

İKİ TABAKALI ELASTİK ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA MODÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Semra AHMETOLAN

Tezin Enstitüye verildiği Tarih : 27 Mayıs 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 1996

Tez danışmanı : Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR

Diğer jüri üyeleri : Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY

: Prof. Dr. Hüsnü ATA ERBAY

Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR
Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY
Prof. Dr. Hüsnü ATA ERBAY

HAZİRAN 1996

ÖNSÖZ

Bu çalışmada desteğini ve yardımlarını esirgemeyerek bana yol gösteren Sayın hocam Prof. Dr. Mevlüt Teymür'e ve öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen bütün hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 1996

Semra AHMETOLAN



İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. İKİ TABAKALI BİR NONLİNEER ELASTİK ORTAMDA	
GENELLEŞTİRİLMİŞ KAYMA (SH) DALGALARI	5
2.1. Genelleştirilmiş Kayma Hareketi	5
2.2. İki Tabakalı Elastik Bir Ortamda SH-Dalgaları	12
BÖLÜM 3. İKİ TABAKALI BİR NONLİNEER ELASTİK ORTAMDA	
DALGALARININ NONLİNEER MODÜLASYONU	15
3.1. Giriş	15
3.2.1. $c_1 < c_2 < c$ İçin Analiz	16
3.2.2. $c_1 < c < c_2$ İçin Analiz	30
3.2.3. $c_1 < c < c_2$ İçin $h_2 \rightarrow \infty$ Limiti ve Bazı Gözlemler	34
3.2.4. NLS Denklemlerinin Bazı Basit Çözümleri ve Γ , Δ	
Katsayılarının Dalga Sayısına Göre Değişimleri	36
SONUÇ	39
KAYNAKLAR	40
EKLER.....	42
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil A.1. Faz ve grup hızlarının kh_1 'e göre değişimleri (birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dallar için). Lineer model parametreleri $\gamma = 2.159$ ve $c_2/c_1 = 1.297$.	42
Şekil A.2. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Her iki tabaka yumuşayan malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(-0.5, -0.5)$, $(-0.5, -2.0)$, $(-2.0, -0.5)$, $(-2.0, -2.0)$ olarak alınmıştır.	43
Şekil A.3. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Her iki tabaka sertleşen malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(0.5, 0.5)$, $(0.5, 2.0)$, $(2.0, 0.5)$, $(2.0, 2.0)$ olarak alınmıştır.	44
Şekil A.4. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Birinci tabaka yumuşayan, ikinci tabaka sertleşen malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(-0.5, 0.5)$, $(-0.5, 2.0)$, $(-2.0, 0.5)$, $(-2.0, 2.0)$ olarak alınmıştır.	45
Şekil A.5. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Birinci tabaka sertleşen, ikinci tabaka yumuşayan malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(0.5, -0.5)$, $(0.5, -2.0)$, $(2.0, -0.5)$, $(2.0, -2.0)$ olarak alınmıştır.	46

ÖZET

Bu çalışmada iki tabakalı bir elastik ortamda nonlinear dalgaların yayılmasını modelleyen bir sınırdeğer probleminin asimptotik çözümü inşaa edilmiştir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde önce elastik dalga yayılması problemlerinin tarihi gelişimi kısaca özetlenmiştir. İkinci bölümde neo-Hookean malzemelerden meydana gelen iki tabakalı bir ortamda genelleştirilmiş kayma dalgalarını yöneten hareket denklemleri ve onlara eşlik eden sınır koşulları verilmiştir. Üçüncü bölümde böyle bir ortamda nonlinear kayma dalgalarının modülasyonu bir singüler pertürbasyon yöntemi yardımı ile incelenmiş ve bu dalgaların self modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bilindiği gibi NLS denkleminin çözümlerinin davranışları, denklemin katsayılarının işaretine kuvvetli olarak bağlıdır. Çözümlerin nonlinearliğe bağlılığını incelemek için, tabakaları meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş, nonlinear sabitler değiştirilerek katsayıların dalga sayısına göre değişimleri elde edilmiştir. Bu sonuçlardan zarf soliton tipi dalgaların varlığının tabakalı yarım uzayın nonlinear yapısına bağlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, c_1 ve c_2 tabakalardaki lineer yayılma hızlarını, c 'de sistemdeki kayma dalgalarının faz hızını göstermek üzere $c_1 < c < c_2$ için bulunan sonuçların, ikinci tabakanın kalınlığı sonsuza götürüldüğünde, daha önce tabakalı bir yarım uzayda Love dalgalarının modülasyonu için bulunan sonuçlara dönüştüğü gösterilmiştir.

NONLINEAR WAVE MODULATION IN A TWO LAYERED ELASTIC MEDIUM

SUMMARY

In this work, we have considered the propagation of small but finite amplitude waves in a plate of uniform thickness which is composed of two layers occupying the regions

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) | 0 \leq X_2 \leq h_1, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (1a)$$

and

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) | -h_2 \leq X_2 \leq 0, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (1b)$$

in the reference frame X_k , $k = 1, 2, 3$; where X_k denotes the material coordinates of a point referred to the rectangular Cartesian system of axes. It is assumed that the layers have different material characteristics and stress and displacements are continuous at the interface $X_2 = 0$ and the boundaries $X_2 = h_1$ and $X_2 = -h_2$ are free of tractions. Then, a shear horizontal (SH) wave described by the equations

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3^\nu(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad \nu = 1, 2 \quad (2)$$

is supposed to propagate along the X_1 -axis in the media. In (2) the supercripts ν refers to the layer P_1 and P_2 respectively; u_3^ν is the displacement of a particle in the X_3 -direction in a layer, x_k are the spatial rectangular coordinates, t is the time and δ_{kK} is the Kronecker symbol. The summation convention on repeated indicies is implied in (2) and in the sequel of this section, and Latin and Greek indices have respective ranges (1,2,3) and (1,2)

Let t_{kl} be the Cauchy stress tensor field accompanying the deformation field (2); in the absence of body forces, the equations of motion in the reference state take the following forms

$$\begin{aligned} t_{11,1}^\nu - u_{3,1}^\nu t_{11,3}^\nu &= 0 \quad , \quad t_{22,2}^\nu - u_{3,2}^\nu t_{22,3}^\nu = 0 \\ t_{13,1}^\nu + t_{23,2}^\nu + t_{33,3}^\nu &= \rho_0^\nu \ddot{u}_3^\nu \end{aligned} \quad (3.a, b, c)$$

where subscripts preceded by a comma indicate partial differentiation with respect to coordinates X_k and an over-dot represents the partial differentiation with respect to t .

When the constituent materials of the media are hyperelastic then there exist strain energy functions Σ^ν characterizing the mechanical properties of the materials. If the material are homogeneous and isotropic then Σ^ν are functions of the principle invariants of the Finger deformation tensor $c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}$.

Here it is assumed that the constituent materials are homogeneous, isotropic and incompressible and their strain energy functions are of the form

$$\Sigma'' = \Sigma''(I'') . \quad (4)$$

Where

$$I'' = \text{tr} \mathbf{c}^{-1} = 3 + u_{3,\Delta}'' u_{3,\Delta}'' . \quad (5)$$

This class of materials is called generalised neo-Hookean and for such a material the stress constitutive equation can be expressed as

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \quad (6)$$

where $p(X_K, t)$ is an arbitrary pressure function, and

$$\Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} > 0 . \quad (7)$$

For the deformation field (2) the component of the Cauchy stress tensor are found to be

$$t_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \quad , \quad t_{33} = (u_{3,1}^2 + u_{3,2}^2)\Phi \quad , \quad p = \Phi \quad (8)$$

Hence it is seen that the first two equations of (3) are satisfied identically, and the third gives

$$\frac{\partial}{\partial X}(\Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial Y}) = \rho_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}(\Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial Y}) = \rho_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} , \quad (10)$$

where

$$X = X_1 \quad , \quad Y = X_2 \quad , \quad Z = X_3 \quad , \quad u = u^1 \quad , \quad v = u^2 . \quad (11)$$

The conditions of vanishing tractions on the free surfaces and continuity of stresses and displacements at the interface yield the following boundary conditions accompanying the equations (9-10);

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad \text{on} \quad Y = h_1 \quad (12)$$

$$u = v \quad \text{and} \quad \Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial Y} = \Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \text{on} \quad Y = 0 \quad (13a, b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad \text{on} \quad Y = -h_2 \quad (14)$$

The problem under consideration is the nonlinear self modulation of a group of waves centered around the wave number k and the frequency ω , i.e., a quasi-monochromatic wave train. The harmonic-resonance phenomenon is excluded. The amplitude of the wave is assumed to be small but finite. Therefore the

problem is investigated by employing the method of multiple scales. Following the usual procedure of the method u and v are expanded in the following asymptotic power series in a small parameter $\epsilon > 0$ which measures the degree of nonlinearity and, at the same time, the narrowness of the side-band width of the carrier wave number centered around a specific wave number;

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$x_i = \epsilon^i X, \quad t_i = \epsilon^i t \quad (16)$$

are the multiple scales introduced to specify the slow variations of the amplitude compared with the phase of the carrier waves, and $y = Y$.

Hence, writing first the equations and boundary conditions (9-14), in terms of the new independent variables (3.9) and collecting the terms of like powers in ϵ yield a hierarchy of equations and boundary conditions from which it is possible to determine u_n and v_n successively. Up to third order in ϵ these are given as follows

$\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_1 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_1 = 0 \quad (17a, b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad (17c)$$

$$u_1 = v_1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (17d, e)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2 \quad (17f)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_1, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_1 \quad (18a, b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad (18c)$$

$$u_2 = v_2 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad \text{on } y = 0, \quad (18d, e)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2 \quad (18f)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_2 + \mathcal{L}_2^{(1)} u_1 + n_1 \mathcal{N}_0(u_1) \quad (19a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)}v_3 = \mathcal{L}_1^{(2)}v_2 + \mathcal{L}_2^{(2)}v_1 + n_2\mathcal{N}_0(v_1) \quad (19b)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad (19c)$$

$$u_3 = v_3 \quad \text{and}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(u_1) \quad \text{on } y = 0 \quad (19d, e)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2 \quad (19f)$$

where $\mathcal{L}_0^{(1)}, \mathcal{L}_0^{(2)}, \dots, \mathcal{L}_2^{(2)}$ are linear and $\mathcal{Q}_0$ ve $\mathcal{N}_0$ are nonlinear differential operators defined respectively as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(\nu)}\psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad \nu = 1, 2 \\ \mathcal{L}_1^{(\nu)}\psi &= -2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} - c_\nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} \right], \\ \mathcal{L}_2^{(\nu)}\psi &= - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} - c_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \right], \\ \mathcal{Q}_0(\psi) &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \\ \mathcal{N}_0(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \mathcal{Q}_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathcal{Q}_0(\psi) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Here c_ν , $\nu = 1, 2$ are the velocities of shear waves, and n_ν are nonlinear material parameters of the layers and they are defined as;

$$c_\nu^2 = \mu_\nu / \rho_0^\nu, \quad n_\nu = 2\Sigma^{(\nu)''}(3) / \rho_0^\nu \quad (21)$$

and

$$\mu_\nu = \Phi^\nu(3), \quad \gamma = \mu_2 / \mu_1, \quad \beta_\nu = n_\nu / c_\nu^2 \quad (22)$$

Note that, as usual in these types of asymptotic analysis, the problems at each step are linear. Moreover the first order problem is simply the classic linear wave problem. Accordingly we take the solutions of (17a,b), for $c_1 < c_2 < c$, as;

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \{ A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \} e^{il\phi} + c.c. \quad (23a)$$

$$v_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \} e^{il\phi} + c.c. \quad (23b)$$

where

$$\phi = kx_0 - \omega t_0, \quad p_\nu = (c^2 / c_\nu^2 - 1)^{1/2} \quad (24)$$

and $A_1^{(l)}$, $B_1^{(l)}$, $C_1^{(l)}$ and $D_1^{(l)}$ are functions of slow scales (x_1, x_2, t_1, t_2) , k is the wave number, ω is the angular frequency, $c = \omega/k$ is the phase velocity and c.c. denotes the complex conjugate to the preceding terms. Then the substitution of (23a,b) into the boundary conditions (17c-f) yields

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = 0 \quad (25)$$

where

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = [A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}]^T \quad (26)$$

and

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} ilkp_1 e^{ilkp_1 h_1} & -ilkp_1 e^{-ilkp_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ilkp_2 e^{-ilkp_2 h_2} & -ilkp_2 e^{ilkp_2 h_2} \\ ilkp_1 & -ilkp_1 & -i\gamma lkp_2 & i\gamma lkp_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Note that $\det \mathbf{W}_1 = 0$ gives the dispersion relation of the linear waves, i.e.

$$p_1 \tan(kh_1 p_1) + \gamma p_2 \tan(kh_2 p_2) = 0. \quad (28)$$

Since the harmonic resonance phenomena is excluded in the analysis then for $l \geq 2$

$$\det \mathbf{W}_l \neq 0 \quad (29)$$

Hence the solutions of the homogenous algebraic equations (30) are found to be

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad \mathbf{U}_1^{(l)} \equiv 0 \text{ for } l \geq 2 \quad (30)$$

where $\mathcal{A}_1$ is a complex function representing the first order slowly varying amplitude of the wave modulation, to be determined in higher order perturbation problems, and $\mathbf{R}$ is a column vector satisfying

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = 0. \quad (31)$$

The solutions u_2 and v_2 of the second order problem can be sought as

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2, \quad v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2 \quad (32)$$

where $\bar{u}_2$ and $\bar{v}_2$ are the particular solutions of nonhomogeneous differential equations (18a,b) while $\tilde{u}_2$ and $\tilde{v}_2$ are the solutions of the homogeneous equations

$$\mathcal{L}_0^{(2)} \tilde{u}_2 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} \tilde{v}_2 = 0 \quad (33)$$

satisfying the following nonhomogeneous boundary conditions defined from (18c-f) by considering the decompositions (32);

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \quad \text{on} \quad y = h_1, \quad (34a)$$

$$\tilde{u}_2 - \tilde{v}_2 = -(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) \quad \text{and} \quad (34b)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y}\right) \quad \text{on } y = 0, \quad (34c)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \quad \text{on } y = -h_2. \quad (34d)$$

The solutions $\bar{u}_2$ and $\bar{v}_2$ are found by using the method of undetermined coefficients. For $\tilde{u}_2$ and $\tilde{v}_2$ as in the first order problem we let

$$\tilde{u}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [A_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (35a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (35b)$$

Then the use of (35) together with the solutions $\bar{u}_2$ and $\bar{v}_2$ in (34a-d) yields

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)} \quad (36)$$

where

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R}, \quad \mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad \text{for } l \neq 1. \quad (37)$$

Since $\det \mathbf{W}_1 = 0$ and $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ in order that the equation (36) is algebraically solvable for $\mathbf{U}_2^{(1)}$ the compatibility condition

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \quad (38)$$

must be satisfied where $\mathbf{L}$ is a row vector defined by

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0}. \quad (39)$$

The condition (38) leads to the result

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0, \quad V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (40)$$

and then $\mathbf{U}_2^{(1)}$ is found to be

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2 \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (41)$$

where $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ is a complex function representing the second order slowly varying amplitude of the wave modulation, and it can be determined from higher-order perturbation problems. But, since this work is centered around the weakly nonlinear waves the aim is here to obtain just the uniformly valid first-order solution. Therefore it is sufficient to obtain $\mathcal{A}_1$, and this will be done at the third order. (40) only implies that the amplitude

remains constant in a frame of reference moving with the group velocity V_g of waves. That is,

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (42)$$

Note that, for $l \geq 2$ since it is assumed that $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ for $l \neq 1$ and since $\mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ for $l \neq 1$, then

$$\mathbf{U}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad \text{for } l \geq 2 \quad (43)$$

Thus the solution of the second order perturbation problem is completed.

The solutions of the third order problem can be decomposed as in the second order, i.e.

$$u_3 = \tilde{u}_3 + \bar{u}_3 \quad \text{ve} \quad v_3 = \tilde{v}_3 + \bar{v}_3 \quad (44)$$

The particular solutions of the nonhomogeneous differential equations (19a,b) are found by the method of undetermined coefficients. For $\tilde{u}_3$ and $\tilde{v}_3$ as in the previous case we let

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \right] e^{i\phi} + c.c. \\ \tilde{v}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \right] e^{i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (45a, b)$$

Then the boundary conditions (19c-d) yield:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)} \quad (46)$$

where $\mathbf{b}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ for all $l \neq 1, 3$, $\mathbf{b}_3^{(3)} \neq \mathbf{0}$ and $\mathbf{b}_3^{(1)}$ is defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} &= -i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{R} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \end{aligned} \quad (47)$$

Here $\mathbf{F}$ is a constant vector. The explicit form of the vector $\mathbf{b}_3^{(3)}$ is not given, since in the sequel it will not be required.

For $l = 1$, in order that (3.38) is algebraically solvable for $\mathbf{U}_3^{(1)}$ the compatibility condition

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \quad (48)$$

must be satisfied. If we assume that $\mathcal{A}_2$ depends on x_1 and t_1 through the combination $x_1 - V_g t_1$ as $\mathcal{A}_1$ then the compatibility condition yields the following equation for $\mathcal{A}_1$;

$$i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0 \quad (49)$$

where

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \quad , \quad \tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right). \quad (50)$$

By defining the following non-dimensional variables and constants

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t_2 \quad , \quad \xi = k\epsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1) \\ \mathcal{A} &= k\mathcal{A}_1 \quad , \quad \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega \quad , \quad \Delta = \tilde{\Delta} / \omega k^2. \end{aligned} \quad (51)$$

(49) can be written in the standard NLS equation form as

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 \quad . \quad (52)$$

Thus our task is completed, since a solution for $\mathcal{A}$ is derived from (52) for a given initial value of the form

$$\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi) \quad (53)$$

then the first-order solutions u_1 and v_1 can be constructed by (23). Note that the initial value for $\mathcal{A}$ is related to the initial values of displacements in the layers via (23).

The analysis is also carried out for the case in which $c_1 < c < c_2$. The nonlinear modulation of the waves is also governed by a NLS equation whose coefficients Γ and Δ are different from the ones given in (50). It is also observed that in the limit $h_2/h_1 \rightarrow \infty$ the NLS equation obtained here recovers the result for the nonlinear modulation of Love waves.

It is well known that the criterion whether $\Gamma\Delta > 0$ or $\Gamma\Delta < 0$ is important in determining how a given initial data will evolve for long times for the asymptotic wave field governed by the NLS equation. An initial disturbance vanishing as $|\xi| \rightarrow \infty$ tends to become a series of envelope solitary waves if $\Gamma\Delta > 0$, while it evolves into the decaying oscillations if $\Gamma\Delta < 0$. As the properties of solutions strongly depend on the sign of the product $\Gamma\Delta$, the variation of it with the nondimensional wave number kh_1 is evaluated for the lowest branch of the dispersion relation giving appropriate values to the material constants. As a result of the numerical evaluation of $\Gamma\Delta$ for fixed linear material properties, it is observed that the envelope solitary waves may exist depending on the nonlinear constitution of the layered media.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Elastik dalgaların yayılması ile ilgili çalışmaların orijinini ışığın tabiatının açıklanması ile ilgili araştırmalar oluşturmaktadır. 19. yüzyılın ortalarında ışığın elastik bir ortamda (aether) yayılan bir uyarı (disturbance) olduğu düşünülmüştü. Fresnel (1816) ve Thomas Young (1817)'in dencysel araştırmaları, birbirine dik iki düzlemde polarize olmuş iki ışık demetinin birbirleri ile girişim yapmadıklarını göstermiştir. Bu sonuçlardan hareketle Fresnel bu olayın yalnızca enine dalgalarla (yayılma doğrultusuna dik yönde yerdeğiştirmeye sahip dalgalar) açıklanabileceğini ileri sürdü. Fresnel'in bu açıklaması elastisite ile ilgili çalışmalara güçlü bir ivme verdi ve o zamanın büyük matematikçilerinden Cauchy ve Poisson'un konuya ilgi duymalarını sağladı [1]. 1822 senesinin sonlarına doğru Cauchy klasik elastisite teorisinin temellerini kurdu ve hareketin gerilme ve yer değiştirme denklemlerini buldu. Daha sonra Poisson 1829 senesinde sonsuz bir ortamda bir elastik yayılmanın genel olarak boyuna (sıkışma) ve enine (kayma) dalgaların bir birleşimi olduğunu farketti [1]. Poisson, hareketi betimleyen yerdeğiştirme denklemlerinin yeteri kadar düzgün çözümlerinin biri bir skaler potansiyelin gradyanı olan diğeri de bir solenoidal alanı temsil eden iki yerdeğiştirme bileşeni ile temsil edilebileceğini ve potansiyel fonksiyon ve solenoidal yer değiştirme alanının yayılma hızları sırası ile boyuna ve enine dalga hızları olan dalga denklemlerini sağladıklarını gösterdi. Daha sonra Poisson'un bu çalışması 1852 senesinde Lame tarafından tamamlanmış ve genel bir elastodinamik yerdeğiştirme alanının her biri bir dalga denklemini sağlayan bir skaler potansiyelin gradyanı ile bir vektör potansiyelin rotasyonelinin toplamı olarak temsil edilebileceği gösterilmiştir [1,2].

Elastik dalgalar üzerinde yapılan çalışmalar devam etmiş ve Stokes 1849'-da sınırsız homojen izotrop elastik bir lineer ortamda Poisson'un sonuçlarını türetmiştir [1,2]. Bu tarihlerde Cauchy (1830) ve Green (1839) düzlem dalgaların kristal yapıya sahip ortamlarda yayılmalarını incelemişlerdir. Stokes

ve daha sonra Love 1903'de tekil kuvvetlerin oluşturduğu elastik dalgalara ait çözümleri incelemişlerdir. Sınırsız bir elastik ortamın bir noktasına ani olarak etkiyen kuvvetlerin oluşturduğu yerdeğiştirmeleri temsil eden temel singüler çözümler ilk defa Stokes tarafından türetilmiştir. Daha sonra Love geekmiş (retarded) potansiyelleri kullanarak zamana bağlı nokta yük problemini çözmüştür [1,2]. Ayrıca Love 1882'de Kirchhoff tarafından skaler inhomojen dalga denkleminin çözümleri için geliştirilen integral gösterilimini elastodinamik için genelleştirmiştir [2]. Bu tarihlerde ışığın tabiatı belirlenmiş ve buna bağlı olarak elektromagnetik teori gelişmiş bulunmakta idi. Bu nedenle elastik dalgaların yayılmasını incelemek ayrı bir matematiksel fizik dalı olarak devam etmiş ve daha sonra da konu değişik alanlardaki gelişmelerden etkilenmeye başlamıştır. Bu alanlardan 4azıları sismoloji, malzemelerin tahribatsız muayenesi, elektronik sinyal işleme cihazları teknolojisi olarak belirtilebilir [3,4,5,6].

1887'de Rayleigh, bir homojen izotrop elastik yarım-uzayın serbest yüzünde yayılan, yerdeğiştirme vektörü yüzeyin normal vektörü ile yayılma doğrultusunun oluşturduğu düzlemde uzanan yüzey dalgalarının var olduğu matematiksel olarak ortaya çıkarmıştır [2,3,6,7]. Daha sonraki tarihlerde depremlerin sismografik kayıtları yapılmaya başlanınca Rayleigh ve Stokes'un teorik incelemelerinin sonuçlarının gösterdiği gibi yerdeğiştirmelerin esas olarak boyuna, enine ve Rayleigh yüzey dalgalarına karşı gelen üç parçadan oluştuğu gözlemlenmiştir [3].

Boyuna, enine ve Rayleigh yüzey dalgaları hareketlerinde dalgaların faz hızları sabittir, yani dalgalar dispersif değildirler. Diğer taraftan gene homojen elastik malzemelerden meydana gelen çubuk, plak, farklı malzemelerden oluşan tabakalı yarım-uzay gibi, dalga kılavuzları olarak da adlandırılan, ortamlarda yayılan dalgalar sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların etkisi ile dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişirler. Her iki tipten lineer elastik dalgalar ile ilgili çeşitli problemler yukarıda belirtilen uygulama alanlarının da etkisi ile 19. yüzyıl ortalarından günümüze kadar pek çok incelemenin konusunu oluşturmuşlar ve bu günde oluşurmaya devam

etmektedirler [2,6,7].

Elastik dalgaların yayılmasına bünyesel nonlinearliğin etkilerinin incelenmesi de bugünkü tarihten aşağı yukarı elli sene öncesinden başlamıştır. İlk çalışmalar daha çok sonsuz ortamlarda ivme ve şok dalgalarının yayılması ile ilgilidirler [8,9,10]. Daha sonra bunların yanında çubuk, plaka v.s. gibi sınırlanmış ortamlarda sonlu statik yerdeğiştirmelerden sonra oluşan sonsuz küçük yerdeğiştirmelere sahip problemler ele alınmıştır. Bu problemler sonuçta lineer kısmi türevli denklemlerle modellenirler, fakat nonlinearliğin etkileri bu denklemlerin katsayı fonksiyonlarında ortaya çıkmaktadırlar. Böylece nonlinear zamandan bağımsız şekil değiştirmelerin, dolayısı ile bünyenin nonlinear karakteristiklerinin lineer yayılma olayına etkilerinin gözlemlenmesine çalışılmıştır [10].

Son zamanlarda yukarıda bahsedilen türden çalışmaların yanında önceleri akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, hidrodinamik v.s. de oldukça yaygın olarak kullanılan asimptotik yöntemler kullanılarak, dalga yayılması olaylarında dispersiyonun ortaya çıkmasına neden olan sınırlara sahip nonlinear elastik ortamlarda çeşitli tipten problemler incelenmiştir [11-22].

Bu çalışmada farklı iki elastik malzemeden yapılmış uniform kalınlığa sahip iki tabakalı bir ortamda sonlu genlikli nonlinear kayma (SII) dalgalarının yayılması ele alınmıştır. Bu tip bir ortamda sonlu genlikli uzun dalgaların yayılması daha önce [22]'de incelenmiştir. Burada problemi matematiksel olarak modelleyen bir nonlinear sınır değer probleminin asimptotik çözümü inşaa edilmiştir. Asimptotik analizde zayıf nonlinearlik ile dispersiyon, uzun dalga limitinde dengelenerek, asimptotik dalga alanının bir modifiye Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra bu denklemin kararlı (steady-state) çözümleri üzerinden ortamın geometrik ve bünyesel özelliklerine bağlı olarak soliton tipi çözümlerin varlığı tartışılmıştır.

Bu çalışmada ise aynı sınır değer probleminin nonlinear dalga modülasyonu için asimptotik analizi yapılmıştır. Analizde zayıf nonlinearlikle dispersiyon dengelenerek, dalga modülasyonunun bir nonlinear Schrödinger (NLS)

denklemleri ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bilindiği gibi NLS denkleminin çözümlerinin davranışı, denklemin katsayı fonksiyonlarının çarpımlarının işaretine bağlıdır [23-24]. Bu nedenle ele alınan problemin asimptotik çözümlerinin nonlineerliğe bağlılığını incelemek için tabakaları meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş, nonlineer bünyesel sabitler değiştirilerek denklemin katsayılarının dalga sayısına göre değişimleri elde edilmiştir. Bu sonuçlardan soliton tipi dalgaların varlığının nonlineer özelliklere bağlı olduğu gözlemlenmiştir.



BÖLÜM 2. İKİ TABAKALI BİR NONLİNEER ELASTİK ORTAMDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KAYMA SH DALGALARI

2.1. Genelleştirilmiş Kayma Hareketi

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterilmek üzere

$$x_k = X_k \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad (2.1)$$

denklemini ile belirtilen bir şekil değiştirme genelleştirilmiş kayma hareketi olarak adlandırılır [25]. (2.1) denkleminde u_3 bir parçacığın X_3 eksenini doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu, t zamanı, δ_{kK} da Kronecker sembolünü göstermektedir. Latin indislerinin (1,2,3), Yunan indislerinin ise (1,2) değerlerini alacaklarını ve (2.2)'de ve bu bölümde bundan sonra tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağını kabul ediyoruz.

(2.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları

$$[x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

olarak bulunur. (2.2)'de virgülden sonraki bir alt indis bunun belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. Dikkat edilirse

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \quad (2.3)$$

dir. Dolayısıyla (2.1) ile belirtilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirme hareketidir, yani bu hareket esnasında hacim değişimi olmaz. Buna

bağlı olarak böyle bir hareketin meydana geldiği ortamın yoğunluğu, ρ , değişmez; yani

$$\rho = \rho_0 = \text{sabit} \quad (2.4)$$

dir.

Şimdi ortamın sıkışmaz homojen izotrop hiperelastik bir cisim olduğunu ve şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun, Finger şekil değiştirme tansörü

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (2.5)$$

'nin yalnızca birinci invaryantı

$$I = \text{tr} \mathbf{c}^{-1} = 3 + K^2, \quad K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \quad (2.6)$$

'nın fonksiyonu olduğunu kabul edelim, yani

$$\Sigma = \Sigma(I) \quad (2.7)$$

olsun. Böyle malzemelere genelleştirilmiş neo-Hookean malzemeler denir ve bunlar için gerilme bünye denklemleri, t_{kl} Cauchy gerilme tansörünü göstermek üzere,

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \quad (2.8)$$

olarak ifade edilirler [22]. (2.8)'de $p = p(X_K, t)$ hidrostatik basınç fonksiyonudur ve harekete bağlı olarak hesaplanır. Φ ise

$$\Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır.

(2.1) için c_{kl}^{-1} tansörünün bileşenleri (2.2) kullanılarak

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 1 & u_{3,2} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + K^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

olarak bulunurlar. Bu sonuçlar (2.8)'de yerleştirilirse gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= -p + \Phi, \quad t_{12} = t_{21} = 0, \quad t_{\alpha 3} = t_{3\alpha} = \Phi u_{3,\alpha} \\ t_{33} &= -p + (1 + K^2)\Phi, \quad t_{22} = -p + \Phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak elde edilirler. Eğer

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \quad (2.12)$$

bağıntısı ile bir kayma gerilmesi tanımlanırsa (2.11)'den

$$\tau = \Phi K \quad (2.13)$$

yazılır. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için, K'nın katsayısı olan Φ ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak adlandırılabilir. Bu modülü

$$\hat{\mu} = \Phi \quad (2.14)$$

ile gösterelim. (2.6) kullanılırsa

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \frac{d\Sigma}{dK} \quad (2.15)$$

ve

$$\tau = \hat{\mu} K = \frac{d\Sigma}{dK} \quad (2.16)$$

yazılabilir. Bütün K'lar için

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \frac{d\Sigma}{dK} > 0 \quad (2.17)$$

olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca, μ klasik Láme sabiti olmak üzere

$$\hat{\mu}(0) = \mu \quad (2.18)$$

dir.

Eğer bütün K'lar için

$$\frac{d\hat{\mu}}{dK} < 0 \quad (2.19)$$

ise ortam kaymada uniform olarak yumuşama (softening in shear), fakat eğer bütün K'lar için

$$\frac{d\hat{\mu}}{dK} > 0 \quad (2.20)$$

ise kaymada uniform olarak sertleşme (hardening in shear) davranışı gösterir.

(2.16) türetilerek

$$K^2 \frac{d\hat{\mu}}{dK} = K \frac{d\tau}{dK} - \tau \quad (2.21)$$

yazılabileceği için yumuşayan malzemeler için

$$K \frac{d\tau}{dK} < \tau \quad (2.22)$$

sertleşen malzemeler için ise

$$K \frac{d\tau}{dK} > \tau \quad (2.23)$$

olacağı ortaya çıkar.

Şimdi p basınç fonksiyonunun genel olarak X_1 ve X_2 'nin yanında X_3 'ün de fonksiyonu olacağını dikkate alarak, (2.1) ile tanımlanan hareketin denklemlerini, hareketi etkileyen kütle kuvvetleri bulunmadığında, referans konumunda

$$t_{11,1} - u_{3,1}t_{11,3} = 0 \quad , \quad t_{22,2} - u_{3,2}t_{22,3} = 0$$

$$t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (2.24)$$

olarak yazabiliriz [22]. (2.24)'de u_3 'ün üzerindeki noktalar zamana göre kısmi türevleri göstermektedir. (2.11) kullanılarak bu denklemler bazı ara işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} (-p + \Phi)_{,1} + u_{3,1}p_{,3} &= 0 \\ (-p + \Phi)_{,2} + u_{3,2}p_{,3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} - \rho_0 \ddot{u}_3 = p_{,3}$$

formlarına indirgenirler. (2.25)'deki son denklemden

$$p_{,3} = \kappa_0(X_1, X_2, t) \quad (2.26)$$

olduğu görülür. Bu denklem integre edilirse

$$p = \kappa_0(X_1, X_2, t)X_3 + \kappa_1(X_1, X_2, t) \quad (2.27)$$

elde edilir. Burada κ_0 ve κ_1 keyfi fonksiyonlardır. (2.27), (2.25)'deki ilk iki denklemde kullanılırsa

$$\kappa_{0,1} = 0 \quad , \quad \kappa_{0,2} = 0 \quad (2.28)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Buradan da f keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\kappa_0 = f(t) \quad (2.29)$$

olarak bulunur. Bu sonuç dikkate alınırsa (2.25)'deki ilk iki denklem

$$-\kappa_{1,1} + u_{3,1}f(t) + \Phi_{,1} = 0 \quad , \quad -\kappa_{1,2} + u_{3,2}f(t) + \Phi_{,2} = 0 \quad (2.30)$$

formlarına dönüşürler. Bu son denklemler integre edilerek, g keyfi bir fonksiyon olmak üzere κ_1 ,

$$\kappa_1 = \Phi + u_3f(t) - g(t) \quad (2.31)$$

olarak elde edilir, ve p için

$$p = f(t)X_3 + \Phi + u_3f(t) - g(t) \quad (2.32)$$

yazılır. (2.32) kullanılarak (2.11) de verilen gerilme bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilirler;

$$\begin{aligned} t_{11} = t_{22} &= -f(t)X_3 - u_3f(t) - g(t) \quad , \quad t_{12} = t_{21} = 0 \\ t_{\alpha 3} &= \Phi u_{3,\alpha} \quad , \quad t_{33} = -f(t)X_3 - u_3f(t) - g(t) + K^2\Phi \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dikkat edilirse $|X_3| \rightarrow \infty$ için t_{11} , t_{22} , t_{33} gerilmeleri sonsuza gider. Diğer taraftan bu limitte fiziksel nedenlerle gerilmelerin sınırlı kalmaları gerekir. Bunun sağlanması için

$$f(t) \equiv 0 \quad (2.34)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Diğer taraftan ortamın doğal durumunu gerilmesiz kabul edersek, bunun sağlanması için

$$g(t) \equiv 0 \quad (2.35)$$

olması gerekir. Sonuçta bu varsayım altında

$$p = \Phi \quad (2.36)$$

ve

$$t_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \quad , \quad t_{33} = K^2\Phi \quad (2.37)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse bu durumda (2.24)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (2.38)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu denklemin hiperbolik bir denklem olması koşulunun Σ üzerinde getireceği kısıtlamayı ortaya çıkartmaya çalışalım. $\rho_0 > 0$ olduğu için , (2.38) denklemin sol tarafının bu bölgede eliptik bir operatör olması gereklidir. Bunun içinde

$$\left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK} u_{3,1}^2 + \Phi\right) \left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK} u_{3,2}^2 + \Phi\right) - \left(\frac{1}{K} \frac{d\Phi}{dK}\right)^2 u_{3,1}^2 u_{3,2}^2 > 0 \quad (2.39)$$

olması gerekir. Buradan da (2.16) ve (2.21) kullanılarak

$$\Phi \left(K \frac{d\Phi}{dK} + \Phi\right) = \Phi \frac{d\tau}{dK} > 0 \quad (2.40)$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Daha önce $\Phi = \hat{\mu} > 0$ olduğu kabul edildiği için, (2.40) eşitsizliğinin gerçekleşmesi için

$$K \frac{d\Phi}{dK} + \Phi = \frac{d\tau}{dK} > 0 \quad (2.41)$$

olması gerektiği görülür. (2.16) kullanılırsa (2.41) eşitsizliği

$$\frac{d^2 \Sigma}{dK^2} > 0 \quad (2.42)$$

olarak yazılabilir.

Biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli bir dalga yayılması probleminin asimptotik çözümü ile ilgileneceğimiz için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının, (2.37) ve hareket denkleminin, (2.38), yaklaşık formlarını kullanacağız. Bu yaklaşık denklemleri türetmek amacı ile Σ 'nın I 'nın analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek, bu fonksiyonu $I - 3$ 'ün kuvvetleri cinsinden aşağıdaki formda bir seri olarak yazabiliriz;

$$\Sigma(I) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (I - 3)^p \quad (2.43)$$

Burada α_p sabitleri

$$\alpha_p = \frac{1}{p!} \frac{d^p \Sigma}{dI^p}(3) \quad (2.44)$$

olarak tanımlanmaktadırlar ve referans konumunda enerjinin sıfır olması için

$$\alpha_0 = 0 \quad (2.45)$$

olması gerekir. Bu dikkate alınarak (2.43)'den

$$\frac{d\Sigma}{dI} = \alpha_1 + 2\alpha_2 K^2 + \mathcal{O}(K^4) \quad (2.46)$$

yazılır ve (2.46) kullanılarak gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 K^2)u_{3,\alpha} + \mathcal{O}(K^5) \\ t_{3,3} &= 2\alpha_1 K^2 + \mathcal{O}(K^4) \end{aligned} \quad (2.47)$$

olarak bulunur. (2.46)'dan (2.38) hareket denklemi de

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} = n\mathcal{N}(u_3) + \mathcal{O}(K^5) \quad (2.48)$$

olarak yaklaştırılır. Burada

$$c^2 = \mu/\rho_0 \quad , \quad \mu = 2\alpha_1 \quad , \quad n = 4\alpha_2/\rho_0 \quad (2.49)$$

ve

$$\mathcal{N}(u_3) = (u_{3,1} Q(u_3))_{,1} + (u_{3,2} Q(u_3))_{,2} \quad (2.50)$$

$$Q(u_3) = K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \quad (2.51)$$

olarak tanımlanmaktadır ve c lineer dalgaların yayılma hızını göstermektedir.

Bu yaklaşımda (yani mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edildiğinde) (2.14) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma modülü

$$\hat{\mu} = \rho_0(c^2 + nK^2) \quad (2.52)$$

dir. Dikkat edilirse $c^2 > 0$ olduğu için eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\hat{\mu}$ monoton olarak artacak, fakat $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Dolayısı ile eğer $n > 0$ ise ortam kayma hareketinde sertleşen bir davranış, fakat $n < 0$ ise yumuşayan bir davranış gösterecektir. $\hat{\mu}(K) > 0$ kabul edildiği için, bütün K 'lar için

$$c^2 + nK^2 > 0 \quad (2.53)$$

olmalı. Diğer taraftan, (2.48) denkleminin hiperbolik olması için de (2.41) veya (2.42)' den bütün K 'lar için

$$c^2 + 3nK^2 > 0 \quad (2.54)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği görülür. $n > 0$ olduğunda (2.53) ve (2.54) eşitsizlikleri bütün K 'lar için sağlanır. Fakat $n < 0$ olduğunda bu eşitsizliklerin her ikisinin birden sağlanabilmesi için

$$0 < K^2 < \frac{c^2}{3|n|} \quad (2.55)$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için (2.55) dalga hareketinin genliğine bir kısıtlama getirir. Biz sonlu fakat küçük genlikli dalga hareketleri ile ilgilendiğimiz için bunun sağlandığını kabul edebiliriz.

2.2. İki Tabakalı Bir Elastik Ortamda SH-Dalgaları

Başlangıç konumunda

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) | 0 \leq X_2 \leq h_1, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (2.56a)$$

ve

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) | -h_2 \leq X_2 \leq 0, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \quad (2.56b)$$

bölgelerini dolduran ve farklı elastik malzemelerden oluşan uniform kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir sürekli ortam gözönüne alalım. $X_2 = 0$ ara yüzeyi boyunca yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğunu ve $X_2 = h_1$ ve $X_2 = -h_2$ serbest yüzeylerinde de gerilmelerin sıfır olduğunu kabul edelim.

Şimdi bu tabakalı ortam içerisinde X_1 eksenine boyunca yayılan ve

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3^{(\nu)}(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad \nu = 1, 2 \quad (2.57)$$

denklemleri ile tanımlanan kayma dalgalarını (SH-dalgalarını) gözönüne alalım. Burada $u_3^{(1)}$ ve $u_3^{(2)}$, sırası ile P_1 ve P_2 tabakalarındaki noktaların X_3 yönündeki yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Alan büyüklükleri üzerindeki, $u^{(1)}$ ve $u^{(2)}$ 'deki gibi, parantez içerisindeki 1 üst indisi büyüklüğün P_1 tabakasına, 2 üst indisi ise P_2 tabakasına ait olduğunu gösterecektir.

Tabakaların sıkışamaz hiperelastik malzemelerden oluştuğunu ve bunların iç enerji fonksiyonlarının

$$\Sigma^{(\nu)} = \Sigma^{(\nu)}(I^{(\nu)}) \quad \nu = 1, 2 \quad (2.58)$$

yapısında olduklarını varsayalım. Ayrıca (X_1, X_2, X_3) yerine (X, Y, Z) ve $u^{(1)} = u$, $u^{(2)} = v$ yazalım. Bu durumda probleme ait hareket denklemleri (2.38)'den

$$\frac{\partial}{\partial X}(\Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial Y}) = \rho_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}(\Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial Y}) = \rho_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

olarak yazılır.

$Y = 0$ 'da yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu ve $Y = h_1$ - ve $Y = -h_2$ serbest yüzeylerinde de gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilmişti. Bunlar dikkate alınarak ve (2.37)'de kullanılarak aşağıdaki sınır koşulları elde edilir [19,22];

$$Y = h_1 ' \text{ de} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (2.61)$$

$$Y = 0 ' \text{ da} \quad u = v \text{ ve} \quad \Phi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial Y} = \Phi^{(2)} \frac{\partial v}{\partial Y} \quad (2.62a, b)$$

$$Y = -h_2 ' \text{ de} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.63)$$

Sonlu fakat küçük genlikli dalgalar halinde daha önceden yapıldığı gibi mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edilerek (2.59-63) denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki gibi yaklaştırılabilir;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = n_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right\} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = n_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right\} \quad (2.65)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (2.66)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u = v \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \quad (2.67a, b)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de } \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.68)$$

Burada c_ν , n_ν , γ , β_ν sabitleri, $\nu = 1, 2$ aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$c_\nu^2 = \frac{\mu_\nu}{\rho_\nu} \quad , \quad n_\nu \rho_\nu = \frac{d\Phi^{(\nu)}}{dI}(3) = 4\alpha_2^{(\nu)} \quad , \quad \mu_\nu = \Phi^{(\nu)}(3) = 2\alpha_1^{(\nu)}$$
$$\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad , \quad \beta_\nu = \frac{n_\nu}{c_\nu^2} \quad , \quad \rho_\nu = \rho_0^\nu \quad (2.69)$$

ve (2.51)'de tanımlandığı gibi

$$Q(\phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)^2 \quad (2.70)$$

dir. c_1 birinci ortamda, c_2 de ikinci ortamda lineer dalgaların yayılma hızlarını göstermektedir.

BÖLÜM 3. İKİ TABAKALI BİR NONLİNEER ELASTİK ORTAMDA SH DALGALARININ NONLİNEER MODÜLASYONU

3.1. Giriş

Farklı ve sıkışmaz nonlinear neo-Hookean elastik malzemelerden yapılmış ve uniform kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir ortamda SH dalgalarının yayılması olayı matematiksel olarak Bölüm 2.2 'de verilen (2.59-60) denklemleri ve (2.61-63) sınır koşulları ile betimlenir [19,22]. Böyle bir ortamda sonlu fakat küçük genlikli nonlinear uzun dalgaların yayılması [22]'de incelenmiştir. Burada bu tip dalga hareketlerinin asimptotik olarak bir modifiye Korteweg-deVries (mKdV) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiş ve bu denklem üzerinden tabakaların nonlinear özelliklerinin asimptotik dalgaların yayılma karakteristiklerine etkileri incelenmiştir.

Bu çalışmada [17]'de verilen asimptotik yöntem kullanılarak yukarıda tanımlanan tabakalı ortamda SH-dalgalarının nonlinear self modülasyonu incelenmektedir. Burada, c SH-dalgalarının faz hızını, c_1 ve c_2 birinci ve ikinci ortamda lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını göstermek üzere, $c_1 < c_2$ kabulü altında, $c_1 < c_2 < c$ ve $c_1 < c < c_2$ durumları ayrı ayrı ele alınmaktadır. Her iki durumda da nonlinear self modülasyonun asimptotik olarak bir nonlinear Schrödinger (NLS) ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra $c_1 < c < c_2$ halinde eğer ikinci tabakanın kalınlığı sonsuza götürülürse nonlinear denklemin katsayılarının, [17]'de tabakalı yarım uzayda SH-dalgalarının nonlinear self modülasyonu için türetilen NLS denkleminin katsayılarına indirgendiği gösterilmiştir.

3.2.1 $c_1 < c_2 < c$ İçin Analiz

Küçük fakat sonlu genlikli SH-dalgalarının self modülasyonunu incelemek için değişik ölçekler yöntemini kullanacağız [17,26]. Bunun için X, Y ve t yerine

$$x_i = \epsilon^i X, \quad t_i = \epsilon^i t, \quad y = Y \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.1)$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlayacağız ve u ve v 'yi bu yeni değişkenlerin fonksiyonları olarak gözönüne alacağız. Burada $\epsilon > 0$ nonlineerliğin mertebesini belirten küçük bir parametre, x_1, x_2, t_1, t_2 ise yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden değişkenlerdir. Şimdi u ve v 'nin ϵ cinsinden aşağıdaki gibi uniform olarak geçerli asimptotik açılımlara sahip olduklarını varsayıyoruz;

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dikkat edilirse eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türevler arasında

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.3)$$

bağıntıları geçerlidir.

(2.64-65) ile verilen hareket denklemleri ve (2.66-68) sınır koşullarına (3.3) dönüşümü uygulanır ve daha sonra da (3.2) açılımları kullanılırsa, ϵ 'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n ve v_n 'nin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bunlardan ilk üçü aşağıda verilmektedir:

$\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_1 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_1 = 0 \quad (3.4a, b)$$

$$y = h_1' \text{ de} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (3.4c)$$

$$y = 0' \text{ da} \quad u_1 = v_1 \text{ ve} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.4d, e)$$

$$y = -h_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (3.4f)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_1 \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_1 \quad (3.5a, b)$$

$$y = h_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad (3.5c)$$

$$y = 0 \text{ 'de} \quad u_2 = v_2 \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (3.5d, e)$$

$$y = -h_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (3.5f)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_2 + \mathcal{L}_2^{(1)} u_1 + n_1 \mathcal{N}_0(u_1) \quad (3.6a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_3 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_2 + \mathcal{L}_2^{(2)} v_1 + n_2 \mathcal{N}_0(v_1) \quad (3.6b)$$

$$y = h_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad (3.6c)$$

$$y = 0 \text{ 'de} \quad u_3 = v_3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(u_1) \quad (3.6d, e)$$

$$y = -h_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \quad (3.6f)$$

Burada $\mathcal{L}_0^{(\nu)}$, $\mathcal{L}_1^{(\nu)}$, $\mathcal{L}_2^{(\nu)}$, $\mathcal{Q}_0$ ve $\mathcal{N}_0$ differansiyel operatörleri

$$\mathcal{L}_0^{(\nu)} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{L}_1^{(\nu)} \psi = -2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} - c_\nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} \right], \quad (3.7b)$$

$$\mathcal{L}_2^{(\nu)} \psi = - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} - c_\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \right], \quad (3.7c)$$

$$\mathcal{Q}_0(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \quad (3.7d)$$

$$\mathcal{N}_0(\psi) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \mathcal{Q}_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathcal{Q}_0(\psi) \right). \quad (3.7e)$$

olarak tanımlanmaktadırlar.

Dikkat edilirse, (2.59-63) veya (2.64-68) denklemleri ile tanımlanan non-linear problem lineerleştirilirse, (3.4a-f) denklemleri ile tanımlanan ϵ mertebesindeki pertürbasyon problemine eş yapıda bir problem elde edilir. Yalnız bu problemde u ve v

$$u = u(X, Y, t) \quad \text{ve} \quad v = v(X, Y, t) \quad (3.8)$$

yapısında fonksiyonlar olacaklardır ve bunlar, problem çözülerek tamamen belirlenirler. ϵ mertebesindeki lineer problemde ise u_1 ve v_1

$$u_1 = u_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad , \quad v_1 = v_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.9)$$

yapısında fonksiyonlardır ve aşağıda görüleceği gibi bu mertebeden problem çözülerek, u_1 ve v_1 'in ancak x_0, t_0 ve y değişkenlerine bağılıkları açık olarak hesaplanabilir. Diğer değişkenlere bağılıkları daha üst mertebeye problemlerden belirlenecektir. Dikkat edilirse ikinci ve üçüncü mertebedeki problemlerde, sağdaki terimler bir önceki mertebedeki problemlerden bulunacakları için birinci mertebedeki problem gibi lineer problemlerdir. Yalnız bu problemlerde denklemler ve bazı sınır koşulu artık inhomojen yapıda olacaklardır. Şimdi sırası ile bu problemlerin çözümlerini inşaa edeceğiz.

Birinci mertebeye problemdeki (3.4a,b) denklemlerinin çözümleri değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda elde edilebilirler;

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \{A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{ilkp_1y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{-ilkp_1y}\}e^{il\phi} + c.c.$$

$$v_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \{C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{ilkp_2y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{-ilkp_2y}\}e^{il\phi} + c.c. \quad (3.10)$$

Burada "c.c." sembolleri önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca k dalga sayısı, ω açısal frekans olmak üzere

$$\phi = kx_0 - \omega t_0 \quad (3.11)$$

ve bu kısımdaki analizde $c_1 < c_2 < c$ kabul edildiği için

$$p_1 = \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)^{1/2} \quad , \quad p_2 = \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right)^{1/2} \quad (3.12)$$

olarak tanımlanmaktadır. c ise faz hızıdır. $A_1^{(l)}$, $B_1^{(l)}$, $C_1^{(l)}$, $D_1^{(l)}$ dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde edileceklerdir. Bunun için (3.10) çözümleri (3.4c-f) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = \left[A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)} \right]^T \quad (3.13)$$

ve

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} ilk p_1 e^{ilk p_1 h_1} & -ilk p_1 e^{-ilk p_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ilk p_2 e^{-ilk p_2 h_2} & -ilk p_2 e^{ilk p_2 h_2} \\ ilk p_1 & -ilk p_1 & -i \gamma l k p_2 & i \gamma l k p_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

olarak tanımlanmak üzere $\mathbf{U}_1^{(l)}$ vektörü için

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

homojen cebrik denklem sistemleri elde edilir. Dikkat edilirse

$$\det \mathbf{W}_l = 0 \quad (3.16)$$

dan

$$p_1 \tan(k h_1 p_1) + \gamma p_2 \tan(k h_2 p_2) = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) bağıntısı lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısıdır. Bölümün başında da belirttiğimiz gibi bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlinear self-modülasyonunu inceliyoruz. Bu nedenle yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıklarını kabul ediyoruz, yani

$$l \geq 2 \quad \text{ için } \quad \det \mathbf{W}_l \neq 0 \quad (3.18)$$

dır. Bu koşul altında (3.15)'in çözümleri $\mathbf{R}$

$$\mathbf{W}_l \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

denklemini sağlayan bir sütun vektörü olmak üzere

$$l = 1 \quad \text{ için } \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad (3.20)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(l)} = 0 \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. (3.19)'un bir çözümü de

$$\mathbf{R}^T = \left(e^{i(kh_2p_2 - kh_1p_1)} \frac{\cos(kh_2p_2)}{\cos(kh_1p_1)}, e^{i(kh_2p_2 + kh_1p_1)} \frac{\cos(kh_2p_2)}{\cos(kh_1p_1)}, e^{2ikh_2p_2}, 1 \right) \quad (3.22)$$

dir. (3.20) ve (3.21) kullanılırsa birinci merteye çözümler için (3.10)' dan

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathcal{A}_1 (R_1 e^{ikp_1y} + R_2 e^{-ikp_1y}) e^{i\phi} + c.c. \\ v_1 &= \mathcal{A}_1 (R_3 e^{ikp_2y} + R_4 e^{-ikp_2y}) e^{i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Burada R_i $i = 1, \dots, 4$, (3.22)'de verilen $\mathbf{R}$ vektörünün bileşenlerini, $\mathcal{A}_1$ ise modülasyonun birinci merteye, yavaş değişen kompleks genliğini göstermektedir. Dikkat edilirse (3.23)'de verilen birinci merteye çözümü tamamen belirlemek için $\mathcal{A}_1$ i hesaplamak yeterli olacaktır. Bu fonksiyon daha yüksek merteye problemlerden belirlenecektir.

(3.23)'de verilen birinci merteye çözümler ikinci merteye pertürbasyon probleminin (3.5a,b) denklemlerinde kullanılırsa buradan

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = 2i(R_1 e^{ikp_1y} + R_2 e^{-ikp_1y}) e^{i\phi} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + c.c. \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = 2i(R_3 e^{ikp_2y} + R_4 e^{-ikp_2y}) e^{i\phi} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + c.c. \quad (3.24b)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\mathcal{M}_{11}^{(\alpha)} = w \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + c_\alpha^2 k \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \quad (3.25)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.24) denklemlerinin çözümlerini

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2 \quad \text{ve} \quad v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2 \quad (3.26)$$

formlarında iki parçaya ayırılım, öyleki $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$, sırası ile (3.24a) ve (3.24b) denklemlerinin özel çözümleri, $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{v}_2$ ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)} \tilde{u}_2 = 0 \quad , \quad \mathcal{L}_0^{(2)} \tilde{v}_2 = 0 \quad (3.27a, b)$$

homojen denklemlerinin (3.5c-f)' den türetilen

$$y = h_1' \quad \text{de} \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \quad (3.28a)$$

$$y = 0 \quad \text{da} \quad (\tilde{u}_2 - \tilde{v}_2) = -(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) \quad (3.28b)$$

$$\text{ve} \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \right) \quad (3.28c)$$

$$y = -h_2 \quad \text{de} \quad \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \quad (3.28d)$$

homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar. (3.24a,b) denklemlerinin özel çözümlerini belirsiz katsayılar yöntemi ile bulabiliriz. Bunun için $\bar{u}_2$ ve $\bar{v}_2$ 'yi sırası ile

$$\bar{u}_2 = (C_1 e^{ikp_1 y} + C_2 e^{-ikp_1 y}) y e^{i\phi} + c.c. \quad (3.29a)$$

$$\bar{v}_2 = (C_3 e^{ikp_2 y} + C_4 e^{-ikp_2 y}) y e^{i\phi} + c.c. \quad (3.29b)$$

formunda seçebiliriz. Bu ifadeler (3.24a) ve (3.24b) 'de kullanılırsa gerekli ara işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{R_1}{c_1^2 k p_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} & C_2 &= \frac{R_2}{c_1^2 k p_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} \\ C_3 &= -\frac{R_3}{c_2^2 k p_2} \mathcal{M}_{11}^{(2)} & C_4 &= \frac{R_4}{c_2^2 k p_2} \mathcal{M}_{11}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.27a,b) homojen denklemlerinin çözümleri, birinci mertebe problemde olduğu gibi,

$$\tilde{u}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [A_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.31a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y}] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.31b)$$

olarak bulunur. $A_2^{(l)}$, $B_2^{(l)}$, $C_2^{(l)}$, $D_2^{(l)}$ ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (3.28a-d) sınır koşullarından hesaplanacaklardır. (3.13)' deki gibi

$$\mathbf{U}_2^{(l)} = [A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}, D_2^{(l)}]^T \quad (3.32)$$

vektörü tanımlanırsa, bu vektörler için; (3.31a,b) çözümleri (3.28a-d) sınır koşullarında kullanılırsa aşağıdaki inhomojen cebrik denklem sistemi elde edilir;

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)}. \quad (3.33)$$

(3.33)' ün sağındaki $\mathbf{b}^{(l)}$ vektörleri, $l = 1$ için

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -C_1(1+ikp_1h_1)e^{ikp_1h_1} - C_2(1-ikp_1h_1)e^{-ikp_1h_1} \\ -C_3(1-ikp_2h_2)e^{-ikp_2h_2} - C_4(1+ikp_2h_2)e^{ikp_2h_2} \\ -(C_1+C_2)+\gamma(C_3+C_4) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{b}_2^{(l)} \equiv 0 \quad (3.34b)$$

dir. $\mathbf{W}_1$ matrisinin ve $\mathbf{R}$ vektörünün tanımları kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R} \quad (3.35)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğu için (3.33) denkleminin $l = 1$ için çözümü olması için $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_2^{(1)} = 0 \quad (3.37)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. (3.36)' dan $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{1}{\cos kh_1p_1}, \frac{\gamma}{\cos kh_2p_2}, 1, -\frac{kp_1 \sin kh_1p_1}{\cos kh_1p_1} \right) \quad (3.38)$$

olarak hesaplanır. (3.19) bağıntısı k 'ya göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) = 0 \quad (3.39)$$

elde edilir. Burada

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.40)$$

dır, yani grup hızını göstermektedir. Şimdi (3.39)'u soldan $\mathbf{L}$ ile çarpıp ve (3.36)' yı kullanırsak

$$V_g = - \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right) / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \quad (3.41)$$

olduğu ortaya çıkar. Bu sonuç ve (3.35) kullanılırsa (3.37) uygunluk koşulundan $\mathcal{A}_1$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.42)$$

denklemini sağlaması gerektiği bulunur. Bu sonuç $\mathcal{A}_1$ 'in V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığını gösterir, yani $\mathcal{A}_1$ fonksiyonu

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (3.43)$$

yapısında olacaktır. (3.39) ve (3.42) kullanılırsa, $l = 1$ için (3.33) denkleminin çözümünün

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (3.44)$$

olarak yazılabileceği görülür. Burada $\mathcal{A}_2$ dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci mertebe genliğini temsil etmektedir ve gerektiğinde yukarı mertebe pertürbasyon problemlerinden elde edilir. Fakat biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli hareketlerle ilgilendiğimiz için yalnızca $\mathcal{A}_1$ 'i belirlemeye çalışacağız. $l \neq 1$ için $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ olduğundan (3.33) denkleminin çözümü

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

dir.

Böylece birinci ve ikinci mertebe çözümleri tamamlamış olduk fakat $\mathcal{A}_1$ - fonksiyonunu tam olarak belirleyemedik. Bu nedenle üçüncü mertebe pertürbasyon problemi ile ilgileneceğiz. Eğer birinci ve ikinci mertebe çözümler üçüncü mertebe problemin (3.6a-b) denklemlerinde kullanılırsa gerekli ara işlemlerden sonra bu denklemler aşağıdaki formlara dönüşürler;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = & \left(\mathcal{D}_1 e^{ikp_1 y} + \mathcal{D}_2 y e^{ikp_1 y} + \mathcal{D}_3 e^{-ikp_1 y} + \mathcal{D}_4 y e^{-ikp_1 y} + \right. \\ & \left. \mathcal{D}_5 e^{3ikp_1 y} + \mathcal{D}_6 e^{-3ikp_1 y} \right) e^{i\phi} + c.c. + (e^{\pm i3\phi} \text{ 'li terimler}) \end{aligned} \quad (3.46a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} v_3 = & \left(\mathcal{D}_7 e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_8 y e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_9 e^{-ikp_2 y} + \mathcal{D}_{10} y e^{-ikp_2 y} + \right. \\ & \left. \mathcal{D}_{11} e^{3ikp_2 y} + \mathcal{D}_{12} e^{-3ikp_2 y} \right) e^{i\phi} + c.c. + (e^{\pm i3\phi} \text{ 'li terimler}) \end{aligned} \quad (3.46b)$$

Burada

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= 2iR_1\mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_1\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_1\mathcal{N}^{(1)} + 2iR_1\mathcal{M}_{12}^{(1)} - \mathcal{P}_1e^{ik(p_2h_2-p_1h_1)} \\
\mathcal{D}_2 &= -2i\left(\frac{1}{c_1^2kp_1}\right)R_1\left(\omega\frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\mathcal{M}_{11}^{(1)} \\
\mathcal{D}_3 &= 2iR_2\mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_2\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_2\mathcal{N}^{(1)} + 2iR_2\mathcal{M}_{12}^{(1)} - \mathcal{P}_1e^{ik(p_2h_2+p_1h_1)} \\
\mathcal{D}_4 &= 2i\left(\frac{1}{c_1^2kp_1}\right)R_2\left(\omega\frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\mathcal{M}_{11}^{(1)} \\
\mathcal{D}_5 &= \mathcal{Q}_1e^{ik(p_2h_2-3p_1h_1)} \quad , \quad \mathcal{D}_6 = \mathcal{Q}_1e^{ik(p_2h_2+3p_1h_1)} \\
\mathcal{D}_7 &= 2iR_3\mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_3\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_3\mathcal{N}^{(3)} + 2iR_3\mathcal{M}_{12}^{(2)} - \mathcal{P}_3e^{2ikp_2h_2} \\
\mathcal{D}_8 &= -2i\left(\frac{1}{c_2^2kp_2}\right)R_3\left(\omega\frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\mathcal{M}_{11}^{(2)} \\
\mathcal{D}_9 &= 2iR_4\mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_4\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_4\mathcal{N}^{(2)} + 2iR_4\mathcal{M}_{12}^{(2)} - \mathcal{P}_3 \\
\mathcal{D}_{10} &= 2i\left(\frac{1}{c_2^2kp_2}\right)R_4\left(\omega\frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\mathcal{M}_{11}^{(2)} \\
\mathcal{D}_{11} &= \mathcal{Q}_3e^{4ikp_2h_2} \quad , \quad \mathcal{D}_{12} = \mathcal{Q}_3e^{-2ikp_2h_2}
\end{aligned} \tag{3.47a-l}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(\alpha)} &= \left(\omega\frac{\partial\mathcal{A}_\beta}{\partial t_\gamma} + kc_\alpha^2\frac{\partial\mathcal{A}_\beta}{\partial x_\gamma}\right) , \quad \mathcal{N}^{(\alpha)} = \left(c_\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\mathcal{A}_1 - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\mathcal{A}_1\right) , \quad \Lambda_\alpha = \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + V_g\frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega}\right) \\
\mathcal{P}_1 &= n_1k^4(9p_1^4 + 2p_1^2 + 9)\mathcal{S}^3|\mathcal{A}_1|^2\mathcal{A}_1 \\
\mathcal{Q}_1 &= n_1k^4(9p_1^4 - 2p_1^2 - 3)\mathcal{S}^3|\mathcal{A}_1|^2\mathcal{A}_1 \\
\mathcal{S} &= \cos(kh_2p_2)/\cos(kh_1p_1) \\
\mathcal{P}_3 &= n_2k^4(9p_2^4 + 2p_1^2 + 9)|\mathcal{A}_1|^2\mathcal{A}_1 \\
\mathcal{Q}_3 &= n_2k^4(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)|\mathcal{A}_1|^2\mathcal{A}_1
\end{aligned} \tag{3.48a-f}$$

dir. $|\mathcal{A}_1|$ de $\mathcal{A}_1$ 'in modülünü göstermektedir.

İkinci mertebe problemdeki gibi üçüncü mertebe problemin çözümlerini

$$u_3 = \tilde{u}_3 + \bar{u}_3 \quad \text{ve} \quad v_3 = \tilde{v}_3 + \bar{v}_3 \tag{3.49a, b}$$

formlarında iki parçaya ayıralım, öyleki $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$, sırası ile (3.46a) ve (3.46b) denklemlerinin özel çözümleri, $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)}\tilde{u}_3 = 0 \quad , \quad \mathcal{L}_0^{(2)}\tilde{v}_3 = 0 \tag{3.50a-b}$$

homojen denklemlerinin (3.6c-f)' den türetilen

$$y = h_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \quad (3.51a)$$

$$y = 0 \text{ 'da} \quad \tilde{u}_3 - \tilde{v}_3 = -(\bar{u}_3 - \bar{v}_3) \quad (3.51b)$$

$$y = 0 \text{ 'da} \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y}\right) + \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{Q}_0(u_1) \quad (3.51c)$$

$$y = -h_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} \quad (3.51d)$$

homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar. $\bar{u}_3$ ve $\bar{v}_3$ özel çözümleri de

$$\bar{u}_3^{(l)} = \mathcal{F}_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2, y)e^{il\phi} + c.c. \quad (3.52a)$$

$$\bar{v}_3^{(l)} = \mathcal{G}_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2, y)e^{il\phi} + c.c. \quad (3.52b)$$

olmak üzere

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(3)} \quad \text{ve} \quad \bar{v}_3 = \bar{v}_3^{(1)} + \bar{v}_3^{(3)} \quad (3.53a, b)$$

şeklinde lineer bağımsız iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edilebilirler.

$l=1$ için $\mathcal{F}_3^{(1)}$ ve $\mathcal{G}_3^{(1)}$, yi

$$\mathcal{F}_3^{(1)} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 y) y e^{ikp_1 y} + (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 y) y e^{-ikp_1 y} + \mathcal{E}_5 e^{3ikp_1 y} + \mathcal{E}_6 e^{-3ikp_1 y} + c.c. \quad (3.54a)$$

$$\mathcal{G}_3^{(1)} = (\mathcal{E}_7 + \mathcal{E}_8 y) y e^{ikp_2 y} + (\mathcal{E}_9 + \mathcal{E}_{10} y) y e^{-ikp_2 y} + \mathcal{E}_{11} e^{3ikp_2 y} + \mathcal{E}_{12} e^{-3ikp_2 y} + c.c. \quad (3.54b)$$

formlarında seçebiliriz. Bu ifadeler (3.46a,b) denklemlerinde kullanılırsa gerekli ara işlemlerden sonra $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, 12$, katsayıları

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= i\mathcal{D}_1/2kc_1^2 p_1 - \mathcal{D}_2/4k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_2 &= i\mathcal{D}_2/4kc_1^2 p_1 \\ \mathcal{E}_3 &= -i\mathcal{D}_3/2kc_1^2 p_1 - \mathcal{D}_4/4k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_4 &= -i\mathcal{D}_4/4kc_1^2 p_1 \\ \mathcal{E}_5 &= \mathcal{D}_5/8k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_6 &= \mathcal{D}_6/8k^2 c_1^2 p_1^2 \\ \mathcal{E}_7 &= i\mathcal{D}_7/2kc_2^2 p_2 - \mathcal{D}_8/4k^2 c_2^2 p_2^2 & \mathcal{E}_8 &= i\mathcal{D}_8/4kc_2^2 p_2 \\ \mathcal{E}_9 &= -i\mathcal{D}_9/2kc_2^2 p_2 - \mathcal{D}_{10}/4k^2 c_2^2 p_2^2 & \mathcal{E}_{10} &= -i\mathcal{D}_{10}/4kc_2^2 p_2 \\ \mathcal{E}_{11} &= \mathcal{D}_{11}/8k^2 c_2^2 p_2^2 & \mathcal{E}_{12} &= \mathcal{D}_{12}/8k^2 c_2^2 p_2^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

olarak elde edilebilirler. $\bar{u}_3^{(3)}$ ve $\bar{v}_3^{(3)}$ çözümleri de benzer yol izlenerek hesaplanabilirler. Fakat ileriki kısımlarda bu fonksiyonların açık ifadeleri gerekli olmayacağından $\bar{u}_3^{(3)}$ ve $\bar{v}_3^{(3)}$ çözümleri hesaplanmayacaktır.

$\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ için,yani (3.50a,b) ve (3.51a-d) denklemleri ile tanımlanan problemin çözümü için, bir önceki pertürbasyon problemindeki gibi hareket edilecektir. (3.50a,b) denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned}\tilde{u}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \right] e^{il\phi} + c.c. \\ \tilde{v}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \right] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.56a, b)\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $A_3^{(l)}$, $B_3^{(l)}$, $C_3^{(l)}$ ve $D_3^{(l)}$ üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (3.51a-d) sınır koşullarından hesaplanacaklardır. (3.13) ve (3.32)' deki gibi

$$\mathbf{U}_3^{(l)} = [A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)}, D_3^{(l)}]^T \quad (3.57)$$

vektörü tanımlanırsa, bu vektörler için; (3.56a,b) ile birlikte $u_1, v_1, u_2, v_2, \bar{u}_3, \bar{v}_3$ çözümleri (3.51a-d) sınır koşullarında kullanılarak aşağıdaki inhomojen cebrik denklem sistemleri elde edilir;

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}. \quad (3.58)$$

(3.58)' in sağındaki vektörler $l = 1$ ve $l = 3$ için sıfırdan farklı, $l \neq 1, 3$ için özdeş olarak sıfırdır. $l = 1$ için oldukça uzun işlemlerden sonra

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3^{(1)} &= -i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{R} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \mathbf{R} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \quad (3.59)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.59)' daki $\mathbf{F}$ vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$F_1 = -\beta_1 h_1 k^3 (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) \mathcal{S}^3 e^{ikh_2 p_2}$$

$$F_2 = -\beta_2 h_2 k^4 (9p_2^4 + 2p_2^2 + 9) e^{ikh_2 p_2}$$

$$F_3 = [\beta_1 \frac{k^3}{p_1} (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) \mathcal{S}^3 \sin kh_1 p_1 - \frac{3}{4} \beta_1 \frac{k^3}{p_1} (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) \mathcal{S}^3 \sin 3kh_1 p_1$$

$$- \gamma \beta_2 \frac{k^3}{p_2} (9p_2^4 + 2p_2^2 + 3) \sin kh_2 p_2 - \frac{3}{4} \gamma \beta_2 \frac{k^3}{p_2} (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3) \sin 3kh_2 p_2$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_1\{2k^3p_1(1+9p_1^2)\sin kh_1p_1 + 2k^3p_1(1-3p_1^2)\sin 3kh_1p_1\}\mathcal{S}^3 \\
& -2\gamma\beta_2k^3(1+9p_2^2)\sin kh_2p_2 - 2\gamma\beta_2k^3p_2(1-3p_2^2)\sin 3kh_2p_2]e^{ikh_2p_2} \\
F_4 = & -\beta_1\frac{k^2}{4p_1^2}(9p_1^4-2p_1^2-3)\mathcal{S}^3\cos 3kh_1p_1e^{ikh_2p_2} \\
& +\beta_2\frac{k^2}{4p_2^2}(9p_2^4-2p_2^2-3)\cos 3kh_2p_2e^{ikh_2p_2}. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

$\mathbf{b}_3^{(3)}$ vektörünün açık formu, daha sonraki hesaplarda kullanılmayacağı için verilmeyecektir. $\det \mathbf{W}_1=0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq 0$ olduğu için (3.58) denkleminin $l=1$ için çözümünün olması için

$$\mathbf{L}.\mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \tag{3.61}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. $l=3$ için (3.58)'in çözümü $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ olduğu için

$$\mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1}\mathbf{b}_3^{(3)} \tag{3.62}$$

olarak elde edilir. $l \neq 1$ ve $l \neq 3$ için ise, $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(l)} \equiv 0$ olduğundan, (3.58)' in çözümleri

$$\mathbf{U}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad , \quad l \neq 1, 3 \tag{3.63}$$

olarak elde edilir. $\mathbf{U}_3^{(1)}$ ve $\mathbf{U}_3^{(3)}$ ün açık yapılarına birinci mertebe uniform geçerli çözümü elde etmek için ihtiyaç olmadığından bu vektörlerin açık yapılarını elde etmeye çalışmayacağız.

Şimdi analizi (3.61) uygunluk koşulunu inceleyerek sürdüreceğiz. (3.41) kullanılarak bu koşul hesaplanırsa

$$i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{3.64}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ sabitleri

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma} = & -\left[\frac{1}{2}\mathbf{L}\left(V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + 2V_g \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial x \partial k} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2}\right)\mathbf{R}\right. \\
& \left. + \mathbf{L}\left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}\right)\right] / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R}\right). \tag{3.65a}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} / \left(\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right). \quad (3.65b)$$

olarak tanımlanmıştır.

Eğer $\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = 0$ denklemi k 'ya göre iki defa türetilir ve sonuç bağıntı soldan $\mathbf{L}$ satır vektörü ile çarpılırsa elde edilen ifade (3.65a) ile karşılaştırıldığında

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \quad (3.66)$$

olduğu ortaya çıkar. $\mathcal{A}_2$ fonksiyonu bir şekilde belirlenirse (3.64) denklemi $\mathcal{A}_1$ 'in hesaplanması için kullanılabilir ve böylece problemin birinci mertebe uniform geçerli çözümü inşaa edilebilir. Dikkat edilirse, eğer $\mathcal{A}_2$ 'nin x_1 ve t_1 değişkenlerine $\mathcal{A}_1$ gibi bağlı olduğu kabul edilirse, yani $\mathcal{A}_2$ 'nin

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (3.67)$$

yapısında olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.68)$$

olacaktır. Bu durumda (3.64), yalnızca $\mathcal{A}_1$ için bir denkleme dönüşür. Daha sonra aşağıdaki boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlanarak

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t_2 = \omega \epsilon t_1 = \omega \epsilon^2 t \\ \xi &= k \epsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k (x_1 - V_g t_1) = \epsilon k (x - V_g t) \\ \mathcal{A} &= k \mathcal{A}_1, \quad \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta} / \omega k^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

bu denklem aşağıdaki forma dönüştürülür;

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 \quad (3.70)$$

(3.70) denklemi nonlinear Schrödinger (NLS) denklemdir ve birçok değişik alanda nonlinear dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir [23,24,25]. Böylece, $\mathcal{A}$ çözümü (3.70) denkleminin

$$\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi) \quad (3.71)$$

şeklinde verilen bir başlangıç değeri için bulunduktan sonra birinci mertebe çözümler (3.23) denklemleri kullanılarak inşaa edilirler. (3.71) başlangıç değerin (3.23) aracılığı ile birinci mertebe yerdeğiştirmelerin başlangıç değerlerine bağlı olduğu açıktır.

Burada şu noktaya dikkat çekmek gerekmektedir. Bir kritik k_c dalga sayısında temel dalganın ($l=1$), faz hızı, bunun üçüncü harmoniğinin faz hızı ile aynı olursa yukarıda elde edilen birinci mertebe çözüm artık uniform olarak geçerli olmayacaktır. Çünkü böyle bir durumda (k_c, ω_c) ve $(3k_c, 3\omega_c)$ çiftleri aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlayacaklardır. Yani, hem $\det \mathbf{W}_1=0$ hem de $\det \mathbf{W}_3=0$, (k_c, ω_c) için sıfır olur. Bu durumda (3.62)' dan $k \rightarrow k_c$ için $\mathbf{U}_3^{(3)}$ 'ün sınırsız olarak büyüyeceği görülür. Dolayısı ile $\epsilon^3 \mathbf{U}_3$, $\epsilon \mathbf{U}_1$ ' den daha baskın olur. Bu ise (3.2) asimptotik açılımlarının uniform olarak geçerli oldukları varsayımı ile çelişir. Bir başka deyişle böyle bir durumda yukarıda elde edilen birinci mertebe çözüm uniform olarak geçerli olmayacaktır. Bu olaya üçüncü harmonik rezonans denir. Bir kritik dalga sayısında bu tip bir olay olduğunda temel mod ile onun üçüncü harmonik bileşeni arasında enerji transferi oluşur. Yani temel modla, üçüncü harmonik arasında bir lineer olmayan etkileşme oluşur.

Genel olarak bir kritik dalga sayısı ve ona karşı gelen frekans, (k_c, ω_c) , için hem $\det \mathbf{W}_1=0$ hem de $\det \mathbf{W}_m=0$, $m \in \{3, 5, 7, 9, \dots\}$, olursa temel mod ile onun m . harmoniği arasında harmonik rezonans oluşur. Bu durumda (3.15)'in çözümünde, $\det \mathbf{W}_m=0$, olduğu için $\mathbf{U}_1^{(1)}$ 'den başka $\mathbf{U}_1^{(m)}$ de sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısı ile birinci mertebe çözüm

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1^{(1)} \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{U}_1^{(m)} = \mathcal{A}_1^{(m)} \mathbf{R}_m, \quad \mathbf{U}_1^{(l)} \equiv \mathbf{0}, \quad l \neq m \quad (3.72)$$

olacaktır. Burada $\mathbf{R}_1$ ve $\mathbf{R}_m$

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_m \mathbf{R}_m = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

olarak tanımlanmaktadır. Eğer pertürbasyon analizi buradan itibaren ilerletilirse bu halde $\mathcal{A}_1^{(1)}$ ve $\mathcal{A}_1^{(m)}$ için bir kuple lineer olmayan denklem sistemi elde edilir [22]. Fakat biz bu çalışmada harmonik rezonans olayını incelemeyeceğiz.

3.2.2. $c_1 < c < c_2$ İçin Analiz

Bu bölümde $c_1 < c < c_2$ için önceki bölümde tanımlanan problemin asimptotik çözümünü inşaa edeceğiz. Bu durumda da perturbasyon problemlerinin çözümleri yine bir önceki bölümdeki gibi hareket edilerek inşaa edilir. Yalnızca v_n çözümlerinin yapısının değişmesinden gelen farklılıklar olacaktır. Bu nedenle analiz mümkün olduğu kadar kısa tutulacak, sonuçlar verilecektir.

$c_1 < c < c_2$ olduğunda birinci mertebe problemdeki (3.4a,b) denklemlerinin çözümleri,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \right] e^{il\phi} + c.c. \\ v_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lk\nu y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lk\nu y} \right] e^{il\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (3.74)$$

olarak yazılır. Burada

$$\nu = \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{1/2} \quad (3.75)$$

olarak tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse u_1 çözümü bir önceki halde olduğu gibidir, fakat v_1 'in yapısı değişmektedir. Bu çözümler (3.4c-f) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = 0 \quad (3.76)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{U}_1^{(l)}$ yine (3.13) ile $\mathbf{W}_l$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} ilkp_1 e^{ilkp_1 h_1} & -ilkp_1 e^{-ilkp_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -lk\nu e^{lk\nu h_2} & lk\nu e^{-lk\nu h_2} \\ ilkp_1 & -ilkp_1 & \gamma lk\nu & -\gamma lk\nu \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$\det \mathbf{W}_1 = 0$ ' dan dispersiyon bağıntısı (3.17) yerine

$$p_1 \tan(kh_1 p_1) = \gamma \nu \tanh(kh_2 \nu) \quad (3.78)$$

olarak bulunur. (3.18) varsayımı altında birinci mertebe çözümler

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad (3.79)$$

ve

$$l \geq 2 \text{ için } \mathbf{U}_1^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad (3.80)$$

dir. $\mathbf{R}$ vektörü (3.19) ve (3.77)'den

$$\mathbf{R}^T = (\hat{S}e^{-ikp_1 h_1 - k\nu h_2}, \hat{S}e^{ikp_1 h_1 - k\nu h_2}, e^{-2k\nu h_2}, 1) \quad (3.81)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\hat{S} = \cosh(k\nu h_2) / \cos(kp_1 h_1) \quad (3.81a)$$

dır. (3.79) ve (3.80)' den birinci merteye çözümler

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathcal{A}_1(R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y})e^{i\phi} + c.c. \\ v_1 &= \mathcal{A}_1(R_3 e^{-k\nu y} + R_4 e^{k\nu y})e^{i\phi} + c.c. \end{aligned} \quad (3.82)$$

olarak yazılır.

İkinci merteye çözümü inşaa etmek için bir önceki bölümdeki gibi hareket edilecektir. Yalnız bu halde $\bar{v}_2$ ve $\tilde{v}_2$ sırası ile aşağıdaki yapılarda olacaktırlar;

$$\bar{v}_2 = (\mathcal{C}_3 e^{-k\nu y} + \mathcal{C}_4 e^{k\nu y})e^{i\phi} + c.c. \quad (3.83a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{-lk\nu y} + D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{lk\nu y}]e^{il\phi} + c.c. \quad (3.83b)$$

Bu çözümler kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa; $\mathbf{U}_2^{(l)}$ için yine (3.33) denklem sistemi elde edilir. Fakat bu halde $\mathbf{b}_2^{(1)}$ vektörü

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_1(1+ikp_1 h_1)e^{ikp_1 h_1} - \mathcal{C}_2(1-ikp_1 h_1)e^{-ikp_1 h_1} \\ -\mathcal{C}_3(1+k\nu h_2)e^{k\nu h_2} - \mathcal{C}_4(1-k\nu h_2)e^{-k\nu h_2} \\ -(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) + \gamma(\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

yapısındadır ve $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ (3.30)' deki gibi, $\mathcal{C}_3$ ve $\mathcal{C}_4$ ise

$$\mathcal{C}_3 = \frac{iR_3}{c_2^2 k\nu} \mathcal{M}_{11}^{(2)} \quad \mathcal{C}_4 = -\frac{iR_4}{c_2^2 k\nu} \mathcal{M}_{11}^{(2)} \quad (3.85)$$

olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}^{(1)} = 0$ uygunluk koşulundan yine $\mathcal{A}_1$ ' in (3.42) denklemini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. $\mathbf{L}$ vektörü ise (3.37)' den (3.77) kullanılarak

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{1}{\cos kh_1 p_1}, \frac{\gamma}{\cosh kh_2 \nu}, 1, -\gamma k \nu \tanh(k \nu h_2) \right) \quad (3.86)$$

bulunur. İkinci merteye çözümler bu halde de (3.44) ve (3.45) formlarındadır. Bu ifadelerde $\mathbf{R}$ (3.81)' de tanımlanan vektördür.

Birinci ve ikinci merteye çözümler üçüncü merteye problemin (3.6a-b) denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler aşağıdaki formlara dönüşürler;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = & \left(\mathcal{D}_1 e^{ikp_1 y} + \mathcal{D}_2 y e^{ikp_1 y} + \mathcal{D}_3 e^{-ikp_1 y} + \mathcal{D}_4 y e^{-ikp_1 y} + \right. \\ & \left. \mathcal{D}_5 e^{3ikp_1 y} + \mathcal{D}_6 e^{-3ikp_1 y} \right) e^{i\phi} + c.c. + (e^{\pm i3\phi} \text{ 'li terimler}) \end{aligned} \quad (3.87a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} v_3 = & \left(\mathcal{D}_7 e^{-k\nu y} + \mathcal{D}_8 y e^{-k\nu y} + \mathcal{D}_9 e^{k\nu y} + \mathcal{D}_{10} y e^{k\nu y} + \right. \\ & \left. \mathcal{D}_{11} e^{-3k\nu y} + \mathcal{D}_{12} e^{3k\nu y} \right) e^{i\phi} + c.c. + (e^{\pm i3\phi} \text{ 'li terimler}) \end{aligned} \quad (3.87b)$$

Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= 2iR_1 \mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_1 \mathcal{N}^{(1)} + 2iR_1 \mathcal{M}_{12}^{(1)} - \hat{\mathcal{P}}_1 e^{-ikh_1 p_1} \\ \mathcal{D}_2 &= -2i \left(\frac{1}{c_1^2 k p_1} \right) R_1 \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(1)} \\ \mathcal{D}_3 &= 2iR_2 \mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_2 \mathcal{N}^{(1)} + 2iR_2 \mathcal{M}_{12}^{(1)} - \hat{\mathcal{P}}_1 e^{ikh_1 p_1} \\ \mathcal{D}_4 &= 2i \left(\frac{1}{c_1^2 k p_1} \right) R_2 \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(1)} \\ \mathcal{D}_5 &= \hat{\mathcal{Q}}_1 e^{-3ikh_1 p_1} \quad , \quad \mathcal{D}_6 = \hat{\mathcal{Q}}_1 e^{3ikh_1 p_1} \\ \mathcal{D}_7 &= 2iR_3 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_3 \mathcal{N}^{(3)} + 2iR_3 \mathcal{M}_{12}^{(2)} - \hat{\mathcal{P}}_3 e^{-2k\nu h_2} \\ \mathcal{D}_8 &= - \left(\frac{2}{c_2^2 k \nu} \right) R_3 \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)} \\ \mathcal{D}_9 &= 2iR_4 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_4 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_4 \mathcal{N}^{(2)} + 2iR_4 \mathcal{M}_{12}^{(2)} - \hat{\mathcal{P}}_3 \\ \mathcal{D}_{10} &= \left(\frac{2}{c_2^2 k \nu} \right) R_4 \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)} \\ \mathcal{D}_{11} &= \hat{\mathcal{Q}}_3 e^{-3k\nu h_2} \quad , \quad \mathcal{D}_{12} = \hat{\mathcal{Q}}_3 e^{3k\nu h_2} \end{aligned} \quad (3.88a-l)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{P}}_1 &= n_1 k^4 (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) \hat{\mathcal{S}}^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \\
 \hat{\mathcal{Q}}_1 &= n_1 k^4 (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) \hat{\mathcal{S}}^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \\
 \hat{\mathcal{P}}_3 &= n_2 k^4 (9\nu^4 + 2\nu^2 + 9) e^{-2k\nu h_2} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \\
 \hat{\mathcal{Q}}_3 &= n_2 k^4 (9\nu^4 + 2\nu^2 - 3) e^{-3k\nu h_2} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1
 \end{aligned} \tag{3.89a-d}$$

dır. Daha önceki bölümdeki gibi hareket edilerek üçüncü merteye problemin çözümleri

$$u_3 = \tilde{u}_3 + \bar{u}_3 \quad \text{ve} \quad v_3 = \tilde{v}_3 + \bar{v}_3 \tag{3.90}$$

formunda aranabilirler. $\bar{u}_3$, $\bar{v}_3$ özel çözümleri de $\bar{u}_3^{(l)}$, $\bar{v}_3^{(l)}$ (3.52a,b) ile tanımlanarak ve (3.53a,b) deki gibi

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(3)} \quad \text{ve} \quad \bar{v}_3 = \bar{v}_3^{(1)} + \bar{v}_3^{(3)} \tag{3.91}$$

şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edilebilir. Bu durumda

$l=1$ için $\mathcal{F}_3^{(1)}$ ve $\mathcal{G}_3^{(1)}$

$$\mathcal{F}_3^{(1)} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 y) y e^{ikp_1 y} + (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 y) y e^{-ikp_1 y} + \mathcal{E}_5 e^{3ikp_1 y} + \mathcal{E}_6 e^{-3ikp_1 y} + c.c. \tag{3.92a}$$

$$\mathcal{G}_3^{(1)} = (\mathcal{E}_7 + \mathcal{E}_8 y) y e^{-k\nu y} + (\mathcal{E}_9 + \mathcal{E}_{10} y) y e^{k\nu y} + \mathcal{E}_{11} e^{-3k\nu y} + \mathcal{E}_{12} e^{3k\nu y} + c.c. \tag{3.92b}$$

formlarında seçilebilir. Bu ifadeler (3.46a,b) denklemlerinde kullanılırsa gerekli ara işlemlerden sonra ϵ_i , $i = 1, \dots, 12$, katsayıları

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1 &= i\mathcal{D}_1/2kc_1^2 p_1 - \mathcal{D}_2/4k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_2 &= i\mathcal{D}_2/4kc_1^2 p_1 \\
 \mathcal{E}_3 &= -i\mathcal{D}_3/2kc_1^2 p_1 - \mathcal{D}_4/4k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_4 &= -i\mathcal{D}_4/4kc_1^2 p_1 \\
 \mathcal{E}_5 &= \mathcal{D}_5/8k^2 c_1^2 p_1^2 & \mathcal{E}_6 &= \mathcal{D}_6/8k^2 c_1^2 p_1^2 \\
 \mathcal{E}_7 &= \mathcal{D}_7/2kc_2^2 \nu + \mathcal{D}_8/4k^2 c_2^2 \nu^2 & \mathcal{E}_8 &= \mathcal{D}_8/4kc_2^2 \nu \\
 \mathcal{E}_9 &= -\mathcal{D}_9/2kc_2^2 \nu + \mathcal{D}_{10}/4k^2 c_2^2 \nu^2 & \mathcal{E}_{10} &= -\mathcal{D}_{10}/4kc_2^2 \nu \\
 \mathcal{E}_{11} &= -\mathcal{D}_{11}/8k^2 c_2^2 \nu^2 & \mathcal{E}_{12} &= -\mathcal{D}_{12}/8k^2 c_2^2 \nu^2
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

olarak elde edilirler. (3.50a,b) ve (3.51a-d) denklemleriyle $\tilde{u}_3$ ve $\tilde{v}_3$ için tanımlanan problemin çözümleri

$$\tilde{u}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \right] e^{il\phi} + c.c.$$

$$\tilde{v}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lk\nu y} + D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lk\nu y} \right] e^{il\phi} + c.c. \quad (3.94a, b)$$

olarak yazılır. Bu çözümlerle birlikte u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , $\bar{u}_3$, $\bar{v}_3$ çözümleri (3.51a-d) sınır koşullarında kullanılırsa $U_3^{(l)}$ için

$$\mathbf{W}_l U_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)} \quad (3.95)$$

denklemleri elde edilir. $\mathbf{F}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} F_1 &= -\beta_1 h_1 k^4 (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) \hat{S}^3 \\ F_2 &= \beta_2 h_2 k^4 (9\nu^4 - 2\nu^2 + 9) e^{-3k\nu h_2} \\ F_3 &= \beta_1 \frac{k^3}{p_1} (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) \hat{S}^3 \sin kh_1 p_1 - \frac{3}{4} \beta_1 \frac{k^3}{p_1} (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) \hat{S}^3 \sin 3kh_1 p_1 \\ &\quad + \gamma \beta_2 \frac{k^3}{2\nu} (9\nu^4 - 2\nu^2 + 9) (1 - e^{-2k\nu h_2}) e^{-2k\nu h_2} \\ &\quad - \frac{3}{4} \gamma \beta_2 \frac{k^3}{\nu} (9\nu^4 + 2\nu^2 - 3) e^{-3k\nu h_2} \sinh(3kh_2 \nu) \\ &\quad - \beta_1 \{ 2k^3 p_1 (1 + 9p_1^2) \sin(kh_1 p_1) + 2k^3 p_1 (1 - 3p_1^2) \sin(3kh_1 p_1) \} \hat{S}^3 \\ &\quad + \gamma \beta_2 \{ -k^3 \nu (1 + 3\nu^2) e^{-6k\nu h_2} - k^3 \nu (1 - 9\nu^2) e^{-4\nu h_2} \\ &\quad + k^3 \nu (1 - 9\nu^2) e^{-2k\nu h_2} + k^3 \nu (1 + 3\nu^2) \} \\ F_4 &= -\beta_1 \frac{k^2}{4p_1^2} (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) \hat{S}^3 \cos(3kh_1 p_1) \\ &\quad - \beta_2 \frac{k^2}{4\nu^2} (9\nu^4 + 2\nu^2 - 3) \cosh 3kh_2 \nu e^{-3k\nu h_2}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

olarak tanımlanmak üzere (3.61) uygunluk koşulundan (3.60) denklemi elde edilir. (3.68) varsayımı altında bu denklemden $k\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ için yine (3.70)'deki NLS denklemine ulaşılır.

3.2.3 $c_1 < c < c_2$ İçin $h_2 \rightarrow \infty$ Limiti ve Bazı Gözlemler

$h_2 \rightarrow \infty$ için bölüm 3.2.2' de incelenen problem fiziksel ve geometrik olarak daha önce [17]' de incelenen tabakalı ortamlarda Love dalgalarının nonlinear modülasyonu problemine dönüşür. Bu nedenle bölüm 3.2.2'deki sonuçların da [17]' de elde edilen sonuçlara dönüşmesi gerekir. [17]' de de modülasyon NLS denklemleri ile karakterize edildiği için Δ , Γ katsayılarına dönüşeceğini göstermek yeterli olacaktır.

Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\lim_{h_2 \rightarrow \infty} \hat{S} e^{-k\nu h_2} &= \lim_{h_2 \rightarrow \infty} \frac{\cosh(k\nu h_2)}{\cos(kp_1 h_1)} e^{-k\nu h_2} = \frac{1}{2 \cos(kp_1 h_1)} \\ \lim_{h_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\cosh(k\nu h_2)} &= 0 \\ \lim_{h_2 \rightarrow \infty} \tanh(k\nu h_2) &= 1\end{aligned}\quad (3.97)$$

dir. Bu durumda (3.78) dispersiyon bağıntısı

$$p_1 \tan(kh_1 p_1) = \gamma \nu \quad (3.98)$$

'ye dönüşür. Bu ise Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Bu limitte (3.81) ve (3.86) denklemleri ile tanımlanan $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{L}$ vektörleri de sırası ile

$$\mathbf{R}^T = \left(\frac{1}{2 \cos(kp_1 h_1)} e^{-ikp_1 h_1}, \frac{1}{2 \cos(kp_1 h_1)} e^{ikp_1 h_1}, 0, 1 \right) \quad (3.99)$$

ve

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{1}{\cos(kp_1 h_1)}, 0, 1, -\gamma k \nu \right) \quad (3.100)$$

formlarına dönüşürler. $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{L}$ 'nin sıfır olmayan bileşenlerinin [17]'deki $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{R}$ vektörlerinin bileşenlerine eşit oldukları görülür.

Diğer taraftan

$$\lim_{h_2 \rightarrow \infty} \hat{S}^3 = \frac{1}{8 \cos^3(kp_1 h_1)} \quad (3.101)$$

ve

$$\lim_{h_2 \rightarrow \infty} e^{-3k\nu h_2} \cosh(3k\nu h_2) = \frac{1}{2} \quad (3.102)$$

olduğu dikkate alınırsa gerekli ara hesaplardan sonra

$$F_1 = -\beta_1 h_1 k^4 (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) (1/8 \cos^3(kp_1 h_1))$$

$$F_2 = 0$$

$$F_3 = \beta_1 \frac{k^3}{p_1} (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9) (1/8 \cos^3(kp_1 h_1)) \sin kh_1 p_1$$

$$-\beta_1 \frac{3}{4} \frac{k^3}{4p_1} (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) (1/8 \cos^3(kp_1 h_1)) \sin 3kh_1 p_1$$

$$-\gamma \beta_2 \frac{3k^3}{4\nu} (9\nu^4 + 2\nu^2 - 3) \frac{1}{2}$$

$$-\beta_1 \{2k^3 p_1 (1+9p_1^2) \sin(kh_1 p_1) + 2k^3 p_1 (1-3p_1^2) \sin(3kh_1 p_1)\} (1/8 \cos^3(kp_1 h_1)) \\ + \gamma \beta_2 k^3 \nu (1+3\nu^2)$$

$$F_4 = -\beta_1 \frac{k^2}{4p_1^2} (9p_1^4 - 2p_1^2 - 3) (1/8 \cos^3(kp_1 h_1)) \cos(3kh_1 p_1) \\ - \beta_2 \frac{k^2}{4\nu^2} (9\nu^4 + 2\nu^2 - 3) \frac{1}{2}. \quad (3.103)$$

F_3 'deki

$$-\beta_1 \{2k^3 p_1 (1+9p_1^2) \sin(kh_1 p_1) + 2k^3 p_1 (1-3p_1^2) \sin(3kh_1 p_1)\} (1/8 \cos^3(kp_1 h_1)) \quad (3.104)$$

terimi (3.98) dispersiyon bağıntısı kullanılarak

$$-\beta_1 k^3 \gamma \nu (1+3\gamma^2 \nu^2) \quad (3.105)$$

formunda yazılabilir.

Yukarıdaki sonuçlardan hemen görülürki (3.103)' deki F_1 , F_3 ve F_4 sırası ile [17]' deki F_1 , F_2 ve F_3 'e özdeş olarak eşittir. (3.100) gözönüne alınırsa $L.F$ 'ler de özdeş olarak eşit olacaklardır. Dolayısıyla Δ katsayıları eşit olacaklardır. $h_2 \rightarrow \infty$ limitinde dispersiyon bağıntısı (3.98)' e dönüştüğü için Γ katsayıları da eşit olacaklardır.

3.2.4. NLS Denklemlerinin Bazı Basit Çözümleri ve Δ , Γ

Katsayılarının Dalga Sayısına Göre Değişimleri:

Önce NLS denklemlerinin düzlem dalga çözümünü ve düzlem dalgalarının küçük pertürbasyonlar altında stabilitesini inceleyeceğiz. Kolayca gösterilebilirki

$$\mathcal{A} = \frac{k}{2} a_0 e^{i(\Delta/4)k^2 a_0^2 \tau} \quad a_0 = \text{sabit} \quad (3.106)$$

fonksiyonu NLS denkleminin bir çözümüdür ve bu bir düzlem dalga gösterir.

Şimdi $\mathcal{A}$ 'yı

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a(\xi, \tau) e^{ib(\xi, \tau)} \quad (3.107)$$

olarak alalım. Bu kullanılırsa (3.70) NLS denklemini a ve b için

$$a_\tau + \Gamma(ab_{\xi\xi} + 2a_\xi b_\xi) = 0 \quad (3.108a)$$

$$ab_\tau - \frac{\Delta}{4}a^3 - \Gamma(a_{\xi\xi} - ab_\xi^2) = 0 \quad (3.108b)$$

denklem sistemine dönüşür. Şimdi a ve b 'nin (3.106)' de verilen düzlem dalga ve üzerine etkiyen küçük pertürbasyonlardan oluştuğunu kabul edelim, yani a_1 ve b_1 küçük pertürbasyonları göstermek üzere

$$a = ka_0 + a_1(\xi, \tau) \quad , \quad b = \frac{\Delta}{4}k^2a_0^2\tau + b_1(\xi, \tau) \quad (3.109)$$

olsun. Bu ifadeler (3.108) denkleminde kullanılır ve a_1 ve b_1 'in küçük oldukları kabulü dikkate alınırsa aşağıdaki lineerleştirilmiş denklemler elde edilirler;

$$\begin{aligned} a_{1\tau} + ka_0\Gamma b_{1\xi\xi} &= 0 \\ ka_0b_{1\tau} - \frac{3}{4}\Delta k^2a_0^2a_1 - \Gamma a_{1\xi\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Bu denklemin çözümleri K reel olmak üzere

$$a_1 = A_0e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad , \quad b_1 = B_0e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (3.111)$$

şeklinde aranır, görülürki nontrivial çözüm için

$$\Omega^2 = \Gamma^2 K^4 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Delta k^2 a_0^2}{\Gamma K^2}\right) \quad (3.112)$$

olmalı. Verilen bir K için eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise (3.112)' den Ω 'nın daima reel olacağı görülür. Bu durumda a_1 ve b_1 sınırlı kalırlar. Fakat eğer $\Gamma\Delta > 0$ ise Ω , $K < (\sqrt{3}/2)ka_0(\Delta/\Gamma)$ değerleri için kompleks olacaktır. Bu durumda a_1 ve b_1 - sınırsız olarak büyürler. Dolayısıyla $\Gamma\Delta < 0$ olduğunda (3.106) düzlem dalgası küçük pertürbasyon altında stabil kalacaktır, $\Gamma\Delta > 0$ olduğunda bu dalgalar stabil olmayacaklardır.

a_1 ve b_1 lineerleştirilmiş çözümleri çok kısa zaman aralığında geçerli olmalarına rağmen $\Gamma\Delta > 0$ veya $\Gamma\Delta < 0$ olması NLS denklemini ile karakterize edilen asimptotik dalga alanının verilen bir başlangıç datasından uzun zaman aralığında nasıl gelişeceğini etkiler. Bilinmektedir ki $|\xi| \rightarrow \infty$ da sıfıra giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma\Delta > 0$ ise formu aşağıda verilecek olan bir dizi

solitona, fakat eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür. Bu nedenle soliton tipinden çözümlerin mevcut olup olamayacağına karar verebilmek için $\Gamma\Delta$ teriminin işaretinin dalga sayısına ve ortamların mekaniksel özelliklerine göre ne şekilde değiştiğini bilmek gerekir. Fakat yapı çok karmaşık olduğu için nümerik işlem yapmadan bu işin içinden çıkmak mümkün değildir. Burada lineer malzeme özellikleri aynı fakat lineer olmayan özellikleri değişen bazı malzemeler için $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi incelenmiştir. Lineer özellikleri belirleyen γ ve c_2/c_1 için sırası ile 2.159 ve 1.297 alınmıştır. Ayrıca $c_1 < c < c_2$ olduğu kabul edilmiş ve $h_2/h_1 = 5$ alınmıştır. Nonlineer malzeme parametreleri (β_1, β_2) için sertleşen ve yumuşayan malzemelerden meydana gelen değişik yapıları temsil edecek şekilde değerler seçilmiştir. Sonuçlar şekil 2,3,4 ve 5' de gösterilmektedir. Bu şekillerden nonlineer özelliklerin $\Gamma\Delta$ 'nın işaretini kuvvetli olarak etkilediği gözlemlenmektedir.

Şimdi kısaca zarf soliton çözümünden bahsedeceğiz. NLS denkleminin,

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi(\eta)e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad , \quad \eta = \xi - V_0\tau \quad , \quad V_0 = \text{sabit} \quad (3.113)$$

formundaki ilerleyen dalga çözümleri Jakobian eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilirler. Bu çözümlerin de davranışı $\Gamma\Delta$ 'nın işaretine bağlıdır. Bunların açık formları üzerinde durmayacağız. Şimdi

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad \phi \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad d\phi/d\eta \rightarrow 0$$

ve $\Gamma\Delta > 0$ olsun, bu durumda ϕ fonksiyonu için çözüm

$$\phi(\eta) = \phi_0 \text{sech}((\Delta/2\Gamma)^{1/2} \phi_0 \xi) \quad (3.114)$$

olarak elde edilir. Burada

$$V_0 = 2K\Gamma \quad \text{ve} \quad (\Gamma K^2 - \Omega)/\Delta\phi_0^2 = \frac{1}{2} \quad (3.115)$$

dir. (3.114) çözümü zarf solitonu olarak adlandırılır [23,24].

SONUÇ

Bu çalışmada uniform kalınlıklı farklı neo-Hookean ortamlardan oluşan iki tabakalı bir ortamda küçük fakat sonlu genlikli kayma (SH) dalgalarının modülasyonu incelenmiştir. Bu amaçla olayı matematiksel olarak modelleyen bir nonlinear sınırdeğer probleminin asimptotik çözümü inşa edilmiştir. Analizde zayıf nonlinearlikle dispersiyon dengelenerek, dalga modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

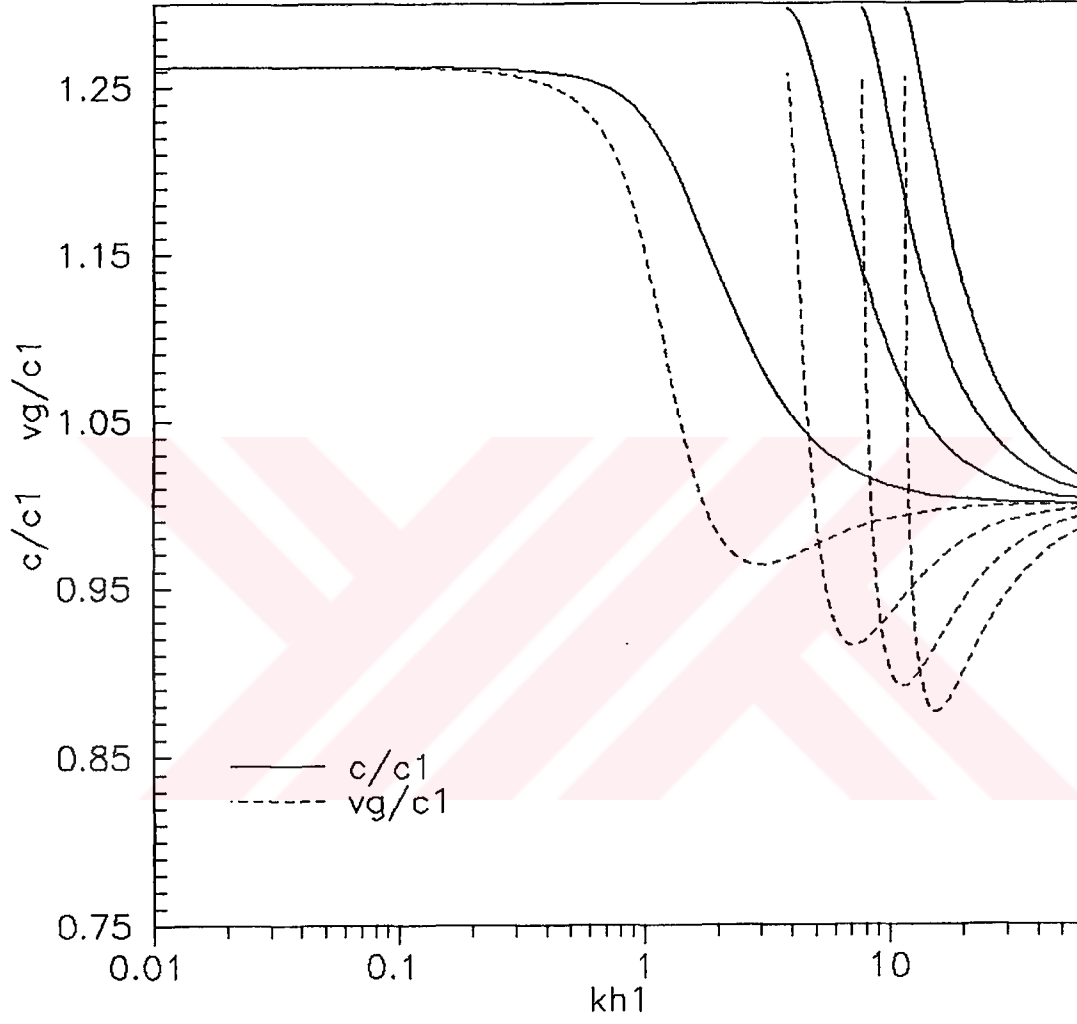
Elde edilen NLS denkleminin katsayıları, Γ ve Δ , ortamın lineer ve nonlinear fiziksel özelliklerine ve dalga sayısına bağlıdır. Sonsuzda sıfıra giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma\Delta > 0$ ise bir dizi solitona, fakat eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür. Bu nedenle soliton tipinden çözümlerin varlığına karar verebilmek için $\Gamma\Delta$ teriminin işaretinin dalga sayısına ve fiziksel özelliklere göre ne şekilde değiştiğini bilmek gerekir. Γ ve Δ 'nın yapıları çok karmaşık olduğu için $\Gamma\Delta$ sayısal olarak değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmede lineer özellikler sabit tutulmuş, nonlinear özellikler değiştirilerek $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan nonlinear özelliklerin $\Gamma\Delta$ 'nın özelliklerini kuvvetli olarak etkiledikleri gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

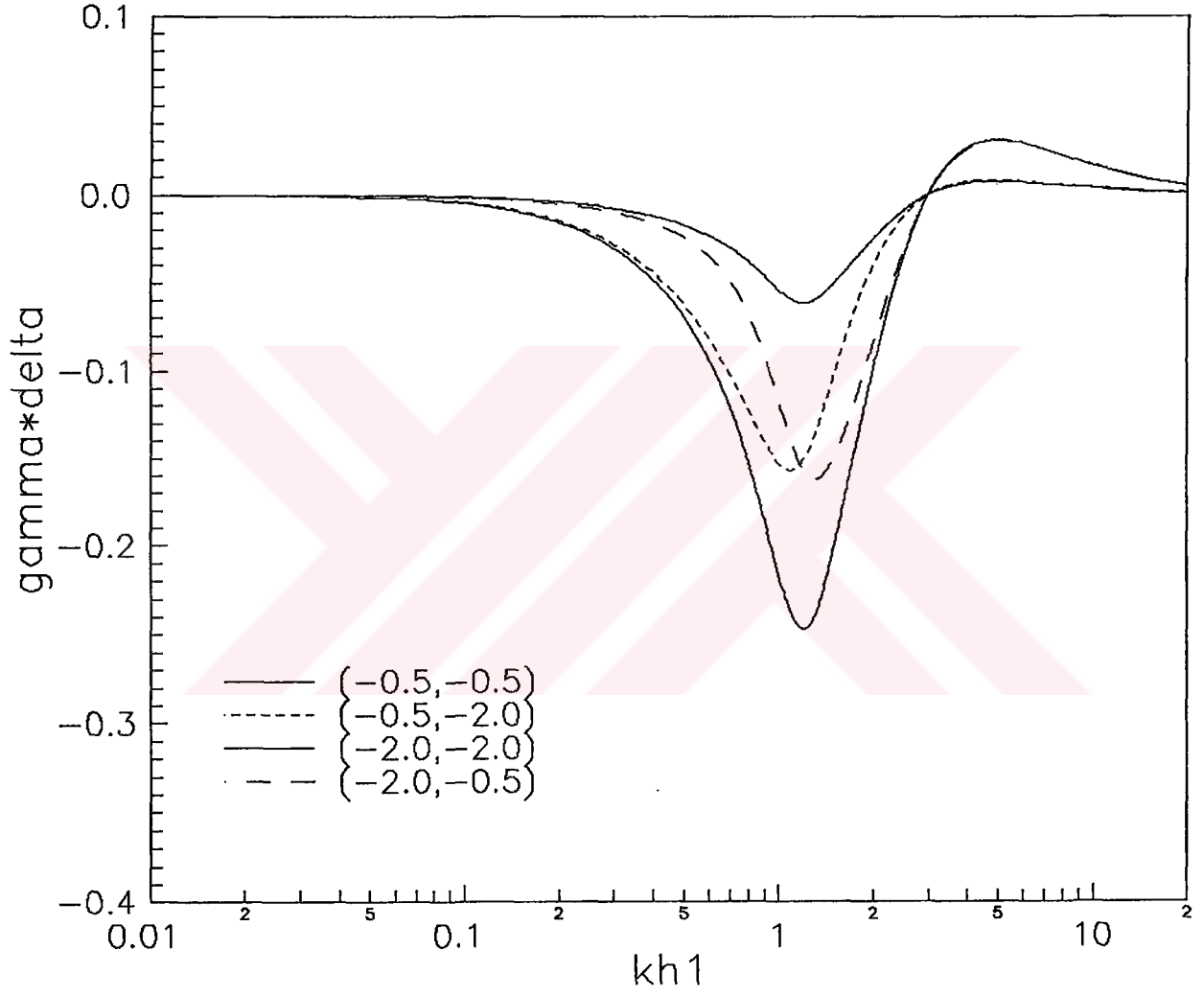
- [1] LOVE A.E.H., Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition, Dover Publications Inc., New York, (1944).
- [2] ERINGEN A.C. and ŞUHUBİ E.S., Elastodynamics, Vol.III., Academic Press, New York, (1975).
- [3] EWING W.M., JADESKY W.S. and PRESS F., Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, New York, (1957).
- [4] WHITE R.M., in Methods of Experimental Physics, Vol.19, Chapter 10, Academic Press, New York, (1981).
- [5] MAUGIN G.A., in Advances in Applied Mechanics, Vol.23, p.373. Academic Press, New York, (1983).
- [6] ACHENBACH J.D., Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Amsterdam, (1973).
- [7] GRAF K.F., Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, Oxford, (1975).
- [8] CHEN P.J., in Handbuch der Physik (Ed.by. C.A.TRUEDEL), Vol.VIa/3 pp.303-402, Springer, (1973).
- [9] McCARTY M.F., in Continuum Physics (Ed.by. A.C.ERİNGEN), Vol.II, pp.449-521, Academic Press, New York, (1975).
- [10] ERINGEN A.C. and ŞUHUBİ E.S., Elastodynamics, Vol.1, Academic Press, New York, (1974).
- [11] NARIBOLI G.A., J. Math. Phys. Sci. 4, 64, (1970).
- [12] OSTROVSKII L.A. and SUTIN A.M., Appl. Math. Mech. (P.M.M) 41, 531, (1977).
- [13] HIRAO M. and SUGIMOTO N., J.Phys. Soc. Japan, 42, 2056,
- [14] TEYMUR M. and ŞUHUBİ E.S., J. Inst. Maths Applic. 21, 25, (1978).
- [15] SOERENSEN M.P., CHRISTIANSEN P.L. and LAMDAHL P.S., J. Acoust. Soc. Am. 76, 871, (1984).
- [16] CLARKSON P.A., LeVEQUE R.J. and SAXTON R., Stud. Appl. Maths., 75, 95, (1986).
- [17] TEYMUR M., Int. J. Engng. Sci. 26, 907, (1988).

- [18] TEYMUR M., in Recent Development in Surface Acoustic Waves (Ed. by D.F.PARKER and G.A.MAUGIN), pp.54-61, Springer, Berlin, (1988).
- [19] GARCIA-REIMBERT C. and MINZONI A.A., J. Elasticity, 20, 143, (1988).
- [20] MAUGIN G.A. and HADOUAJ H., Phy. Rev. B44, 3, 1264, (1991).
- [21] TEYMUR M., in Nonlinear Wave Motion (Ed.by A.JEFFREY), pp.205-228, Wiley, New york, (1989).
- [22] TEYMUR M., Int. J. Engng. Sci., 34, 227, (1996).
- [23] DODD R.K., EILBECK J.C., GIBBON J.D. and MORRIS H.C., Solitons and Nonlinear Waves, Academic Press, London, (1982).
- [24] ABLOWITZ M.J. and SEGUR H., Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, (1981).
- [25] CARROL M.M., Acta. mech., 3, 167, (1962).
- [26] JEFFREY A. and KAWAHARA T., Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, Boston, (1981).

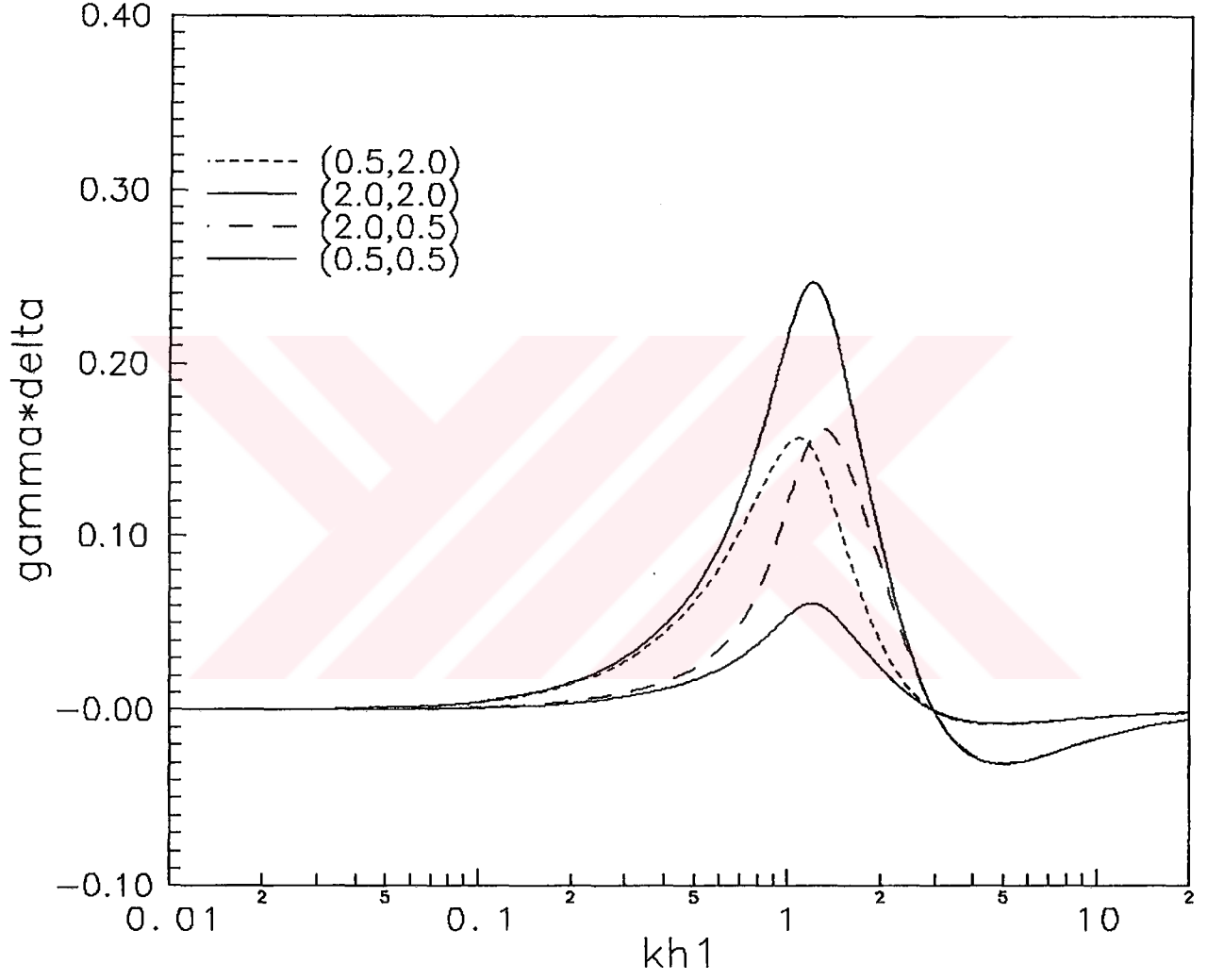
EK A



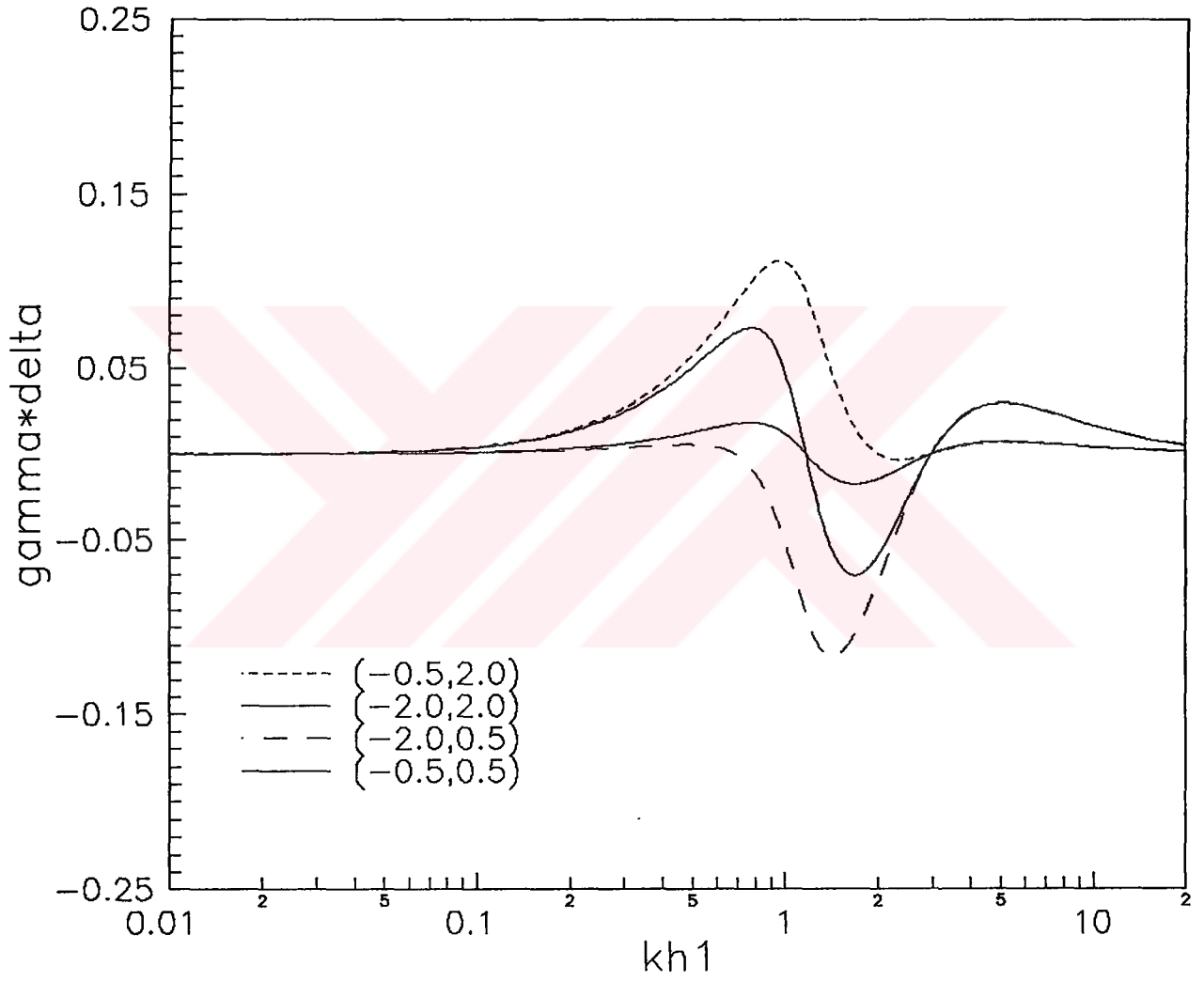
Şekil A.1. Faz ve grup hızlarının kh_1 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dallar için değişimleri. Lineer model parametreleri $\gamma = 2.159$ ve $c_2/c_1 = 1.297$.



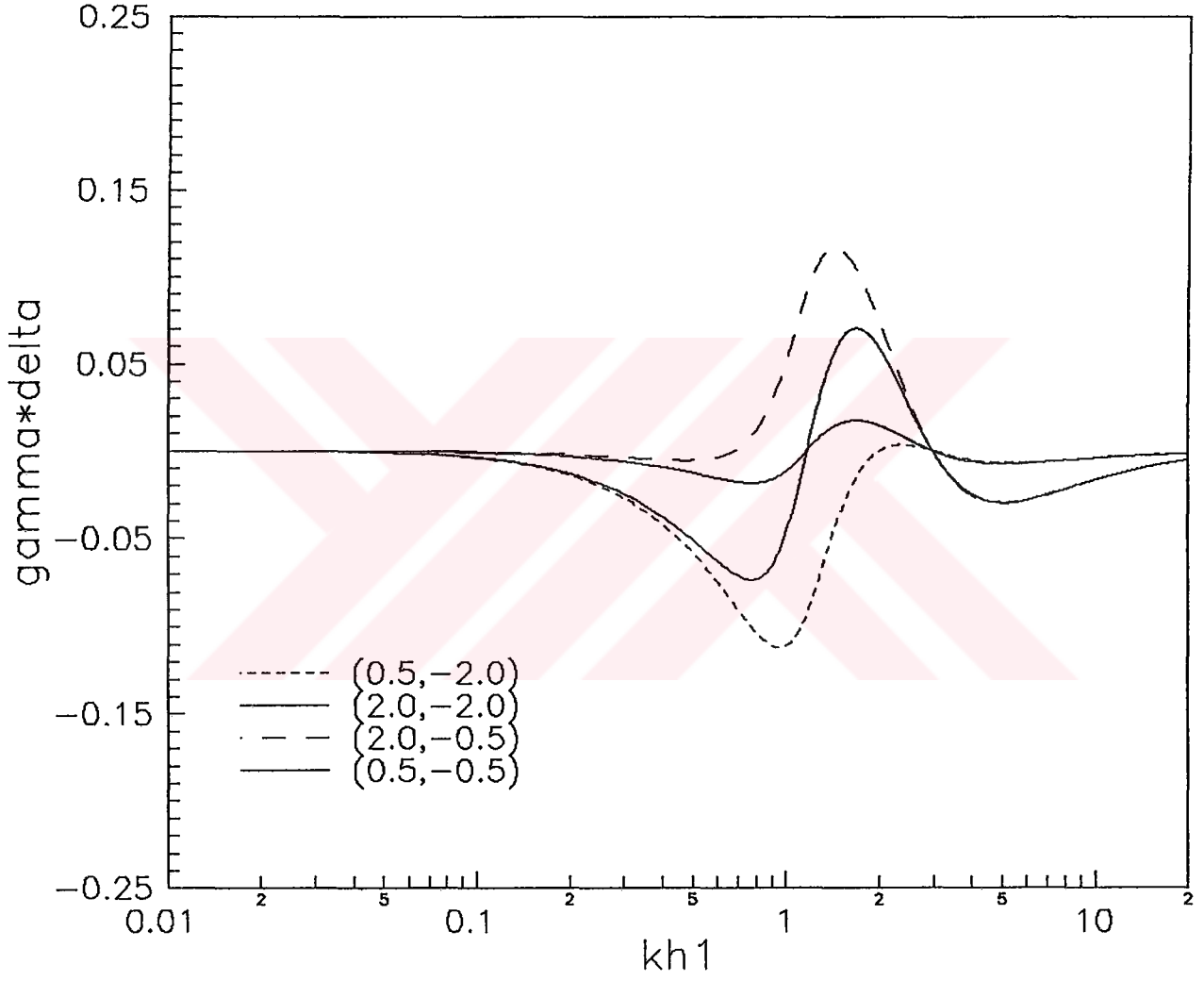
Şekil A.2. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Her iki tabaka yumuşayan malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(-0.5, -0.5)$, $(-0.5, -2.0)$, $(-2.0, -0.5)$ ve $(-2.0, -2.0)$ olarak alınmıştır.



Şekil A.3. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Her iki tabaka sertleşen malzeme. (β_1, β_2) değerleri (0.5,0.5), (0.5,2.0), (2.0,0.5) ve (2.0,2.0) olarak alınmıştır.



Şekil A.4 $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Birinci tabaka yumuşayan, ikinci tabaka sertleşen malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(-0.5, 0.5)$, $(-0.5, 2.0)$, $(-2.0, 0.5)$ ve $(-2.0, 2.0)$ olarak alınmıştır.



Şekil A.3. $\Gamma\Delta$ 'nın kh_1 'e göre değişimi (birinci dal için). Birinci tabaka sertleşen, ikinci tabaka yumuşayan malzeme. (β_1, β_2) değerleri $(0.5, -0.5)$, $(0.5, -2.0)$, $(2.0, -0.5)$ ve $(2.0, -2.0)$ olarak alınmıştır.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğretimini Oğuzhan İlkokulunda tamamladı. Ortaokul ve lise eğitimini Sağmalcılar Lisesi'nde 1989 yılında tamamladıktan sonra aynı yıl Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. Buradan 1993 yılında bölüm birincisi olarak mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans üstü eğitimine başladı. 1995 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu bölümde çalışmaktadır.

