XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

VİSKOELASTİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ İKİ KATLI İÇİ BOŞ DAİRESEL SİLİNDİRDE EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGALARIN DİSPERSİYONU

S.D. Akbarov[1], T.Koçal[2] ve T.Kepçeler[3]
[1,3] Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, YTU,
39340 Beşiktaş, İstanbul
[1] Matematik ve Mekanik Enstitüsü, Azerbaycan Milli Bilimler Akademisi,
Bakü, Azerbaycan
[2] Gemi İnşaatı ve Denizcilik Fakültesi, Gemi Makineleri İşletme Mühendisliği Bölümü, YTU,
39340 Beşiktaş, İstanbul

ABSTRACT

The paper deals with the study of axisymmetric longitudinal wave propagation (dispersion) in the bi-layered hollow circular cylinder made of linear viscoelastic materials. The investigations are made within the scope of the piecewise homogeneous body model by utilizing of the exact equations of the linear viscoelasto-dynamics. The layers' materials of the cylinder are described through fractional exponential operators and this relations are used in the numerical investigations. Dispersion curves are submitted for certain selected dispersive attenuation cases under various values of the problem parameters and the influence of the rheological parameters on these curves are discussed.

ÖZET

Bu makalede, lineer viskoelastik malzemeden yapılmış iki katlı içi boş silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı çalışmasından bahsedilmektedir. Araştırmalar viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında yapıldı. Silindir katman materyallerinin bünye denklemleri fraksiyonel eksponansiyel operatörler aracılığıyla tanımlandı ve bu bağıntılar nümerik araştırmalarda kullanıldı. Dispersiyon eğrilerinde problem parametrelerinin değişken değerlerindeki birtakım seçilmiş dispersif sönüm durumları sunulmaktadır ve bu eğriler üzerinde reolojik parametrelerin etkisi tartışılmıştır.

GİRİŞ

Viskoelastik malzemelerde zamana göre harmonik dalga dispersiyonu ve sönümü ile ilgili yapılan çalışmalar; sadece teorik anlamda değil, aynı zamanda uygulama alanında da bu çalışmaların büyük bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Gaz, petrol ve su taşınması olan birçok endüstrinin altyapısında kullanılan borular ve kanalların tahribatsız muayenesi bu tür uygulamalara örnek olarak gösterilmektedir. Birçok yapıda korozyondan korumak amacıyla kanallar viskoelastik polimerlerle kaplanmaktadır, ancak kanalların tahribatsız testlerinin yapılabilmesi için dalga yayılım sönümü ve dispersiyon kurallarının bilinmesi gerekmektedir.

Viskoelastik materyallerden yapılmış cisimler içindeki güdümlü dalgaların yayılımı ile ilgili çalışmaların uygulama alanlarından biri de depremin neden olduğu veya farklı tip güç kaynaklarına ait titreşim ve dalgaların sönümü için viskoelastik sistemlerin kullanımıdır. Weiss

[1] ve Tamm ile Weiss [2] tarafından izotropik viskoelastik katmandaki Lamb dalga yayılımıyla alakalı makaleler, bu konudaki ilk çalışmalardandır. Bu makalelerde elastik sabitlerinin kompleks ve frekanstan bağımsız olduğu varsayılmıştır.

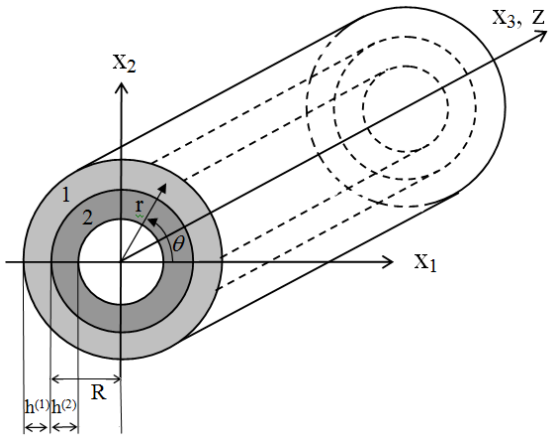
Barshinger ve Rose [3] tarafından yapılmış makalede polimer viskoelastik katmanla kaplanan elastik metal içi boş silindirdeki eksenel simetrik boyuna güdümlü dalga dispersiyonundan ve sönümden bahsedilmiştir. Kaplanan tabakanın viskoelastisitesi, daha önceden bahsedilen viskoelastik materyallerdeki boyuna ve enine dalgaların sönüm katsayısı ile göz önünde bulundurulmuştur. Bu 1 – 5 MHz arasındaki frekanslar için deneyle hesaplanan katsayılar, kompleks modülün saptanmasında kullanılmaktadır. Sonuç olarak kompleks modülün kullanımıyla çift katmanlı içi boş silindirin dalga dispersiyonu ve sönüm dispersiyonu araştırılmıştır.

Bu konuda yapılan eski araştırmalara baktığımızda viskoelastik malzemelerin reolojik parametrelerinin dalga dispersiyonuna etkisini gösteren sonuçlar elde edilememiştir. Bu anlamda ilk çalışma Akbarov ve Kepceler [4] tarafından viskoelastik üç katlı içi boş silindir için burulma dalgalarının yayılımını incelemişlerdir.

Takdim edilen bu çalışmada Akbarov ve Kepceler [4] tarafından araştırılmış olanlar viskoelastik malzemeden yapılmış çift katlı içi boş silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı için geliştirilir. Malzemelerin bünye denklemleri Rabotnov'un [5] fraksiyonel eksponansiyel operatörleri ile verilir. İncelemeler parçalı homojen cisim modeli ve viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Problemde Şekil 1'de görülen içi boş çift katlı dairesel silindir ele alınmıştır. İç dairesel silindirin dış çeperi yarıçap (R) ve iç ile dış silindirin kalınlıkları sırasıyla $h^{(2)}$ ve $h^{(1)}$ olarak simgelenmiştir. İç ve dış içi boş silindir ile ilgili değerler sırasıyla üst indeks (2) ve üst indeks (1) olarak belirtilmiştir.



Şekil 1. 2 katlı içi boş silindirin geometrisi

Silindir bileşenlerinin malzemeleri homojen, izotropik ve kalıtsal linear viskoelastik olduğu varsayılmıştır. Söz konusu sistemin noktalarının konumlarını saptamada silindirik sistem koordinatları $Or\theta z$ (Şekil 1) kullanılmıştır. Ayrıca silindirlerin Oz ekseni yönünde sonsuz uzunluğa sahip olduğu varsayılmıştır.

Böylece viskoelastik cisimler için doğrusal hareket denklemlerini kullanarak parçalı homojen cisim modeli kapsamında Oz ekseni boyunca eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı incelenmiştir. Söz konusu durum için korunum denklemlerini ve mekanik bağıntıları yazacak olursak,

Hareket denklemleri:

$$\frac{\partial T_{rr}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial T_{rz}^{(n)}}{\partial z}+\frac{1}{r}(T_{rr}^{(n)}-T_{\theta\theta}^{(n)})=\rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2}\ ,$$

$$\frac{\partial T_{rz}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial T_{zz}^{(n)}}{\partial z}+\frac{1}{r}T_{rz}^{(n)}=\rho^{(n)}\frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial t^2}\,. \qquad (1)$$

Bünye denklemleri:

$$T_{(ii)}^{(n)}=\lambda^{(n)*}\theta^{(n)}+2\mu^{(n)*}\varepsilon_{(ii)}^{(n)}\ ,\ (ii)=rr,zz,\theta\theta\,,$$

$$T_{rz}^{(n)}=2\mu^{(n)*}\varepsilon_{rz}^{(n)}\ ,\ \theta^{(n)}=\varepsilon_{rr}^{(n)}+\varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}+\varepsilon_{zz}^{(n)}\,, \qquad (2)$$

$\lambda^{(n)*}$ ve $\mu^{(n)*}$ viskoelastik operatörleri denklem (3)'te verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix}\lambda^{(n)*}\\ \mu^{(n)*}\end{Bmatrix}\varphi(t)=\begin{Bmatrix}\lambda_0^{(n)}\\ \mu_0^{(n)}\end{Bmatrix}\varphi(t)+\int_0^t\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \qquad (3)$$

Denklem 3'teki $\lambda_0^{(n)}$ ve $\mu_0^{(n)}$, Lame sabitlerinin $t\to 0$'daki anlık değeridir ve $\lambda_1^{(n)}(t)$ ile $\mu_1^{(n)}(t)$ ise bileşen malzemelerinin kalıtsal özelliklerini tanımlayan çekirdek fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{rr}^{(n)}=\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}\,,\ \ \varepsilon_{rz}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial z}+\frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial r}\right),\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}=\frac{u_r^{(n)}}{r}\,,\ \varepsilon_{zz}^{(n)}=\frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial z}\,. \qquad (4)$$

(1) – (4) bağıntıları izotropik sürekli ortamlarda lineer viskoelastisite teorisi denklemleridir. Şekil 1'e göre sınır ve temas koşullarını ele aldığımızda;

$$T_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\,,\ T_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\ ,$$

$$T_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R}=T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,\ T_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R}=T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$u_r^{(2)}\Big|_{r=R}=u_r^{(1)}\Big|_{r=R}\,,\ u_z^{(2)}\Big|_{r=R}=u_z^{(1)}\Big|_{r=R}\,,$$

$$T_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,,\ T_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,. \qquad (5)$$

Viskoelastik malzemelerden yapılmış çift katmanlı içi boş silindirde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı probleminin formülasyonu, bünye denklemlerindeki (3) keyfi çekirdek fonksiyonları $\lambda_1^{(n)}(t)$ ve $\mu_1^{(n)}(t)$ 'lerin açık biçimde verilmesi ile tamamlanır.

ÇÖZÜM METODU

Dalganın Oz ekseni yönünde yayıldığını göz önüne alarak yer değiştirme ve şekil değiştirmeyi aşağıdaki biçimde gösterebiliriz:

$$u_r^{(n)}=v_r^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}\,,\ u_z^{(n)}=v_z^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}\ ,\ \theta^{(n)}=\upsilon^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}\,,$$

$$\varepsilon_{(ii)}^{(n)}=\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)},\ (ii)=rr;\theta\theta;zz;rz \qquad (6)$$

(k : dalga sayısı, ω : dairesel frekans),

$$\gamma_{rr}^{(n)}=\frac{dv_r^{(n)}(r)}{dr}\ ,\ \gamma_{\theta\theta}^{(n)}=\frac{v_r^{(n)}(r)}{r}\ ,\ \gamma_{zz}^{(n)}=\frac{dv_z^{(n)}(r)}{dz}\ ,\ \gamma_{rz}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_r^{(n)}(r)}{dz}+\frac{dv_z^{(n)}(r)}{dr}\right) \tag{7}$$

Viskoelastik malzemeler için yüksek derecede hassasiyetle geçerli olan

$$\int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)d\tau\approx\int_{-\infty}^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)d\tau\,, \tag{8}$$

ifadesini mekanik bağıntılar (2) ve (3)'te uygularsak, aşağıdakiler yazılabilir.

$$T_{(ii)}^{(n)}=\lambda_0^{(n)}\vartheta^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}+e^{ikz}\vartheta^{(n)}(r)\int_{-\infty}^t\lambda_1^{(n)}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau+$$

$$2\mu_0^{(n)}\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}+e^{ikz}\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)\int_{-\infty}^t\mu_1^{(n)}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,. \tag{9}$$

$t-\tau=s$ dönüşümü kullanılarak denklem (9)'deki integraller için aşağıdaki matematiksel işlemler yapılır:

$$\int_{-\infty}^t\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=-\int_{\infty}^0\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{-i\omega t}e^{i\omega s}ds=$$

$$e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(t-\tau)e^{i\omega s}ds=e^{-i\omega t}\left(\begin{Bmatrix}\lambda_{1c}^{(n)}\\ \mu_{1c}^{(n)}\end{Bmatrix}+i\begin{Bmatrix}\lambda_{1s}^{(n)}\\ \mu_{1s}^{(n)}\end{Bmatrix}\right) \tag{10}$$

(10)'daki $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_{1c}^{(n)}\\ \mu_{1c}^{(n)}\end{Bmatrix}=\int_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(s)\cos(\omega s)\,\mathrm{d}s\,,\ \begin{Bmatrix}\lambda_{1s}^{(n)}\\ \mu_{1s}^{(n)}\end{Bmatrix}=\int_0^{\infty}\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(n)}\\ \mu_1^{(n)}\end{Bmatrix}(s)\sin(\omega s)\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

ifadeleriyle belirlenir. (8) – (11) arası bağıntılar dikkate alınarak bünye denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$T_{(ii)}^{(n)}=\Lambda^{(n)}\vartheta^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}+2M^{(n)}\gamma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}=\sigma_{(ii)}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)},$$

$$T_{rz}^{(n)}=2M^{(n)}\gamma_{rz}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}=\sigma_{rz}^{(n)}(r)e^{i(kz-\omega t)}\ , \tag{12}$$

bu ifadelerdeki $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$

$$\Lambda^{(n)}=\lambda_0^{(n)}+\lambda_{1c}^{(n)}+i\lambda_{1s}^{(n)}\ ,\ M^{(n)}=\mu_0^{(n)}+\mu_{1c}^{(n)}+i\mu_{1s}^{(n)}\,, \tag{13}$$

olarak tanımlanır. Böylece (11) ve (13) bağıntıları ile tanımlanan kompleks sabitler $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$'in gerçek ve reel kısımları elde edilir. Viskoelastik sistemin tüm alan denklemleri (1), (2), (4), (12) ve (13); elastik bir sistemin elastik sabitleri $\lambda_0^{(n)}$ ve $\mu_0^{(n)}$ ile kompleks sabitleri $\Lambda^{(n)}$ ve $M^{(n)}$'nin değiştirilmesiyle elde edilebilir. Diğer bir ifadeyle ele alınan problem için matematiksel hesaplar dinamik uygunluk prensibini [6] doğrulamaktadır ve burada kullanılan çözüm yöntemi de bu prensiple örtüşmektedir.

(12)'deki ifade (1)'deki hareket denklemi içine yerleştirilerek ve denklem (6)'daki bağıntı da göz önünde bulundurularak, aşağıdaki yer değiştirme genliği cinsinden denklemler elde edilir.

$$m_1^{(n)}\frac{d^2v_r^{(n)}}{d(kr)^2}+m_2^{(n)}\frac{d}{d(kr)}\left(\frac{v_r^{(n)}}{kr}\right)+i(m_2^{(n)}+m_3^{(n)})\frac{dv_z^{(n)}}{d(kr)}-m_3^{(n)}v_r^{(n)}+$$

$$\frac{1}{kr}(m_1^{(n)}-m_2^{(n)})\frac{dv_r^{(n)}}{dr}+(m_2^{(n)}-m_1^{(n)})\frac{v_r^{(n)}}{(kr)^2}=-\frac{\omega^2}{k^2}\rho^{(n)}v_r^{(n)}\ ,$$

$$im_3^{(n)}\frac{dv_r^{(n)}}{d(kr)}+m_3^{(n)}\frac{d^2v_z^{(n)}}{d(kr)^2}+i\frac{1}{kr}m_3^{(n)}v_r^{(n)}+\frac{1}{kr}m_3^{(n)}\frac{dv_z^{(n)}}{d(kr)}+$$

$$ikm_2^{(n)}\frac{dv_r^{(n)}}{d(kr)}+im_2^{(n)}\frac{v_r^{(n)}}{kr}-m_1^{(n)}v_z^{(n)}=-\frac{\omega^2}{k^2}\rho^{(n)}v_z^{(n)}\ ,$$

$$m_1^{(n)}=\Lambda^{(n)}+2M^{(n)},\ m_2^{(n)}=\Lambda^{(n)},\ m_3^{(n)}=M^{(n)} \tag{14}$$

Yukarıdaki dönüşümler ile ifade (6) ve (12)'ye göre (5)'teki sınır ve temas koşulları aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0,\ \sigma_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R(1-h^{(2)}/R)}=0\ ,\ \sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R}=\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R}\ ,\ \sigma_{rz}^{(2)}\Big|_{r=R}=\sigma_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R}\ ,$$

$$v_r^{(2)}\Big|_{r=R}=v_r^{(1)}\Big|_{r=R},v_z^{(2)}\Big|_{r=R}=v_z^{(1)}\Big|_{r=R},\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0,\sigma_{rz}^{(1)}\Big|_{r=R(1+h^{(1)}/R)}=0\,. \tag{15}$$

Guz [7] kaynağına göre (14) deki denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi aranabilir.

$$v_r^{(n)}=-ik\frac{\partial}{\partial r}X^{(n)}\ ,\ v_z^{(n)}=\frac{1}{m_2^{(n)}+m_3^{(n)}}\left(m_1^{(n)}\Delta_1-k^2m_3^{(n)}+\omega^2\rho^{(n)}\right)X^{(n)},\ \Delta_1=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,, \tag{16}$$

buradaki $X^{(n)}$ fonksiyonu

$$\left[\left(\Delta_1-k^2(\zeta_2^{(n)})^2\right)\left(\Delta_1-k^2(\zeta_3^{(n)})^2\right)\right]X^{(n)}=0 \tag{17}$$

den bulunur ve (17)'deki $\zeta_2^{(n)}$ ve $\zeta_3^{(n)}$ aşağıdaki denklemlerden elde edilir.

$$(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})M^{(n)}\ \zeta'^{(n)\ 4}-k^2\ \zeta'^{(n)\ 2}\left[(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\right)+\right.$$

$$\left.M^{(n)}\left(\rho^{(m)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-M^{(n)}\right)+\ \Lambda^{(n)}+M^{(n)\ 2}\right]+$$

$$k^4\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-(\Lambda^{(n)}+2M^{(n)})\right)\left(\rho^{(n)}\left(\frac{\omega}{k}\right)^2-M^{(n)}\right)=0\,, \tag{18}$$

Burada ω/k dalga yayılımının kompleks faz hızıdır.

Böylece denklem (17) ve (18)'dan fonksiyon $X^{(n)}$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$X^{(n)}=A_1^nJ_0(\zeta_2^{(n)}kr)+A_2^nJ_0(\zeta_3^{(n)}kr)+B_1^nY_0(\zeta_2^{(n)}kr)+B_2^nY_0(\zeta_3^{(n)}kr)\,, \tag{19}$$

$J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci türden Bessel fonksiyonlarıdır.

Bağıntı (19) ve denklem (16), (13), (6) ve (7)'yi kullanarak (15)'daki sınır ve temas koşullarından

$$\det\left\|\beta_{nm}\right\| = 0 \ , \ n;m = 1,2,...,8 , \tag{20}$$

dipersiyon denklemleri elde edilir. (20) denklemindeki β_{nm}'lerin ifadeleri çok yer kapladığından burada verilmemektedir.

NÜMERİK SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Viskoelastik malzemede zamana göre harmonik dalga yayılımını ele almak için aşağıda ifade edilen dalga sayısı k kompleks olarak ele alınmalıdır.

$$k = k_1 + ik_2 = k_1(1+i\beta) \ , \ \beta = \frac{k_2}{k_1} \tag{21}$$

k_2 (veya (21)'teki β) dalga sayısı, k 'nın imajiner kısmı ele alınan dalga genliğinin sönümünü tanımlar ve β da sönüm katsayısı olarak adlandırılır. Yukarıdaki ifadeleri kullanarak dalgaların faz hızını belirleriz.

$$c = \frac{\omega}{k_1} \tag{22}$$

ve aşağıdaki ergümanları kullanırız.

$$c_{20}^{(n)} = \sqrt{\mu_0^{(n)} / \rho^{(n)}} \ , \frac{c}{c_{20}^{(2)}} , \ k_1 R , \ \frac{h^{(1)}}{R} \text{ ve } \frac{h^{(2)}}{R} . \tag{23}$$

Dispersiyon denklemi (20)'i çözmek için; (3)'teki operatörlerde verilen çekirdek fonksiyonları $\mu_1^{(n)}(t)$ ve $\lambda_1^{(n)}(t)$ sayesinde (11)'deki ifadelerle belirlenen $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$ değerlerinin verilmesi gerekir. Bu operatörlerin silindir katmanlarının malzemelerinin viskoelastik özelliklerini göstermektedir. Sonuç olarak $\lambda_{1c}^{(n)}$, $\lambda_{1s}^{(n)}$, $\mu_{1c}^{(n)}$ ve $\mu_{1s}^{(n)}$'in sayısal değerlerini hesaplayabilmek için $\mu_1^{(n)}(t)$ ve $\lambda_1^{(n)}(t)$ 'nin açık bir şekilde ifade edilmesi gerekir. Akbarov [8] ile Akbarov ve Kepceler [4] tarafından yazılan makalelerde olduğu gibi biz de Rabotnov [5] tarafından silindir katmanlarının malzemelerinin viskoelastisitesini ifade eden fraksiyonel eksponansiyel operatörü kullandık.

$$\mu^{(n)*}\varphi(t) = \mu_0^{(n)}\left[\varphi(t) - \frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} \Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right],$$

$$\lambda^{(n)*}\varphi(t) = \lambda_0^{(n)}\left[\varphi(t) + \frac{\beta_0^{(n)}}{(1+\nu_0^{(n)})} \Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}\left(-\frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})} - \beta_\infty^{(n)}\right)\varphi(t)\right], \tag{24}$$

(24)'deki bağıntılarda $\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}$ aşağıdaki şeklinde verilmiş operatördür.

$$\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)*}(x^{(n)})\varphi(t) = \int_0^\infty \Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)}(x^{(n)}, t-\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

$$\Pi_{\alpha^{(n)}}^{(n)}(x^{(n)}, t) = t^{-\alpha^{(n)}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x^{(n)})^p t^{p(1-\alpha^{(n)}))}}{\Gamma((1+n)(1-\alpha^{(n)}))} \ , \ 0 \le \alpha^{(n)} < 1 . \tag{25}$$

(25)'deki $\Gamma(x)$ gamma fonksiyonudur. Ayrıca (24) ve (25)'deki $\alpha^{(n)}$, $\beta_0^{(n)}$ ve $\beta_\infty^{(n)}$ sabitleri n'inci katman malzemesinin reolojik parametreleridir. Bu reolojik parametrelerinden aşağıdaki biçimde oluşturulan boyutsuz parametrelere geçilir.

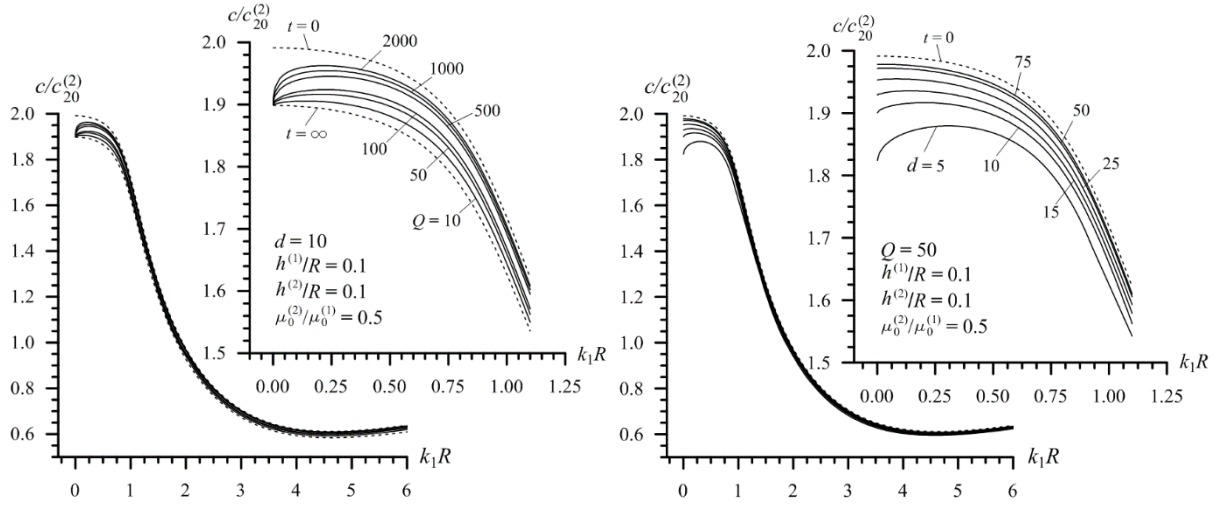
$$d^{(n)}=\frac{\beta_{\infty}^{(n)}}{\beta_0^{(n)}}\quad,\ Q^{(n)}=\frac{c_{20}^{(n)}}{R(\beta_{01}^{(n)}+\beta_{\infty}^{(n)})^{\frac{1}{1-\alpha^{(n)}}}},\ \beta_{01}^{(n)}=\frac{3\beta_0^{(n)}}{2(1+\nu_0^{(n)})}. \tag{26}$$

(26)'daki parametrelerin mekaniksel anlamlari Akbarov [8] kaynağında verilmektedir. Bu kaynağa göre $Q^{(n)}$ viskoelastik malzemenin karakteristik boyutsuz sürünme zamanını, $d^{(n)}$ ise bu malzemenin elastik sabitlerinin $t=\infty$ da olan değerlerini göstermektedir. $Q^{(n)}$ ve $d^{(n)}$ değerlerinin artması malzemenin viskozitesinin azalmasının göstergesidir. Böylece boyutsuz reolojik $Q^{(n)}$ ve $d^{(n)}$ parametreleri değiştirilerek eksenel simetrik boyuna dalga yayılımında katman malzemelerinin viskoelastisitesinin etkisi incelenecektir. Bu incelemelerde (20) dispersiyon denkleminin sayısal çözümü Akbarov ve Kepceler'in [4]'teki geliştirilen algoritma ile yapılır. İncelemelerde Ewing ile ark. [9] ve Kolsky [10]'a göre sönüm katsayısı β

$$\beta=\frac{1}{2}\frac{\mu_{1s}^{(1)}(\omega)}{\mu_0^{(1)}+\mu_{1c}^{(1)}(\omega)}\quad\text{veya}\quad\beta=\frac{1}{2}\frac{\mu_{1s}^{(2)}(\omega)}{\mu_0^{(2)}+\mu_{1c}^{(2)}(\omega)} \tag{27}$$

olarak varsayılır. Bu makalede verilen sayısal sonuçlar $\nu_0^{(1)}=\nu_0^{(2)}=0.3$, $\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=0.5$ ve $\mu_0^{(2)}\big/\mu_0^{(1)}=0.5$ olduğu durumda elde edilmiştir. Bundan başka ($Q^{(1)}=Q^{(2)}(=Q)$ ve $d^{(1)}=d^{(2)}(=d)$) olduğu farz edilmiştir.

$h^{(1)}\big/R=h^{(2)}\big/R=0.1$ durumunda elde edilen dispersiyon eğrileri Şekil 2'de verilmektedir. Bu şekillerdeki d parametresinin değeri sabit tutularak Q parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi a harfiyle gruplanan grafiklerle temsil edilirken b harfiyle gruplanan grafiklerde ise Q parametresinin değeri sabit tutularak d parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi incelenmiştir.



Şekil 2. Belli şartlardaki dalga yayılım grafiği

SONUÇLAR

Bu makalede lineer viskoelastisite teorisinin hareket denklemleri kapsamında viskoelastik malzemelerden yapılmış iki katlı içi boş dairesel silindirde eksenel simetrik boyuna dalga dispersiyonu araştırılmıştır. Kesin nümerik araştırmalar için malzemelerin viskoelastikliği Rabotnov'un [5] fraksiyonel eksponansiyel operatörleri ile tarif edildi. Karakteristik boyutsuz sürünme zamanı (Q) ve elastik sabitlerinin $t=\infty$ da olan değerleri (d) ile karakterize edilen

boyutsuz reolojik parametreleri belirtildi ve dispersiyon eğrilerine etkisi incelendi. Elde edilen sayısal sonuçlara göre silindir malzemelerinin viskoelastisitesi dalganın yayılımını hızını düşürür ve bu düşüş $k_1 R \le 1.5$ olduğu durumda daha belirgin olur.

KAYNAKLAR

[1] O. Weiss, Uber die Schallausbreitung in verlusbehafteten median mit komplexen schub und modul. *Acoustica*, **9** (1959) 387 – 399.

[2] K. Tamm, O. Weiss, Wellenausbreitung in unbergrenzten scheiben und in scheibensteinfrn, *Acoustica*, **11** (1961) 8 – 17.

[3] J.N. Barshinger, J.L. Rose, Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material, *IEEE Trans. Ultrason. Freq. Control*, **51** (2004) 1574–1556.

[4] S.D. Akbarov, T. Kepceler, On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials, *Applied Mathematical Modeling*. **39** (2015) 3569–3587.

[5] Yu.N. Rabotnov, *Elements of hereditary solid mechanics*, Mir, Moscow (1980).

[6] Y.C. Fung, *Introduction to solid mechanics*, Prentice – Hall (1965).

[7] A.N. Guz, Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. A.C.K. Kiev (2004).

[8] S.D. Akbarov, Axisymmetric time-harmonic Lamb's problem for a system comprising a viscoelastic layer covering a viscoelastic half-space. *Mech. Time-Depend. Material*, **18,** 153 – 178 (2014).

[9] W.M. Ewing, W.S. Jazdetzky, F. Press, Elastic waves in layered media, McGraw – Hill, New – York (1957).

[10] H. Kolsky, *Stress waves in solids*, Dover, New York (1963).