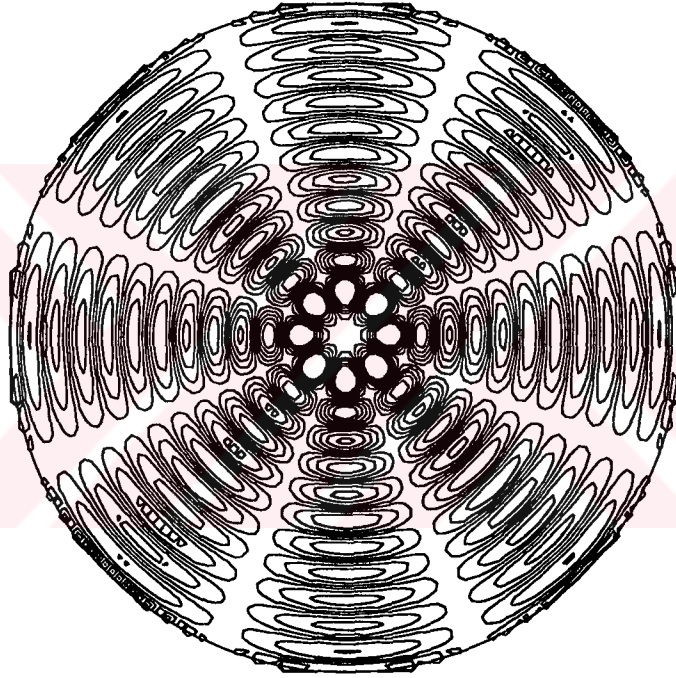
Şekil 5.11 $m=2$, $k = 76.907542455465272207132494112$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



Şekil 5.12 $m=3$, $k = 63.434593190704559819059026963$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



Şekil 5.13 $m=4$, $k = 57.379640977670755237790305024$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri



Şekil 5.14 $m=3$, $k = 511.04402683698077856030137715$ değerleri için Poiseuille akımının stabilite analizinde akım çizgileri

$\frac{m}{k}$	1	2	3	4
1	21.260397694611597656792400951	17.438517710159830430431717725	17.010011827925373099334831959	17.416457674197273534627823121
2	60.828671820020479445998995094	42.291324775737467622761645039	37.007137292499337984636771436	35.026975956695265937741962470
3	120.079236582622467912541915670	76.907542455465272207132494112	63.434593190704559819059026963	57.379640977670755237790305024
4	199.053378551614375744011775490	121.360277550194587641655475674	96.393298063971651300980422635	84.602808619381542547582119678
5	297.760114605133883921946668784	175.667982589201798249626825823	135.909835115697920167309065898	116.731259573348088511461528017
6	416.202633135521258976701313409	239.837526193247453401505870539	181.994343074522742033563683619	153.778504142862144817717403588
7	554.382354973840996312721730338	313.872056607020682774741259269	234.651838370864129212812813222	195.750903024619319328553768156
8	712.300010224155107162388838428	397.773221783250099301372991839	293.883913823654805656122058908	242.651845201309734134681963200
9	889.956012771795472351768614217	491.541968423611603405730905629	359.692911049540283931599435991	294.483301295260665458653937161
10	1087.35061483218234365749440182	595.178879286622143771570585009	432.079421697479487276172654000	351.246494745810670512874498739
11	1304.48397889336104100620584347	708.684332811585308919001152448	511.04402683698077856030137715	412.942224919891460569192097354

Tablo 1: Poiseuille Akımının Stabilité Analizi

KAYNAKLAR

- [1] ASTARIA, G., MARRUCCI, G., Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Mc Graw Hill, (1974)
- [2] BÖHME G, Non Newtonian Fluid Mechanics, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, (1987)
- [3] YALÇINKAYA, G., Newton Tipi Olmayan Akışkanlar için Kullanışlı Modeller, İTÜ Dergisi, C. 46, s. 7-15, (1988)
- [4] ÜNVERDİ, A., Farkı Eksenlerde Aynı Açısal Hız ile Dönen Gözenekli ve Paralel iki Düzlem Levha Arasındaki Rivlin-Ericksen Akışkanının Hareketi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Makina Fakültesi, (1994)
- [5] ŞUHUBİ, E. , Sürekli Ortamlar Mekaniğine Giriş, İTÜ Yayınları, s. 112-121, (1994)
- [6] PAKDEMİRLİ, M., İkinci Derece Akışkanlar için Sınır Tabakası Denklemlerinin Benzerlik Çözümü, Doktora Tezi, İTÜ Makina Fakültesi, (1991)
- [7] RIVLIN, R. S., ERICKSEN, J. L., Stress Deformation Relation for Isotropic materials, Journal Rational Mech. Anal., V. 4, pp. 323-425 , (1955)
- [8] TRUESDELL, C., Noll, W., The Non-linear Field Theories of Mechanics, Flügge's Hand Buch der Physik III/3, Springer Verlag, Berlin, (1965)
- [9] KIM, S., The Motion of Ellipsoids in a Second Order Fluid, Journal of Non-newtonian Fluid Mech., V.21, pp. 255-269, (1986)
- [10] KAZAKIA, J. Y., RIVLIN, R. S., Superposition of Longitudinal an Plane Flows of a Non-Newtonian Fluid between Eccentric Cylinders, Journal of Non-Newtonian Fluid Mech., V.8, pp. 311-317, (1981)
- [11] RAJAGOPAL, K. R., The Flow of a Second Order Fluid between Rotating Paralel Plates, Journal of Non-Newtonian Fluid Mech., V.9, pp. 185-190, (1981)
- [12] KAZAKIA, J. Y., RIVLIN, R. S., The Effect of Longitudial Vibration on Poisseuille Flow in a Non-Circular Pipe, Journal of Non-Newtonian Fluid Mech., V.6, pp. 145-154, (1979)

- [13] SIDDIQUI, A. M., SCHWARZ, W. H., Peristaltic Flow of a Second Order Fluid in Tubes, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mech.*, V.53, pp. 257-284, (1994)
- [14] CHRISTIE, I., RAJAGOPAL, K. R., SZERI, A. Z., Flow of a Non-Newtonian Fluid between Eccentric Rotating Cylinders, *Int. Jour. Eng. Sci.* V.25, N.8, pp. 1029-1047, (1987)
- [15] FOSDICK, R. L., RAJAGOPAL, K. R., Thermodynamics and Stability of Fluids of Third grade, *Proc. R. Soc. London A.*, V.339, pp. 351-377, (1980)
- [16] CHANDRA, O. P., OKU-UKPONG, E. O., Some Solutions of the Equations of a Second Grade Fluid Flow by Von Mises Coordinate Transformations, *Int. Jour. Eng. Sci.*, V.32, N.2, pp. 257-266, (1994)
- [17] PAKDEMİRLİ, M., ŞUHUBİ, E. S., Boundary Layer Theory for Second order Fluids, *Int. Jour. of Eng. Sci.*, V.30, N.4, pp. 523-532, (1992)
- [18] PAKDEMİRLİ, M., ŞUHUBİ, E. S., Similarity Solutions of Boundary Layer Equations for Second Order Fluids, *Int. Jour. of Eng. Sci.*, V.30, N.5, pp. 611-629, (1992)
- [19] DUNN, J. E., RAJAGOPAL, K. R., Fluids of Differential type : Critical Review and Thermodynamic Analysis, *Int. Jour. of Eng. Sci.*, V.33, N.5, pp. 689-729, (1995)
- [20] CRIMINALE, W.D., Jr, ERICKSEN, J.L., FILBEY G.L., Steady Shear Flow of Non-Newtonian Fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, V.1, pp. 410-417, (1958)
- [21] COLEMAN, B. D., NOLL, W., An Approximation Theorem for Functionals with Applications, *Arch. Rational Mech. Anal.*, V.6, pp. 355-370, (1960)
- [22] COLEMAN, B. D., MARKOVITZ, H., Normal Stress Effects in Second Order Fluids, *Jour. Appl. Phys.*, V.35, pp. 1-9 , (1964)
- [23] DUNN, J. E., FOSDICK, R. L., Thermodynamics Stability and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade, *Arch. Rational Mech. Anal.*, V.56, pp. 191-252, (1974)
- [24] TING, T. W., Certain Non-Steady Flows of Second Order Fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, V.14, pp. 1-26, (1963)
- [25] COLEMAN, B. D., DUFFIN, R. J., MIZEL, V., Instability, Uniqueness and Non-Existence Theorems for the Equation $u_t = u_{xx} - u_{xxx}$ on a Strip, *Arch. Rational Mech. Anal.*, V.19, pp. 100-116, (1965)

- [26] FOSDICK, R.L., RAJAGOPAL, K.R., Anomalous Features in the Model of Second Order Fluids, Arch. Rational Mech. Anal., V.70, pp. 145-152, (1979)
- [27] GALDI, G. P., PADULA, M., RAJAGOPAL, K., R., On the Conditional Stability of the Rest State of a Fluid of Second Grade in Unbounded Domains Arch. Rational Mech. Anal., v.109, pp. 173-182 (1990)
- [28] JOSEPH, D. D., Instability of the Rest State of Fluids of Arbitrary Grade Greater Than One Arch. Rational Mech. Anal., V.75, pp. 251-256 (1981)
- [29] SERRIN, J., On the Stability of Viscous Fluid Motion, Arch. Rational Mech. Anal., V.3, pp. 1-13, (1959)
- [30] ŞUHUBİ, E., Akışkanlar Mekaniği, İTÜ Yayınları, (1993)
- [31] RIVLIN, R. S., A Note on Secondary Flow of a Non-Newtonian Fluid in a Non-circular Pipe, Journal of Non-Newtonian. Fluid. Mech., V.1, pp. 391-395, (1976)
- [32] GÜLEKEN, Ö., Cidarları Gözenekli Aynı Eksenli Sabit iki Silindir Arasında Rivlin-Ericksen Akışkanına Ait Çözüm, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Makina Fakültesi, (1974)
- [33] NARASIMHAN, M. N., Laminar Non-Newtonian Flows in an Annulus with Porous Walls, ZAMM, V.41, pp. 45-49, (1961)
- [34] KALONI, P. N., SIDDIQUI, A. M., Flow of a Simple Fluid between Porous Disks, Recent Advances in Non-Newtonian Flows ASME 1992, V.141, pp. 137-145, (1992)
- [35] MANESCHY, C. E., MASSOUDI, M., GHONEIMY, A., Flow of a Third grade Fluid Past an Infinite Porous Plate , Recent Advances in Non-Newtonian Flows ASME 1992, V.141, pp. 145-152, (1992)
- [36] BUGGISH, H., AKSEL, N., An Exact Solution of a Viscoelastic Ekman Layer with Suction, Jour. of Non-Newtonian Fluid Mech., V.36, pp. 351-359, (1990)
- [37] BATCHELOR, G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, pp.87, (1967)
- [38] SOKOLNIKOFF, I. S., Çev. ŞUHUBİ, E. S., Matematik Elastisite Teorisi, Arı Kitabevi Matbaası, pp. 324-327, (1965)

ÖZGEÇMİŞ

Saadet Özer 1969 yılında Ankara'da doğdu. İlk öğrenimini İkbaliye İlkokulunda, ortaöğrenimini Kadıköy Kız Lisesinde tamamladıktan sonra, İTÜ Matematik Mühendisliği bölümünde lisans eğitime başladı. 1994 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mekanik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimi yapmak amacıyla yaptığı başvurusu olumlu karşılanarak bu dalda lisans üstü eğitime başladı. Saadet Özer halen İTÜ Mühendislik Bilimleri Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.



Saadet Özer