XVIII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

FONKSİYONEL DEĞİŞİMLİ MALZEMELERLE KAPLANMIŞ METAL SİLİNDİRİK KABUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİ

Abdullah Avey, U. Bestelci, M. Avcar, P. ÖZYİĞİT
Süleyman Demirel Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta

ABSTRACT

The free vibration problem of the metal cylindrical shell coated with functionally graded materials (FGMs) in the inner and outer surfaces is investigated. The basic relations and modified Donnell type basic equations of metal cylindrical shells coated with FGMs are derived and solved by using Galerkin method. Analytical expression for the dimensionless frequency parameter of the metal cylindrical shell coated with FGMs is found. Finally, the effects of variations of volume fractions, shell characteristics and variations of the thickness of inner and outer coatings on the values of the dimensionless frequency parameters of free vibrations for coated cylindrical shells are studied numerically.

Keywords: Functionally graded materials (FGMs), functionally graded (FG) coating, metal cylindrical shell, free vibration, dimensionless frequency parameter

ÖZET

İç ve dış yüzeyleri fonksiyonel değişimli malzemelerle (FDM'ler) kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların temel bağıntıları ve değiştirilmiş Donnell tipi temel denklemleri türetilmekte ve Galerkin Yöntemi uygulanarak çözülmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşiminin boyutsuz frekans parametresi için analitik ifade bulunmaktadır. Analizler kısmında, kaplamalı silindirik kabukların serbest titreşimlerinin boyutsuz frekans parametrelerinin minimum değerlerine, hacim bileşenleri değişiminin, kabuk

karakteristiklerinin, iç ve dış tabakaların kalınlıkları değişiminin etkileri sayısal olarak incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel değişimli malzeme (FDM), Fonksiyonel değişimli (FD) kaplama, metal silindirik kabuk, serbest titreşim, boyutsuz frekans parametresi

1. GİRİŞ

Günümüzde yapı elemanlarının kullanım ömrü ve performansının artırılması için değişik kaplama türleri kullanılmaktadır. Seramik, ısıl bariyer kaplamaları türbinlerde verimi artırmak ve yakıt ekonomisi sağlamak amacı ile kullanılır. Daha uzun kullanım süresi ve yüksek bir kesme performansı elde etmek için kesici kalemler aşınmaya dayanıklı seramik filmler ile kaplanır [1]. Genelde bu tür kaplamalar yapı elemanının üzerine tek katmanlı homojen kaplama olarak uygulanır. Düşük toklukları ve ısıl genleşme katsayılarındaki uyumsuzluklar sebebiyle bu tür kaplamalar çatlamaya maruz kalmaktadır. Bu nedenle tasarım sırasında, temas yüzeyleri arasında meydana çıkan gerilme dağılımlarının düzenlenmesi önemlidir. Diğer taraftan malzeme biliminin ilerlemesiyle birlikte malzeme özelliklerinin malzeme içerisinde konuma bağlı olarak değiştirilebildiği çeşitli üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler kullanılarak üretilen malzemeler fonksiyonel değişimli malzeme (FDM) olarak isimlendirilmekte olup genelde aşınmaya karşı direnç ve yüksek sıcaklıklara dayanabilme özelliği sağladıkları için nükleer reaktörlerinde, füzelerde, uzay araçlarında, savunma ve otomotiv sanayide, motorlarda, değişik makine elemanlarında, örneğin rulmanlarda, dişlilerde, kesici uçlarda vs kaplamalar olarak kullanılmaktadırlar [2]**.** FDM'den oluşan bir kaplamaya önceden belirlenmiş bir malzeme görüntüsü verilebilmekte ve malzeme özellikleri, kaplamanın kalınlığı doğrultusunda sürekli değiştirilebilmektedir [3]. Dolayısıyla, FDM kaplamayı oluşturan malzemenin özellikleri kalınlık koordinatının bir fonksiyonu olup; kaplamanın altındaki veya üstündeki tabakanın malzeme özelliklerine eşit olmakla beraber kaplamanın üstüne veya altına doğru fonksiyonel olarak değişebilmektedir. Böylece, FDM kaplama kullanılarak yapı elemanının alt veya üst tabakası ile kaplama arasındaki uyumsuzluklar engellenebilir. İlk olarak mekanikçiler FDM'den oluşan kaplamaların kırılma davranışlarını incelemişlerdir [4]. FDM'lerden oluşan yapı elemanları üzerine yapılmış çok sayıda çalışmalar içinde, en ilgi çekici konulardan biri de pür FDM silindirik kabukların titreşim analizlerdir [5-8]. Günümüz teknolojisinde, FDM kaplamaların sık şekilde kullanılması, FDM kaplı yapı elemanlarının titreşim ve stabilite davranışlarının incelenmesi ile ilgili bazı önemli çalışmaların ortaya çıkmasına vesile olmuştur [9-11].

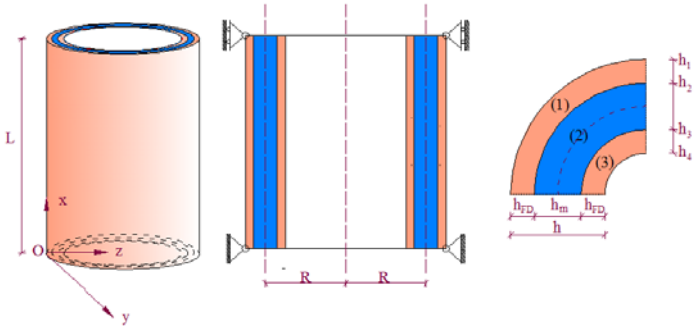
Yapılan literatür taraması FD kaplı metal silindirik kabuğun titreşim probleminin henüz yeteri kadar çalışılmadığını ortaya koymuştur. Bu çalışmada, iç ve dış yüzeyleri FD kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir.

2. TEMEL BAĞINTI VE DENKLEMLER

İç ve dış yüzeyi FD kaplı metal silindirik kabuk Şekil 1'de sunulmaktadır. FD kaplı silindirik kabuk üç tabakalı sistem oluşturmaktadır. Oxy koordinat sistemi kabuğun sol kenarında ve üç tabakalı silindirik kabuğun referans yüzeyinde göz önüne alınmaktadır. Ox ekseni ana doğrultuda, Oy ekseni çevresel doğrultuda, Oz ekseni ise söz konusu iki eksene diktir (Şekil

1a). Silindirik kabuğun uzunluğu L, yarıçapı R, genel kalınlığı $h = 2h_{FD} + h_m$ olup h_m çekirdek kalınlığı ve h_{FD} FD kaplamaların her birinin kalınlığı'dır (Şekil 1b).

Silindirik kabuğun iç ve dış yüzeylerindeki FD kaplamaların Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu için şu ifadeler elde edilir [9-11]:



a) b)

Şekil 1. a) İç ve dış yüzeyi FD kaplı silindirik kabukta koordinat sistemi, b) tabakaların diziliş şekli; (1) FD dış kaplama, (2) Metal, (3) FD iç kaplama

$$\begin{aligned} E_{FD}^{ic} &= E_s + (E_m - E_s)V_m^{ic} \\ \nu_{FD}^{ic} &= \nu_s + (\nu_m - \nu_s)V_m^{ic} \\ \rho_{FD}^{ic} &= \rho_s + (\rho_m - \rho_s)V_m^{ic} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} E_{FD}^{dis} &= E_s + (E_m - E_s)V_m^{dis} \\ \nu_{FD}^{dis} &= \nu_s + (\nu_m - \nu_s)V_m^{dis} \\ \rho_{FD}^{dis} &= \rho_s + (\rho_m - \rho_s)V_m^{dis} \end{aligned} \tag{2}$$

Burada E_m, ν_m, ρ_m ve E_s, ν_s, ρ_s, sırasıyla, metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeyindeki FD kaplamaların metal ve seramik yüzeylerinin Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğudur. V_m^{ic} ve V_m^{dis}, sırasıyla, metal silindirik kabuğun içindeki ve dışındaki kaplamaların metal hacim kesirleri olup şu bağıntılar geçerlidir:

$$V_m^{ic} + V_s^{ic} = 1; \;\; V_m^{dis} + V_s^{dis} = 1 \tag{3}$$

Burada V_s^{ic} ve V_s^{dis} sırasıyla, metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeyindeki FD kaplamaların seramik hacim kesirleridir.

Metal silindirik kabuğun iç ve dış yüzeylerindeki FD kaplamanın hacim kesirleri kuvvet fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir [9-11]:

$$V_m^{ic} = \left(\frac{z_4 - Z}{z_4 - z_3} \right)^d, \quad V_m^{dis} = \left(\frac{Z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^d \tag{4}$$

Burada $Z = z/h,\ z_1 = h_1/h,\ z_2 = h_2/h,\ z_3 = h_3/h,\ z_4 = h_4/h$ boyutsuz koordinatlardır; d $\left(0 \le d < +\infty\right)$ hacim kesir indeksi olup FD kaplama kalınlığı boyunca malzeme değişimi profilini belirler.

FD kaplama ile zenginleştirilmiş metal silindirik kabuğun temas yüzeylerinde metal hacim kesirleri aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$V_m^{ic} = 1 \quad z = h_3 \ \ ise;\ V_m^{dis} = 1 \quad z = h_2 \tag{5}$$

Orta tabaka zenginleştirilmiş metalden oluşmakta ve malzeme özellikleri, yani Young modülü E_m, Poisson oranı ν_m ve yoğunluk ρ_m olup ele alınan sıcaklık durumları için sabittirler.

Söz konusu özellikler bir arada dikkate alındığında FD kaplamalı metal silindirik kabuğun malzeme özelliklerinin (Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğun) matematiksel modelleri aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\left[E(Z), \nu(Z), \rho(Z)\right] = \begin{cases} E_{FD}^{dis}, \nu_{FD}^{dis}, \rho_{FD}^{dis} & -z_1 \le Z \le -z_2 \\ E_m, \nu_m, \rho_m & -z_2 \le Z \le z_3 \\ E_{FD}^{ic}, \nu_{FD}^{ic}, \rho_{FD}^{ic} & z_3 \le Z \le z_4 \end{cases} \tag{6}$$

Doğrusal kabuk teorisi kullanıldığında silindirik kabuğun değiştirilmiş Donnell tipi hareket ve deformasyon uygunluk denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [12]:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{M}_{11}}{\partial \mathrm{x}^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{M}_{12}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} + \frac{\partial^2 \mathrm{M}_{22}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\mathrm{T}_{22}}{\mathrm{R}} - \rho_t \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

Burada M_{11} ve M_{22} sırasıyla, Ox ve Oy eksenlerine göre eğilme momentleridir; M_{12}, burulma momentidir; T_{22}, Oy doğrultusundaki normal kuvvettir; e_{11} ve e_{22} kaplamalı metal silindirik kabuğun referans yüzeyindeki Ox ve Oy doğrultularındaki normal deformasyon bileşenleri ve e_{12} referans yüzeydeki kayma deformasyonudur; w radyal yer değiştirmesinin

eğrilik merkezine doğru yönü pozitif kabul edilmektedir; ρ_t yoğunluk parametresi olup şu tanım geçerlidir [11]:

$$\rho_t = \int_{-h_1}^{-h_2} \rho_{FD}^{dis}(Z)dz + \rho_m(h_2 + h_3) + \int_{h_3}^{h_4} \rho_{FD}^{ic}(Z)dz \tag{9}$$

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki integrallerden bulunur [11]:

$$\mathrm{T_{ij}} = \int_{-h_1}^{-h_2} \sigma_{ij}^{(1)}dz + \int_{-h_2}^{h_3} \sigma_{ij}^{(2)}dz + \int_{h_3}^{h_4} \sigma_{ij}^{(3)}dz; \quad M_{ij} = \int_{-h_1}^{-h_2} \sigma_{ij}^{(1)}zdz + \int_{-h_2}^{h_3} \sigma_{ij}^{(2)}zdz + \int_{h_3}^{h_4} \sigma_{ij}^{(3)}zdz \tag{10}$$

Burada $\sigma_{11}^{(k)}$ ve $\sigma_{22}^{(k)}$, FD kaplamalı metal silindirik kabuğun uygun tabakalarındaki sırasıyla, *Ox* ve *Oy* doğrultularındaki normal gerilmeler; $\sigma_{12}^{(k)}$, FD kaplamalı metal silindirik kabuğun tabakalarındaki kayma gerilmeleridir ve $k = 1,2,3$ olup tabaka sayısını göstermektedir.

Kirchhoff-Love hipotezinin tüm kabuk için geçerli olduğu varsayıldığından tabakaların birinin diğerine basıncı ihmal edilebilir. Bu varsayımlar dikkate alındığında, yukarıda tanımlanan kaplamalı silindirik kabuk için referans yüzeyden *z* uzaklığındaki yüzeyin deformasyon bileşenleri ile referans yüzeyin deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi olur [12]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{22} = e_{22} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{12} = e_{12} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{11}$$

Burada ε_{11} ve ε_{22} içten ve dıştan kaplamalı metal silindirik kabuğun referans yüzeyinden *z* uzaklığındaki yüzeydeki normal deformasyon bileşenleri ve ε_{12} referans yüzeyinden *z* uzaklığındaki yüzeydeki kayma deformasyonudur.

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun her tabakası için Hooke kuralı geçerli olup gerilme-deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar ince kabuk teorisi çerçevesinde aşağıdaki şekilde yazılabilir [13]:

$$\sigma_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\varepsilon_{11} + Q_{12}^{(k)}\varepsilon_{22}, \sigma_{11}^{(k)} = Q_{12}^{(k)}\varepsilon_{11} + Q_{11}^{(k)}\varepsilon_{22}, \sigma_{12}^{(k)} = Q_{66}^{(k)}\varepsilon_{12} \tag{12}$$

Burada, $Q_{ij}^{(k)}, (i, j = 1,2,6; k = 1,2,3)$, FD kaplama ve metal malzeme özelliklerine bağlı nicelikleri içeren katsayılar olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Q_{11}^{(1)}=\frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{dis}(Z)\right]^2},Q_{12}^{(1)}=\frac{\nu_{FD}^{dis}(Z)E_{FD}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{dis}(Z)\right]^2},Q_{66}^{(1)}=\frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1+\nu_{FD}^{dis}(Z)},$$
$$Q_{11}^{(2)}=\frac{E_m}{1-\nu_m^2},Q_{12}^{(2)}=\frac{\nu_m E_m}{1-\nu_m^2},Q_{66}^{(2)}=\frac{E_m}{1+\nu_m^2} \tag{13}$$
$$Q_{11}^{(3)}=\frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{ic}(Z)\right]^2},Q_{12}^{(3)}=\frac{\nu_{FD}^{ic}(Z)E_{FD}^{ic}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{ic}(Z)\right]^2},Q_{66}^{(3)}=\frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1+\nu_{FD}^{ic}(Z)}$$

Temel denklemlerin çıkarılışı Donnell kabuk teorisine dayandığı için $\Phi_1=\Phi h$ Airy gerilme fonksiyonu kullanılmaktadır. T_{11},T_{22},T_{12} kuvvet bileşenleriyle Φ_1 Airy gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntılar şu şekildedir [12]:

$$T_{11}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2},T_{22}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2},T_{12}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} \tag{14}$$

(11) ifadesi (12) bağıntılarında yerine yazılıp elde edilen bağıntılar (10) integrallerinde yerine yazılarak elde edilen sonuçlar (14) bağıntıları ile birlikte (7) ve (8) denklemlerinde yerine yazıldığında, bazı işlemlerden sonra aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilir:

$$C_2\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial x^4}+2\left(C_1-C_5\right)\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial x^2\partial y^2}+C_2\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}-C_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$
$$-2\left(C_4+C_6\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-C_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\rho_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{15}$$

$$B_1\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial x^4}+2\left(B_2+B_5\right)\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial x^2\partial y^2}+B_1\frac{\partial^4\Phi_1}{\partial y^4}-B_4\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-2\left(B_3-B_6\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-B_4\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{16}$$

Burada şu tanımlar geçerlidir:

$$C_1 = a_{11}B_1 + a_{21}B_2, C_2 = a_{11}B_2 + a_{21}B_1, C_3 = a_{11}B_3 + a_{21}B_4 + a_{12},$$
$$C_4 = a_{11}B_4 + a_{21}B_3 + A_{22}, C_5 = a_{61}B_5, C_6 = a_{61}B_6 + a_{62}B_1 = a_{10}L_0,$$
$$B_2 = -a_{20}L_0, B_3 = (a_{20}a_{21} - a_{11}a_{10})L_0, B_4 = (a_{20}a_{11} - a_{21}a_{10})L_0,$$
$$B_5 = 1/a_{60}, B_6 = -a_{61}/a_{60}, L_0 = (a_{10}a_{10} - a_{20}a_{20})^{-1}$$
$$a_{1k_1} = \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{dis}(Z)\right]^2} z^{k_1} dz + \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{ic}(Z)\right]^2} z^{k_1} dz$$
$$a_{2k_2} = \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{\nu_{FD}^{dis}(Z)E_{FD}^{dis}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{dis}(Z)\right]^2} z^{k_1} dz + \frac{\nu_m E_m}{1-\nu_m^2} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{\nu_{FD}^{ic}(Z)E_{FD}^{ic}(Z)}{1-\left[\nu_{FD}^{ic}(Z)\right]^2} z^{k_1} dz$$
$$a_{6k_1} = \int_{-h_1}^{-h_2} \frac{E_{FD}^{dis}(Z)}{1+\nu_{FD}^{dis}(Z)} z^{k_1} dz + \frac{E_m}{1+\nu_m} \int_{-h_2}^{-h_3} z^{k_1} dz + \int_{h_3}^{h_4} \frac{E_{FD}^{ic}(Z)}{1+\nu_{FD}^{ic}(Z)} z^{k_1} dz, k_1 = 0,1,2 \quad (17)$$

3. TEMEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Kaplamalı silindirik kabuğun kenarları basit mesnetli sınır koşullarına tabi olduğundan, (15) ve (16) denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibi aranır [12]:

$$w = f(t)\sin(m_1 x)\sin(n_1 y), \Phi_1 = \phi(t)\sin(m_1 x)\sin(n_1 y) \quad (18)$$

Burada, $f(t)$ ve $\phi(t)$ zamana bağlı bilinmeyen fonksiyonlar, $n_1 = n/R$ olup n çevre doğrultusunda dalga sayısı ve $m_1 = \mathrm{m}\pi/L$ olup m ana doğrultuda dalga sayısıdır.

(15) ve (16) denklemlerine Galerkin yöntemi uygulandığında, integrallemeden sonra elde edilen denklemlerden ϕ(t) değişkeni yok edildiğinde, FD kaplamalı metal silindirik kabuğun serbest titreşimi için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{\Lambda_5}\left(\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3} + \Lambda_4\right) f(t) = 0 \quad (19)$$

Burada, şu tanımlar geçerlidir:

$$\Lambda_1 = m_1^2 R - C_2\left(m_1^4 + n^4\right) - 2(C_1 - C_5)m_1^2 n^2,\ \Lambda_2 = m_1^2 R + B_4\left(m_1^4 + n^4\right) + 2(B_3 - B_6)m_1^2 n^2,$$
$$\Lambda_3 = B_1\left(m_1^4 + n^4\right) + 2(B_2 + B_5)m_1^2 n^2, \Lambda_4 = C_3\left(m_1^4 + n^4\right) + 2(C_4 + C_6)m_1^2 n^2,\ \Lambda_5 = \rho_t R^4 \quad (20)$$

(19) diferansiyel denkleminden FD kaplamalı metal silindirik kabuğun $\omega(1/sn)$ titreşim frekansı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_5}\left(\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3} + \Lambda_4\right)} \tag{21}$$

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun ω_1 boyutsuz frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_1 = \omega R\sqrt{(1-\nu_m^2)\rho_m / E_m} \tag{22}$$

(21) ve (22) ifadelerinde $V_m^{dis} = V_m^{ic} = 1$ olduğunda zenginleştirilmiş metalden oluşan tek tabakalı silindirik kabuğun $\omega_m^{tektab}(1/sn)$ titreşim frekansı için aşağıdaki ifade özel olarak elde edilir:

$$\omega_m^{tektab} = \sqrt{\frac{E_m}{12\left(1-\nu_m^2\right)}\left(\frac{h}{R}\right)^3 \frac{1}{\rho_m R h}\left\{\frac{m_1^4}{\left(m_1^2+n^2\right)^2}\frac{12\left(1-\nu_m^2\right)R^2}{h^2} + \left(m_1^2+n^2\right)^2\right\}} \tag{23}$$

FD kaplamalı metal silindirik kabuğun ω_{1m}^{tektab} boyutsuz frekans parametresi için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_{1m}^{tektab} = \frac{h}{2\sqrt{3}R}\sqrt{\frac{m_1^4}{\left(m_1^2+n^2\right)^2}\frac{12\left(1-\nu_m^2\right)R^2}{h^2} + \left(m_1^2+n^2\right)^2} \tag{24}$$

FD kaplamalı ve tek tabakalı metal silindirik kabukların boyutlu ve boyutsuz titreşim frekanslarının minimum değerlerini bulmak için (22)-(24) ifadeleri (m,n) dalga sayılarına göre minimize edilir.

4. SAYISAL ANALİZ

Sunulan çalışmanın doğruluğunu teyit etmek için Matsunaga [6] çalışma sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır. Pür FDM silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametresinin değerleri değişik L/R oranı ve hacim kesir indeksi için Tablo 1'de sunulmaktadır. Bu karşılaştırmada tek tabakalı silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametresi $\omega_1 = \omega h\sqrt{E_c/\rho_c}$ olarak dikkate alınmıştır. FD kaplama, metal (Alüminyum) ve seramikten (Alüminyum oksit) oluşmakta (Al/Al_2O_3) ve malzeme özellikleri aşağıda sunulmaktadır:

Metal (Alüminyum, Al): $E_m = 7\times10^{10}(Pa)$, $\rho_m = 2702\,kg/m^3$, $\nu_m = 0.3$.

Seramik (Alüminyum oksit, Al_2O_3): $E_s = 3.8\times10^{11}(Pa)$, $\rho_s = 3800\,kg/m^3$, $\nu_s = 0.3$.

Tablo 1'den, sunulan çalışmada elde edilen sonuçların Matsunaga [6] çalışmasında elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir.

Tablo 1. Pür FDM (Al/Al_2O_3) silindirik kabuğun boyutsuz titreşim frekansı değerlerinin Matsunaga [6] çalışmasında elde edilen sonuçlarla ile karşılaştırılması (R/h=1000)

	Matsunaga [6]				Sunulan Çalışma			
L/R	$d=0.5$	$d=1$	$d=10$	Pür metal	$d=0.5$	$d=1$	$d=10$	Pür metal
2	0.3368(9)	0.3068(9)	0.2351(9)	0.1957(9)	0.3401(10)	0.3101(10)	0.2378(9)	0.1978(9)
5	0.1314(6)	0.1201(6)	0.09247(6)	0.07654(6)	0.1348(6)	0.1233(6)	0.09514(6)	0.07868(6)

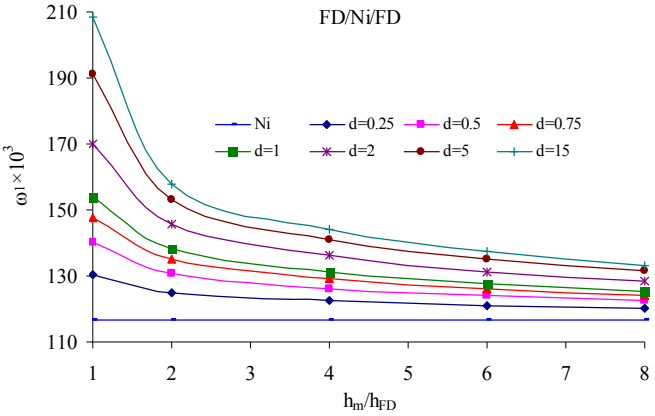
Sayısal analizler kısmında metal malzeme olarak Nikel (Ni) ve seramik malzeme olarak Alüminyum Oksit (Al_2O_3) ele alınmakta ve FD kaplamanın oluşumunda bu malzemelerin kombinasyonu kullanılmaktadır. FD kaplama, yani Ni/Al_2O_3 Nikel ve Alüminyum Oksit'in bir kombinasyonudur. Üç tabakalı silindirik kabuk FD/Ni/FD şeklinde tasarlanmıştır.

$$E_0 = 2.2395\times10^{11}(Pa), E_f = 2.05098\times10^{11}(Pa),\ \nu_0 = \nu_f = 0.31, \rho_0 = \rho_f = 8900kg/m^3$$

$$E_0 = E_f = 3.8\times10^{11}(Pa),\ \nu_0 = \nu_f = 0.3, \rho_0 = \rho_f = 3800kg/m^3$$

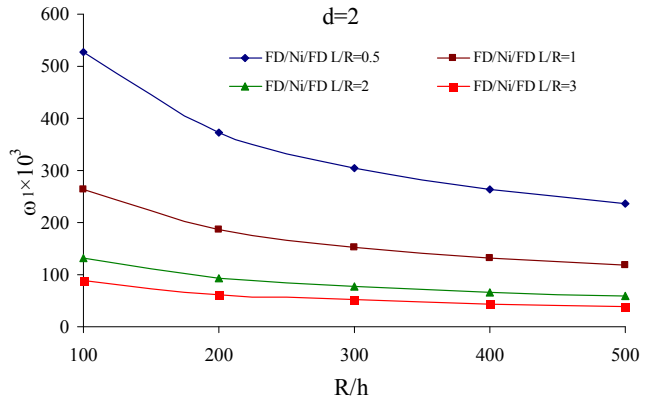
Burada E_0, ν_0, ρ_0, sırasıyla, hammaddenin Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluğu; E_f, ν_f, ρ_f sırasıyla, efektif Young modülü, Poisson oranı ve yoğunluktur [13].

Nikelden oluşan tek tabakalı ve FD/Ni/FD üç tabakalı silindirik kabukların ω_1 boyutsuz frekans parametresinin değişik hacim kesir indeks değerleri için h_m/h_{FD} oranına bağlı değişimi Şekil 2'de sunulmaktadır. FD/Ni/FD silindirik kabukların ω_1 boyutsuz frekans parametresinin değerleri h_m/h_{FD} oranı artığında azalır. Ayrıca, FD/Ni/FD silindirik kabuklarda komposizyonel profilin boyutsuz frekans parametrelerine etkisi h_m/h_{FD} oranı arttığında azalır. Örneğin, FD/Ni/FD kabuklar için $d=5$ ve $h_m/h_{FD}=2$ olduğunda etki %31.42, $h_m/h_{FD}=8$ için etki %12.78'dir. FD/Ni/FD silindirik kabukların ω_1 boyutsuz titreşim frekans değerleri hacim kesir indeksi d artığında artar. Örneğin, FD/Ni/FD kabuklar için $h_m/h_{FD}=2$ ve $d=0.25$ olduğunda etki %7.27, $d=15$ için etki %35.54'dür.



Şekil 2. Ni ve FD/Ni/FD silindirik kabukların ω_1 boyutsuz frekans parametresinin değişik d değerleri için h_m / h_{FD} oranına bağlı değişimi (R/h =100; L/R=2)

FD/Ni/FD silindirik kabukların ω_1 boyutsuz frekans parametresinin değişik L/R oranı için R/h oranına bağlı değişimi Şekil 3'de sunulmaktadır ($d=2$). L/R ve R/h oranları artığında boyutsuz frekans parametresinin değerleri azalmaktadır. Ayrıca, boyutsuz frekans parametre değerlerine kompozisyonel profillerin etkisi önemli olup R/h oranın değişimine bağlı olarak değişmemektedir. FD/Ni/FD silindirik kabuğun boyutsuz frekans parametre değerlerine kompozisyonel profillerin etkisi L/R oranı artığında, genelde azalmakta fakat bu azalma düzensizlik göstermektedir.



Şekil 3. FD/Ni/FD silindirik kabukların ω_1 boyutsuz frekans parametresinin $d=2$ ve değişik L/R oranı için R/h oranına bağlı değişimi ($h_m / h_{FD} = 6$)

5. SONUÇLAR

İç ve dış yüzeyleri fonksiyonel değişimli malzemelerle (FDM'ler) kaplı metal silindirik kabukların serbest titreşim problemi incelenmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların temel bağıntıları ve değiştirilmiş Donnell tipi temel denklemleri türetilmekte ve Galerkin Yöntemi uygulanarak çözülmektedir. FDM kaplı metal silindirik kabukların serbest

titreşiminin boyutsuz frekans parametresi için analitik ifade bulunmaktadır. Analizler kısmında, çeşitli FD kaplama ve metal çekirdek kullanılarak oluşturulan kaplamalı silindirik kabukların serbest titreşimlerinin boyutsuz frekans parametrelerinin minimum değerlerine, hacim bileşenleri değişiminin, kabuk karakteristiklerinin, iç ve dış tabakaların kalınlıkları değişiminin etkileri sayısal olarak incelenmektedir.

TEŞEKKÜR

Birinci ve ikinci yazar 3161-YL1-12 No'lu projeye verdiği destekten dolayı Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür eder.

KAYNAKLAR

[1] Komanduri, R. and Jahanmir, S., "Friction and Wear of Ceramics" Marcel Dekker Inc., 1994.
[2] Suresh, S. and Mortensen, A., "Fundamentals of Functially Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites" IOM Communications Ltd., London, 1998.
[3] Holt, J., Koizumi, M., Hirai, T. and Munir, Z., "Proceedings of the 2nd International Symposium on Functionally Gradient Materials" In Ceramic Transactions, 34, 1992.
[4] Öztürk, M. and Erdoğan, F., "Periodic Surface Cracking in an FGM Coating" Journal of Engineering Science, 33, 2179–2871, 1995.
[5] Patel, B.P., Gupta, M.S., Loknath, M.S. and Kadu, C.P., "Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Elliptical Cylindrical Shells Using Higher-Order Theory", Composite Structures, 69, 259–270, 2005.
[6] Matsunaga, H., "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells According to a 2d Higher-Order Deformation Theory", Composite Structures, 88, 519–531, 2009.
[7] Tornabene, F., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power-Law Distribution" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 2911–2935, 2009.
[8] Sofiyev, A.H. and Schnack, E., "The Vibration Analysis of Simply Supported FGM Truncated Conical Shells Resting on Two-Parameter Elastic Foundations" Mechanics of Advanced Materials and Structures, 19, 241–248, 2012.
[9] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M., "Static Free Vibration and Buckling Analysis of Isotropic and Sandwich Functionally Graded Plates Using a Quasi-3d Higher-Order Shear Deformation Theory and a Meshless Technique" Composites Part B: Engineering, 44, 657-674, 2013.
[10] Sobhy, M., "Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions" Composite Structures, 99, 76–87, 2013.
[11] Sofiyev, A.H. and Kuruoglu, N., "Torsional Vibration and Buckling of the Cylindrical Shell with Functionally Graded Coatings Surrounded by an Elastic Medium" Composites Part B Engineering, 45, 1133–1142, 2013.

[12] Volmir, A.S., "Stability of Elastic Systems", Nauka: Moscow, 1967. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD628508.
[13] Shen, H.S., "Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells". CRC Press, Florida, 2009.