66848

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUATERNIONLAR VE BİLGİSAYARDA GRAFİKTE KULLANIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kont. ve Bilg.Müh. Kanat GEZGEN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Haziran 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Füsun SELÇUK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Nadir YÜCEL
Prof. Dr. Leyla GÖREN

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

HAZİRAN 1997

ÖNSÖZ

Her konuda hızın ve yüksek başarımın çok büyük önem kazandığı bu teknoloji çağında, bilgisayarda grafik konusunda yeni bir bakış açısı kazandıracağına ve eğer üzerinde araştırmalara devam edilirse bilgisayarda grafik temellerini değiştirebileceğine inandığım quaternionlar konusunda yapmış olduğum tez çalışmasının benim teorik bilgilerime olduğu kadar bu konudaki araştırma ve geliştirmelere de faydalı olmasını ümit ediyorum.

Konuyu veren ve bana tez çalışmam sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Prof.Dr.Füsun Selçuk Tunalı'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez çalışmam sırasında bana destek olan Hale Nazlı'ya ve Hakan Nazlı'ya da yardımları için teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ I
İÇİNDEKİLER II
SEMBOL LİSTESİ V
ŞEKİL LİSTESİ VI
ÖZET VII
SUMMARY VIII

BÖLÜM 1. GİRİŞ 1

BÖLÜM 2. VEKTÖRLER 4
2.1 VEKTÖR 4
2.1.1 Vektörler Üzerinde İşlemler 5
2.1.2 Skalar Çarpım 7
2.1.3 Vektörel Çarpım 8

BÖLÜM 3. QUATERNİONLAR 10
3.1 QUATERNION TANIMI 10
3.2 QUATERNIONLARIN ELEMANLARI 11
3.3 BİRİM VEKTÖRLER ÜZERİNDE İŞLEMLER 14
3.4 QUATERNIONLARIN BİR DİĞER İFADESİ 18
3.5 İKİ VEKTÖRÜN GEOMETRİK BÖLÜMÜ VE ÇARPIMI 19
3.5.1 Geometrik Bölme 19
3.5.2 Geometrik Çarpma 19
3.6 GENEL KURALLAR VE FORMÜLLER 22
3.7 VEKTÖR VE QUATERNIONLARIN ÜSLERİ 24
3.8 UZAYDA BİR NOKTANIN VEKTÖREL VE KARTEZYEN TANIMI 26
3.9 DİK, EŞDÜZLEMSEL, ÇİFTDÜZLEMLİ VE KOLİNEER QUATERNION TANIMLARI 28
3.10 TERS QUATERNİON 28
3.11 EŞLENİK (CONJUGATE) QUATERNİON 29
3.12 ZIT QUATERNIONLAR 31
3.13 VERSÖRLERİN KÜRESEL ARKLAR İLE GÖSTERİLİMİ 31
3.14 QUATERNİONLAR ÜZERİNDE İŞLEMLER 32
3.14.1 Quaternionlar İle Toplama ve Çıkarma 32
3.14.2 Quaternionlar İle Çarpma Ve Bölme 34
3.14.3 Vektör Ve Quaternionlarda Çarpma İşleminde Dağılma Özelliği 40
3.14.4 Genel Formüller 42
3.15 İKİ VEYA DAHA FAZLA VEKTÖRÜN ÇARPIMI 43

BÖLÜM 4. QUATERNIONLARIN GEOMETRİDE KULLANILMASI 48
4.1 ÇİZGİ VE YÜZEYLER İÇİN GENEL TANIMLAR 48
4.1.1 Çizgi Ve Yüzeyler Üzerinde Tanımlı Genel Eşitlikler 48
4.1.2 Quaternion Metodu ile Kartezyen Bağıntısının Birlikte Kullanımı 49
4.1.3 Quaternion Diferansiyeli 50
4.1.3.1 Değişme Özelliği 50

4.1.3.2 Genel Quaternion Diferansiyeli İfadesi 52
4.1.3.3 Dağılma Özelliği 55
4.1.3.4 Dört terimli quaternion gösterilimi üzerinde diferansiyel 57
4.2 DÜZ ÇİZGİ 57
4.2.1 Merkezden Geçen Düz Çizgi 57
4.2.2 Paralel Çizgiler 58
4.2.3 Verilen İki Noktadan Geçen Düz Çizgi 58
4.2.4 Verilen Bir Düz Çizgiye Dik Düz Çizgi 60
4.3 DÜZLEM 65
4.3.1 Genel Düzlem Denklemi 65
4.3.2 Üç Düz Çizgi İle Eşit Açı Yapan, Merkezden Geçen Düzlem 67
4.3.3 Verilen Üç Noktadan Geçen Düzlem 67
4.4 DAİRE VE KÜRE 69
4.4.1 Genel Daire Eşitliği 69
4.4.2 Genel Küre Eşitliği 70
4.4.3 Daireye Teğet Çizgi veya Küreye Teğet Düzlem 70
4.4.4 Teğet Noktalarındaki Kiriş 72
4.5 KONİK BÖLGELER VE KARTEZYEN FORMLAR 72
4.5.1 Parabol 72
4.5.2 Parabole Teğet 73
4.5.3 Bir Parabole Çizilen Kesişen Üç Teğet 75
4.5.4 Elips 78
4.5.5 Hiperbol 79
4.6 QUATERNİONLAR İLE LİNEER EŞİTLİKLER 80
4.6.1 Konik Bölgeler İçin Genel Eşitlikler 83
4.6.2 Elips 87
4.6.3 Parabol 90

BÖLÜM 5. QUATERNİONLARIN BİLGİSAYARDA GRAFİKTE KULLANIMI 93
5.1 TEMEL BİLGİLER 93
5.1.1 MODELLEME 93
5.1.2 Aydınlatma ve Gerçeğe Benzetme 95
5.1.3 Bilgisayarda Görüntüleme 95
5.1.4 Animasyon 96
5.2 QUATERNİONLARIN DÖNDÜRME İŞLEMİNDE KULLANIMI 97
5.2.1 Bilgisayarda Modellenmiş Bir Cismin Döndürülmesi 97
5.2.1.1 Matris metodu ile bir cismin döndürülmesi 97
5.2.1.2 Quaternion metodu ile bir cismin döndürülmesi 98
5.3 QUATERNION UZAYINDA SANAL GERÇEKLİK İÇİN GÜRÜLTÜNÜN YOKEDİLMESİ 102
5.3.1 Sanal Gerçeklikte Hareket Yumuşatma 102
5.3.2 Quaternionlar Hakkında Kısa Hatırlatma 104
5.3.3 Enerji Ve Uzaklık Ölçümleri 106
5.3.3.1 Enerji fonksiyonları 107
5.3.3.2 Uzaklık ölçüsü 109
5.3.3.3 Optimizasyon ve sayısal yöntem 110
5.3.3.4 Sayısal sonuçlar 112
5.3.4 Özet 112
5.4 BİLGİSAYARDA GRAFİKTE DÖNDÜRME YÖNTEMLERİNİN KIYASLANMASI 115
5.4.1 Yeni Bir Döndürme Tekniği 115
5.4.2 Yeni Tekniğin 3-Boyutlu Döndürme İşleminde Kullanılması 117
5.4.3 Cisim Döndürme İşleminde Üç Yöntemin Kıyaslanması 117

5.5 CİSİM MODELLEME 118
5.6 PROJEKSİYONLAR 119
SONUÇLAR VE ÖNERİLER 121
KAYNAKLAR 122
EKLER 123
ÖZGEÇMİŞ 130

SEMBOL LİSTESİ

q : quaternion
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \vec{v}$: vektörler
θ, ϕ : açılar
T : tensör
Tq : q quaternionun tensörü
Uq : q quaternionun versörü
Sq : q quaternionun skaleri
Vq : q quaternionun vektörü
Kq : q quaternionun eşleniği
Rq : q quaternionun tersi
-q : q quaternionun zıttı
i, j, k : birim vektörler
a, b : α ve β vektörlerinin tensörleri
ρ : uzayda bir nokta veya bir yüzey fonksiyonu
ε , $\vec{u}$: quaternion düzlemine dik birim vektör, quaternion ekseni
v : $\vec{v}$ vektörünün quaternionu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Bir vektörün yönünün ters çevirilmesi 4
Şekil 2.2 İki vektörün toplanması 5
Şekil 2.3 Skalar Çarpım 7
Şekil 2.4 Vektörel çarpım 8
Şekil 3.1 Quaternion Tanımı 10
Şekil 3.2 Birbirine dik açı yapan üç birim vektör (Eksen Takımı) 12
Şekil 3.3 Geometrik bölme 12
Şekil 3.4 İki vektörün çarpılması 20
Şekil 3.5 Bir quaternionun eşleniği 29
Şekil 3.6 Birim küre 31
Şekil 3.7 Versörler ile çarpma ve bölme 36
Şekil 3.8 Üç vektörün çarpımının geometrik anlamı 45
Şekil 4.1 Quaternion diferansiyeli 54
Şekil 4.2 Verilen iki noktadan geçen düz çizgi 59
Şekil 4.3 Verilen bir çizgiye dik düz çizgi 60
Şekil 4.4 Dairenin parametrik gösterilimi 70
Şekil 4.5 Daireye bir noktasında çizilen teğet 71
Şekil 4.6 Bir parabol ile kesişen üç teğet 75
Şekil 4.7 Konik bölgelere ilişkin genel tanım 84
Şekil 4.8 Elips, hiperbol ve parabol tanımı 84
Şekil 5.1 Bir quaternionun çarpım sonucu dik bir vektöre olan etkisi 99
Şekil 5.1 Katı bir cismin bozulmuş hareketinin gösterilimi. (a) Katı cismin hareketi , (b) Quaternionun dört bileşeni 113
Şekil 5.2 $\alpha = .1$ iken elde edilen hareketin sonuç pozisyonu 113
Şekil 5.3 $\alpha = \beta = .1$ olduğu yumuşatılmış hareket. (a) Yumuşatılmış hareket , (b) Quaternionun yumuşatılmış bileşenleri. 114
Şekil 5.4 $\alpha = .3$ iken sonuç pozisyonları. 114
Şekil 5.5 $\alpha = \beta = .3$ olduğunda elde edilen hareket. (a) Yumuşatılmış hareket , (b) Yumuşatılmış quaternionlar 115

ÖZET

Son yıllarda bilgisayar teknolojisi çok büyük bir gelişme içine girmiştir. Bunun bir sonucu olarak, gerçek hayatta uygulanması güç, maliyetli ve riskli işlerin bilgisayarlar tarafından simüle edilmesi ve sonuçların hiç bir risk yaratmayacak olan bilgisayar ortamlarında incelenebilmesi fikri kabul görmeye başlamıştır. Bu ise bilgisayarda grafiğin çok büyük önem kazanmasına yol açmıştır.

Bu tez çalışmasında amaç, günümüzde kullandığımız bilgisayarda grafik konusuna farklı bir bakış açısı getirerek, 1843 yılında Sir William HAMILTON tarafından ortaya atılan quaternionlar hakkında detaylı bilgi verip, bilgisayarda grafiğin hangi konusunda, ne şekilde kullanılmakta olduğunu ve daha ne şekillerde kullanılabileceğini ve hangi durumlarda ne avantaj ve dezavantajlar getireceğini araştırmaktır.

Tez içersinde iki konu bilgisayarda grafiğin iki ayrı konusunda quaternionların kullanımına ayrılmıştır. Bu iki konu dışında aydınlatma gibi bilgisayarda grafiğin diğer bir çok önemli konusuda da quaternionları görmek mümkündür. Ancak tez çalışması içersinde bu iki konuya değinilmiş ve ayrıca modelleme konusunda bize sağladığı avantaj ve dezavantajlar incelenmiştir. Tezin ek bölümünde quaternionların keşfini açıklayan orijinal mektuplar ile quaternion konusunda elde edilebilecek önemli kaynakların listesi verilmiştir.

SUMMARY

Computer technology has been steadily improving during the past decade. Consequently, the subject of simulizing the costly businesses with high risk factors and the idea of studying results which would not create any risks has been mutualy agreed. Thus, computer graphics has gained the important situation it has deserved in the computer world.

The main purpose of this thesis is to bring a different point of view to the subject of computer graphics by giving detailed information about quaternions, and also to examine how, when and in which subject of computer graphics quaternions should be utilized.

Quaternions were defined by Sir William Hamilton, while he had been stduying "expansion of complex plane to the three dimesional space" in 1843.

A vector can be defined as the representative of transference through a given distance in a given direction, and quaternions as 4 a dimensional vector, which consists of one real, and three imaginary parts. The real part is a scalar, and the three imaginary numbers define a vector in three dimension. If we represent the scalar part of our quaternion q as $\mathrm{S}q$, and the vectorial part as $\mathrm{V}q$, then q can be defined as follows:

$$q = [\mathrm{S}q, \mathrm{V}q] = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q$$

Quaternions can also be defined as the quotient of two vectors. This means that quaternions can be used to convert one vector to another. Let $\alpha = \mathrm{OA}$ and $\beta' = \mathrm{O'B'}$ be our two vectors lying in different planes. β' can be moved paralel to itself until O' collides with O. Now they lie in the same plane. (Figure 1)

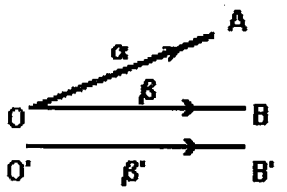


Figure 1

Now let our quaternion $q = \dfrac{\alpha}{\beta}$. We can also write this equation as $q\beta = \alpha$. This means that quaternion q converts β to α. We have defined vectors as the representative of transference through a given distance in a given direction. So q must convert the length of β to the length of α. And also it must rotate β to

cause it coincide with α in direction. Here, a quaternion peforms two distinct operations.

1. A streching or shortening of β, so as to make it of the same length as α.
2. A turning of β, so as to cause it coincide it with α in direction.

We have said that a quaternion has four elements. One is used to strech(or shorten), and other three to rotate it. Two angles are used to fix the plane of rotation and the other to fix the amount of rotation in that plane. The first operation is performed by the tensor of q, and the second is performed by the versor of q. The tensor and the versor parts of quaternion q are represented by $\mathrm{T}q$ and $\mathrm{U}q$ respectively.

$$q = \mathrm{T}q\mathrm{U}q$$

An equality between two quaternions $q = \frac{\alpha}{\beta}$, $q' = \frac{\alpha'}{\beta'}$ can be defined from the following considerations.

1. The vector lengths are in the same ratio.
2. The vectors are in the same or parallel planes.
3. The vectors make with each other the same angle. Both angles are the same in magnitude and direction.

We have told that quaternions turn the vectors which they operate on, and both magnitude and direction of the angle can be affected. So we must define positive and negative rotations. By positive rotation with reference to an axis is meant left-handed rotation when the direction of the axis is from the plane of rotation towards the eye of a person who stands on the axis facing the plane of rotation. If the direction of the axis is regarded as from the eye towards the plane of rotation, positive rotation is righthanded.

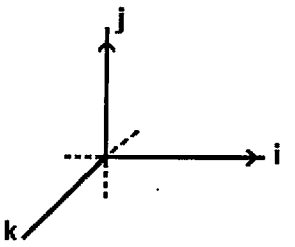


Figure 2

If i, j, k be three axes at right angles to each other, with directions as indicated in the figure, then positive rotation is from i to j, from j to k, and from k to i, relatively to axes k, i, j respectively.

Let i, j, k be unit vectors. The following equations defines the basic rules of geometric division and geometric multiplication.

$$ij = k \qquad ji = -k$$
$$jk = i \qquad kj = -i$$
$$ki = j \qquad ik = -j$$

With the help of the equations above, we can define :

$$i \times i = -1$$
$$j \times j = -1$$
$$k \times k = -1$$

$$\frac{k}{j} = i \qquad \frac{j}{k} = -i$$
$$\frac{i}{k} = j \qquad \frac{k}{i} = -j$$
$$\frac{j}{i} = k \qquad \frac{i}{j} = -k$$

Let α and β be two coinitial vectors, and let $q = \frac{\alpha}{\beta}$ then we have

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos\phi + \varepsilon \sin\phi) = q$$

Here ε is a unit vector perpendicular to α and β.

The plane of a quaternion is defined as the plane parallel to vectors. The axis of a quaternion is the vector perpendicular to its plane, and its angle is that included between two coinital vectors parallel to those of the quaternion. If this angle is 90°, the quaternion is called a *right* quaternion. Any two quaternions having a common plane, or parallel planes are said to be *complanar.* If their planes intersect they are *diplanar*. If the planes of several quaternions intersect in, or are parallel to, a common line, they are said to be *collinear.*

Quaternions can be regarded as the sum of two parts, the first of which $\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\cos\phi$ is a scalar, and the second $\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\sin\phi \cdot \varepsilon$ is a vector at right angles to their plane, whose sign depends upon the direction of rotation of the fraction $\frac{\alpha}{\beta}$. This may be expressed symbolically in the notation

$$q = \frac{\alpha}{\beta} = \mathrm{S}\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{V}\frac{\alpha}{\beta} = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\cos\phi + \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\sin\phi \cdot \varepsilon$$

$$\mathrm{S}q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\cos\phi, \quad \mathrm{V}q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\sin\phi \cdot \varepsilon$$

The first member is called the scalar part of the quaternion, and the second part is called the vector part of the quaternion. The versor of the vector part is a unit vector perpendicular to their plane.

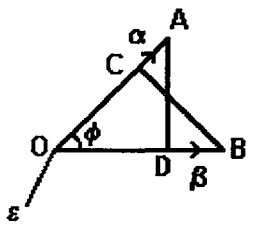


Figure 3

Let α and β be unit vectors along OA and OB, and ε be a unit perpendicular to the plane AOB as in figure 3

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{OD} + \mathrm{DA} \\ &= (\cos\phi \cdot \beta) + (\sin\phi \cdot \varepsilon\beta)\end{aligned}$$

and also by definition

$$\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = (\cos\phi + \sin\phi \cdot \varepsilon)\beta$$

Therefore the distributive law applies to the multiplication of a vector by the scalar and vector components of a quaternion. We also have

$$\beta = (\cos\phi + \sin\phi \cdot \varepsilon)\alpha$$

Since $\alpha^2 = -(\mathrm{T}\alpha)^2$ and $\beta^2 = -(\mathrm{T}\beta)^2$

$$\beta\alpha = \mathrm{T}\beta\,\mathrm{T}\alpha(-\cos\phi + \varepsilon\sin\phi)$$

$$\alpha\beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta(-\cos\phi - \varepsilon\sin\phi)$$

The product of two vectors is, therefore, a quaternion.

Let q be any quaternion. If $\mathrm{S}q = 0$, the vectors of which q is the quotient or product are perpendicular to each other and if $\mathrm{S}q = 0$, the vectors are parallel to each other.

The symbol i^m, m being a positive whole number, represents a quadrantal versor used m times as an operator, the exponent denoting the number of times i is used as a quadrantal versor. By the extension of this meaning, $i^{1/m}$ would represent a versor which produces the $\frac{1}{m}$th part of quadrantal rotation. Since the angle of rotation is $\frac{m \times \pi}{2}$ we have $m = \frac{2\phi}{\pi}$ and therefore we can write

$$\cos\phi + \varepsilon \sin\phi = e^{\frac{2\phi}{\pi}}$$

$$\cos\phi - \varepsilon \sin\phi = e^{-\frac{2\phi}{\pi}}$$

The *reciprocal* of a quaternion q, is denoted by $\mathrm{R}q$. The product of two reciprocal quaternions is equal to positive unity, and each is equal to the quotient of unity by the other.

$$\mathrm{R}q = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}(\cos\phi - \varepsilon \sin\phi)$$

If some vector β' be taken complanar with β and α, and making with α the same angle that β does, $\mathrm{T}\beta$ being also equal to $\mathrm{T}\beta$, then if $q = \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta'}$ is called the conjugate of q and is represented by $\mathrm{K}q$.

$$\mathrm{K}q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos\phi - \varepsilon \sin\phi) = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q$$

and therefore

$$q + \mathrm{K}q = 2\mathrm{S}q$$
$$q - \mathrm{K}q = 2\mathrm{V}q$$

If for $q = \frac{\alpha}{\beta}$, we write $\frac{-\alpha}{\beta}$, the latter is called the *opposite* of q, and is represented by $-q$. The sum of two opposite quaternions is zero. And the ratio of two opposite quaternions is negative unity.

$$-q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(-\cos\phi - \varepsilon \sin\phi)$$

The sum of two conjugate quaternions is, therefore, always a scalar, positive or negative as the $\angle q$ is acute or obtuse. If $\angle q = \frac{\pi}{2}$ this sum is evidently zero.

If q is scalar $\mathrm{K}q = q$, and conversely if $\mathrm{K}q = q$, q is a scalar.

If α, β, γ, ... are co-initial unit vectors, their extremities will lie on the surface of a unit sphere(Figure 3). $\frac{\alpha}{\beta}$ being any quaternion $\mathrm{U}\frac{\alpha}{\beta}$ turns β from the position OB to OA, and this versor may be represented by the arc BA joining the vector extremities. This arc determines the plane of the versor as also the magnitude and direction of its angle, the direction of rotation being indicated by the

order of the letters as in the case of vectors. The representation of versors by vector arcs is important in the theorems relating to the multiplication and division of quaternions, and may be made upon a unit sphere.

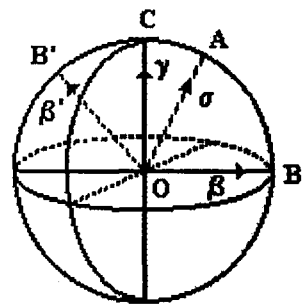


Figure 4

The versors of all complanar quaternions are represented by arcs of the same great circle, while arcs of different great circles represent the versors of diplanar quaternions which are always equal.

The sum or difference of two vectors is a vector and two scalars is a scalar. Therefore the sum or difference of two quaternions is a quaternion.

The associative and commutative principles hold good for addition and subtraction of quaternions.

$$q+r=r+q$$
$$q+(r+s)=(q+r)+s$$

In quaternion addition and subtraction, S and V and K are distributive symbols.

$$\mathrm{S}\Sigma q=\Sigma \mathrm{S}q$$
$$\mathrm{V}\Sigma q=\Sigma \mathrm{V}q$$
$$\mathrm{K}\Sigma q=\Sigma \mathrm{K}q$$

Let $q=\mathrm{S}q+\mathrm{V}q$, $q=\mathrm{S}q+\mathrm{V}q$ be any two quaternions then

$$p=qr=\mathrm{S}q\mathrm{S}r+\mathrm{S}q\,\mathrm{V}r+\mathrm{S}r\,\mathrm{V}q+\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r$$

Therefore, the product of two quaternions is again a quaternion.

Multiplication is only commutative if two quaternions are complanar.

The tensor of the product (or quotient) of any two quaternions is the product (or quotient) of their tensors, and the versor of the product (or quotient) is the product (or quotient) of their versors.

The conjugate of the product of two quaternions is the product of their conjugates in the inverted order.

$$\mathrm{K}(qr)=\mathrm{K}r\cdot\mathrm{K}q$$

The multiplication of quaternions is a distributive and associative operation.

$$(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$$
$$q(rs) = (qr)s$$

In this thesis besides the basis quaternion concepts, subjects such as:

- vector definitions and vectoral operations,
- the definitions of points, lines and planes with quaternions,
- the utilization of quaternions in the definition of line and plane geometry,
- the definiton of plane curves such as parabola, ellipse and hyperbola in cartesian and parametric forms and in quaternion space,
- the utilization of quaternions in three dimensional object rotation,
- a technical information about noise smoothing for VR equipment in quaternion space,
- the advantages and disadvantages of the utilization of quaternions in three dimensional modelling, and
- a list of the sources which has been obtained from various papers, books and internet

has been given.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Gerçek dünyada var olmayan cisimlerin gösterilmesi ve uygulamada gerçekleştirilmesi zor, riskli olduğu ve yüksek maliyet gerektirdiği durumlarda, bu cisimlerin görüntülenmesi açısından bilgisayar ortamında canlandırılması büyük kolaylık getirir. Örneğin yeni bir teknik, veya yeni bir malzeme ile yapılması planlanan bir inşaatın büyük masraflar yapılıp, çok önemli bir kaynak olan insan gücünün gereksiz bir süre boş yere kullanılmasından sonra beklenilen faydaları getirmeyeceğinin görülmesi yerine, bunun bilgisayar ortamında simülasyon teknikleri ile gerçekleştirilip sonucun risksiz bir ortamda elde edilmesi çok daha kolay, ucuz ve hızlı olacaktır. Bir başka çarpıcı örnek olarak Satürne gönderilecek olan bir yer aracının üretilmesi ve gönderilmesi için seneler boyu çalışıp, büyük masraflar yaptıktan sonra bu aracın Satürn atmosferinden geçip yere bile inemediğini görmek herhalde uzay araştırmaları yapanlar için kötü bir sürpriz olurdu. İşte bu gibi durumlarda bilgisayarda bir simülasyon ortamı hazırlayıp sistemin bilgisayar ortamında tasarlanıp canlandırılması çok büyük kolaylık ve hız getirmektedir.

Açıktır ki, günümüzün yüksek hızlı bilgisayarları kullanılsa bile, gerçekçiliğin tam olarak sağlanması ve görüntülenmesi söz konusu olduğunda, işlem maliyetinin yüksek olması nedeniyle bilgisayarda grafik, günlük hayatta sahip olması gereken yerini alamamakta, uzay araştırmaları ve askeri araştırmalar dışında bizim karşımıza genellikle eğlence ve reklam amaçlı çıkmaktadır. Bu durumda daha geniş kullanım alanları yaratılabilmesi için aynı işin daha az işlem maliyeti ile gerçekleştirilmesinin mümkün olup olamayacağının araştırılması gereklidir.

Aynı amaçlarla gerçek hayattaki cisimlerin, bilgisayar ortamına aktarılırken, sadece basit geometrik cisimler olarak ifade etmenin yeterli olmayacağı göz önünde bulundurulursa, işlem yükünün yanında cismin tanımlanması için kullanılacak veri yapısının da basitleştirilmesi ve küçültülebilmesi de önem kazanmaktadır. Örneğin bir uzay gemisini, uzayda bir noktaya göndermeden önce

simülasyon ve bilgisayarda test aşamasında silindir, koni ve prizmalarla tanıtmak yeterince gerçekçi olmayacaktır. Bu tip çok büyük hassasiyet gerektiren durumlarda modelleme çok büyük önem kazanır. Bu hassasiyetin sağlanabilmesi için cismi tanımlayıcı ne kadar çok veri sistemde tutulursa sistem maliyeti de o kadar artacaktır. Bu durumda modelleme aşamasında sistem maliyetinin küçültülebimesi ayrı bir önem kazanmaktadır.

Bilgisayarda modelleme ve canlandırma konularında günümüzde kullanılan tekniklerden farklı bir bakış açısı için bir adım teşkil edebilecek olan quaternion konusu hakkında araştırma amaçlı hazırlanmış olan bu tez çalışmasında

- Vektör tanımları ve vektörler ile işlemler,
- Temel quaternion kavramları,
- Nokta, çizgi ve yüzeylerin quaternionlar ile ifadesi,
- Parabol, elips ve hiperbol gibi düzlem eğrilerinin parametrik, kartezyen formda ve quaternionlar ile ifadesi,
- Sanal gerçeklikte quaternionların hareketlerin yumuşatılması vegürültünün yokedilmesinde nasıl kullanılabileceği,
- 3 boyutlu cisimlerin döndürülmesinde quaternionların kullanılmasının faydaları,
- 3 boyutlu cisim modellemede quaternion kullanımının avantaj ve dezavantajları, ve
- Çeşitli süreli yayınlardan, kitaplardan ve internetten elde edilebilecek kaynakların bir listesi

verilmiştir.

Quaternion konusu ilk olarak 16 Ekim 1843 tarihinde Sir William Rowan Hamilton tarafından ortaya atılmıştır. İki vektörün çarpım sonucunun matematiksel ifadesi olarak tanımlanan quaternionlar 1980'li yılların ikinci yarısından sonra bilgisayarda grafik konusuna girmiş, ve o günden bugüne bir çok konuda kullanılmıştır. Üç boyutlu cisimlerin döndürülmesi işleminden günümüz bilgisayar teknolojisi sanal gerçekliğe kadar bir çok konuda karşımıza çıkan quaternionlar bu tez çalışmasında ikinci bölümden başlamak üzere toplam dört temel bölüm bulunmaktadır. Bu bölümler hakkında tanıtım mahiyetinde kısa bilgiler aşağıda verilmiştir.

İkinci bölüm tamamen vektörler konusuna ayrılmış, ve bu bölümde quaternion matematiğinin temelini oluşturan vektörler üzerine temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüm ise quaternion matematiğinin temelini oluşturmaktadır. Kavram olarak, bir vektörü diğer bir vektöre dönüştüren bir operatör olarak ele alınabilecek quaternionlar hakkında detaylı açıklamalar ve tanımlamalar, quaternionlar üzerinde tanımlı operatörler ve bu operatörlerin sahip olduğu özellikler anlatılmaktadır. Quaternionlar üzerinde toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üs alma gibi işlemlerin nasıl yapılabileceği bu bölümde verilmektedir.

Nokta, çizgi ve düzlem gibi üç boyutlu uzayın temel elemanlarının parametrik gösterilimi ve quaternion uzayındaki tanımlarının verildiği dördüncü bölümde, parabol, elips ve hiperbol gibi düzlem eğrileri hakkında bilgi verilmiş, ayrıca quaternion uzayındaki gösterilimlerinin nasıl elde edilebileceği detaylı bir şeklide anlatılmıştır. Parametrik gösterilimden quaternion uzayındaki tanımına geçiş yöntemi de yine bu konuda anlatılmıştır.

Beşinci bölümde, bilgisayarda grafik konusunda quaternionların yerini anlatılmakta, ve örnek olarak bir cisimin döndürülmesinde bize kazandırdıkları ile, günümüz teknolojisi sanal gerçeklik konusunda hareketlerin yumuşatılması konusunda kullanımı verilmektedir. Bu bölümde ayrıca üç boyutlu cisimlerin quaternionlar ile modellenmesinin bize getireceği avantaj ve dezavantajlar incelenmiş, animasyonun son aşaması olan projeksiyon işleminde quaternionların nasıl kullanılabileceği hakkında bilgi verilmiştir.

Bu tezde verilen konular dışında, quaternionlar bilgisayarda grafiğin birçok konusuna hızla girmekte ve girdiği her konuda büyük performans artışları sağlamaktadır. Yaptığımız araştırmalar sonucu bilgisayarda grafiğin en temel konusu olan modelleme üzerinde quaternionların kullanımının daha evvel ele alınmamış olması sebebiyle, bu konuda bir teorik çalışma da içeren bu tezde, modelleme konusu sadece data boyutları döndürme ve projeksiyon metodları açısından incelenmiş, ancak diğer konulara getireceği avantaj veya dezavantajlara değinilmemiştir.

BÖLÜM 2

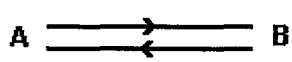
VEKTÖRLER

Quaternion konusunun iyice anlaşılabilmesi amacı ile önce vektörler üzerinde bazı temel kavramların bilinmesi gereklidir.

2.1 VEKTÖR

Vektör belirli bir *yönde* belirli bir *büyüklükte* yapılan transfer işleminin gösterilmesidir [1]. Bu tanım öncesinde vektör, yönlü bir doğru parçası olarak tanımlanırdı. Ancak günümüzde belirli bir yönü ve belirli bir büyüklüğü olan her değer için vektör tanımını kullanabiliyoruz. Vektörler α, β gibi sembollerle veya bir düzlem üzerinde başlangıç ve sonu A ve B noktaları üzerinde verilmiş ise AB şeklinde gösterilir. Tanımından da anlaşılabileceği üzere vektörler yönlü büyüklüklerdir [1,2]. Dolayısı ile büyüklüğünün işaretinin ters çevirilmesi, yönünün ters çevirilmesi anlamına gelecektir. (Şekil 2.1) Bu eşitlik 2.1'de gösterilmektedir.

$$AB = -BA \qquad (2.1)$$



Şekil 2.1 Bir vektörün yönünün ters çevirilmesi

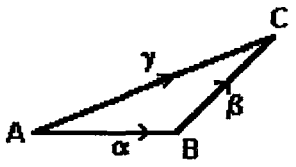
Birbirine paralel ve aynı büyüklükteki tüm vektörler aynı vektör cinsinden ifade edilebilir. Aralarındaki tek fark vektörün işareti olabilir. Vektörler pozitif veya negatif yönlü olarak belirtilemezler. Sadece iki vektör birbirine karşı zıt işaretli olabilir. Ancak bunların hiçbiri pozitif yönlüdür denilemez.

İki vektörün birbirine eşit sayılması için aynı başlangıç noktalarına sahip olacak şekilde ötelendiklerinde aynı sonlanma noktasına sahip olmaları gereklidir. Bu işlemde hiç bir transformasyon veya döndürme uygulanmamalıdır. Bunun için vektörlerin büyüklük ve yön açısından birbirlerine eşit olmaları gereklidir.[2]

2.1.1 Vektörler Üzerinde İşlemler

Vektörler üzerinde toplama, çıkarma, skalar veya vektörel çarpma gibi bilinen işlemler tanımlıdır. α, A noktasından B noktasına bir vektör ve β, B noktasından C noktasına bir diğer vektör olsun. Bu durumda 2.2 ile verilen eşitlik bize vektörler üzerindeki toplama işlemini tanımlayacaktır. (Şekil 2.2)

$$\alpha + \beta = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \qquad (2.2)$$



Şekil 2.2 İki vektörün toplanması

Aynı yönlü iki vektör toplandığında, toplam vektörü bu vektörlerle aynı yönde olacaktır. Eğer vektörlerin büyüklükleri de birbirine eşitse bu durumda toplam vektörü, vektörlerin her birinin iki katı kadar olacaktır. Eğer n adet aynı yönlü ve aynı büyüklüğe sahip vektör toplanırsa toplam vektörü, bir vektörün n katı kadar olacaktır. Vektörler üzerindeki toplama işlemi değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir. Bu özellikler eşitlikler 2.3 ve 2.4 ile gösterilmektedir.

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{BC} + \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{AB} + (\mathrm{BC} + \mathrm{CD}) = (\mathrm{AB} + \mathrm{BC}) + \mathrm{CD} = \mathrm{AD} \qquad (2.4)$$

İki vektör arasındaki çıkarma işlemi ise çıkartılacak vektörün yönünün ters çevirilip, iki vektörün toplanması ile mümkün olacaktır.

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BC} = \mathrm{AB} + (-\mathrm{BC}) = \mathrm{AB} + \mathrm{CB} \qquad (2.5)$$

Birim vektör büyüklük değeri kullanılan ölçülere göre 1 birim olarak kabul edilen vektör olarak tanımlanır. $\alpha = \mathrm{AB}$ vektörü bir birim vektör olsun, ve A, B ve C aynı doğru üzerindeki üç nokta olsun. Bu durumda $\beta = \mathrm{AC} = m\alpha$ şeklinde bir m reel değeri her zaman bulunabilir ve bu değere *tensör* (gerey) adı verilir [1].

Tensörler işaretsiz nümerik değerlerdir ve dolayısı ile vektörlerin sadece büyüklükleri ile ilgilidirler.

A, B ve C herhangi bir doğru üzerindeki üç nokta olsun. Her zaman $\mathrm{BA} = y\mathrm{BC}$ ile tanımlı bir y reel değeri bulunabilir. Bu y değerine ise *skalar* adı verilir. Skalar ile tensör arasındaki temel fark skalarların işaretli sayılar olmasıdır. Skalarlar tensör ile işaretin çarpımı olarak da tanımlanabilir.

Tensör tanımında bir α birim vektörü tanımlamıştık. Bu birim vektörü β vektörünün *versörü* olarak tanımlanır. Bir β vektörünün tensörü $\mathrm{T}(\beta)$, versörü ise $\mathrm{U}(\beta)$ ile gösterilir.

$$\beta = \mathrm{T}(\beta)\,\mathrm{U}(\beta) \qquad (2.6)$$

Aynı düzlemde veya paralel düzlemlerde bulunan vektörlere eşdüzlemsel vektörler adı verilir. Aynı başlangıç notasından çıkan vektörlere eş başlangıç noktalı vektörler denir. Eğer α, β, ve γ, eşdüzlemsel ancak paralel olmayan vektörler ise, bu durumda bu vektörlerin büyüklük olarak katlarını kullanarak her zaman bir üçgen elde edilebilir. Bu ise bize 2.7 eşitliğini verecektir.

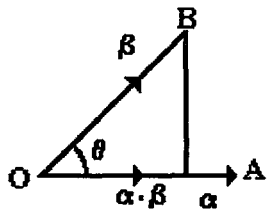
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \qquad (2.7)$$

Aynı başlangıç noktasına sahip üç vektör α, β ve γ, eğer eşdüzlemsel ise ve 2.8a ve 2.8b eşitliklerini sağlayan a, b ve c değerleri bulunabiliyorsa bu durumda üç vektör de aynı düz çizgi üzerinde sonlanacaklardır. Aynı şekilde eğer üç vektör aynı başlangıç noktasına sahip ise, eşdüzlemsel ise ve aynı düz çizgi üzerinde sonlanıyorlarsa 2.8a ve 2.8b eşitliklerini sağlayan a, b ve c değerleri bulunabilir.

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \qquad (2.8a)$$

$$a + b + c + = 0 \qquad (2.8b)$$

2.1.2 Skalar Çarpım



Şekil 2.3 Skalar Çarpım

$\alpha = \mathrm{OA}$ ve $\beta = \mathrm{OB}$ olacak şekilde iki adet vektörümüz olsun. Bu iki adet vektörün skalar çarpımı bir vektörün diğer vektör üzerine izdüşümü ile oluşan vektörün uzunluğu olarak tanımlanır [3]. Bu uzunluk şekil 2.3'den

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\cos\theta \qquad (2.9a)$$

olarak elde edilir. Eşitlikte yer alan θ açısı α vektörü ile β vektörü arasındaki açıdır. $(0 \le \theta \le \pi)$

α ile β çarpanları yer değiştirebilir. Yani skalar çarpım değişme özelliğine sahiptir.

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \qquad (2.10)$$

$\alpha \cdot \beta$ çarpımını vektörlerin bileşenleri cinsinden hesaplamak istersek,

$$\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad (2.11a)$$

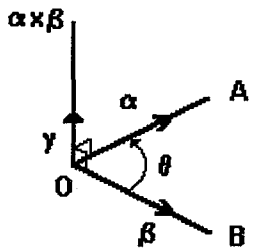
$$\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k \qquad (2.11b)$$

olmak üzere;

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (2.11c)$$

sonucu elde edilir. Buradan anlaşılacağı üzere, iki vektörün skalar çarpımını bulmak için, basit olarak birbirlerine karşılık gelen bileşenlerini çarpar ve bu sonuçları toplarız.

2.1.3 Vektörel Çarpım



Şekil 2.4 Vektörel çarpım

$\alpha = \mathrm{OA}$ ve $\beta = \mathrm{OB}$ olacak şekilde aynı başlangıç noktasına sahip ve birbirlerine paralel olmayan iki adet vektörümüz olsun. θ ise α ve β vektörleri arasındaki açı olsun. Bu durum şekil 2.4 ile verilmiştir. α ve β vektörlerinin oluşturduğu düzleme dik bir birim vektör ε ise vektörel çarpım eşitlik 2.12 ile tanımlanır. ε vektörünün yönü, α vektöründen β vektörüne θ açısı dönmek için tanımlı yön ile belirlenir.

$$\alpha \times \beta = \varepsilon \, \mathrm{T}\alpha \, \mathrm{T}\beta \sin\theta \qquad (2.12)$$

Eğer α vektörü ile β vektörü birbirine paralel ise, $\theta = 0^\circ$ veya $\theta = 180^\circ$ ise, $\alpha \times \beta = 0$ dır. Bu durumda ε'nın yönü belirsizdir, ancak sıfır vektörünün bir yönü olmasının önemi yoktur. Aksi hallerde ε vektörünün yönü α ve β vektörlerinin oluşturduğu düzleme dik ve α vektöründen β vektörüne dönüş açısının yönünde olacak şekilde belirlenir ve vektörel çarpım, α ile β'nın oluşturduğu paralelkenarın alanı, $\mathrm{T}\alpha \, \mathrm{T}\beta \sin\theta$, büyüklüğünde ve ε ile aynı yönlü vektördür.

Eğer, yukarıdaki tanımda α ve β çarpanlarının yerleri değiştirilirse, dönüş açısının yönü değişeceğinden ε vektörü yön değiştirir ve sonuç olarak eşitlik 2.13 elde edilir.

$$\beta \times \alpha = -\alpha \times \beta \qquad (2.13)$$

Vektörel çarpımın bir özelliği bir birim vektörün kendisi ile çarpımının 0 olmasıdır. Dolayısı ile bir vektörün vektörel karesi 0 olacaktır. Bu durum eşitlik 2.14a ve eşitlik 2.14b ile verilmiştir.

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0 \qquad (2.14a)$$

$$\alpha \times \alpha = 0 = \beta \times \beta \qquad (2.14b)$$

Elde ettiğimiz bu sonuçlar ile vektörel çarpımın temel prensiplerini eşitlik 1.15 ile tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} i \times j &= -j \times i = k \\ j \times k &= -k \times j = i \\ k \times i &= -i \times k = j \\ i \times i &= j \times j = k \times k = 0 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

İki vektörün çarpımının, vektör çarpım kuralına göre, çarpanlarının sırası değiştirilmeme koşulu dışında, bilinen cebirsel kuralları izlediği sonucuna varabiliriz. Eğer bu sonuçları $\alpha \times \beta$ yi hesaplamada uygularsak ve

$$\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad (2.16a)$$

$$\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k \qquad (2.16b)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta &= \left(a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) \times \left(b_1 i + b_2 j + b_3 k\right) \\ &= a_1 b_1 i \times i + a_1 b_2 i \times j + a_1 b_3 i \times k + \\ &+ a_2 b_1 j \times i + a_2 b_2 j \times j + a_2 b_3 j \times k \\ &+ a_3 b_1 k \times i + a_3 b_2 k \times j + a_3 b_3 k \times k \\ &= i\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) + j\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) + k\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \end{aligned} \qquad (2.16c)$$

bulunur. Burada eşitlik 1.15 ile verdiğimiz temel prensipler kullanılmıştır. Vektörel çarpım aşağıda verilen determinant hesaplaması ile de elde edilebilir.

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2.16d)$$

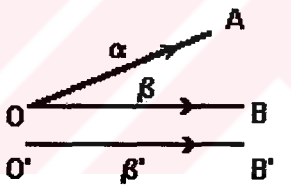
BÖLÜM 3

QUATERNİONLAR

Bu bölümde quaternion tanımının iyice anlaşılabilmesi için gerekli temel tanımlar ve bilgiler yer almaktadır. Bu bilgilerin bilgisayarda grafik ve modelleme amaçlı kullanımı ileriki bölümlerde verilecektir.

3.1 QUATERNION TANIMI

İki vektörün bölümüne quaternion adı verilir. Vektörlerde bölme işlemi tanımlı olmadığından vektör bölmesi ile kastedilen anlamı bir şekil üzerinde verelim.



Şekil 3.1 Quaternion Tanımı

O'B' vektörünü OA vektörüne dönüştürmek istediğimizi varsayalım. Bu durumda ilk yapacağımız bu vektörleri aynı noktadan başlayan iki vektör haline getirmektir. Bunun için O' merkezi O merkezine çakıştırılacak şekilde β vektörü elde edilir. Bu dönüşümü yapmak için β vektörünü bir q değeri ile çarpalım ve α vektörünü elde edelim. (Eşitlik 3.1)

$$q\beta = \alpha \quad \text{veya} \quad q = \frac{\alpha}{\beta} \tag{3.1}$$

Yukarıdaki eşitlikten anlaşılacağı üzere bir vektörü diğer bir vektöre dönüştüren değere quaternion adı verilir.

3.2 QUATERNIONLARIN ELEMANLARI

Quaternion tanımından anlaşılacağı üzere quaternionlar bir vektörü diğerine dönüştürürken iki adet görev üstlenirler.

1. Dönüştürdükleri vektörün boyunu uzatır veya kısaltırlar.
2. Dönüştürdükleri vektörü sonuç vektörü ile çakışacak şekilde döndürürler.

Bu iki adet görev yerine getirilirken, büyüklüğün ayarlanmasında bir adet, yönün ayarlanmasında ise üç adet olmak üzere toplam dört eleman kullanılır. İki açı döndürmenin yapıldığı düzlemin çakıştırılması için, bir açı ise düzlemdeki döndürme miktarı olmak üzere toplam üç adet açı döndürme işleminde kullanılmaktadır. Yapılan bu iki işlem tamamen birbirinden bağımsız iki işlemdir ve quaternionlar bu iki işlemi birden yerine getirirler. Quaternionlarda birinci işlemi yapan bölüm tensör, ikinci işlemi yapan bölüm ise versör adını alır. Bu durumda

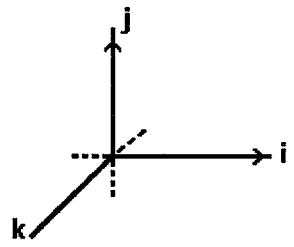
$$q = \mathrm{T}q \cdot \mathrm{U}q \qquad (3.2)$$

olarak tanımlanabilir. Bölme (dönüştürme) işleminde kullanılan iki vektörün bulunduğu düzleme *quaternion düzlemi,* iki vektör arasındaki açıya ise *quaternion açısı* adı verilir. Bu şekilde yapılan bölme işlemine ise *geometrik bölme* adı verilir.

İki ayrı quaternionun birbirine eşit olması için üç temel şart sağlanmalıdır. Bu şartlar şu şekilde sıralanabilir:

1. Her iki bölümdeki vektör uzunluklarının oranı aynıdır.
2. Vektörler aynı veya paralel düzlemler üzerindedir.
3. Vektörler yön ve büyüklük olarak birbirlerine aynı açıda bulunmaktadır.

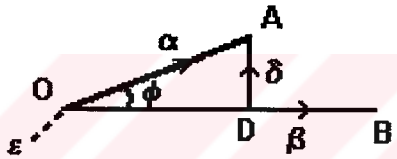
Bir eksen etrafında dönme işlemini tanımladığımıza göre pozitif ve negatif dönme yönlerini de tanımlamamız gerekmektedir. Bir eksene göre pozitif dönme eksenin yönü düzlemden, düzleme bakan bir insanın gözüne doğru iken sol el kuralına uygun yöndür. Eğer eksen gözden döndürme yüzeyine doğru ise bu durumda pozitif dönme sağ el kuralına uygundur. Örneğin, döndürme ekseni gözden saatin düzlemine doğru ise akrep ve yelkovanın hareketi pozitif dönme yönünü gösterecektir. Eğer eksen saatin yüzeyinden göze doğru ise bu dönme yönü negatif olacaktır.



Şekil 3.2 Birbirine dik açı yapan üç birim vektör (Eksen Takımı)

Şekil 3.2 dikkate alınırsa pozitif dönme yönü i ekseninden j eksenine, j ekseninden k eksenine ve k ekseninden i eksenine doğru olacaktır.

İki birim vektör α ve β ele alalım. Öyle ki $\mathrm{OA} = a\alpha$, $\mathrm{OB} = b\beta$, $\angle \mathrm{BOA} = \phi$ olsun. Bu durumu şekil 3.3 ile gösterelim.



Şekil 3.3 Geometrik bölme

Bu durumda β vektörünü α vektörüne dönüştürecek olan q quaternionu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OD} + \mathrm{DA} \qquad (3.3a)$$

Şekil üzerinden OD çizgisinin tensörünün $a\cos\theta$, ve DA çizgisinin tensörünün $a\sin\theta$ olduğu görülmektedir. Eşitlik 3.3a üzerinde her iki tarafı da OB'ye böler ve şekil üzerinden hesapladığımız değerleri yerlerine yazarsak,

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} + \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OB}} \qquad (3.3b)$$

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{a\cos(\phi)\cdot\beta}{b\cdot\beta} + \frac{a\sin(\phi)\cdot\delta}{b\cdot\beta} \qquad (3.3c)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim $(\mathrm{OD}/\mathrm{OB})$ birbirine paralel iki çizginin oranından oluşmaktadır. Bu oranın skalar bir değer olacağını vektörler konusunda

görmüştük. Bu eşitlikteki ikinci terimde ise birbirlerine dik iki vektörün oranları söz konusudur. Quaternion tanımı kullanılarak bu işlemin (birim vektörlerin tensörü bire eşit olacağından) sadece bir döndürme işlemi yapacağı açıktır. Bu iki vektörün düzlemine dik olan bir vektör sol el kuralına uygun olarak β vektörünü δ vektörüne çevirmek durumundadır. Bu işlem hakkında ileride daha detaylı bilgi verilecektir. Bu döndürme işlemini yapacak olan vektör düzleme dik, birim vektör ε olacaktır. ε vektörü döndürme eksenini, dik bulunduğu döndürme yüzeyini ve yönü ile döndürme işleminin yönünü belirlemektedir. $\varepsilon\beta = \delta$ olacak şekilde bir birim vektör seçerek 3.3c'yi tekrar yazalım.

$$q = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{a}{b}(\cos(\phi) + \varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.3d)$$

$$q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos(\phi) + \varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.3e)$$

Bu eşitlikte görüldüğü gibi q quaternionu iki ayrı parçadan oluşmaktadır. Birincisi vektör boyunu ayarlamak için kullanılan ve bölünen iki vektörün tensörlerinin bölümü olan bir reel sayı, diğeri ise döndürme işleminde kullanılan ve döndürme açısını belirleyen bir birim vektör, yani quaternionun versörüdür. Burada 3.2'deki eşitlik ile 3.3e'de elde ettiğimiz eşitliği birleştirirsek

$$\mathrm{T}q = \mathrm{T}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta} \qquad (3.4a)$$

$$\mathrm{U}q = \mathrm{U}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{U}\alpha}{\mathrm{U}\beta} = \cos(\phi) + \varepsilon \sin(\phi) \qquad (3.4b)$$

sonuçlarını elde ederiz.

Versör tanımı için kesinlikle dikkat edilmesi gereken bir husus boyunun her zaman birim uzunluk olması gerekliliğidir. Çünkü versör quaternionda salt döndürme etkisi yapan bir bölümdür. Etkilediği vektörün boyu üzerinde hiçbir değişiklik yapmamaktadır.

Şu ana kadar bir β vektörünü α vektörüne çeviren bir $q = \frac{\alpha}{\beta}$ quaternionunu inceledik. Eğer α vektörünü β vektörüne çevirmek istersek bir q^{-1}

ters quaternionu kullanmamız gerekir. Bu ters quaternion hem boyut ayarlama, hem de döndürme işlemlerinde q quaternionunun tam ters işlemlerini yapmak durumundadır. Bu durumda tensörün çarpmaya göre tersinin alınması, versördeki birim vektörün ise, açı ters yöne doğru çevirildiği için, işaretinin ters çevirilmesi gereklidir. Bu durumda eşitlik 3.3e'yi kullanarak ters quaternion için

$$q^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}(\cos(\phi) - \varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.5)$$

eşitliğini elde ederiz.

3.3 BİRİM VEKTÖRLER ÜZERİNDE İŞLEMLER

i, j, k sembollerinin birbirlerine dik birim vektörler olduğunu kabul edelim. Bu durum şekil 3.2'de gösterilmiştir. Birbirine dik açı yapan iki birim vektörün çarpımı veya bölümü bu düzleme dik olan bir üçüncü birim vektörü verecektir. Bu durumda sol el kuralı kullanılarak birim vektörler arasında aşağıdaki çarpım sonuçları elde edilebilir.

$$\begin{aligned} ij &= k & ji &= -k \\ jk &= i & kj &= -i \\ ki &= j & ik &= -j \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Bu çarpma işlemlerinden faydalanarak birim vektörler arası bölme işlemleri de tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \frac{k}{j} &= i & \frac{j}{k} &= -i \\ \frac{i}{k} &= j & \frac{k}{i} &= -j \\ \frac{j}{i} &= k & \frac{i}{j} &= -k \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Eşitlik 3.6 ile tanımladığımız çarpma işlemleri ve eşitlik 3.7 ile tanımladığımız bölme işlemleri bize sayısal bir sonuç vermezler. Vektörler üzerinde tanımlanan bu tip çarpma ve bölme işlemlerine geometrik çarpma ve bölme adı verilir. i, j, k vektörleri ile çarpma işlemi bir vektörü 90 derece farklı bir yöne çevirdiği için bu

vektörlere quadrantal versörler adı verilir. Yine 3.6 ile verilen eşitlikleri kullanarak her bir birim vektörün kendisi ile çarpıldığında -1 değerini verdiği görülecektir.

$$\begin{aligned} i \times i &= -1 \\ j \times j &= -1 \\ k \times k &= -1 \end{aligned} \qquad (3.8a)$$

i birim vektörünün arka arkaya çarpılmasını üs tanımı ile verebiliriz. Örneğin $iii = i^3$ olarak yazabiliriz. Buradaki üs değeri kaç adet ardışıl olarak i birim vektörünün kullanıldığını verir. Bu sonuçla 3.8a ile verilen eşitlikleri

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad (3.8b)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Bu bize bir birim vektörün karesinin -1'e eşit olduğunu göstermektedir.

Dairesel bir sıra ile $i, j, k, i, j, k, i....$ yazarsak görülecektir ki ardışıl herhangi iki birim vektörün çarpımı kendilerinden sonra gelen birim vektörü vermektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} i(jk) &= (ij)k \\ j(ki) &= (jk)i \\ k(ij) &= (ki)j \end{aligned} \qquad (3.9a)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu bize birim vektörler üzerindeki çarpma işleminin birleşme özelliğine sahip bulunduğunu göstermektedir. Bu durumda bu çarpımları parantezsiz olarak da yazabiliriz.

$$ijk = jki = kij = -1 \qquad (3.9b)$$

Eğer bu dairesel sırayı ters sıra olacak şekilde çevirirsek bu durumda çarpım sonuçlarının işareti değişecektir. Bunun bir sonucu olarak

$$ij \neq ji, \quad ik \neq ki, \quad jk \neq kj \qquad (3.10)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz ki bu bize birim vektörler üzerinde çarpma işleminin değişme özelliğine sahip olmadığını gösterir.

α herhangi bir birim vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\alpha\frac{1}{\alpha} = \alpha(-\alpha) = -\alpha^2 = 1 \qquad (3.11a)$$

Aynı zamanda

$$\frac{1}{\alpha}\alpha = 1 \qquad (3.11b)$$

olduğundan diyebiliriz ki bir birim vektör ve tersi değişme özelliğine sahip ve çarpımları 1'e eşittir. Eğer α bir birim vektör değilse bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerli olacaktır.

$$\alpha = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{U}\alpha \qquad (3.12a)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{U}\alpha} = -\frac{1}{\mathrm{T}\alpha}\mathrm{U}\alpha \qquad (3.12b)$$

$$\alpha\frac{1}{\alpha} = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{U}\alpha\,(-\frac{1}{\mathrm{T}\alpha}\mathrm{U}\alpha) = \mathrm{U}\alpha\,(-\mathrm{U}\alpha) = 1 \qquad (3.12c)$$

Bu eşitliklerden anlaşılacağı üzere herhangi bir vektörün tersi o vektörün tensörünün tersi ile versörünün ters işaretlisinden oluşmaktadır. Aynı zamanda bir vektörün tersi ile çarpımı her durumda 1'e eşit olmaktadır.

Birim vektörlerin bölünmesinde dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta $\frac{k}{i}$ şeklindeki bir bölme ifadesinin $k\frac{1}{i}$ ve $\frac{1}{i}k$ şeklinde iki ayrı yazıma sahip olmadığıdır. Çünkü bu iki ifade $ki^{-1} = i^{-1}k$ anlamına gelecektir ki bu doğru değildir.

Tanım olarak $k(-i) = -j$, veya $ki^{-1} = k\frac{1}{i} = -j = \frac{k}{i}$ dir. Görüntüde $i\frac{k}{i} = \frac{k}{i}i$ eşitliği geçerli olarak görünmektedir. Ancak eşitliğin sağ tarafı ele alınırsa $ki^{-1}i = k$

ve sol tarafı incelenirse $iki^{-1} = -ji^{-1} = ji = -k$ elde edilir. Bu bize bu eşitliğin yazılamayacağını gösterir.

$$i\frac{k}{i} \neq \frac{k}{i}i \qquad (3.13)$$

İşlemler eğer birbirine dik ve birim olmayan vektörler üzerinde gerçekleştiriliyorsa bu durumda tensörler işlemden ayrı olarak ele alınabilir. $\alpha = xi$ ve $\beta = yj$ olsun. Bu durumda

$$a \cdot \beta = xi \cdot yj = xy \cdot ij = yx \cdot ij = zk \qquad (3.14)$$

olarak yazmak mümkündür. Bunun sebebi değişme özelliğinin tensörler üzerinde uygulanabilmesidir. α, β ve γ sırası ile i, j ve k yönünde vektörler ve a, b ve c ise sırası ile tensörleri olsun.

$$\alpha\beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta \cdot ij = ab \cdot k \qquad (3.15a)$$

$$\alpha\gamma = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\gamma \cdot ik = -ac \cdot j \qquad (3.15b)$$

Bu eşitliklerden diyebiliriz ki birbirlerine dik vektörlerin çarpımı tensörlerinin çarpımı ve oluşturdukları düzleme dik birim vektörün çarpımından ibarettir. Aynı şekilde

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta} \cdot \frac{i}{j} = -\frac{a}{b}k \qquad (3.16a)$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\gamma} \cdot \frac{i}{k} = \frac{a}{b}j \qquad (3.16b)$$

birbirlerine dik iki birim vektörün bölümü tensörlerinin bölümü ve oluşturdukları düzleme dik bir birim vektörün çarpımından oluşur.

Birim olmayan herhangi bir vektörün karesi ise tensörünün karesinin negatif işaretlisidir. Bunu açıklamak için bir $\alpha = ai$ vektörü ele alalım.

$$\begin{aligned} \alpha\alpha &= ai \cdot ai \\ \alpha^2 &= a^2 i^2 \\ &= -a^2 \end{aligned} \qquad (3.17)$$

Bu sonuçla diyebiliriz ki birbirlerine paralel iki vektörün çarpımı tensörlerinin çarpımlarının ters işaretlisinden oluşan bir skalardır.

Birim vektörler üzerindeki bir diğer özellik ise çarpma işleminin toplama üzerinde dağılma özelliğine sahip bulunmasıdır.

$$i(j+k) = ij + ik \qquad (3.18)$$

3.4 QUATERNIONLARIN BİR DİĞER İFADESİ

Daha evvel 3.2 eşitliğinde verildiği gibi quaternion kendisini oluşturan tensör ve versörün çarpımından ibarettir. Bu yaklaşım farklı bir bakış açısı ile bir skalar ile bir vektörün toplamı şeklinde değiştirilebilir. Bunu göstermek amacı ile eşitlik 3.3e'yi yeniden yazalım.

$$q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos(\phi) + \varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.3e)$$

Eşitliğin sağ tarafında parantezlerin dışındaki tensörlerin oranını veren kısmı parantez için alıp eşitliği tekrar yazarsak

$$q = (\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\cos(\phi)) + (\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}\varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.19)$$

elde edilir. Bu yeni yazılış şeklindeki ilk reel bölüme quaternionun *skalar* kısmı, ikinci bölümüne ise quaternionun *vektör* kısmı adı verilir. Bu duruma ilişkin genel ifade eşitlik 3.20 ile verilmektedir.

$$q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q \qquad (3.20)$$

Elde ettiğimiz bu sonuca göre iki vektörün bölümü için bir skalar ile bir vektörün toplamıdır diyebiliriz. Bölümün skalar kısmı vektörlerinin tensörlerinin

oranı ile aralarındaki açının cosinüsünün çarpımından ibarettir. Vektörel kısmının tensörü ise vektörlerinin tensörlerinin oranı ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımı olmaktadır. Vektör bölümünün versörü ise vektörlerin üzerinde bulunduğu düzleme dik bir birim vektör olarak tanımlanmaktadır.

3.5 İKİ VEKTÖRÜN GEOMETRİK BÖLÜMÜ VE ÇARPIMI

3.5.1 Geometrik Bölme

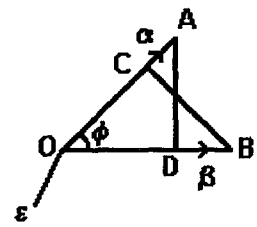
İki vektörün geometrik olarak bölünmesi sonucunun bir quaternion olduğunu daha evvel anlatmıştık. Şu ana kadar verdiğimiz quaternionların tensör, versör, skalar ve vektör kısımlarının tanım ve formülleri göz önüne alındığında α vektörünün tensörü a, ve β vektörünün tensörü b, aralarındaki açı ϕ, ve α ve β vektörlerinin bulunduğu düzleme dik birim vektör ε olmak üzere vektörlerinin $q = \frac{\alpha}{\beta}$ şeklinde bölünmesi ile elde edilen q quaternionu ile ilgili olarak aşağıdaki genel formülleri elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}q &= \frac{a}{b} \\
\mathrm{U}q &= \cos(\phi) + \varepsilon \sin(\phi) \\
\mathrm{S}q &= \frac{a}{b}\cos(\phi) \\
\mathrm{V}q &= \frac{a}{b}\sin(\phi)\cdot\varepsilon \\
\mathrm{TV}q &= \frac{a}{b}\sin(\phi) \\
\mathrm{UV}q &= \varepsilon \\
\mathrm{SU}q &= \cos(\phi) \\
\mathrm{VU}q &= \sin(\phi)\cdot\varepsilon \\
\mathrm{TVU}q &= \sin(\phi)
\end{aligned}
\qquad (3.21)
$$

3.5.2 Geometrik Çarpma

Şimdi şekil 3.4'de görüldüğü gibi, $\alpha = \mathrm{OA}$ ve $\beta = \mathrm{OB}$ olacak şekilde iki vektör tanımlayalım. ε vektörü ise α ve β vektörünün bulunduğu düzleme dik

birim vektör olsun. Bu vektörler için yazılabilecek temel eşitlikler aşağıda eşitlik 3.22'de verilmiştir.



Şekil 3.4 İki vektörün çarpılması

$$\begin{aligned} OA = \alpha = OD + DA \\ OB = \beta = OC + CB \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Eğer α ve β vektörlerinin birim vektörler olduğunu kabul edersek 3.23a ve 3.23b de verilen eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} OD &= \cos(\phi)\cdot\beta \\ DA &= \sin(\phi)\cdot\varepsilon\beta \end{aligned} \qquad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} OC &= \cos(\phi)\alpha \\ CB &= -\varepsilon(\sin(\phi)\cdot\alpha) \end{aligned} \qquad (3.23b)$$

Eşitlik 3.22, 3.23a ve 3.23b 'yi birleştirerek α ve β birim vektörleri için 3.24a ve 3.24b'deki eşitlikler elde edilir.

$$\alpha = (\cos(\phi) + \sin(\phi)\cdot\varepsilon)\beta \qquad (3.24a)$$

$$\beta = (\cos(\phi) - \sin(\phi)\cdot\varepsilon)\alpha \qquad (3.24b)$$

Şimdi $\alpha\beta$ değerini bulabilmek için 3.24a eşitliğinin her iki tarafını β ile, $\beta\alpha$ değerini hesaplamak için ise 3.24b eşitliğinin her iki tarafını α ile çarpalım. Bu çarpım sonuçları

$$\alpha\beta = (\cos(\phi) + \sin(\phi)\cdot\varepsilon)\beta\beta = -(\cos(\phi) + \sin(\phi)\cdot\varepsilon) \qquad (3.25a)$$

$$\beta\alpha = (\cos(\phi) - \sin(\phi)\cdot\varepsilon)\alpha\alpha = -(\cos(\phi) - \sin(\phi)\cdot\varepsilon) \qquad (3.25b)$$

olarak elde edilir. Görülecektir ki vektörlerin geometrik çarpımı sonucu yine bir quaternion elde edilmektedir. Eğer α ve β vektörleri birim vektör değilse bu durumda eşitlik 3.25a ve 3.25b'yi, işleme tensörleri de ekleyerek yeniden yazalım. Bu durumda eşitlik 3.26a ve 3.26b'yi elde ederiz.

$$\alpha\beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\,(-\cos(\phi) - \sin(\phi)\cdot\varepsilon) \qquad (3.26a)$$

$$\beta\alpha = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\,(-\cos(\phi) + \sin(\phi)\cdot\varepsilon) \qquad (3.26b)$$

Buradan kesin olarak görülmektedir ki iki vektörün geometrik olarak çarpımı bize bir skalar ile bir vektörün toplamını yani bir quaternion vermektedir. Burada çarpımların skalar kısmı tensörlerin çarpımı ile aradaki açının cosinüsünün çarpımından oluşmaktadır. Vektörel kısmının tensörü, tensörlerin çarpımı ile vektörler arasındaki açının sinüsünün çarpımı ve versörü ise, vektörlerin ait bulunduğu düzleme dik bir birim vektörden ibarettir.

$$q = \alpha\beta = \mathrm{T}q\cdot\mathrm{U}q = \mathrm{S}\alpha\beta + \mathrm{V}\alpha\beta = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q \qquad (3.27)$$

$q = \alpha\beta$ olacak şekilde q quaternionunu tanımlarsak genel olarak vektörler arası geometrik çarpma için aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}q = ab\\
&\mathrm{U}q = -\cos(\phi) - \varepsilon\sin(\phi)\\
&\mathrm{S}q = -ab\cos(\phi)\\
&\mathrm{V}q = -ab\sin(\phi)\cdot\varepsilon\\
&\mathrm{TV}q = ab\sin(\phi)\\
&\mathrm{UV}q = -\varepsilon\\
&\mathrm{SU}q = -\cos(\phi)\\
&\mathrm{VU}q = -\sin(\phi)\cdot\varepsilon\\
&\mathrm{TVU}q = \sin(\phi)\\
&(\mathrm{TV{:}S})q = -\tan(\phi)
\end{aligned} \qquad (3.28)$$

3.6 GENEL KURALLAR VE FORMÜLLER

Şu ana kadar elde ettiğimiz α/β, β/α, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ quaternion değerleri eşitlikler 3.3e, 3.5, 3.25a, 3.26b ile verilmiştir. Bu eşitlikler incelendiğinde şu sonuçları elde ederiz:

- Eğer quaternionu oluşturan vektörlerin işlem içerisinde yerleri değiştirilirse vektör bölümünün işareti değişir. Bunun sebebi işlemin yapıldığı dönme açısının tam ters yöne çevrilmesidir. Bunu eşitlik 3.29 ile gösterebiliriz. Bu durum vektör çarpma işleminin geçişlilik özelliğine sahip olmadığını gösterir.

$$\begin{aligned} \mathrm{UV}\beta\alpha &= \varepsilon = -\mathrm{UV}\alpha\beta \\ \mathrm{UV}\frac{\alpha}{\beta} &= \varepsilon = -\mathrm{UV}\frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \qquad (3.29)$$

- Eğer vektörler birim vektör ise bu durumda çarpımlar, bölümler cinsinden ifade edilebilir.

$$\beta\alpha = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \alpha\beta = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad (3.30)$$

- Eğer döndürme açısı $\phi = 0$ ise, bu durumda q quaternionunun vektör kısmı sıfıra eşit olacak, dolayısı ile quaternion değeri skalar olacaktır. Bu vektörlerin paralel olması anlamına gelmektedir.
- Eğer döndürme açısı $\phi = 90$ ise, bu durumda q quaternionunun skalar kısmı sıfıra eşit olacak dolayısı ile quaternion değeri bir vektör olacaktır. Bu vektörlerin birbirine dik olduğu anlamına gelir.
- Eğer bir eşitlik skalar ve vektörel kısımlar içeriyorsa bu durumda eşitliğin her iki yanındaki skalar ve vektörel bölümler kendi içlerinde birbirlerine eşittir. Bunun sebebi bir eşitliğin vektör kısımlarından hiç bir şekilde skalar bir değere indirgenememesidir. Örnek olarak 3.31a bize verilen eşitliğimiz ise eşitlik 3.31b kesinlikle yazılabilir.

$$x + a\alpha + b\beta + y + a'\alpha + (b' - b'')\beta \qquad (3.31a)$$

$$x = d + y \quad \text{ve} \quad a\alpha + b\beta = a'\alpha + (b' - b'')\beta \qquad (3.31b)$$

- $\frac{\beta}{\alpha}$ tanım olarak α üzerinde işleme girdiğinde bize β değerini verecektir. Bu eşitlik 3.32 ile gösterilmektedir, ve bu yazım doğrudur. Ancak α'nın β/α üzerinde işleme girmesi durumunda bu eşitlik yazılamaz. Bunun nedeni vektörler üzerinde sağdan çarpma kuralının geçerli olmasıdır.

$$\frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta \qquad (3.32)$$

- α vektörü üzerinde skalar ve vektörel kısımlarının aşağıda görüldüğü gibi olacağı açıktır. Yine α vektörünün karesinin alınması durumunda sonuç bir skalar olacaktır.

$$\mathrm{S}\alpha = 0 \qquad (3.33)$$

$$\mathrm{V}\alpha = \alpha \qquad (3.34)$$

$$\mathrm{V}(\alpha^2) = 0 \qquad (3.35)$$

$$\mathrm{S}(\alpha^2) = -a^2 \qquad (3.36)$$

- $\alpha\beta$ ve $\beta\alpha$ çarpımları karşılaştırıldığında

$$\mathrm{S}\alpha\beta = \mathrm{S}\beta\alpha \qquad (3.37)$$

$$\mathrm{V}\alpha\beta = -\mathrm{V}\beta\alpha \qquad (3.38)$$

eşitlikleri elde edilir. Yine bu çarpımlara ilişkin eşitlikler taraf tarafa toplandığında

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\mathrm{S}\alpha\beta \qquad (3.39)$$

$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2\mathrm{V}\alpha\beta \qquad (3.40)$$

eşitliklerini elde ederiz.

- $\alpha\beta$ ve $\beta\alpha$ çarpımları skalar çarpıldıklarında

$$\begin{aligned}\alpha\beta\cdot\beta\alpha &= (\mathrm{S}\alpha\beta+\mathrm{V}\alpha\beta)(\mathrm{S}\alpha\beta-\mathrm{V}\alpha\beta)\\ &= (\mathrm{S}\alpha\beta)^2-\mathrm{S}\alpha\beta\mathrm{V}\alpha\beta+\mathrm{S}\alpha\beta\mathrm{V}\alpha\beta-(\mathrm{V}\alpha\beta)^2\end{aligned} \qquad (3.41)$$

$$\alpha\beta\cdot\beta\alpha = (\mathrm{S}\alpha\beta)^2-(\mathrm{V}\alpha\beta)^2 \qquad (3.42)$$

eşitlikleri elde edilir ki bu eşitlik 3.28'in de kullanımı ile

$$\alpha\beta\cdot\beta\alpha = (\mathrm{T}\alpha\beta)^2 \qquad (3.43)$$

şeklinde de yazılabilir.

3.7 VEKTÖR VE QUATERNIONLARIN ÜSLERİ

m pozitif bir tamsayı olmak üzere i^m sembolü daha evvelde incelediğimiz gibi bir i quadrant versörünün m defa bir döndürme operatörü olarak kullanıldığını ifade etmektedir. Bu anlama ek olarak $i^{\frac{1}{m}}$ quadrantal dönmenin $1/m$'lik bir bölümünü gerçekleştiren bir operatör olarak düşünülebilir. Negatif bir üs ise ters yöne dönmeyi ifade eden bir operatörü tanımlayacaktır. Genel olarak diyebiliriz ki t bir skalar olmak üzere i^t i vektörüne dik bir düzlemdeki bir çizgiyi t değerinin işareti ile belirtilen yönde ve düzlem üzerinde $t\times 90^\circ$ dönmesini sağlayan bir versördür. Bir birim vektörün her kuvveti bir versördür ve her versör bir birim vektörün kuvveti olarak ifade edilebilir. Versörün açısı $\phi = t\times\frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $t=\frac{2\phi}{\pi}$ yazabiliriz. Dolayısı ile $\cos\phi+\varepsilon\sin\phi$ ile ifade edilen her versör 3.44a ve 3.44b eşitliklerini sağlamaktadır.

$$\cos\phi+\varepsilon\sin\phi = e^{\frac{2\phi}{\pi}} \qquad (3.44a)$$

$$\cos\phi-\varepsilon\sin\phi = e^{-\frac{2\phi}{\pi}} \qquad (3.44b)$$

Yeniden i birim vektörünü ele alalım. $i^{\frac{1}{2}}$ 90 derecelik döndürme işleminin yarısını gerçekleştirmektedir. Yani bu işlemin iki defa uygulanması i operatörünün bir defa kullanılması ile eş anlama gelmektedir.

$$i^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} = i^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = i \qquad (3.45)$$

Elde ettiğimiz bu bilgi ile eğer α, β ve γ eşdüzlemsel iseler ve

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cos\phi + \varepsilon \sin\phi = e^{\frac{2\phi}{\pi}} \qquad (3.46a)$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \cos\theta + \varepsilon \sin\theta = e^{\frac{2\theta}{\pi}} \qquad (3.46b)$$

eşitliklerini sağlıyorsa bu durumda

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \qquad (3.46c)$$

yazılabilir. 3.46a ve 3.46b eşitliklerinin sağ tarafındaki değerleri eşitlik 3.46c'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} &(\cos\phi + \varepsilon \sin\phi)(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta) = \\ &(\cos\phi\cos\theta + \varepsilon^2 \sin\phi\sin\theta + \varepsilon(\cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\phi) = \\ &\cos(\phi+\theta) + \varepsilon\sin(\phi+\theta) \end{aligned} \qquad (3.46d)$$

Yine 3.46a ve 3.46b eşitliklerinin son terimleri göz önünde bulundurulursa eşitlik 3.46e elde edilir.

$$\frac{\alpha}{\gamma} = e^{\frac{2\phi}{\pi}} e^{\frac{2\theta}{\pi}} = e^{\frac{2(\phi+\theta)}{\pi}} \qquad (3.46e)$$

$\varepsilon^2 = -1$ ve $\varepsilon^4 = +1$ olduğuna göre diyebiliriz ki eğer $\varepsilon^t = -1$ ise t 2'nin tek katı, $e^t = +1$ ise t 2'nin çift katıdır. Her iki durumda da $\phi = \frac{t}{2}\pi$ eşitliğinde π nin katsayısı bir tamsayıdır ve üssel işlemin sonucu bir skalardır.

ε^t işleminde eğer t tek sayı ise bu durumda π nin katsayısı $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ gibi kesirli değerler olacağından $\cos m\pi = 0$ olur ve versör $\pm\varepsilon$ vektörü ile aynı olur.

Eğer vektör birim vektör değilse, yani $\rho = xi$ gibi bir vektör ise, bu durumda etki edilen vektör üzerinde sadece döndürme değil boyunda küçülme veya büyüme gibi bir tensör etkisi de gösterecektir. Üs alma işleminde genel olarak

$$\rho^t = (xi)^t = x^t i^t \qquad (3.47a)$$

eşitliği yazılabilir. Sembolik olarak

$$\mathrm{T}\cdot\rho^2 = (\mathrm{T}\rho)^2 \qquad (3.47b)$$

$$\mathrm{U}\cdot\rho^2 = (\mathrm{U}\rho)^2 \qquad (3.47c)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür. Eşitlik 3.47a'dan da görülebileceği gibi tensörün üssü sadece tensörü etkilemekte ve versörün üssü ise sadece versörü etkilemektedir.

ρ^t ile verilen bir üssel işlemde hem tensör hem de versör bulunmaya devam etmektedir. Sonuç olarak diyebiliriz ki her quaternion bir vektörün bir kuvveti olarak elde edilebilir.

3.8 UZAYDA BİR NOKTANIN VEKTÖREL VE KARTEZYEN TANIMI

i, j, k uzayda birbirine dik birim vektörler olsun, ve bizim kartezyen koordinat sistemimizi temsil etsin. Bu durumda uzayda herhangi bir P noktası

$$\rho = xi + yj + zk \qquad (3.48)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım içinde kullanılan x, y, z değerleri P noktasının kartezyen koordinatlarını oluşturur. Şimdi tamamı birbirine dik olmayan α, β, ve γ birim vektörlerini ele alalım. Bu vektörler cinsinden uzaydaki P noktamızın

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \qquad (3.49)$$

şeklinde eğri eksen takımımızda tanımlandığını kabul edip bu eksenlere göre kartezyen koordinatlarımızı belirleyelim. α, β, ve γ eşdüzlemsel olmadıkları

sürece bu şekilde uzaydaki her nokta tanımlanabilir. Bir q quaternionu bir skalar ve bir vektörün toplamı olarak ifade edilebildiğine göre

$$q = w + x\alpha + y\beta + z\gamma \qquad (3.50)$$

şeklinde quaternionumuzu tanımlayabiliriz. Eğer noktamızı belirleyen vektörümüz $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ ise bu durumda $x = a$, $y = b$, $z = c$ olacağı açıktır. Bu sonuçlarla dik eksenlerdeki P noktamızı değerlendirirsek aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk \\ \mathrm{S}q &= w \\ \mathrm{V}q &= xi + yj + zk \end{aligned} \qquad (3.51)$$

$(\mathrm{T}\mathrm{V}q)^2 = -(\mathrm{V}q)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\mathrm{V}q &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \mathrm{U}\mathrm{V}q &= \frac{\mathrm{V}q}{\mathrm{T}\mathrm{V}q} = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \qquad (3.52)$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı zamanda, 3.39 ile 3.40 eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}q)^2 &= (\mathrm{S}q)^2 - (\mathrm{V}q)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \\ \mathrm{T}q &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \mathrm{U}q &= \frac{q}{\mathrm{T}q} = \frac{w + xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \\ \mathrm{SU}q &= \frac{\mathrm{S}q}{\mathrm{T}q} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \\ \mathrm{TVU}q &= \frac{\mathrm{TV}q}{\mathrm{T}q} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \qquad (3.53)$$

3.9 DİK, EŞDÜZLEMSEL, ÇİFTDÜZLEMLİ VE KOLİNEER QUATERNION TANIMLARI

Bir quaternionun düzlemi, onu oluşturan vektörlerin bulunduğu veya buna paralel düzlem olarak tanımlanır. Quaternionun ekseni bu düzleme dik bir eksen olarak, ve quaternion açısı ise aynı başlangıç noktasına sahip ve quaternionu oluşturan vektörlere paralel iki vektör arasındaki açıya denir. Eğer bu açı 90 derece olarak belirlenmişse bu quaterniona dik quaternion adı verilir. Eğer iki ayrı quaternionun düzlemleri aynı veya birbirine paralel ise, bu durumda quaternionlar eşdüzlemseldir denir. Eğer düzlemleri kesişiyorsa bu durumda quaternionlar çiftdüzlemlidir denir. Eğer birden fazla quaterniona ilişkin düzlemler aynı çizgide kesişiyorlarsa veya birbirlerine paralellerse bu quaternionlar kolineerdir denir. Bu tanımlardan kolineer quaternionların eksenlerinin ortak bir çizgiye dik ve eşdüzlemsel oldukları sonucu ortaya çıkar. Eşdüzlemsel quaternionlar ve eşdüzlemsel eksenlere sahip quaternionlar her zaman kolineerdir.

3.10 TERS QUATERNİON

Bir skaların tersi aynı işarete sahip diğer bir skalardır. Bir vektörün tersi ise daha evvel tanımlandığı gibi α herhangi bir vektör iken $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{T}\alpha}\mathrm{U}\alpha$ şeklindedir. Bir quaternionun tersi ise onu oluşturan iki vektör α ve β iken, yani $q = \frac{\alpha}{\beta}$ olarak ele alındığında $\mathrm{R}\,q = q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\beta}{\alpha}$ şeklindedir. Burada q quaternionunun tersi alınırken anlamı değişmektedir. Yani q quaternionu β vektörünü α vektörüne dönüştürürken, q'nun ters quaternionu α vektörünü β vektörüne dönüştürmektedir. Bu ifadeden diyebiliriz ki, bir quaternion ve tersi aynı düzleme ve büyüklük olarak eşit açılara sahiptir. Ancak quaternion ekseni ters yönlüdür.

$$\angle\frac{1}{q} = \angle q \quad \text{ve} \quad \text{eksen}\frac{1}{q} = -\text{eksen}\,q \qquad (3.54a)$$

$$1:\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta}:\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta}:\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1 \qquad (3.54b)$$

Bir skalar ile tersinin çarpımının 1 olduğu gibi, bir quaternion ile tersinin çarpımı da 1 eder. Bir quaternionun tersinin tensörü, tensörünün tersine eşittir. Bu ifade eşitlik 3.55 ile verilmiştir.

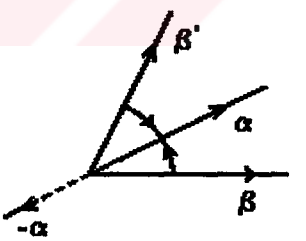
$$\mathrm{T}\frac{1}{q}=\frac{1}{\mathrm{T}q} \qquad (3.55)$$

Bir quaternionun versörü ile tersinin versörü arasındaki fark ise sadece açının ters yönlü olmasıdır. Bu sonuçlar ile eşitlik 3.3e de quaternionlar ile ilgili yazdığımız eşitliği tekrar yazıp, ters quaternion tanımını kullanarak bir 3.56 eşitliğini elde ederiz.

$$q=\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos\phi+\varepsilon\sin\phi) \qquad (3.3e)$$

$$\mathrm{R}q=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}(\cos\phi-\varepsilon\sin\phi) \qquad (3.56)$$

3.11 EŞLENİK (CONJUGATE) QUATERNİON



Şekil 3.5 Bir quaternionun eşleniği

Şekil 3.5 'de görüldüğü gibi bir α ve β vektörlerine eşdüzlemsel bir β' vektörü tanımlayalım. Bu vektör β nın α ile yaptığı açının aynısını α ile yapsın, ve tensörü de β nın tensörü ile aynı olsun. Quaternionumuz $q=\frac{\alpha}{\beta}$ iken $\frac{\alpha}{\beta'}$ değerine q quaternionunun eşleniği denir, ve $\mathrm{K}q$ ile gösterilir. Dolayısı ile tanım gereği bir quaternion ve eşleniği eşdüzlemseldir, aynı tensöre sahiptir, ve eşit açılara sahiptir. Ancak eksenleri ters yönlüdür. Bu sonuçlarla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\angle \mathrm{K}q = \angle q = \angle \frac{1}{q}$$
$$\mathrm{TK}q = \mathrm{T}q = \frac{1}{\mathrm{T}\frac{1}{q}} \qquad (3.57)$$
$$\text{eksen}\,\mathrm{K}q = -\text{eksen}\,q = \text{eksen}\,\frac{1}{q}$$

$\mathrm{K}q$ değerinin açık ifadesini yazmak istersek

$$\mathrm{K}q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(\cos(\phi) - \varepsilon\sin(\phi)) \qquad (3.58)$$

eşitliğini elde ederiz.

Bir skaların eşleniği yine kendisi iken, bir vektörün eşleniği $\mathrm{K}\alpha = -\alpha$ olacaktır. Quaternionlar bir skalar ile bir vektörün toplamı olarak da ifade edilebildiklerine göre aşağıdaki eşitlikleri yazmak mümkündür.

$$\begin{gathered} \mathrm{q} = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q \quad \text{iken} \\ \mathrm{K}q = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q \\ \mathrm{K}q = w - xi - yj - zk \\ \mathrm{SK}q = \mathrm{S}q \\ \mathrm{VK}q = -\mathrm{V}q \end{gathered} \qquad (3.59)$$

Eğer iki eşlenik quaternionu toplar ve çıkarırsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} q + \mathrm{K}q &= 2\mathrm{S}q \\ q - \mathrm{K}q &= 2\mathrm{V}q \end{aligned} \qquad (3.60)$$

Buradan anlaşılacağı üzere iki eşlenik quaternionun toplanması her zaman bir skalar, ve iki eşlenik quaternionun çıkarılması her zaman bir vektör verir. Eğer quaternion açısı bir dar açı ise eşlenik quaternionların toplam sonucu pozitif, eğer geniş açı ise toplamları negatif olacaktır. Eğer quaternionun açısı 90 derece ise bu durumda eşlenik quaternion ile toplamının sonucu sıfır olacaktır. Eğer q bir skalar ise bu durumda $\mathrm{K}q = q$ olacaktır, ve bunun tersi de geçerlidir.

3.12 ZIT QUATERNIONLAR

Quaternionumuz $\frac{\alpha}{\beta}$ ile ifade edilirken $\frac{-\alpha}{\beta}$ quaternionuna zıt quaternion adı verilir. İki adet zıt quaternionun toplamının sonucu sıfırdır. Dolayısı ile tanım gereği aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}(-q) = \mathrm{T}q \\ &\angle -q = \pi - \angle q \\ &\text{eksen} - q = -\text{eksen}\, q \end{aligned} \qquad (3.61)$$

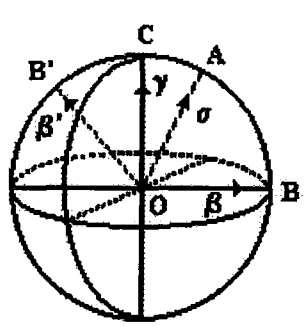
olacaktır. Sonuç olarak $-q$ quaternionu

$$-q = \frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta}(-\cos(\phi) - \varepsilon \sin(\phi)) \qquad (3.62)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.13 VERSÖRLERİN KÜRESEL ARKLAR İLE GÖSTERİLİMİ

Eğer α, β ve γ eşbaşlangıç noktalı vektörler ise, uç noktaları aynı birim kürenin yüzeyinde yer alacaktır. Şekil 3.6 üzerinde $q = \frac{\alpha}{\beta}$ olacak şekilde bir q quaternionu tanımlayalım. $\mathrm{U}\frac{\alpha}{\beta}$ β vektörünü OB'den OA'ya doğru bir yol üzerinde çevirir. Dönmeyi meydana getiren versör uç noktaları birleştiren BA arkı ile tanımlanabilir. Bu ark versörün düzlemini, büyüklüğünü ve açının yönünü belirler.



Şekil 3.6 Birim küre

Versörlerin vektör arkları ile gösterilimi quaternionlar üzerinde çarpma ve bölme teorilerinin tanımlanmasında önemlidir. Bu işlemler bir birim küre üzerinde tanımlanabilir. Eğer α, β ve γ birim vektör değiller ise bu durumda quaternion versörden sadece bir nümerik değer kadar farklı olacaktır ki bu versörler için elde edilecek olan sonuçları etkilemez. Dolayısı ile bu işlemlerde tensörleri dikkate almayabiliriz. Bu durumda paralel düzlemli, açının yönü de dahil olmak üzere, eşit açılı versörler aynı yönlü eşit arklar çizer, ve birbirlerine eşittir. Ark aynı daire üzerinde kalmak üzere dönme yönünün tersine kaydırılırsa elde edilen B'A arkı bize ters quaternionu, BA arkı ise bize eşlenik quaternionu tanımlayacaktır. Aynı daire üzerinde bulunan tüm versörler bize eşdüzlemli quaternionları, ve farklı dairelere ait quaternionlar ise çift düzlemli quaternionları tanımlar.

M, N,ve P küre içine yerleştirilmiş bir üçgen iken MN, NP ve PM arkları bize üç ayrı versörü tanımlayacaktır. Görülecektir ki bu versörlerden her hangi ikisinin geometrik toplamını aldığımızda geride kalan ark bu iki arkın çarpımlarını verecektir. Eğer q quaternionu NP ve q' arkı PM göstermek üzere $q'q$ çarpımını daire üzerinde bir küresel toplama işlemi ile tanımlamak mümkündür. Ancak şu unutulmamalıdır ki quaternion çarpımı değişme özelliğine sahip olmadığından küresel toplama işleminde de yön çok önemlidir ve değişme özelliğine sahip değildir.

3.14 QUATERNİONLAR ÜZERİNDE İŞLEMLER

Şu ana kadar sadece bir quaternion üzerinde tanımlı olan işlemler üzerinde durduk. Bu aşamadan sonra birden fazla quaternionun birlikte kullanılmasının sonuçlarını inceleyeceğiz.

3.14.1 Quaternionlar İle Toplama ve Çıkarma

Bir quaternion, bir skalar ile bir vektörün toplamı olduğuna göre, quaternionlar üzerinde tanımlanabilecek toplama ve çıkarma işlemlerinin sonuçlarını bu iki alan üzerinde ayrı ayrı inceleyebiliriz. Quaternionlar üzerinde yapılacak toplama ve çıkartma işlemlerinin sonucu, skalar toplamı yine bir skalar ve vektör toplamı yine bir vektör olacağından, bir quaternion olacaktır.

- Hem skalarlar ve hem de vektörler için toplama işlemi değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Bunun sonucunda diyebiliriz ki quaternionlar da toplama işleminde değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Üç ayrı quaternionumuz q, r ve s olsun. Bu durumda

$$q+r=r+q$$
$$q+(r+s)=(q+r)+s \qquad (3.63)$$

eşitlikleri yazılabilir. Genel olarak skalar ve vektörel kısımları ayrı ayrı ele alırsak diyebiliriz ki S ve V işlemleri toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir.

$$\mathrm{S}\Sigma q=\Sigma \mathrm{S}q$$
$$\mathrm{V}\Sigma q=\Sigma \mathrm{V}q \qquad (3.64)$$

- Aynı şekilde eşlenik alma fonksiyonu $\mathrm{K}q=\mathrm{S}q-\mathrm{V}q$ şeklinde tanımlanabildiğinden K'da S ve V gibi dağılma özelliğine sahip bir semboldür.

$$\Sigma \mathrm{K}q=\mathrm{K}\Sigma q \qquad (3.65)$$

- Bir skaların eşleniği yine kendisi olduğundan, ve $\mathrm{S}q=\mathrm{SK}q$ olduğundan

$$\mathrm{KS}q=\mathrm{S}q=\mathrm{SK}q \qquad (3.66)$$

olacaktır. Yine aynı şekilde bir vektörün eşleniği vektörün ters çevirilmiş hali olduğundan, ve $-\mathrm{V}q=\mathrm{VK}q$ yazılabileceğinden,

$$\mathrm{KV}q=-\mathrm{V}q=\mathrm{VK}q \qquad (3.67)$$

şeklinde ifade edilebilir ki, bu K sembolünün V ve S üzerinde dağılma özelliğine sahip olduğunu gösterir.

- Genel olarak $\mathrm{T}\alpha+\mathrm{T}\gamma>\mathrm{T}(\alpha+\gamma)$ olacağından tensör alma işleminin toplama üzerinde dağılma özelliği yoktur. Versör alma işleminde dikkat edilirse $\mathrm{U}\Sigma q$ işlemi tensörleri de etkilemesine rağmen $\Sigma \mathrm{U}q$ işleminde tensörler dikkate alınmamaktadır. Bunun bir sonucu olarak diyebiliriz ki tensör alma işlemi gibi versör alma işlemi de quaternionlar üzerinde toplama ve çıkartma işlemleri üzerinde dağılma özelliğine sahip değildir.

3.14.2 Quaternionlar İle Çarpma Ve Bölme

- İki quaternionumuz $q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q$ ve $r = \mathrm{S}r + \mathrm{V}r$ olsun. Bu durumda iki quaternionun çarpımı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} p = qr &= \mathrm{S}q\,\mathrm{S}r + \mathrm{S}q\,\mathrm{V}r + \mathrm{S}r\,\mathrm{V}q + \mathrm{V}q\,\mathrm{V}r \\ p &= \mathrm{S}p + \mathrm{V}p = \mathrm{S}qr + \mathrm{V}qr \end{aligned} \qquad (3.68)$$

Görülmektedir ki bir skalar ve vektörün çarpımı olan bu p değeri yine bir quaterniondur. Skalar ve vektörel kısımlar ayrı ayrı ele alınıp eşitlenirse bu durumda eşitlik 3.69 elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}qr &= \mathrm{S}q\,\mathrm{S}r + \mathrm{S}\cdot\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r \\ \mathrm{V}qr &= \mathrm{S}q\,\mathrm{V}r + \mathrm{S}r\,\mathrm{V}q + \mathrm{V}\cdot\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r \end{aligned} \qquad (3.69)$$

Eğer q quaternionunu r quaternionu ile çarparsak bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{S}rq &= \mathrm{S}r\,\mathrm{S}q + \mathrm{S}\cdot\mathrm{V}r\,\mathrm{V}q \\ \mathrm{V}rq &= \mathrm{S}r\,\mathrm{V}q + \mathrm{S}q\,\mathrm{V}r + \mathrm{V}\cdot\mathrm{V}r\,\mathrm{V}q \end{aligned} \qquad (3.70)$$

elde edilir. Eşitlik 3.39 dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\cdot\mathrm{V}r\,\mathrm{V}q &= \mathrm{S}\cdot\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r \\ \mathrm{S}rq &= \mathrm{S}qr \end{aligned} \qquad (3.71)$$

elde edilmekte ancak eşitlik 3.40 ile vektörel kısım incelendiğinde

$$\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r = -\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}r\,\mathrm{V}q \qquad (3.72)$$

olarak elde edilmektedir. Bu quaternion çarpımının değişme özelliğine sahip olmadığını gösterir. Ancak q ve r eşdüzlemsel, $\mathrm{V}q$ ve $\mathrm{V}r$ paralel ise bu durumda $\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}q\,\mathrm{V}r$ çarpımı sıfır olacağından, $qr = rq$ olacaktır. Bunun tersi de doğrudur. Yani $qr = rq$ ise q ve r eşdüzlemseldir diyebiliriz. Ters, eşlenik ve zıt quaternionlar eşdüzlemsel olduklarına göre bu quaternionlar arası yapılan çarpma işlemleri değişme özelliğine sahiptir. Bunu eşitlik 3.73 ile verebiliriz.

$$
\begin{aligned}
q\,\mathrm{K}q &= \mathrm{K}q\cdot q \\
q\frac{1}{q} &= \frac{1}{q}q = qq^{-1} = q^{-1}q \\
q(-q) &= -qq
\end{aligned}
\qquad (3.73)
$$

- Daha evvel gösterilmiş olduğu gibi q ve q' gibi herhangi iki quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$ ve $\frac{\gamma}{\alpha}$, veya $\frac{\alpha}{\delta}$ ve $\frac{\gamma}{\alpha}$ formuna çevirilebilir. Bunun bir sonucu olarak

$$
q' : q = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} \qquad (3.74)
$$

eşitliği geçerli olacaktır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}\frac{q'}{q} &= \mathrm{T}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\beta} = \frac{\mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\beta} = \frac{\mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\alpha} : \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} = \mathrm{T}q' : \mathrm{T}q \\
\mathrm{U}\frac{q'}{q} &= \mathrm{U}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\mathrm{U}\gamma}{\mathrm{U}\beta} = \frac{\mathrm{U}\gamma}{\mathrm{U}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{U}\alpha}{\mathrm{U}\beta} = \frac{\mathrm{U}\gamma}{\mathrm{U}\alpha} : \frac{\mathrm{U}\beta}{\mathrm{U}\alpha} = \mathrm{U}q' : \mathrm{U}q
\end{aligned}
\qquad (3.75)
$$

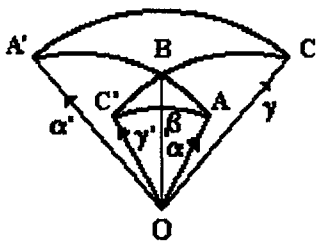
eşitliklerini yazabiliriz. Aynı şekilde

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(q', q) &= \mathrm{T}\left[\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\delta}\right] = \mathrm{T}\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\delta} = \frac{\mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{T}\delta} = \mathrm{T}q'\cdot\mathrm{T}q \\
\mathrm{U}(q', q) &= \mathrm{U}\frac{\gamma}{\delta} = \mathrm{U}q'\,\mathrm{U}q
\end{aligned}
\qquad (3.76)
$$

eşitliği de geçerli olacaktır. Bir sonuç olarak diyebiliriz ki, iki quaternionun çarpımının (bölümünün) tensörü, tensörlerinin çarpımı (bölümü) ile aynıdır, ve iki quaternionun çarpımının (bölümünün) versörü, versörlerinin çarpımı (bölümü) ile aynıdır. Bu durumu genelleştirirsek eşitlik 3.77 ve eşitlik 3.78'i elde ederiz.

$$
\mathrm{T}\Pi q = \Pi\mathrm{T}q \qquad (3.77)
$$

$$
\mathrm{U}\Pi q = \Pi\mathrm{U}q \qquad (3.78)
$$



Şekil 3.7 Versörler ile çarpma ve bölme

- Tensör çarpımı ve bölümü tamamen aritmetik işlemler olduğundan işlemlerin incelenmesinde sadece versörler ile ilgileneceğiz. Herhangi iki q ve q' gibi versörün şekil 3.7 dikkate alınırsa eşitlik 3.79a daki gibi yazılabileceği açıktır.

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}},\ q' = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OB}} \qquad (3.79a)$$

Bir birimküre üzerinde A, B ve C' köşe noktalarına sahip küresel bir üçgen tanımlayalım. Bu durumda

$$q'q = \frac{\gamma'}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OA}} \qquad (3.79b)$$

eşitliği yazılabilir.

Eğer q ve q' versörlerini BC' ve AB vektör arkları ile gösterirsek $q'q$ çarpımı veya $\frac{\gamma'}{\alpha}$ versörü AC' arkı ile gösterilebilir. Hatta $q'' = \frac{\gamma'}{\alpha}$ ve $q = \frac{\beta}{\alpha}$ olmak üzere

$$\frac{q''}{q} = \frac{\gamma'}{\alpha}.\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OB}} \qquad (3.79c)$$

olacaktır. Şekilden $q'q$ çarpımı için eşitlik 3.79d

$$\mathrm{BC'} + \mathrm{AB} = \mathrm{AC'} \qquad (3.79d)$$

ve $\frac{q''}{q}$ bölümü için ise eşitlik 3.79e elde edilebilir.

$$AC' - AB = BC' \qquad (3.79e)$$

Quaternionlar üzerinde geometrik toplama ve çıkartma, cebirsel toplama ve çıkartma ile gösterilebilirken geometrik çarpma ve bölme küresel toplama ve çıkartma olarak tanımlanabilir.

- Versörün birim küre üzerinde bir ark olarak gösterilmesinden faydalanarak quaternion çarpmasının değişme özelliğine sahip olmadığı sonucunu çıkartmak mümkündür. Şekil 3.7'de AB ve BA' aynı daire üzerinde eşit arklardır. Bu sonuçla eşitlik 3.80a ve eşitlik 3.80b yazılabilir.

$$AB = BA' \qquad (3.80a)$$
$$CB = BC' \qquad (3.80b)$$

Eğer q ve r versörlerini eşitlik 3.81a ile tanımlarsak eşitlik 3.81b elde edilir.

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\beta}, \text{ ve } r = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma'}{\beta} \qquad (3.81a)$$

$$qr = \frac{\alpha'}{\beta}.\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma}, \text{ ve } rq = \frac{\gamma'}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha} \qquad (3.81b)$$

Bu sonuçla qr ve rq versörleri sırası ile CA' ve AC' arkları ile gösterilirler. Bu arklar boy olarak eşit olmalarına rağmen aynı düzlem üzerinde olmadıklarından eşit değillerdir. Bu versörlerin küresel toplam ifadesini yazalım.

$$BC' + AB = AC' \qquad (3.82a)$$
$$AB + BC' = BA' + CB = CA' \qquad (3.82b)$$

Geometrik çarpma işleminde versörlerin sırasında yapılan bir değişiklik farklı sonuçların elde edilmesine yol açmaktadır. AC' ve CA' aynı daire üzerinde bulunmadıkları sürece ki bu q ve r versörlerinin eşdüzlemsel olmaları anlamına gelecektir, çarpma işlemini değişme özelliğine sahip olmadığını gösterir.

- Şekil 3.7'de görüldüğü üzere eğer AB arkı $q = \frac{\beta}{\alpha}$ quaternionunun versörünü gösteriyorsa $A'B = BA$ arkları Kq ve $\frac{1}{q}$ quaternionlarının versörünü gösterecektir. Unutulmamalıdır ki Kq ve $\frac{1}{q}$ quaternionlarının versörleri birbirlerinin aynı olacaktır. $AB + BA = 0$ olması ise qKq ve $q\frac{1}{q}$ işlemlerinin versör kısımlarının etkisiz olduğunu göstermektedir ki, daha evvelki bilgilerimizle bu doğrudur. Bu durumu eşitlik 3.83a ve eşitlik 3.83b ile gösterebiliriz.

$$qKq = Kq \cdot q = (Tq)^2 \qquad (3.83a)$$

$$q\frac{1}{q} = \frac{1}{q}q = 1 \qquad (3.83b)$$

Görüldüğü gibi qKq işleminin tek etkisi tensörler üzerinde olmaktadır.

$$AB + BC' = CA' \qquad (3.84a)$$

$$qr = \frac{\alpha'}{\gamma} \qquad (3.84b)$$

eşitliklerinden ve $K(qr)$ versörünün A'C şeklinde ifade edilmesinden faydalanarak

$$A'C = BC + A'B \qquad (3.84c)$$

$$K(qr) = Kr\,Kq \qquad (3.84d)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sonuçla diyebiliriz ki iki versörün çarpımının eşleniği versörlerin eşleniklerinin ters sırada çarpımına eşittir.

Eşdüzlemsel quaternionların çarpımı veya bölümü döndürme hareketinin bir geometrik kompozisyonuna bağlı versör çarpım ve bölümünden faydalanarak elde edilir. Tensörleri dikkate almazsak versörleri ifade eden arklar eğer quaternionlar eşdüzlemsel ise aynı daire üzerinde bulunacaktır. Eğer quaternionlar çift düzlemli ise bu durumda geometrik işlemler cebirsel işlem haline dönüşecektir.

$q' = \frac{\alpha'}{\beta}$ ve $q = \frac{\beta}{\alpha}$ quaternionlarını ele alalım. qq' quaternion çarpımı için eşitlik 3.85a ve şekil 3.7'nin kullanımı ile eşitlik 3.85b yazılabilir.

$$qq' = q'q = \frac{\alpha'}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} \qquad (3.85a)$$

$$BA' + AB = AB + BA' = AA' \qquad (3.85b)$$

Aynı şekilde $q'' = \frac{\alpha'}{\alpha}$ ve $q' = \frac{\beta}{\alpha}$ quaternionlarının $\frac{q''}{q'}$ ile tanımlı bölümü için ise eşitlik 3.86a ile eşitlik 3.86b yazılabilir.

$$\frac{q''}{q'} = \frac{\alpha'}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta} \qquad (3.86a)$$

$$BA + AA' = BA' \qquad (3.86b)$$

İki eşdüzlemsel quaternionun çarpımı (bölümü) tensörlerinin çarpımı (bölümü) ve açılarının toplanması (çıkarılması) ile elde edilir. Böylece eğer iki quaternionumuz p ve q ise eşitlik 3.87 ve eğer $p = q$ ise eşitlik 3.88 elde edilir.

$$pq = Tp \cdot Tq\left[\cos(\phi + \theta) + \varepsilon \sin(\phi + \theta)\right] \qquad (3.87)$$

$$q^2 = (Tq)^2(\cos(2\phi) + \varepsilon \sin(2\phi)) \qquad (3.88)$$

Eğer q quaternionunun bir üssel ifadesi için bu sonuçları genelleştirmemiz gerekirse

$$q^n = (Tq)^n(\cos(n\phi) + \varepsilon \sin(n\phi)) \qquad (3.89)$$

$$\begin{aligned} T(q^n) &= (Tq)^n \\ U(q^n) &= (Uq)^n \\ SU(q^n) &= \cos(n\angle q) \\ TVU(q^n) &= \sin(n\angle q) \end{aligned} \qquad (3.90)$$

eşitliklerini elde ederiz.

3.14.3 Vektör Ve Quaternionlarda Çarpma İşleminde Dağılma Özelliği

Daha evvel bu konunun başlarında verdiğimiz tanımlar gereği 3.91a eşitliğini yazmamız mümkündür.

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha} \qquad (3.91a)$$

Bu eşitliği bir diğer ifade ile

$$\beta\alpha^{-1}+\gamma\alpha^{-1}=(\beta+\gamma)\alpha^{-1} \qquad (3.91b)$$

olacak şekilde yazabiliriz. Bu sonuçla α herhangi bir vektör olmak üzere

$$\beta\alpha+\gamma\alpha=(\beta+\gamma)\alpha \qquad (3.91c)$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki $(\beta+\gamma)\alpha$ elemanının eşleniğini alırsak eşitlik 3.91d ve sol tarafındaki $\beta\alpha+\gamma\alpha$ elemanının eşleniğini alırsak eşitlik 3.91e elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left[(\beta+\gamma)\alpha\right]&=\mathrm{K}\alpha\,\mathrm{K}(\beta+\gamma)\\&=\mathrm{K}\alpha\left(\mathrm{K}\beta+\mathrm{K}\gamma\right)\end{aligned} \qquad (3.91d)$$

$$\mathrm{K}(\beta\alpha+\gamma\alpha)=\mathrm{K}\beta\alpha+\mathrm{K}\gamma\alpha=\mathrm{K}\alpha\,\mathrm{K}\beta+\mathrm{K}\alpha\,\mathrm{K}\gamma \qquad (3.91e)$$

Bu iki eşitlikte elde ettiğimiz sonuçlar birleştirilirse

$$\mathrm{K}\alpha\,(\mathrm{K}\beta+\mathrm{K}\gamma)=\mathrm{K}\alpha\,\mathrm{K}\beta+\mathrm{K}\alpha\,\mathrm{K}\gamma \qquad (3.91f)$$

sonucu elde edilir. Bir vektörün eşleniğinin yine bir vektör ve bir quaternionun eşleniğinin yine bir quaternion olduğu düşünülürse bu eşitlik 3.91g olarak yazılabilir.

$$\alpha'(\beta'+\gamma')=\alpha'\beta'+\alpha'\gamma' \qquad (3.91g)$$

Bu sonuçlarla diyebiliriz ki vektör çarpımı kesinlikle toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Bu özelliği genel olarak eşitlik 3.92 ile tanımlayabiliriz.

$$(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)=\beta\alpha+\gamma\alpha+\beta\delta+\gamma\delta \qquad (3.92)$$

$q=\frac{\beta'}{\delta'}$ ile tanımlı bir q quaterinonunu ele alalım. α herhangi bir vektör, β ise α vektörüne dik bir düzlem ile q quaternionunun düzleminin kesiştiği çizgi olsun. Bu durumda q quaternion düzleminde $q=\frac{\beta}{\delta}$ eşitliğini sağlayacak bir δ vektörü her zaman bulunabilir. Aynı zamanda kesen düzlem üzerinde $\frac{\gamma}{\beta}=\alpha$ olacak şekilde bir γ vektörü her zaman bulunabilir. Eğer a herhangi bir skalar ise eşitlik 3.93a yazılabilir.

$$\begin{aligned}(a+\alpha)q&=\left(a+\frac{\gamma}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}=\left(\frac{a\beta}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\frac{\beta}{\delta}\\&=\frac{a\beta+\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta}=\frac{a\beta+\gamma}{\delta}\\&=a\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=a\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta}\\&=aq+\alpha q\end{aligned} \qquad (3.93a)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının eşleniğini alarak eşitlik 3.91c'nin elde edilmesinde olduğu gibi

$$q'(a'+\alpha')=q'a'+q'\alpha' \qquad (3.93b)$$

eşitliği yazılabilir. Genel olarak bu durum eşitlik 3.93c ile ifade edilebilir.

$$(a+\alpha)(a'+\alpha')=aa'+a\alpha'+a'\alpha+\alpha\alpha' \qquad (3.93c)$$

Bu sonuçla diyebiliriz ki quaternionlar üzerinde çarpma vektörlerde olduğu gibi toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir.

i, j, k birbirlerine dik üç birim vektör olsun.

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk \\ r &= w' + x'i + y'j + z'k \\ s &= w'' + x''i + y''j + z''k \end{aligned} \qquad (3.94a)$$

eşitlikleri ile verilen üç quaternionumuz q, r, ve s olsun. Görülecektir ki eşitlik 3.94b ile verilen çarpımın skalar ve vektörel kısımları birbirlerinin aynı olacaktır.

$$q(rs) = (qr)s \qquad (3.94b)$$

Bu sonuçla diyebiliriz ki quaternionlar üzerinde çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

3.14.4 Genel Formüller

Eğer α ve β iki vektör ise

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta^2 \qquad (3.95a)$$

elde edilir. Eşitlik 3.39 kullanılarak 3.95b eşitliğini yazarız.

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\mathrm{S}\alpha\beta + \beta^2 \qquad (3.95b)$$

Benzer şekilde eşitlik 3.96a ve eşitlik 3.40 kullanılarak eşitlik 3.96b yazılabilir.

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - (\alpha\beta + \beta\alpha) + \beta^2 \qquad (3.96a)$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\mathrm{S}\alpha\beta + \beta^2 \qquad (3.96b)$$

$q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q$ quaternionu ile $\mathrm{K}q = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q$ eşleniğinin çarpımı ile ve eşitlik 3.42 kullanımı ile eşitlik 3.97 yazılabilir.

$$\alpha\beta \cdot \beta\alpha = q\mathrm{K}q = (\mathrm{S}\alpha\beta)^2 - (\mathrm{V}\alpha\beta)^2 = (\mathrm{T}q)^2 \qquad (3.97)$$

3.15 İKİ VEYA DAHA FAZLA VEKTÖRÜN ÇARPIMI

$q = \alpha\beta$, $r = \gamma$ olsun. $Sqr = Srq$ olduğundan eşitlik 3.98a yazılabilir.

$$S\alpha\beta\gamma = S\gamma\alpha\beta \qquad (3.98a)$$

$q = \gamma\alpha$, $r = \beta$ iken aynı şekilde

$$\begin{aligned} Sqr = Srq = S\gamma\alpha\beta = S\beta\gamma\alpha \\ S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \end{aligned} \qquad (3.98b)$$

olacaktır. Eğer dairesel sıra değiştirilmez ise üç vektörün çarpımının skalar kısmı aynı kalacaktır. Bu durum aynı zamanda vektör çarpımının birleşme özelliğini de kullanarak tanımlanabilir. Eşitlik 3.99a ile verdiğimiz üç vektörün çarpımı ile ilgili yazım şekli iki tarafında skalarının alınması ile eşitlik 3.99b

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = (S\alpha\beta + V\alpha\beta)\gamma \qquad (3.99a)$$

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\gamma \\ &= S(V\alpha\beta\cdot\gamma) \\ &= S\cdot\gamma\, V\alpha\beta \end{aligned} \qquad (3.99b)$$

ve $S\cdot\gamma\, S\alpha\beta = 0$ etkisiz elemanının eşitliğin sağ tarafına eklenmesi ile eşitlik 3.99c elde edilir.

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S\cdot\gamma\, V\alpha\beta + S\cdot\gamma\, S\alpha\beta \\ &= S\cdot\gamma(S\alpha\beta + V\alpha\beta) \\ &= S\gamma(\alpha\beta) = S\gamma\alpha\beta \end{aligned} \qquad (3.99c)$$

Bu şekilde her bir çarpım için tekrar yazarsak eşitlik 3.99d elde edilebilir ki bu eşitlik 3.98b ile aynıdır.

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \qquad (3.99d)$$

Bu kesin olarak göstermektedir ki dairesel sıra korunduğu sürece üç vektörün çarpımının skalar kısmı hep aynı olacaktır.

Eğer dairesel sıra bozulursa bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\alpha\beta\gamma &= \mathrm{S}\cdot\alpha(\mathrm{S}\beta\gamma + \mathrm{V}\beta\gamma) \\ &= \mathrm{S}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\beta\gamma \\ &= -\mathrm{S}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\gamma\beta \\ &= -\mathrm{S}\alpha(\mathrm{V}\gamma\beta + \mathrm{S}\gamma\beta) \\ \mathrm{S}\alpha\beta\gamma &= -\mathrm{S}\alpha\gamma\beta \end{aligned} \qquad (3.100)$$

elde edilecektir ki bu dairesel sıranın bozulmasının çarpımın skalar kısmında sadece bir işaret farkı oluşturduğunu göstermektidir.

$\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ eşitliğine geri döner ve bu çarpımda her iki tarafında ayrı ayrı vektörel kısımlarını alıp elde ettiğimiz sonuçları eşitlersek

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\alpha\beta\gamma &= \mathrm{V}\cdot\alpha(\mathrm{S}\beta\gamma + \mathrm{V}\beta\gamma) \\ &= \alpha\,\mathrm{S}\beta\gamma + \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\beta\gamma \end{aligned} \qquad (3.101a)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\gamma\beta\alpha &= \mathrm{V}(\mathrm{S}\gamma\beta + \mathrm{V}\gamma\beta)\alpha \\ &= \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{S}\gamma\beta - \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\gamma\beta \\ &= \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{S}\gamma\beta + \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\beta\gamma \\ &= \mathrm{V}\cdot\alpha(\mathrm{S}\gamma\beta + \mathrm{V}\beta\gamma) \\ &= \alpha\,\mathrm{S}\beta\gamma + \mathrm{V}\cdot\alpha\,\mathrm{V}\beta\gamma \end{aligned} \qquad (3.101b)$$

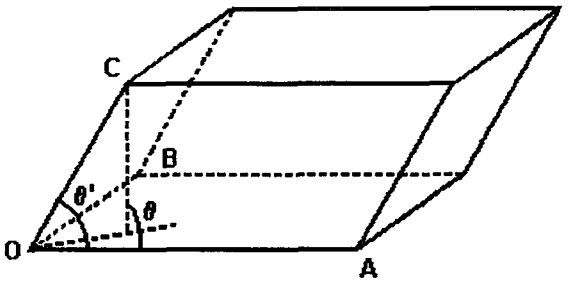
ve bu eşitliklerden sonuç olarak

$$\mathrm{V}\alpha\beta\gamma = \mathrm{V}\gamma\beta\alpha \qquad (3.101c)$$

elde ederiz. Bu sonuçla diyebiliriz ki üç vektörün çarpımının vektörel kısmı tam ters sırada çarpımının vektörel kısmına eşittir.

Bu sonuçları elde ettikten sonra $\mathrm{S}\alpha\beta\gamma$ işleminin geometrik anlamını inceleyelim. α, β ve γ şekil 3.8'de görülen bir paralelkenar prizmanın üç komşu kenarı OA, OB ve OC'yi tanımlayan vektörler, ve θ, α ve β vektörleri arasındaki açı, θ' ise γ vektörünün AOB düzlemi ile yaptığı açı olsun. Bu durumda ε, AOB düzlemine dik bir vektör iken eşitlik 3.102a yazılabilir.

$$\alpha\beta = -\cos\theta + \varepsilon\sin\theta \qquad (3.102a)$$



Şekil 3.8 Üç vektörün çarpımının geometrik anlamı

Bu eşitliğin her iki tarafında da $\times \mathrm{S}\cdot\gamma$ işlemini uygularsak

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\alpha\beta\gamma &= \mathrm{S}(-\cos\theta + \varepsilon\sin\theta)\gamma \\ &= \mathrm{S}(\sin\theta\cdot\varepsilon\gamma) \end{aligned} \qquad (3.102b)$$

elde edilir. Ancak ε ile γ arasındaki açının kosinüsünün ters işaretlisi $\mathrm{S}\varepsilon\gamma$ olacağından

$$\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = -\sin\theta\sin\theta' \qquad (3.102c)$$

elde edilir. Eğer α, β ve γ vektörlerinin tensörleri yani uzunlukları a, b, c ise bu durumda eşitlik 3.102d yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\alpha\beta\gamma &= -\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\,\mathrm{T}\gamma\sin\theta\sin\theta' \\ &= -abc\sin\theta\sin\theta' \end{aligned} \qquad (3.102d)$$

$ab\sin\theta$ kenarları a ve b olan ve kenarları arasındaki açı θ olan bir parelelogramın alanını ve $c\sin\theta'$ ise AOB düzlemine dik çizginin boyunu verir. Bu sonuçlarla diyebiliriz ki $-\mathrm{S}\alpha\beta\gamma$ bize kenar uzunlukları a, b ve c olan ve kenarları α, β ve γ vektörlerine çizilecek paralel çizgilerden oluşan paralelkenar prizmanın hacmini vermektedir. Buradan elde edebileceğimiz sonuçları şu şekilde sıralayabiliriz :

1. Vektörlerin sıralaması ne olursa olsun hacim aynıdır.

$$\pm\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \pm\mathrm{S}\beta\gamma\alpha = \pm\mathrm{S}\gamma\alpha\beta = \pm\mathrm{S}\alpha\gamma\beta\,,\text{vb.} \qquad (3.103a)$$

2. $S\alpha\beta\gamma = 0$ ve α, β ve γ vektörlerinden biri sıfır değilse θ ve θ' sıfıra eşit olacaktır ki bu vektörlerin eşdüzlemsel olduğu anlamına gelir.
3. Eğer α, β ve γ eşdüzlemsel ise $S\alpha\beta\gamma = 0$ olacaktır.
4. Kenarları OC, OB, OA olan bir üçgen piramidin hacmi $-\frac{1}{6}S\alpha\beta\gamma$ eşitliği ile verilecektir.

Eğer α, β ve γ eşdüzlemsel iseler $S\alpha\beta\gamma = 0$ olacağını söylemiştik. Bu bize $\alpha\beta\gamma$ çarpımının bir vektör olduğunu gösterir. Bu vektörü bulmak amacı ile kenarları AB, BC ve CA olan bir üçgen ele alalım. Aynı sırada ve yönde üç vektörümüz ise α, β ve γ olsun. Çarpımın tensörü üç vektörün tensörlerinin çarpımına eşit olacağından sadece versörler ile ilgilenmemiz yeterli olacaktır. Dolayısı ile çarpım tensörü α, β ve γ vektörlerinin tensörlerinin çarpımından elde edilir. Bizim elde etmemiz gereken $U(AB\cdot BC\cdot CA)$ versörü ve bu versörün yönüdür. Şimdi ABC üçgeninin çevresine bir daire çizelim, ve A noktasına bir $T'AT$ teğeti çizelim. Bu durumda $\angle TAB = \angle BCA$ olacağından

$$U\frac{BC}{CA} = U\frac{AB}{AT'}\left[= U\frac{BA}{AT}\right] \qquad (3.104a)$$

yazılabilir. Aynı zamanda

$$U(BC\cdot CA) = U(AB\cdot AT')\left[= U(BA\cdot AT)\right] \qquad (3.104b)$$

yazılabileceğini daha evvel göstermiştik. Bu eşitliği $UAB\times$ ile çarparsak

$$U(AB\cdot BC\cdot CA) = U(AB\cdot AB\cdot AT')\left[= U(AB\cdot BA\cdot AT')\right] \qquad (3.104c)$$

elde ederiz. Bu eşitilkte $U(AB\cdot BA)$ için

$$U(AB\cdot BA) = -(U\cdot AB)^2 = 1 \qquad (3.104d)$$

eşitliği yazılabileceğinden sonuç olarak

$$U(AB \cdot BC \cdot CA) = -U \cdot AT' = U \cdot AT \qquad (3.104e)$$

elde edilir. Bu bize bir düzlem üzerinde çakışık olmayan üç nokta A, B ve C olmak üzere bu noktaları bir üçgen şekli meydana getirecek şekilde birleştiren vektörler α, β ve γ ise üçgeni çevreleyecek bir dairenin A, B ve C noktalarındaki teğetinin eşitliklerini tanımlamaktadır. Bu eşitlikler sırası ile $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, $\gamma\alpha\beta$ olacaktır.

Yine bir daire üzerinde üç noktamız A, B ve C olsun. AB doğrusunu α ve BC doğrusunu ise β ile gösterelim. Bu durumda bir γ vektörüne paralel ve daire üzerindeki bir D noktasından geçecek şekilde bir CD doğrusu çizelim. Bu durumda DA vektörü $V\alpha\beta\gamma = \delta$ ile tanımlı δ vektörüne paralel olacaktır.

$$\delta = \alpha\beta\gamma = \alpha\frac{\beta}{\beta}\beta\gamma = \alpha\beta^2\beta^{-1}\gamma = -(T\beta)^2\alpha\beta^{-1}\gamma = -(T\beta)^2\frac{\alpha}{\beta}\gamma \qquad (3.105a)$$

Bu eşitlikte görülen $\frac{-\alpha}{\beta}$ bölümünün versörü β vektörünü $-\alpha$ yönüne çeviren quaternion γ vektörünü $\delta = DA$ yönüne çevirecektir.

BÖLÜM 4

QUATERNIONLARIN GEOMETRİDE KULLANILMASI

Bu bölümde, nokta, çizgi, yüzey ve düzlem eğrileri için parametrik ifadelerin yazılışı, ve bu ifadelerin quaternion uzayında tanımlanması konusu işlenmektedir. Bunun için ilk önce parametrik ifadelerin nasıl elde edileceği konusu elips, parabol ve hiperbol gibi düzlem eğrileri örnek verilerek anlatılmış, daha sonra bu düzlem eğrileri için quaternion ifadelerine yer verimiştir.

4.1 ÇİZGİ VE YÜZEYLER İÇİN GENEL TANIMLAR

4.1.1 Çizgi Ve Yüzeyler Üzerinde Tanımlı Genel Eşitlikler

Herhangi bir ρ vektörü birbirlerine ve herhangi bir düzleme paralel olmayan α, β ve γ vektörlerine paralel herhangi üç vektör cinsinden ifade edilebilir. Uzayda herhangi bir *noktanın* yeri 4.1 eşitliği ile verilebilir.

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \qquad (4.1)$$

Eğer değişken x, y, z değerleri iki bağımsız değişken t ve u cinsinden ifade edilebiliyorsa, ρ vektörü uzayda bir yüzeyi ve fonksiyonlar lineer fonksiyonlar ise, bu durumda ρ vektörü uzayda bir *düzlemi* gösterecektir. Eşitlik 4.2'de bir yüzeyin genel ifadesi verilmiştir.

$$\rho = \phi(t,u) \qquad (4.2)$$

Eğer değişken x, y, z değerleri sadece bir t skalar değişkeni cinsinden ifade edilebiliyorsa, bu durumda ρ vektörü uzayda bir düzlem eğrisini, ve eğer fonksiyonlar lineer ise, bu durumda ρ vektörü uzayda bir düz çizgiyi gösterecektir. Eşitlik 4.3'de bir düzlem eğrisinin genel ifadesi verilmiştir.

$$\rho = \phi(t) \qquad (4.3)$$

Eğer α, β, ve γ eşdüzlemsel ise, bu durumda eşitlik 4.1'de görülen herhangi iki vektör bir diğer tek vektör ile ifade edilebilir. Bu durumda $\rho = \phi(t)$ vektörü bir düzlem eğrisini, ve eğer fonksiyonlar lineer ise bir düz çizgiyi ifade edecektir. Bir düz çizginin tanımında verilebilecek çeşitli eşitliklerin tamamının temelinde fonksiyonun lineer olması ve bağımsız bir değişken skalar olması vardır.

4.1.2 Quaternion Metodu ile Kartezyen Bağıntısının Birlikte Kullanımı

Bir düzlem eğrisinin genel formu olarak ele alabileceğimiz, x ve y'nin değişken ve bir bağımsız skalar t değerinin fonksiyonları olduğunu kabul ederek yazabileceğimiz 4.4a fonksiyonunda $x = f(t)$, $y = f'(t)$, veya $x = f''(y)$ fonksiyonlarını ekleyerek, kartezyen formundan faydalanarak, quaternion metodunun sonucu olan ρ fonksiyonuna uygulayabiliriz.

$$\rho = x\alpha + y\beta \qquad (4.4a)$$

Örneğin, α ve β bir parabolun ekseni ve doğrultmanı yönündeki birim vektörler olsun, ve merkezleri parabolun odak noktasında olsun. Bu durumda kartezyen bağıntı 4.4b geçerli olacak ve 4.4a ile birleştirerek 4.4c'yi elde ederiz.

$$y^2 = 2px + p^2 \qquad (4.4b)$$

$$\rho = \frac{1}{2p}(y^2 - p^2)\alpha + y\beta \qquad (4.4c)$$

α ve β parabolun çapına ve teğetine paralel iki vektör olarak alınırsa bu durumda ρ parabolu tek bir bağımsız skalar değişken t cinsinden eşitlik 4.4d ile ifade edilebilir.

$$\rho = \frac{t^2}{2}\alpha + t\beta \qquad (4.4d)$$

4.1.3 Quaternion Diferansiyeli

4.1.3.1 Değişme Özelliği

Quaternionlar gibi quaternion diferansiyeli de değişme özelliğine sahip değildir.

$f(x)$, eşitlik 4.5a ile verilen bir skalar fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun türevini alırsak eşitlik 4.5b elde ederiz.

$$f(x) = x^2 \qquad (4.5a)$$

$$d[f(x)] = 2xdx = [f'(x)]dx \qquad (4.5b)$$

Ancak işlem quaternionlar üzerinde aynı şekilde gerçekleşmez. Eşitlik 4.6a ile verilen bir q quaternionun karesi şeklindeki fonksiyonun türevini alırsak eşitlik 4.6b'yi elde ederiz. Ancak burada unutulmaması gereken bir husus, quaternionlar üzerinde çarpma işleminin değişme özelliğine sahip olmamasıdır.

$$f(q) = q^2 \qquad (4.6a)$$

$$f(q+dq) = (q+dq)^2 = q^2 + qdq + dq\cdot q + (dq)^2,$$
$$\therefore\ d[f(q)] = qdq + dq\cdot q \qquad (4.6b)$$

Quaternionlar üzerinde çarpma işleminde değişme özelliği olmamasından dolayı ($qdq \neq dq\cdot q$) 4.6b eşitliğinin sağ tarafı $2qdq$ şeklinde yazılmaz. Bunun sonucu olarak,

$$d[f(q)] = [f'(q)]dq \qquad (4.6c)$$

eşitliği genel olarak yazılamaz. Vektörlerde birer quaternion olduğuna göre aynı eşitsizlik vektörler için de geçerli olacaktır. Bir ρ vektörü ele alalım. 4.6a ve 4.6b eşitliklerini bu ρ vektörü için yazalım.

$$f(\rho)=\rho^2,$$
$$d\left[f(\rho)\right]=\rho\,d\rho+d\rho\cdot\rho \qquad (4.7)$$

Bu durumda $d\left[f(\rho)\right]=\left[f'(\rho)\right]d\rho$ yazabilmek amacı ile $\sigma d\rho = d\rho\cdot\rho$ olacak şekilde bir σ vektörü seçelim, öyle ki $\sigma d\rho = d\rho\cdot\rho$ olsun. Bu durumda 4.8 eşitliği yazılabilir.

$$\sigma = d\rho\cdot\rho\, d\rho^{-1} \qquad (4.8)$$

ε vektörü $d\rho$ vektörünün versörü olsun. Bu durumda ters vektörlerin tensörleri birbirini götüreceği için

$$\sigma = \varepsilon\,\rho\,\varepsilon^{-1} \qquad (4.9)$$

yazılabilir. Bu durumda eğer ρ, ε ve σ eşdüzlemsel iseler veya $V\varepsilon\rho = V\rho\varepsilon$ ise $d\left[f(\rho)\right]=\left[f'(\rho)\right]d\rho$ eşitliği yazılabilir. Eşdüzlemsel quaternionların çarpma işlemi üzerinde değişme özelliği olduğuna göre, eğer q ve dq eşdüzlemsel ise veya eğer dq ve $d\rho$ skalar ise, dq ve $d\rho$ diferansiyelleri ortadan kaybolur, ve $f(q)$ ve $f(\rho)$ için genel diferansiyel kuralları geçerli olur.

Bu sonuçlarla eşitlik 4.4d'de verdiğimiz parabol eşitliğinin diferansiyelini alırsak

$$\frac{d\rho}{dt} = t\alpha+\beta \qquad (4.10)$$

Elde ettiğimiz iki ρ ve ρ' vektörlerini ardışıl olacak şekilde yerleştirdiğimizde ρ eğri üzerinde bir t değeri için belirli bir noktayı gösterirken ρ' bu noktadaki teğet vektörü olacaktır. Bunun sonucu olarak x bir değişken skalar olmak üzere bir t noktasındaki teğet eşitlik 4.11'de verildiği gibi o noktayı gösteren vektör ile teğet vektörünün toplamından ibarettir. Teğet vektörünü ρ ile gösterirsek

$$\rho = \frac{t^2}{2}\alpha + t\beta + x(t\alpha + \beta) \qquad (4.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ancak unutulmamalıdır ki quaternionlar üzerinde çarpma işlemi genel anlamda değişme özelliğine sahip değildir. Yukarıdaki bu teğet formülü ise sadece değişme özelliğine sahip olduğu durum için geçerlidir. Bu durumda skalara diferansiyeli ile eşdüzlemsel olan ve olmayan tüm quaternionlar için genel bir diferansiyel ifadesi yazmamız gereklidir.

4.1.3.2 Genel Quaternion Diferansiyeli İfadesi

Bir $p = f(q)$ ifadesini ele alalım. Bu ifadeden eşitlik 4.12'deki diferansiyel eşitliğini elde edebiliriz.

$$dp = df(q) = \lim_{n=\infty} n\left[f(q + n^{-1}dq) - f(q)\right] \qquad (4.12)$$

Bir quaternion sistemi üzerinde tanımlanmış $f(q,r,s,....) = 0$ ilişkisini ele alalım. Bu sistemde $\Delta q, \Delta r, \Delta s, ...$ sonlu büyüklüklü farklar olsun, öyleki $q + \Delta q, r + \Delta r, s + \Delta s, ...$ sistemi üzerinde $f(q,r,s,....) = 0$ eşitliği geçerliliğini korusun. Bu durumda yeni sistemden eski sisteme geçerken farklar sıfıra yaklaşacaktır. Bu durumda tüm farklar artan bir n skalar çarpanı ile çarpıldıklarında sonuç toplam yine sınırlı olacakır. Bu ise diferansiyelin azalan farkların toplamlarının bir limiti olduğunu gösterir. Bu düşünce ile eşitlik 4.13a yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta p &= f(q + \Delta q) - f(q) \\ n\Delta p &= n\left[f(q + \Delta q) - f(q)\right] \end{aligned} \qquad (4.13a)$$

Eğer yukarıda elde ettiğimiz eşitliğin limitini alırsak eşitlik 4.13b'yi elde ederiz.

$$dp = \lim_{n=\infty} n\left[f(q + \frac{dq}{n}) - f(q)\right] \qquad (4.13b)$$

Genel anlamda eğer $Q = F(q,r,....)$ ise

$$dQ = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\, n\left[F(q+n^{-1}dq, r+n^{-1}dr, \ldots) - F(q,r,\ldots)\right] \qquad (4.14)$$

eşitliği geçerli olacaktır. Bu formülde $dq, dr, \ldots.$ herhangi bilinen değişken değerler, ve n ise sonsuza giden pozitif tam sayılardır. Formülün skalar büyüklüklerin diferansiyeline uygulanmasında olduğu gibi, diferansiyel değerlerinin küçük değerler olması gerekmediğini göstermek amacı ile

$$y = x^2 \qquad (4.15a)$$

denklemini ele alalım. Diferansiyel değerini hesaplamak için 4.15b ile verilen eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}(y+\Delta y) &= (x+\Delta x)^2 \\ \Delta y &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned} \qquad (4.15b)$$

Bu eşitliklerde n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$n\Delta y = 2xn\Delta x + n^{-1}(n\Delta x)^2 \qquad (4.15c)$$

yazılabilir. Δy, Δx değerlerinin birlikte sıfıra, n değerinin ise sonsuza gittiği durumda $n\Delta x$ sonlu bir limite gider. Bu limiti a olarak tanımlarsak a^2 değeri sonlu bir değer olacak, n sonsuza giden bir tamsayı olduğu durumda $n^{-1}a^2$ sıfıra gidecektir. Eğer bu sonuçla eşitliğin her iki tarafının n sonsuza giderken limitleri alınırsa $dx = a$ ve $dy = 2xa$ elde edilecektir. Bu durumda eşitlik 4.15d yazılabilir.

$$dy = 2xdx \qquad (4.15d)$$

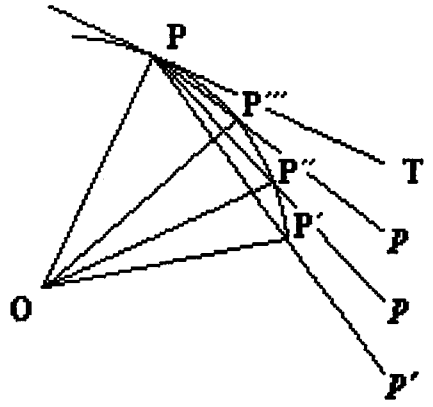
Bir vektör fonksiyonu için,

$$d\rho = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\, n\left[f(\rho+n^{-1}d\rho) - f(\rho)\right] \qquad (4.16)$$

ve bir skalar fonksiyonu $\rho = \phi(t)$ için diferansiyel eşitliği

$$d\rho = d\left[\phi(t)\right] = \lim_{n=\infty} n\left[\phi(t+\frac{dt}{n}) - \phi(t)\right] \qquad (4.17)$$

şeklinde olacaktır. Bu eşitlikte t ve dt bağımsız ve rastgele skalarlardır.



Şekil 4.1 Quaternion diferansiyeli

Tanımın bir başka gösterilimini anlatabilmek amacı ile eşitlik 4.18 'de verilen uzaydaki düzlem eğrisini ele alalım. Bu eğride OP= ρ merkezden eğri üzerindeki bir P noktasına tanımlı bir vektör olsun, t ise zamanı tanımlayan bir skalar değer olsun, öyle ki eğrinin bir diğer noktası P' iken, eğriyi üreten noktanın P noktasından, P' noktasına gelene kadar geçen süre belirli bir zaman dilimini tanımlasın.

$$\rho = \phi(t) \qquad (4.18)$$

Eğer merkezden P' noktasına doğru olan vektörü ρ' olarak tanımlarsak bu durumda

$$\rho' - \rho = \mathrm{PP}' = \Delta\rho \qquad (4.19a)$$

ρ ve ρ' arasındaki sonlu farkı tanımlar. t 'deki değişiklik Δt ve $\mathrm{OP}' = \phi(t+\Delta t)$ iken eşitlik 4.19b yazılabilir.

$$\mathrm{PP}' = (\rho+\Delta\rho) - \rho = \Delta\rho = \phi(t+\Delta t) - \phi(t) = \Delta\phi(t) \qquad (4.19b)$$

$\frac{1}{2}\Delta t$'lik sürede P noktası P'' gibi bir noktaya gelir. Bu noktaya doğru tanımlı ρ'' vektörü $OP'' = \phi(t+\frac{1}{2}\Delta t)$ şeklinde ifade edilebilir. P noktasından P'' noktasına gelirken tanımlı hızın sabit kaldığı düşünülürse P'' noktasından p'' noktasına gelinir. P noktasından bu p'' noktasına olan vektörün tanımı eşitlik 4.19c ile verilmiştir.

$$Pp'' = 2PP'' = 2(OP'' - OP) = 2\left[\phi(t+\frac{1}{2}\Delta t) - \phi(t)\right] \qquad (4.19c)$$

Daha iyi bir yaklaşım için geçen süreyi azaltıp yeni bir nokta elde edelim. Eğer geçen süreyi $\frac{1}{3}\Delta t$ olarak ele alırsak bu durumda Δt anındaki vektör eşitlik 4.19d 'deki gibi olacaktır.

$$Pp''' = 3PP''' = 3(OP''' - OP) = 3\left[\phi(t+\frac{1}{3}\Delta t) - \phi(t)\right] \qquad (4.19d)$$

Bu şekilde sonsuz adet işlem adım sonucu yani limit noktasında elde edilen vektör için ρ fonsiyonunun diferansiyelini elde etmiş oluruz.

$$d\rho = \lim_{n=\infty} n\left[\phi(t+\frac{dt}{n}) - \phi(t)\right] \qquad (4.19e)$$

4.1.3.3 Dağılma Özelliği

Eşitlik 4.12'de verilen denklemin ikinci bölümünü $f(q,dq)$ şeklinde yazabiliriz. Ancak quaternionlar için daha evvel anlatıldığı gibi $f(q)dq$ yazmak mümkün değildir. $f(q,dq)$ içindeki dq $q',q'',q''',.....$ şeklinde bileşenlerden oluşmuş olabilir. Eğer dağılma özelliğine sahipse bu durumda $f(q,dq) = f(q,q'+q''+q'''+...)$ şeklinde yazabiliriz. Bunu ispatlamak için basit olarak 4.20a eşitliğini kabul edelim ve 4.20b eşitliğini ispatlamaya çalışalım.

$$dq = q' + q'' \qquad (4.20a)$$

$$f(q,q'+q'') = f(q,q') + f(q',q'') \qquad (4.20b)$$

Eşitlik 4.12 dikkatle incelenirse sağ taraftaki fonksiyonun n, q ve dq'nun bir fonksiyonu olduğu görülecektir. Bu fonksiyonu $f_n(q,dq)$ olarak gösterebiliriz. Bu durumda eşitlik 4.20c veya 4.20d yazılabilir.

$$f(q,dq) = n\left[f(q+n^{-1}dq) - f(q)\right] = f_n(q,dq) \qquad (4.20c)$$

$$f(q+n^{-1}dq) = f(q) + n^{-1}f_n(q,dq) \qquad (4.20d)$$

Eşitlik 4.20d ile 4.20a birleştirirsek iki adet eşitlik elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(q+n^{-1}q') &= f(q)+n^{-1}f_n(q,q') \\ f(q+n^{-1}q'') &= f(q)+n^{-1}f_n(q,q'') \end{aligned} \qquad (4.20e)$$

4.20e'deki eşitlikleri diferansiyel kanunu ile birleştirdiğimizde

$$\begin{aligned} f(q+n^{-1}q''+n^{-1}q') &= f(q+n^{-1}q'')+n^{-1}f_n(q+n^{-1}q'',q') \\ f(q+n^{-1}q'+n^{-1}q'') &= f(q)+n^{-1}f_n(q,q'+q'') \end{aligned} \qquad (4.20f)$$

elde ederiz. Buradan ise

$$f_n(q,q'+q'') = f_n(q,q'') + f_n(q+n^{-1}q'',q') \qquad (4.20g)$$

eşitliğini elde ederiz ki $n = \infty$ için limit alındığında

$$f(q,q'+q'') = f(q,q'') + f(q,q') \qquad (4.20h)$$

sonucu elde edilir. Bu durumu $dq = q'+q''+q'''+\ldots$ için genelleştirirsek, eğer $p = f(q,xdq)$ ise genel olarak eşitlik 4.21 yazılabilir.

$$f(q,xdq) = x\,f(q,dq) \qquad (4.21)$$

Eğer $Q = F(q,r,...)$ ise, eşitlik 4.14 elde ederiz ki bu zaten genel anlamda bize bir quaternionun diferansiyelini vermektedir. Bu ise bize quaternion diferansiyellerinin dağılma özelliğinin bulunduğunu gösterir. Ancak unutulmaması gereken bir nokta değişme özelliğine sahip bulunmamasıdır. Bu nedenledir ki $d(qr) = dq \cdot r + qdr$ yazılabilir ancak $d(qr) = rdq + qdr$ yazılamaz.

4.1.3.4 Dört terimli quaternion gösterilimi üzerinde diferansiyel

Bir değişken skalar t'ye bağlı olan bir q fonksiyonu ele alalım. t üzerindeki Δt değişikliği q üzerinde bir Δq değişikliğine yol açacaktır. Bu durumda eşitlik 4.22a yazılabilir.

$$\Delta q = \Delta w + \Delta x i + \Delta y j + \Delta z k \qquad (4.22a)$$

Eğer q quaternion fonksiyonunun her bir elemanı bağımsız t skalar değişkenin bir fonksiyonu ise bu durumda limit için eşitlik 4.22b yazılabilir.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \qquad (4.22b)$$

4.2 DÜZ ÇİZGİ

Kartezyen kordinatlarda yapılan tanımlarda olduğu gibi, bir düz çizgi denklemi, diğer çizgilerin tanımlarında da olduğu gibi, problem için öngörülen sabit sayılara bağlı olacaktır. Bir düzlemin genel eşitliği lineer ve iki bağımsız değişken skalara bağlı bir fonksiyondur.

4.2.1 Merkezden Geçen Düz Çizgi

O noktası merkez olmak üzere, $\alpha = \mathrm{OA}$ vektörü yönünde tanımlı bir $\rho = \mathrm{OR}$ değişken vektörü olsun. Bu durumda merkezden geçen ve sabit bir α vektörü yönündeki bir düz çizginin denklemi eşitlik 4.23a ile verilmiştir.

$$\rho = x\alpha \qquad (4.23a)$$

Bu doğru tanımını eğer quaternion tanımlarını kullanarak yapmaya kalkarsak eşitlik 4.23b'yi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \mathrm{U}\rho &= \mathrm{U}\alpha \\ \mathrm{V}\alpha\rho &= 0 \end{aligned} \qquad (4.23b)$$

α vektörü ile ifade edilebilen herhangi bir vektör ρ vektörüne paraleldir. Gerçekte yukarıdaki eşitlikler ile ifade edilebilen tüm vektörler birbirine paraleldir ve α vektörü cinsinden ifade edilebilirler.

4.2.2 Paralel Çizgiler

$\beta = \mathrm{OB}$ merkezden tanımlı bir B noktasına çizilen sabit bir vektör olsun. Bu durumda eşitlik 4.24 B noktasından geçen ve $\rho' = x\alpha$ vektörüne paralel bir düz çizginin denklemini verir.

$$\rho = \beta + x\alpha \qquad (4.24)$$

Eğer α tanımsız bir vektör ise bu durumda eşitlik 4.24 bir noktadan geçen sonsuz adet düz çizginin genel denklemi olacaktır. Eğer O ve β çakışırsa, bu durumda çizgimiz daha evvel verildiği gibi merkezden geçen düz bir çizgi olacaktır.

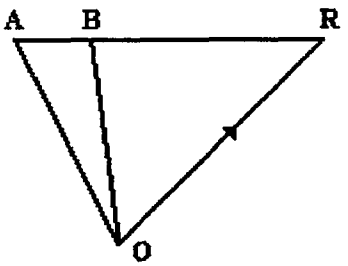
α aynı kalmak üzere merkezden B' noktasına bir $\beta' = \mathrm{OB}'$ olacak bir vektör tanımlayalım. Bu durumda eşitlik 4.25 geçerli olacaktır. Bu eşitlikte α ve $\rho - \beta$ paralel olduğundan eşitlik 4.26'da yazılabilir.

$$\begin{aligned} \rho &= \beta + x\alpha \\ \rho &= \beta' + x'\alpha \end{aligned} \qquad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\alpha(\rho - \beta) &= 0 \\ \mathrm{V}\alpha(\rho - \beta') &= 0 \end{aligned} \qquad (4.26)$$

4.2.3 Verilen İki Noktadan Geçen Düz Çizgi

$\alpha = \mathrm{OA}$ ve $\beta = \mathrm{OB}$ verilen iki noktaya doğru tanımlı iki vektör olsun, ve ρ ise verilen bir R noktasını tanımlayan vektör olsun. Yapmamız gereken bu ρ vektörünü tanımlamaktır. R noktası A ve B noktaları ile aynı çizgi üzerinde olsun. Bu durum şekil 4.2 ile verilmiştir.



Şekil 4.2 Verilen iki noktadan geçen düz çizgi

Tanımları kullanarak 4.27 ile verilen eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathrm{AR} &= x\mathrm{AB} = x(\beta - \alpha) \\ \mathrm{OR} &= \mathrm{OA} + \mathrm{AR} \\ \rho &= \alpha + x(\beta - \alpha) \end{aligned} \qquad (4.27)$$

Eğer herhangi bir nokta, örneğin A noktası merkez ile çakıştırılırsa bu durumda daha evvel verildiği gibi $\rho = x\beta$ eşitliği elde edilir.

Elimizdeki α, β, ve ρ vektörleri aynı düzlem üzerinde bulunduğuna göre bu vektörlerin çarpımlarının skalar kısmı sıfıra eşit olacaktır. Bu durum eşitlik 4.28 ile gösterilmiştir.

$$\mathrm{S}\alpha\beta\rho = 0 \qquad (4.28)$$

Bu eşitlik aynı zamanda bir düzlem tanımını da vermektedir. Bunun sebebi üç doğrunun zaten bir düzlem üzerinde olmasıdır. Eğer bir $\mathrm{S}\alpha\gamma\rho = 0$ eşitliği verecek bir düzlem bulunabilirse, ρ vektörü iki düzlemin kesişme çizgisini verir. Bu eşitlikler $\rho = x\alpha$ çizgisine $\mathrm{S}(\mathrm{V}\alpha\beta)\times$ veya $\mathrm{S}(\mathrm{V}\alpha\gamma)\times$ fonksiyonlarının uygulanması ile elde edilebilir. Aynı şeklide bilinen büyüklükler cinsinden, doğru denkleminin elde edilebilmesi amacı ile eşitlik 4.29 'da kullanılabilir.

$$\mathrm{S}\alpha\beta\rho = 0, \quad \mathrm{S}\alpha\gamma\rho = 0 \qquad (4.29)$$

Bu eşitlikler, eşitlik 4.30 ile verildiği şekilde de yazılabilir. Bu şekilde yazıldığında görülecektir ki ρ vektörü $\mathrm{V}\alpha\beta$ ve $\mathrm{V}\alpha\gamma$ vektörlerine diktir.

$$\begin{aligned} S\cdot\rho V\alpha\beta &= 0 \\ S\cdot\rho V\alpha\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (4.30)$$

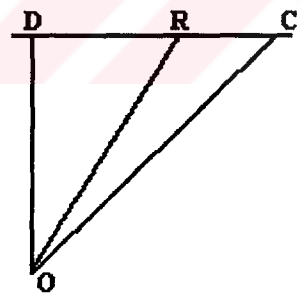
Elimizdeki ρ vektörü her iki vektöre de dik olduğuna göre bu iki vektörün çarpımına paralel olacaktır, ve çarpımları cinsinden ifade edilebilir olacaktır. Eğer çarpımlarının bir y katı olarak kabul edersek eşitlik 4.31a elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho &= yV\cdot V\alpha\beta V\alpha\gamma \\ &= y(\gamma S\alpha\beta\alpha - \alpha S\alpha\beta\gamma) \\ &= -y\alpha S\alpha\beta\gamma \end{aligned} \qquad (4.31a)$$

Eğer bu eşitlikte sabit kısımı $-yS\alpha\beta\gamma = x$ şeklinde ifade edersek

$$\rho = x\alpha \qquad (4.31b)$$

4.2.4 Verilen Bir Düz Çizgiye Dik Düz Çizgi



Şekil 4.3 Verilen bir çizgiye dik düz çizgi

1- $\delta = OD$ vektörü merkezden D noktasına bir vektör olsun. Şimdi OD vektörüne dik bir DC vektörü çizip, bu vektör üzerinde $\rho = OR$ olacak şekilde bir R noktası alalım. Bu durumda DR vektörü $\rho - \delta$ ile gösterilecektir. Bu iki vektörün birbirine dik olmasından faydalanarak

$$S\delta(\rho - \delta) = 0 \qquad (4.32a)$$

yazabiliriz. Bu ise bize

$$\mathrm{S}\delta\rho = -(\mathrm{T}\delta)^2 = c \quad (c \text{ bir sabit sayı}) \qquad (4.32b)$$

eşitliğini verecektir. $\rho \cdot \rho - \delta$ vektörünün δ vektörü ile aynı düzlem üzerinde bulunabilmesi için 4.33a ve 4.33b eşitliklerinin sağlanması gereklidir.

$$\mathrm{S}\cdot\delta\rho(\rho-\delta)=0 \qquad (4.33a)$$

$$\mathrm{S}\cdot(\mathrm{V}\delta\rho)(\rho-\delta)=0 \qquad (4.33b)$$

2- $\rho-\delta$ hem ρ, hem de $\mathrm{V}\delta\rho$ vektörlerine dik olduğuna göre çarpımlarına paralel olacaktır. Dolayısı ile çarpımları cinsinden ifade edilebilir. C noktası OD ve DR vektörlerinin tanımladığı düzlem üzerinde, DC vektörü OD vektörüne dik olacak şekilde tanımlı, bir $\gamma = \mathrm{OC}$ vektörü ele alalım. Bu durumda $\rho = \mathrm{DC}$ vektörünü eşitlik 4.34 ile tanımlayabiliriz.

$$\rho=\gamma+x\,\mathrm{V}\cdot\delta\,\mathrm{V}\delta\gamma \qquad (4.34)$$

3- Eşitlik 4.32b göz önünde bulundurulduğunda eğer dik vektör merkezden geçiyorsa bu durumda eşitlik 4.35 geçerlidir.

$$\mathrm{S}\delta\rho=0 \qquad (4.35)$$

Aynı durum için eşitlik 4.34 kullanılarak eşitlik yazılabilir.

$$\rho=y\,\mathrm{V}\cdot\delta\,\mathrm{V}\delta\gamma \qquad (4.36)$$

4- Eşitlik 4.32b'de elde ettiğimiz quaternion formundaki eşitliği kartezyen formuna dönüştürelim. Eğer $\angle\mathrm{ROD} = \theta$ ise

$$\mathrm{S}\delta\rho=-\mathrm{T}\delta\,\mathrm{T}\rho\cos\theta \qquad (4.37a)$$

ve *r* ve *d* değerleri tensörleri göstermek üzere

$$rd\cos\theta = d^2 \text{, veya } r = \frac{d}{\cos\theta} \qquad (4.37b)$$

eşitlikleri yazılabilir.

5- Eşitlik 4.34 ile daha evvel tanımladığımız, verilmiş bir noktadan geçen, ve merkezden geçen bir düz çizgiye dik olarak tanımlanan düz çizgiyi elde etmenin bir diğer metodu aşağıda verilmiştir.

γ ve δ daha evvel olduğu gibi, sırası ile verilmiş noktaya doğru ve verilmiş düz çizgi yönünde, ve β ise hesaplanması gereken dik çizgi doğrultusunda vektörler olsun. Bu durumda aralarındaki ilişki eşitlik 4.38a ile tanımlanabilir.

$$\rho = \gamma + x\beta \qquad (4.38a)$$

Bu eşitlikten β'yı elimine edebilmek amacı ile δ ve β'nın birbirlerine dik olmasından ve γ, δ ve β'nın eşdüzlemsel olmalarından faydalanarak eşitlik 4.38b yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\delta\beta &= 0 \\ \mathrm{S}\gamma\delta\beta &= 0 \end{aligned} \qquad (4.38b)$$

Ancak $\mathrm{V}\delta\gamma$ bu düzleme dik olduğu için $\mathrm{V}\cdot\delta\mathrm{V}\delta\gamma$ vektörü β vektörüne paraleldir. Bu durum ve eşitlik 4.38b, 4.38a ile birleştirilirse,

$$\rho = \gamma + x\,\mathrm{V}\cdot\delta\mathrm{V}\delta\gamma \qquad (4.38c)$$

ve basitleştirirsek

$$\rho = \gamma + x\delta\mathrm{V}\delta\gamma \qquad (4.38d)$$

elde ederiz.

Eğer $S\gamma\delta\beta \neq 0$, yani γ , δ ve β eşdüzlemsel değil ise bu durumda problem sonucu belirsizdir. Bu durum zaten 4.38a eşitliği üzerinde $\times S\cdot\delta$ fonksiyonu uygulanırsa, $S\beta\delta = 0$ olduğuna göre

$$S\rho\delta = S\gamma\delta \qquad (4.38e)$$

olacaktır ki bu β'dan bağımsız bir sonuç verdiği için gerekli şartı sağlayan sonsuz adet çözüm olduğunu gösterir.

6- Kendisine dik düz çizgi çektiğimiz çizgimiz merkezden geçmiyorsa bu durumda ρ vektörünü

$$\rho = \beta + x\alpha \qquad (4.39a)$$

şeklinde ifade edelim. Bu durumda $S\alpha(\rho-\gamma) = 0$ olacağından eşitlik 4.39a ile birleştirildiğinde

$$S\alpha(x\alpha+\beta-\gamma) = 0 \qquad (4.39b)$$

$$x\alpha = \alpha^{-1} S\alpha(\gamma-\beta) \qquad (4.39c)$$

eşitlikleri elde edilir. Aynı işlem dik $\rho-\gamma$ vektörü içinde geçerlidir.

$$\begin{aligned}\rho-\gamma &= x\alpha+\beta-\gamma \\ &= \alpha^{-1} S\alpha(\gamma-\beta)-\alpha^{-1}\alpha(\gamma-\beta) \\ &= -\alpha^{-1} V\alpha(\gamma-\beta)\end{aligned} \qquad (4.40)$$

Bu vektörün boyu ise eşitlik 4.41 ile verilir.

$$TV\left[U\alpha\cdot(\gamma-\beta)\right] \qquad (4.41)$$

7- Bir düz çizgiye dik çizilen düz çizgi, başlangıç noktasından o çizgiye kadar olan en kısa mesafedir. Bu durumda problem şekil 4.3 dikkate alınacak olursa C noktasından $\rho = x\alpha + \beta$ vektörüne olan en kısa mesafeyi hesaplamak olarak da ele alınabilir. ρ C noktasından verilen çizginin herhangi bir noktasına çizilebilecek en kısa vektör olsun. Bu vektör

$$\rho = \beta + x\alpha - \gamma \qquad (4.42a)$$

olacaktır. Bu vektörün boyunun en kısa olması için

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{T}(\beta + x\alpha - \gamma) &= 0 \\ \mathrm{T}(\beta + x\alpha - \gamma)\,d\,\mathrm{T}(\beta + x\alpha - \gamma) &= 0 \\ -\mathrm{S}\left[(\beta + x\alpha - \gamma)\alpha\right]dx &= 0 \\ \mathrm{S}(\beta + x\alpha - \gamma)\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (4.42b)$$

Elde ettiğimiz bu sonuç en kısa mesafenin bize verilen vektöre dik bir düz çizgi ile elde edileceğini göstermektedir.

8- $\rho = x\alpha + \beta$ vektörünün merkezden olan uzaklığının hesaplamak amacı ile C noktasının merkez ile çakıştırılması yeterli olacaktır. Bu durumda γ vektörü sıfıra eşit olacak ve δ vektörü ise ρ vektörünün bu andaki değerini ifade edecektir. Bu durumda

$$\delta = x\alpha + \beta \qquad (4.43a)$$

olacaktır. Eşitliğin her iki tarafını da $\times \mathrm{S}\cdot\delta$ ile işleme sokarsak $\mathrm{S}\alpha\delta = 0$ olduğundan

$$-(\mathrm{T}\delta)^2 = \mathrm{S}\beta\delta \qquad (4.43b)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliği daha farklı bir yazım ile de göstermek mümkündür.

$$\mathrm{T}\delta = \frac{\mathrm{S}\beta\delta}{\mathrm{T}\delta} = \frac{\mathrm{S}\cdot\beta\mathrm{T}\delta\mathrm{U}\delta}{\mathrm{T}\delta}$$
$$\mathrm{T}\delta = \mathrm{S}\cdot\beta\,\mathrm{U}\delta \qquad (4.43c)$$

4.3 DÜZLEM

Bir düzlemin genel eşitliği lineer ve iki bağımsız değişken skalara bağlı bir fonksiyondur.

4.3.1 Genel Düzlem Denklemi

Tanımlı bir δ vektörü ile δ vektörüne dik β vektörü ile arasındaki ilişkiyi daha evvel $\mathrm{S}\cdot\delta\beta = 0$ şeklinde tanımlamıştık. Aynı δ vektörüne dik çizilebilen tüm vektörler ise bir düzlem oluşturur. Dolayısı ile bu eşitlikte β vektörü yerine ρ değişken vektörünü koyarsak, bu bize verilmiş bir vektöre dik yüzeyin tanımını verecektir.

$$\mathrm{S}\cdot\delta\rho = 0 \qquad (4.44)$$

Şekil 4.3'ü ele alalım. Bu şekil üzerinde $\delta = \mathrm{OD}$ düzleme dik ve DR düzlem üzerinde herhangi bir vektör olacak şekilde bir düzlem düşünelim. Bu durumda $\rho = \mathrm{OR}$ değişken vektörümüz bize düzlemi tanımlayacaktır. Düzlemi tanımlayabilmek için ise eşitlik 4.45 kullanılabilir.

$$\mathrm{S}\delta(\rho - \delta) = 0$$
$$\mathrm{S}\delta\rho = \delta^2 = -(\mathrm{T}\delta)^2 \qquad (4.45)$$
$$\mathrm{S}\delta\rho = c,\ \text{c sabit bir sayıdır.}$$

Bu tanımda eğer $\mathrm{V}\delta\rho = \varepsilon$ ise bu durumda $\mathrm{S}\varepsilon\rho$ belirsiz bir değere sahip olacaktır.

Eğer düzlem merkezden geçiyorsa, daha evvel dik çizgiler konusunda da gördüğümüz gibi $\mathrm{S}\delta\rho = 0$ olacaktır.

Merkezden geçen ve δ vektörüne dik bir düzlemin denklemi, bu vektörü oluşturan iki vektör cinsinden yazılabilir. Eğer bu vektörler γ ve β ise

$$\rho = x\beta + y\gamma \qquad (4.46)$$

Bu bilinmeyen vektörleri eşitlikten ayırabilmek amacı ile eşitliğin her iki tarafında da $S\cdot\delta\times$ işlemini gerçekleştirelim. Yeniden $S\delta\rho = 0$ eşitliğini elde ederiz. Veya sadece bir bilinmeyen vektörü ayırabilmek amacı ile $V\cdot\beta\times$ işlemini uygularsak, sonuç $V\beta\rho = z\delta$ olacaktır ki bu durumda da sonuç üzerinde $V\cdot\delta\times$ işlemini uygularsak

$$\begin{aligned} V\cdot\delta\, V\beta\rho &= Vz\delta^2 = 0 \\ &= \rho S\delta\beta - \beta S\delta\rho \end{aligned} \qquad (4.47)$$

elde ederiz ki bu işlemde $S\delta\beta = 0$ olduğuna göre, $S\delta\rho = 0$ olması gerektiği görülebilir.

δ vektörüne dik, ve $\beta = OB$ noktasına sahip bir düzlemin denkleminin hesaplanmasında düz çizgiler için verdiğimiz yöntem yine geçerli olacaktır. Bu durum eşitlik 4.48 ile gösterilmiştir.

$$S\delta(\rho - \beta) = 0 \qquad (4.48)$$

Eğer bir düzlemin $S\delta\rho = c$ eşitliğini biliyorsak ve merkezden olan uzaklığını hesaplamak istiyorsak, bu ρ vektörünün düzleme dik doğrultuda δ ile çakıştığı noktadaki tensörü olacaktır. Bu durumda $\rho = x\delta$ için tensör değerini hesaplamamız yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} S\delta\rho = c &= Sx\delta^2 = x\delta^2 \\ x &= \frac{c}{\delta^2} \end{aligned} \qquad (4.49a)$$

Bu noktadaki tensör değeri için ise

$$\rho = \frac{c}{\delta}, \qquad T\rho = \frac{c}{T\delta} \qquad (4.49b)$$

4.3.2 Üç Düz Çizgi İle Eşit Açı Yapan, Merkezden Geçen Düzlem

Verilen düz çizgiler doğrultusunda α, β, ve γ olmak üzere üç adet birim vektörümüz olsun. Düzlem eşitliğimiz yine $\mathrm{S}\delta\rho = 0$ formunda olacaktır. Düzlemimizin üç adet çizgi ile yaptığı açı ϕ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{S}\alpha\delta = \mathrm{S}\beta\delta = \mathrm{S}\gamma\delta = \mathrm{T}\delta\sin\phi = x$$
$$\sin\phi = \frac{x}{\mathrm{T}\delta} \qquad (4.50a)$$

olarak elde edilecektir. Bu eşitlikten δ'yı çıkartabilmek için

$$\delta\,\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \mathrm{V}\alpha\beta\mathrm{S}\gamma\delta + \mathrm{V}\beta\gamma\,\mathrm{S}\alpha\delta + \mathrm{V}\gamma\alpha\,\mathrm{S}\beta\delta \qquad (4.50b)$$

Eşitlik 4.50a ile 4.50b'yi birleştirirsek

$$\delta\,\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = x(\mathrm{V}\alpha\beta + \mathrm{V}\beta\gamma + \mathrm{V}\gamma\alpha) \qquad (4.50c)$$

elde ederiz. Buradan düzleme dik vektörün eşitliğini elde edilebilir. Genel düzlem eşitliği ile birleştirdiğimizde α, β, ve γ cinsinden düzlem eşitliği ve düzlem ile çizgiler arasındaki ϕ açısının sinüsü elde edilebilir.

$$\mathrm{S}\rho(\mathrm{V}\alpha\beta + \mathrm{V}\beta\gamma + \mathrm{V}\gamma\alpha) = 0 \qquad (4.50d)$$

$$\sin\phi = \frac{\mathrm{S}\alpha\beta\gamma}{\mathrm{T}(\mathrm{V}\alpha\beta + \mathrm{V}\beta\gamma + \mathrm{V}\gamma\alpha)} \qquad (4.50e)$$

4.3.3 Verilen Üç Noktadan Geçen Düzlem

α, β, ve γ düzlemimiz üzerindeki üç adet nokta olsun. Bu üç noktayı birbirine bağlayan $(\alpha-\beta)$ ve $(\beta-\gamma)$ şeklinde iki adet düzlem üzerinde çizgi tanımlayabiliriz. Eğer ρ düzlemi tanımlayan değişken vektör ise $(\rho-\alpha)$ yine düzlemin bir çizgisi olacaktır. Bu durumda eşitlik 4.51a geçerli olacaktır.

$$\mathrm{S}(\rho-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) = 0 \qquad (4.51a)$$

Eğer bu eşitliği açarsak

$$S(\rho\alpha\beta - \rho\alpha\gamma - \rho\beta^2 + \rho\beta\gamma - \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma) = 0 \qquad (4.51b)$$

Bu eşitlikte α, β, γ, ve ρ merkezden geçen vektörler olduklarına göre içinde herhangi bir vektörün karesi geçen elemanların skalar kısımları sıfıra eşit olacaktır.

$$\begin{aligned} S(-\rho\beta^2) = 0, \quad S(-\alpha^2\beta) = 0 \\ S(\alpha^2\gamma) = 0, \quad S(\alpha\beta^2) = 0 \end{aligned} \qquad (4.51c)$$

$$\begin{aligned} S(-\rho\alpha\gamma) = S\rho\gamma\alpha = S\cdot\rho V\gamma\alpha \\ S\rho\alpha\beta = S\cdot\rho V\alpha\beta \\ S\rho\beta\gamma = S\cdot\rho V\beta\gamma \end{aligned} \qquad (4.51d)$$

4.51c, ve 4.51d eşitliklerinde elde ettiğimiz değerleri 4.51b eşitliğinde yerlerine koyarsak

$$S\cdot\rho(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha) - S\alpha\beta\gamma = 0 \qquad (4.51e)$$

elde edilir.

Bu eşitlikte $\delta = V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha$ şeklinde elde edeceğimiz vektör kısım merkezden düzlemimize çekilen dikme vektörünü tanımlamaktadır. Bu vektör aynı zamanda merkezden düzleme çekilen bir vektör olduğuna göre, ρ vektörünün δ vektörü ile çakıştığı noktada $\rho = x\delta$ eşitliği geçerli olacaktır. Bu şart altında eşitlik 4.51e tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} S\rho\delta - S\alpha\beta\gamma = 0 \\ x\delta^2 = S\alpha\beta\gamma \end{aligned} \qquad (4.51f)$$

elde edilir. Buradan düzlemin dik vektörü için eşitlik 4.51g elde edilir.

$$\rho = x\delta = \delta^{-1}S\alpha\beta\gamma = \frac{S\alpha\beta\gamma}{V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha} \qquad (4.51g)$$

4.4 DAİRE VE KÜRE

4.4.1 Genel Daire Eşitliği

α ve β birbirlerine dik ve dairemizin yarıçap-vektörleri olsun. $T\alpha = T\beta$ olacaktır. Bu durumda daire için genel eşitliğimiz

$$\rho = \cos\theta \cdot \alpha + \sin\theta \cdot \beta \qquad (4.52)$$

şeklinde tek bir değişken skalar θ cinsinden ifade edilebilir. Eğer α ve β yarıçap boyunca birim vektörler ise bu durumda

$$\rho = x\alpha + y\beta \qquad (4.53a)$$

veya $x^2 + y^2 = r^2$ olduğundan

$$\rho = (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\alpha + y\beta \qquad (4.53b)$$

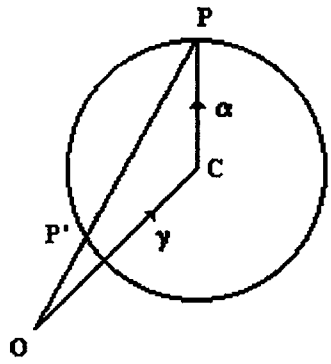
eşitliği ile, yine tek bir değişken skalar cinsinden ifade edilebilir. Eğer başlangıç noktası dairenin merkezinde alınırsa daire için eşitlik 4.54 ile verilen eşitlikler geçerli olacaktır.

$$\left.\begin{array}{l} T\rho = T\alpha \\ T\dfrac{\rho}{\alpha} = 1 \\ \rho^2 = -r^2 \end{array}\right\} \qquad (4.54)$$

Şekil 4.4'te görüldüğü gibi O başlangıç noktamız, ve $\gamma = OC$ olmak üzere C merkezli bir daire çizelim. P daire üzerinde bir nokta ve $\alpha = CP$ olsun. r yarıçaplı bu daire için aşağıdaki eşitlikler geçerli olacaktır.

$$\rho - \gamma = \alpha \qquad (4.55a)$$

$$(\rho - \gamma)^2 = -r^2 \qquad (4.55b)$$



Şekil 4.4 Dairenin parametrik gösterilimi

Eğer $T\gamma = c$ ise bu durumda eşitlik şu şekilde de yazılabilir.

$$\rho^2 - 2S\rho\gamma = c^2 - r^2 \qquad (4.55c)$$

Eğer başlangıç noktası daire üzerinde ise 4.55c eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşit, ve $S\rho\gamma = S\rho\alpha$ olacağından eşitlik 4.55d yazılabilir.

$$\rho^2 - 2S\rho\alpha = 0 \qquad (4.55d)$$

4.4.2 Genel Küre Eşitliği

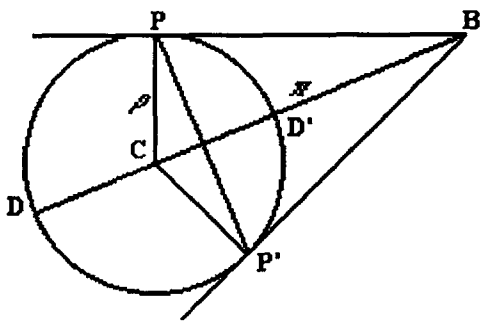
Önceki konuda düz çizgiler ile düzlem arasındaki ilişki, daire ile küre arasında da mevcuttur. Nasıl düz çizgi için elde ettiğimiz formülleri düzlem için kullandıysak, aynı şekilde, daire için elde edilen eşitlikler de küre için kullanılabilir. Bunun dışında küre için verilebilecek bir başka eşitlik ise şekil 4.4 dikkate alındığında, $T\alpha$ yarıçap olmak üzere

$$T(\rho - \gamma) = T\alpha \qquad (4.56)$$

ile verilebilir.

4.4.3 Daireye Teğet Çizgi veya Küreye Teğet Düzlem

Başlangıç noktası dairenin merkezi olan C noktası olmak üzere P noktasındaki teğet vektörünü π ile gösterelim. Bu teğet üzerindeki bir diğer nokta ise B noktası olsun. Bu durum şekil 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.5 Daireye bir noktasında çizilen teğet

Dairenin genel eşitliğini, eşitlik 4.52 ile vermiştik. Bir noktadaki teğet değerini bulabilmemiz için bu nokta için ρ değişken vektörümüzün diferansiyeli almamız gerekmektedir. Eşitlik 4.52'nin diferansiyeli

$$d\rho = -\sin\theta\cdot\alpha + \cos\theta\cdot\beta \qquad (4.57a)$$

ile ifade edilebilir. Bu durumda bir P noktasındaki teğet vektörü ise eşitlik 4.57b deki gibi olacaktır.

$$\pi = \cos\theta\cdot\alpha + \sin\theta\cdot\beta + x\left[-\sin\theta\cdot\alpha + \cos\theta\cdot\beta\right] \qquad (4.57b)$$

Elde ettiğimiz bu eşitlikler kullanılarak

$$\mathrm{S}\,\rho\, d\rho = 0 \qquad (4.57c)$$

yazılabilir. Aynı şekilde eğer şekil 4.5 incelenecek olursa

$$\mathrm{S}\,\rho\,(\pi - \rho) = 0 \qquad (4.57d)$$

olacağı açıktır. Bu durumda teğet çizgisi için eşitliklerimiz elde edilmiş olur.

$$\mathrm{S}\,\rho\pi = -r^2$$
$$\mathrm{S}\frac{\pi}{\rho} = 1 \qquad (4.58)$$

Bu eşitlikler aynı zamanda bir küreye teğet düzlem için de geçerlidir. Burada dikkat edilmesi gereken temel nokta ρ değişken vektörünün bir P noktasını gösterdiği noktadaki teğet ρ vektörünün bu anki değerine dik olacaktır. Bu durum eşitlik 4.57c'den de görülmektedir. Küreye teğet düzlemin bulunmasında bu vektör düzleme dik vektör olacaktır.

4.4.4 Teğet Noktalarındaki Kiriş

P noktasındaki teğetin üzerindeki B noktasından daire üzerindeki bir P' noktasına daha teğet çizilebilir. PP' çizgisine ise, B noktasından daireye çizilebilen teğet noktalarındaki kiriş adı verilir. Eğer CP' vektörünü σ ile gösterirsek eşitlik 4.58'den faydalanarak

$$\begin{aligned} S\beta\rho &= -r^2 \\ S\beta\sigma &= -r^2 \end{aligned} \qquad (4.59)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikler aynı zamanda küreye çizilebilecek teğet düzlemlerin oluşturacağı koninin eşitlikleri olacaktır. Bu koninin tepe noktası ise B noktası olacaktır.

4.5 KONİK BÖLGELER VE KARTEZYEN FORMLAR

4.5.1 Parabol

Bir düzlem üzerindeki bir düz çizgi ve bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların oluşturduğu eğriye parabol adı verilir. Daha evvel gördüğümüz α ve β bağımsız birim vektörler olmak üzere bir düzlem eğrisinin genel formülü

$$\rho = x\alpha + y\beta \qquad (4.60a)$$

ile verilebilir. Kartezyen tanımları ile genel parabol eşitliği, başlangıç noktası odak noktasından doğrultmana çekilen dikmenin orta noktası, yani parabolun tepe noktası, olmak üzere, $y^2 = 2px^2$ ile verilebilir. Bu iki eşitliği birleştirirsek eşitlik elde edilir.

$$\rho = \frac{y^2}{2p}\alpha + y\beta \qquad (4.60b)$$

Başlangıç noktasını odak noktası olarak alırsak, bu durumda aynı eşitlik

$$\rho = \frac{1}{2p}(y^2 - p^2)\alpha + y\beta \qquad (4.60c)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç noktası parabol üzerinde bir nokta, ve α ve β sırası ile tepe noktasındaki eksen ve teğete paralel herhangi iki vektör olmak üzere tek bir değişken skalara bağımlı genel parabol eşitliği, eşitlik 4.60d ile verilmiştir.

$$\rho = \frac{t^2}{2}\alpha + t\beta \qquad (4.60d)$$

4.5.2 Parabole Teğet

Parabolün bir noktasındaki teğetin elde edilmesi için bu noktadaki diferansiyelin hesaplanması gerekmektedir. Eşitlik 4.60c'nin diferansiyeli alınırsa

$$d\rho = \frac{y}{P}\alpha + \beta \qquad (4.61)$$

elde edilir. Dolayısı ile bir P noktasındaki teğet değerini π ile gösterirsek eşitlik 4.62a elde edilir.

$$\pi = \frac{1}{2p}(y^2 - p^2)\alpha + y\beta + Y\left(\frac{y}{p}\alpha + \beta\right) \qquad (4.62a)$$

Eşitlik 4.60d'de olduğu gibi bu eşitliği tek bir bağımsız skalar cinsinden ifade etmemiz gerekirse eşitlik 4.62b elde edilir.

$$\pi = \frac{t^2}{2}\alpha + t\beta + x(t\alpha + \beta) \qquad (4.62b)$$

ρ vektörünün parabolün çapı üzerinde bir noktayı gösterdiği andaki değerini 4.60a eşitliğinden faydalanarak m, ve n sabit skalar değerler olmak üzere 4.63a eşitliğinde verildiği gibi yazabiliriz.

$$\rho = m\alpha + n\beta \qquad (4.63a)$$

Bu noktadaki teğet değerini bulmak için ise 4.62b eşitliğinden faydalanabiliriz. Bu iki eşitliği birleştirdiğimiz zaman

$$m\alpha + n\beta = \frac{t^2}{2}\alpha + t\beta + x(t\alpha + \beta) \qquad (4.63b)$$

elde edilir. α ve β vektörleri bağımsız vektörler olduklarına göre

$$\begin{aligned} m &= \frac{t^2}{2} + xt \\ n &= t + x \end{aligned} \qquad (4.63c)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu iki eşitlikte bilinmeyen x değerleri çekilirse, t için m ve n cinsinden iki adet değer bulunabilir. Bu iki değer elde edilen ikinci dereceden denklemin çözümü ile

$$t = n \pm \sqrt{n^2 - 2m} \qquad (4.63d)$$

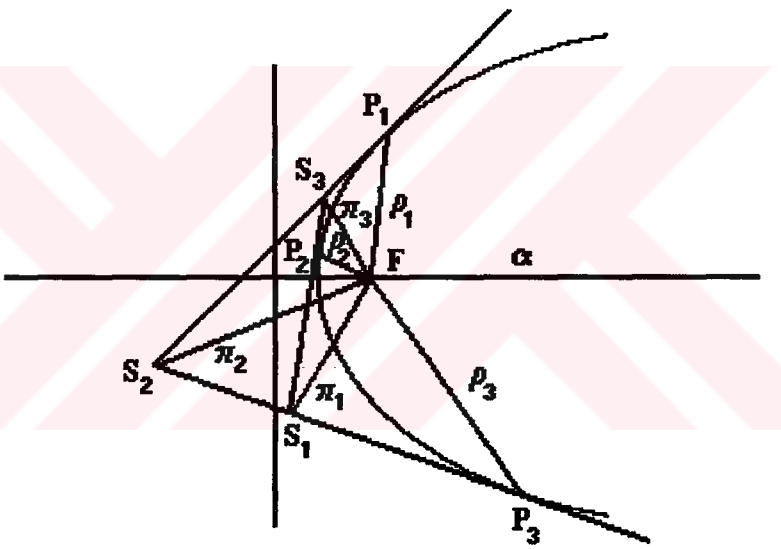
şeklinde elde edilir. Bu iki değer düzlem üzerindeki herhangi bir noktadan parabole iki adet teğet çizilebildiğini gösterir. Sadece $n^2 = 2m$ olduğu noktada t için tek bir değer bulunabilir ve dolayısı ile iki teğet çakışır. Bu durumda nokta parabol üzerindedir, ve bu nokta tepe noktasıdır. Bu nokta için 4.63a eşitliği yeniden yazılırsa parabol eşitliği yeniden bulunacaktır.

$$\rho = \frac{n^2}{2}\alpha + n\beta \qquad (4.63e)$$

Eğer $2m > n^2$ olursa bu durumda 4.63d eşitliğinde elde ettiğimiz kökler imajiner olacak, ve bu durum için noktamız parabol içinde bir nokta olacak ve dolayısı ile bir teğet çizilemeyecektir.

4.5.3 Bir Parabole Çizilen Kesişen Üç Teğet

Odak noktası başlangıç noktası olmak üzere, P_1, P_2 ve P_3 olarak seçilen üç adet parabol üzerindeki noktaya çizilen vektörler ρ_1, ρ_2, ve ρ_3 olsun. Bu üç teğetin birbirlerini kestikleri noktalar S_1, S_2, S_3 ve bu noktalara odak noktasından çizilen vektörler ise π_1, π_2, ve π_3 olsun. α ve β ise sırası ile parabolun ekseni ve doğrultmanı üzerinde birim vektörler olsun. Bu durum şekil 4.6 ile verilmiştir.



Şekil 4.6 Bir parabol ile kesişen üç teğet

Parabol eşitliği için 4.60c ile verdiğimiz eşitliği tekrar yazıp, $\rho^2 = -(\mathrm{T}\rho)^2$, ve $\mathrm{S}\alpha\beta = 0$ eşitliklerinden faydalanarak, teğetlerin parabol ile kesiştiği üç nokta için tensör değerlerini elde edelim.

$$\rho = \frac{1}{2p}(y^2 - p^2)\alpha + y\beta \qquad (4.64a)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\rho_1 &= \frac{1}{2p}(y_1^2 + p^2) \\ \mathrm{T}\rho_2 &= \frac{1}{2p}(y_2^2 + p^2) \\ \mathrm{T}\rho_3 &= \frac{1}{2p}(y_3^2 + p^2) \end{aligned} \qquad (4.64b)$$

Bir noktadaki teğet fonksiyonunu ise eşitlik 4.61 ile tanımlamıştık. Bu eşitliği kullanarak π_1 için şekilden de faydalanarak iki adet tanım yazabiliriz

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \rho_2 + \mathrm{P_2S_1} = \frac{1}{2p}(y_2^2 - p^2)\alpha + y_2\beta + z\left(\frac{y_2}{p}\alpha + \beta\right) \\ \pi_1 &= \rho_3 + \mathrm{P_3S_1} = \frac{1}{2p}(y_3^2 - p^2)\alpha + y_3\beta + w\left(\frac{y_3}{p}\alpha + \beta\right) \end{aligned} \qquad (4.64c)$$

α ve β bağımsız vektörler olduklarına göre *z* ve *w* için ikişer adet eşitliğimiz olacaktır. Bu eşitlikleri kullanarak

$$z = \frac{1}{2}(y_3 - y_2), \quad w = \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \qquad (4.64d)$$

elde edebiliriz. Aynı şekilde π_2 ve π_3 içinde teğetlerden faydalanarak aşağıdaki eşitlikleri

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2p}(y_3y_2 - p^2)\alpha + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\beta \\ \pi_2 &= \frac{1}{2p}(y_1y_3 - p^2)\alpha + \frac{1}{2}(y_3 + y_1)\beta \\ \pi_3 &= \frac{1}{2p}(y_2y_1 - p^2)\alpha + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\beta \end{aligned} \qquad (4.64e)$$

elde edebiliriz. Bu sonuçlardan faydalanarak π_1, π_2, ve π_3 vektörleri için tensör değerlerini hesaplayabiliriz. Elde edeceğimiz sonuçları eşitlik 4.64b ile karşılaştırdığımızda 4.64f eşitlikleri elde edilir.

$$(\mathrm{T}\pi_1)^2 = \frac{1}{4p^2}(y_2^2 + p^2)(y_3^2 + p^2) = \mathrm{T}\rho_2\mathrm{T}\rho_3$$
$$(\mathrm{T}\pi_2)^2 = \frac{1}{4p^2}(y_3^2 + p^2)(y_1^2 + p^2) = \mathrm{T}\rho_1\mathrm{T}\rho_3 \qquad (4.64f)$$
$$(\mathrm{T}\pi_3)^2 = \frac{1}{4p^2}(y_1^2 + p^2)(y_2^2 + p^2) = \mathrm{T}\rho_1\mathrm{T}\rho_2$$

Eşitlik 4.64e'den görülmektedir ki, iki teğetin kesiştikleri noktanın ordinatı, iki teğetin parabol ile temas ettikleri noktaların ordinatlarının aritmetik ortalamasıdır. Eşitlik 4.64f ise bize, odak noktasından iki teğetin kesişme noktalarına olan uzaklığın karesinin, odak noktasından teğetlerin parabole temas noktalarına olan uzaklıklarının çarpımı olduğunu göstermektedir.

Şimdi bazı özel durumları inceleyelim.

1. ρ_2 β'nın bir katı olursa :

$$\rho_2 = \frac{1}{2p}(y_2^2 - p^2)\alpha + y_2\beta = z\beta$$
$$\therefore \quad z = y_2 = \pm p \qquad (4.64g)$$

olarak elde edilir.

2. Eğer ρ_1 ρ_2'nin bir katı ise bu durumda ρ_2 - ρ_1 odak noktasından geçen bir kiriştir. $x\rho_2 = \rho_1$ yazılabileceğinden eşitlik 4.64a

$$x\left[\frac{1}{2p}(y_2^2 - p^2)\alpha + y_2\beta\right] = \frac{1}{2p}(y_1^2 - p^2)\alpha + y_1\beta$$
$$x = \frac{y_1^2 - p^2}{y_2^2 - p^2} = \frac{y_1}{y_2} \qquad (4.64h)$$

şeklinde yazılabilir. Elde ettiğimiz bu sonucu basitleştirirsek 4.64i eşitliğini elde ederiz.

$$y_1y_2 + p^2 = 0 \qquad (4.64i)$$

Odaktan geçen bir kirişin parabol üzerindeki noktalarından geçen teğetlerin kesişim noktasına çizilecek çizgi, kirişe dik olacaktır. Bunu kanıtlayabilmek amacı ile şekil 4.6'deki π_3 ve ρ_1 vektörünü ele alalım. Bunun için eşitlik 4.64a, ve eşitlik 4.64e kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} S\pi_3\rho_1 &= -\frac{1}{2p}(y_2y_1 - p^2)\frac{1}{2p}(y_1^2 - p^2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\beta \\ &= -\frac{1}{4p^2}(y_1^2 + p^2)(y_1y_2 + p^2) = 0 \end{aligned} \qquad (4.64j)$$

Odaktan geçen bir kirişin parabol üzerindeki noktalarından geçen teğetler de birbirlerine diktirler. Şekil 4.6 incelenirse bir teğet vektörü $\rho_1 - \pi_3$, ve diğeri $\rho_2 - \pi_3$ şeklinde olacaktır.

$$S(\rho_1 - \pi_3)(\rho_2 - \pi_3) = S\rho_1\rho_2 + \pi_3^2 = 0 \qquad (4.64k)$$

Odaktan geçen bir kirişin parabol üzerindeki noktalarından geçen teğetlerin kesişim noktası doğrultman üzerinde olacaktır. Eşitlik 4.64i'de elde ettiğimiz sonucu eşitlik 4.64e'de π_3 için elde ettiğimiz sonuç ile birleştirirsek

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{1}{2p}(y_1y_2 - p^2)\alpha + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\beta \\ &= -p\alpha + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\beta \end{aligned} \qquad (4.64l)$$

elde ederiz.

4.5.4 Elips

Bir düzlem üzerinde verilen iki adet noktaya olan uzaklıkların toplamının sabit olduğu noktaların oluşturduğu kapalı eğriye elips adı verilir. Elips bir düzlem eğrisi olduğu için tanımı $\rho = x\alpha + y\beta$ şeklinde verilebilir. Genel elips denklemi için

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (4.65a)$$

olduğuna göre

$$\rho = x\alpha + m^{1/2}(a^2 - x^2)^{1/2}\beta \qquad (4.65b)$$

yazılabilir. Bir elipsin iki adet odak noktası bulunur. Ancak elipsi tek değişken skalar parametre ile çizmek için elipsin orta noktası merkezi olarak kabul edilir. Bu merkeze odak noktalarının dışarıda bir nokta olduğu için dışmerkez adı verilir. Eğer elipsi çizmek için kullandığımız açı parametresi ϕ ise genel elips eşitliği eşitlik 4.66 ile verilir.

$$\rho = \cos\phi \cdot \alpha + \sin\phi \cdot \beta \qquad (4.66)$$

Bu eşitlikte α ve β eksenler yönünde alınan herhangi iki bağımsız vektördür. Elipsin herhangi bir noktasındaki teğetini ise eşitlik 4.65b'nin diferansiyelini alarak bulabiliriz.

$$\begin{aligned} d\rho &= \alpha - m^{1/2}(a^2 - x^2)^{-1/2} x\beta \\ &= \alpha - \frac{m}{\sqrt{m}} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \beta = \alpha - \frac{mx}{y}\beta \\ &= X(y\alpha - mx\beta) \end{aligned} \qquad (4.67a)$$

$$\pi = x\alpha + y\beta + X(y\alpha - mx\beta) \qquad (4.67b)$$

Eşitlik 4.66'nin diferansiyelini alırsak aynı teğet denklemini

$$d\rho = -\sin\phi \cdot \alpha + \cos\phi \cdot \beta \qquad (4.68a)$$

$$\pi = \cos\phi \cdot \alpha + \sin\phi \cdot \beta + x(-\sin\phi \cdot \alpha + \cos\phi \cdot \beta) \qquad (4.68b)$$

olarak elde ederiz.

4.5.5 Hiperbol

Bir düzlem üzerinde verilen iki adet noktaya olan uzaklıkların farklarının sabit olduğu noktaların oluşturduğu eğriye hiperbol adı verilir. Çizilen hiperbol eğrisine sonsuz noktasında teğet olarak çizilebilen ve birbirini merkezde kesen iki adet düz çizgi bulunabilir. Bu iki çizgiye asimptot adı verilir.

α ve β vektörleri asimptotlara paralel iki adet birim vektör olsun. Bu durumda hiperbol eşitliği

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = m \qquad (4.69a)$$

olmak üzere

$$\rho = x\alpha + \frac{m}{x}\beta \qquad (4.69b)$$

ile verilir. α ve β asimptotlara paralel herhangi iki vektör ise, bu durumda tek değişken skalar fonksiyonu olarak bir hiperbol tanımı eşitlik 4.70 ile verilir.

$$\rho = t\alpha + \frac{\beta}{t} \qquad (4.70)$$

Elips gibi hiperbollerde dışmerkezlidir. Bu merkezden bir açı ile hiperbolü çizmek istersek eşitlik 4.71 elde edilir.

$$\rho = \sec\phi \cdot \alpha + \tan\phi \cdot \beta \qquad (4.71)$$

Eşitlik 4.70'den faydalanarak teğet vektörünü eşitlik 4.72'de görüldüğü gibi elde ederiz.

$$\rho = t\alpha + \frac{\beta}{t} + x\left(t\alpha - \frac{\beta}{t}\right) \qquad (4.72)$$

4.6 QUATERNİONLAR İLE LİNEER EŞİTLİKLER

Birinci dereceden bir denklemin, bir lineer eşitliğin, quaternionlar ile ifadesi eşitlik 4.73a ile verilmiştir. Bu ifadede q bilinmeyen quaternionu, $a, b, a', b', \ldots, c$ işlem için bize verilmiş quaternionları göstermektedir.

$$aqb + a'qb' + a''qb'' + \cdots = c$$
$$\sum aqb = c \qquad (4.73a)$$

Eşitliğin tüm elemanları quaternionlardan oluştuğuna göre, toplama işlemindeki her bir elemanı skalar ve vektörel kısımlarına ayırabiliriz. Böylelikle işlemi iki ayrı toplama işlemi halinde yapabiliriz.

$$\sum \mathrm{S}aqb + \sum \mathrm{V}aqb = \mathrm{S}c + \mathrm{V}c \qquad (4.74a)$$
$$\sum \mathrm{S}aqb = \mathrm{S}c \qquad (4.74b)$$
$$\sum \mathrm{V}aqb = \mathrm{V}c \qquad (4.74c)$$

$\mathrm{S}aqb$ için q quaternionunun bulunması için $\mathrm{S}q$ ve $\mathrm{V}q$ değerlerine bağımlı ve diğer bilinenler ile ifade edilebilir eşitlikler yazmamız gereklidir. Bunun için ilk eşitliği eşitlik 4.74b'yi kullanarak elde edebiliriz.

$$\mathrm{S}aqb = \mathrm{S}qba = \mathrm{S}q\,\mathrm{S}ba + \mathrm{S}\cdot \mathrm{V}q\,\mathrm{V}ba \qquad (4.75a)$$

Aynı şekilde $\mathrm{V}aqb$ içinde bir eşitlik elde etmemiz gerekir. Bu eşitliğin elde edilebilmesi için 4.75b ile verilen hesaplamalar yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}aqb &= \mathrm{V}(\mathrm{S}a + \mathrm{V}a)(\mathrm{S}q + \mathrm{V}q)(\mathrm{S}b + \mathrm{V}b) \\
&= \mathrm{V}\cdot \mathrm{S}q(\mathrm{S}a + \mathrm{V}a)(\mathrm{S}b + \mathrm{V}b) \\
&\quad + \mathrm{V}(\mathrm{S}a\,\mathrm{V}q\,\mathrm{S}b + \mathrm{S}a\,\mathrm{V}q\,\mathrm{V}b + \mathrm{V}a\,\mathrm{V}q\,\mathrm{S}b + \mathrm{V}a\,\mathrm{V}q\,\mathrm{V}b) \\
&= \mathrm{S}q\,\mathrm{V}ab + \mathrm{V}(\mathrm{S}a\,\mathrm{S}b - \mathrm{S}a\,\mathrm{V}b + \mathrm{S}b\,\mathrm{V}a)\,\mathrm{V}q \\
&\quad + \mathrm{V}\cdot \mathrm{V}a\,\mathrm{V}q\,\mathrm{V}b + \mathrm{V}\cdot \mathrm{V}a\,\mathrm{V}b\,\mathrm{V}q - \mathrm{V}\cdot \mathrm{V}a\,\mathrm{V}b\,\mathrm{V}q \\
&= \mathrm{S}q\,\mathrm{V}ab + \mathrm{V}(\mathrm{S}a\,\mathrm{S}b - \mathrm{S}a\,\mathrm{V}b + \mathrm{S}b\,\mathrm{V}a - \mathrm{V}a\,\mathrm{V}b)\,\mathrm{V}q \\
&\quad + 2\,\mathrm{V}a\,\mathrm{S}\cdot \mathrm{V}q\,\mathrm{V}b \\
&= \mathrm{S}q\,\mathrm{V}ab + \mathrm{V}\cdot a(\mathrm{K}b)\,\mathrm{V}q + 2\,\mathrm{V}a\,\mathrm{S}\cdot \mathrm{V}q\,\mathrm{V}b
\end{aligned} \qquad (4.75b)$$

Elde ettiğimiz bu sonuçlar ile 4.74b ve 4.74c eşitliklerini birleştirirsek eşitlik 4.76a yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}c &= \mathrm{S}q \sum \mathrm{S}ba + \mathrm{S}\cdot \mathrm{V}q \sum \mathrm{V}ba \\
\mathrm{V}c &= \mathrm{S}q \sum \mathrm{V}ab + \sum \mathrm{V}\cdot a(\mathrm{K}b)\mathrm{V}q + 2\sum \mathrm{V}a\mathrm{S}\cdot \mathrm{V}q\mathrm{V}b
\end{aligned} \qquad (4.76a)$$

Bu eşitlikte, eğer

$$\begin{gathered}\sum \mathrm{S}ab = d, \quad \sum \mathrm{V}ab = \delta, \quad \sum \mathrm{V}ba = \delta', \\ \mathrm{S}q = w, \quad \mathrm{V}q = \rho\end{gathered} \tag{4.76b}$$

olarak alınırsa, eşitlik 4.76c yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathrm{S}c &= wd + \mathrm{S}\rho\delta' \\ \mathrm{V}c &= w\delta + \sum \mathrm{V}\cdot a(\mathrm{K}b)\rho + 2\sum \mathrm{V}a\mathrm{S}\cdot \rho \mathrm{V}b\end{aligned} \tag{4.76c}$$

Elde etmemiz gereken w ve ρ değerleridir. Bunun için ilk önce eşitlik 4.76c'deki w değerleri elenir, ve eşitlik 4.76d elde edilir.

$$\mathrm{V}c\cdot d - \mathrm{S}c\cdot\delta = d\sum \mathrm{V}a(\mathrm{K}b)\rho - \delta\mathrm{S}\rho\delta' + d2\sum \mathrm{V}a\mathrm{S}\cdot\rho\mathrm{V}b \tag{4.76d}$$

V ve $\sum$ değişme özelliğine sahip olduğuna göre, $\gamma, \alpha, \alpha', \ldots, \beta, \beta', \ldots$ bilinen vektörler, r bilinen bir quaternion, ve ρ bilinmeyen bir vektör olmak üzere eşitlik yazılabilir.

$$\mathrm{V}r\rho + \sum \beta\,\mathrm{S}a\rho = \phi\rho = \gamma \tag{4.76e}$$

Bu eşitlikteki $\phi\rho$ ρ'nun lineer bir fonksiyonudur. Bu durumda eğer bir $\phi^{-1}\rho$ fonksiyonu tanımlarsak ρ vektörünü elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\phi\rho) &= \rho \\ \therefore \quad \rho &= \phi^{-1}\gamma\end{aligned} \tag{4.76f}$$

ϕ fonkiyonu lineer bir fonksiyon olduğundan dağılma özelliğine sahiptir. Bu özellik kullanılarak eşitlikler 4.77a, 4.77b, ve 4.77c yazılabilir.

$$\phi(\rho + \rho' + \cdots) = \phi\rho + \phi\rho' + \ldots \tag{4.77a}$$

$$\phi a\rho = a\phi\rho \tag{4.77b}$$

$$d\phi\rho = \phi d\rho \qquad (4.77c)$$

Eşitlik 4.3 ile tanımladığımız $\phi\rho$ fonksiyonuna, σ herhangi bir vektör olmak üzere, $S\cdot\sigma\times$ işlemini uygulayalım.

$$S\sigma\phi\rho = \sum S(\sigma\beta\, S\alpha\rho) + S\sigma(Vr\rho) \qquad (4.78a)$$

$$S(\sigma\beta\, S\alpha\rho) = S\sigma\beta\, S\alpha\rho = S\rho\alpha S\beta\sigma = S(\rho\alpha\, S\beta\sigma) \qquad (4.78b)$$

$$\begin{aligned} S(\sigma\, Vr\rho) &= S\left[\sigma\, V(Sr + Vr)\rho\right] = Sr\, S\sigma\rho + S\sigma(Vr)\rho \\ &= Sr\, S\rho\sigma - S\rho(Vr)\sigma = S\left[\rho V(Kr)\sigma\right] \end{aligned} \qquad (4.78c)$$

$$S\sigma\phi\rho = \phi'\sigma = \sum \alpha\, S\beta\sigma + V(Kr)\sigma \qquad (4.78d)$$

Bu durumda ϕ'den bağımsız ve ikinci bir ϕ' lineer fonksiyonu elde ederiz. Eşitlik 4.76e ile eşitlik 4.78d karşılaştırılacak olursa aradaki benzerlik görülebilir. Bu durum için eşitlik 4.78e yazılabilir. Bu eşitliği sağlayan lineer fonksiyonlara ise eşlenik fonksiyonlar adı verilir.

$$S(\sigma\phi\rho) = S(\rho\phi'\sigma) \qquad (4.78e)$$

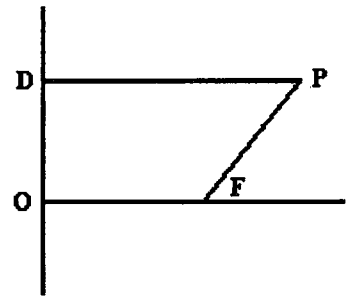
4.6.1 Konik Bölgeler İçin Genel Eşitlikler

Boscovich tanımıyla uyumlu olarak, bir konik bölge, sabit bir nokta ve sabit bir çizgiden uzaklıklarının oranı sabit olan noktaların uzaydaki geometrik yeri olarak tanımlanır. Şekil 4.7'de görüldüğü üzere F sabit odak noktası, ve DO sabit çizgi (doğrultman) olsun. P ise $e = FP/DP$ sabit oran olacak şekilde seçilmiş bir nokta olsun. $\alpha = FO$, $y\gamma = OD$, $x\alpha = PD$, ve $\rho = FP$ olarak gösterelim.

Tanım gereği eşitlik 4.79a

$$\begin{aligned} e &= T\rho\,/T(PD) \\ \rho^2 &= e^2x^2\alpha^2 \end{aligned} \qquad (4.79a)$$

yazılabilir.



Şekil 4.7 Konik bölgelere ilişkin genel tanım

Aynı zamanda şekilden 4.79b eşitliği de yazılabilir.

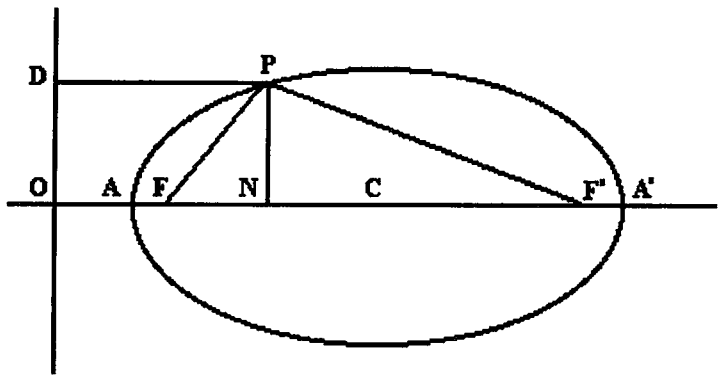
$$\rho + x\alpha = \alpha + y\gamma \qquad (4.79b)$$

$S\alpha\gamma = 0$ olduğundan $S\cdot\alpha\times$ işlemini eşitlik 4.79b üzerinde uygularsak eşitlik 4.79c, ve eşitlik 4.79a ile birleştirirsek 4.79d elde edilir.

$$\begin{aligned} &S\alpha\rho + x\alpha^2 = \alpha^2 \\ &x^2\alpha^4 = (\alpha^2 - S\alpha\rho)^2 \end{aligned} \qquad (4.79c)$$

$$\alpha^2\rho^2 = e^2(\alpha^2 - S\alpha\rho) \qquad (4.79d)$$

Bu eşitlikte e değerinin 1'den küçük, büyük veya eşit olmasına göre, elde edilen düzlem eğrisi elips, hiperbol veya parabol olacaktır.



Şekil 4.8 Elips, hiperbol ve parabol tanımı

Elips için şekil 4.8'de görülen A ve A' noktaları için $\rho = x\alpha$ yazarsak sırası ile x değerleri için

$$x = \frac{e}{1+e} \quad \text{ve} \quad x = -\frac{e}{1-e} \tag{4.80a}$$

elde edilir. Bu durumda FA ve FA' için

$$\mathrm{FA} = \frac{e}{1+e}\mathrm{FO} \quad \text{ve} \quad \mathrm{FA}' = \frac{e}{1-e}\mathrm{FO} \tag{4.80b}$$

yazılabilir. Bu sebepten dolayı

$$\mathrm{AA}' = 2a = \frac{2e}{1-e^2}\mathrm{FO} \tag{4.80c}$$

olacaktır. Bu durumda odak noktasının yeri ise eşitlik 4.80d ile verilir.

$$\mathrm{FO} = \frac{1-e^2}{e}a \tag{4.80d}$$

Bu sonuçla elipsin dışmerkezi, A ve A' noktalarının yeri, odağın dışmerkezden uzaklığı aşağıdaki eşitlikler ile elde edilebilir.

$$\mathrm{FA} = a(1-e) \tag{4.80e}$$

$$\mathrm{FA}' = a(1+e) \tag{4.80f}$$

$$\mathrm{CF} = ae \tag{4.80g}$$

$$\mathrm{AO} = \frac{1-e}{e}a \tag{4.80h}$$

$$\mathrm{CO} = \frac{a}{e} \tag{4.80i}$$

Sistemin merkezini eğrinin merkezine taşıyalım. Bu durumda $\alpha' = \mathrm{CF}$, $\rho' = \mathrm{CP}$ olarak alırsak $\rho = \rho' - \alpha'$, $\alpha' = \left(\frac{e}{1-e^2} - \frac{e}{1+e^2}\right)\alpha$ olarak yazılabilir. α için ise $\alpha = \frac{1-e^2}{e^2}\alpha'$ yazılabilir. Bu değerleri eşitlik 4.79d'de yerlerine yazarsak

$$\alpha^2\rho'^2 + (\mathrm{S}\alpha'\rho')^2 = -a^4(1-e^2) \qquad (4.81a)$$

veya C başlangıç noktası alınmak üzere üs işaretlerini de kaldırarak

$$\alpha^2\rho^2 + (\mathrm{S}\alpha\rho)^2 = -a^4(1-e^2) \qquad (4.81b)$$

elde ederiz. Bu eşitlik bize başlangıç noktası elipsin merkezinde olan bir elipsin ifadesini vermektedir.

Aynı ifadeyi bir başka yöntemle daha elde etmek için $\alpha = \mathrm{CF}$, ve $\rho = \mathrm{CP}$ olarak ele alalım. F ve F' noktalarımız ise odak noktalarımız olsun. Bu durumda

$$\mathrm{FP} = \rho - \alpha, \quad \mathrm{F'P} = \rho + \alpha \qquad (4.82a)$$

ve tanım gereği

$$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2a \qquad (4.82b)$$

$$\mathrm{T}(\rho - \alpha) + \mathrm{T}(\rho + \alpha) = 2a \qquad (4.82c)$$

eşitlikleri yazılabilir. Eşitlik 4.82c'den faydalanarak üst üste iki defa kare alırsak

$$\sqrt{-(\rho-\alpha)^2} = 2\alpha - \sqrt{-(\rho+\alpha)^2} \qquad (4.82d)$$

$$-\rho^2 + 2\mathrm{S}\rho\alpha - \alpha^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{-(\rho+\alpha)^2} - \rho^2 - 2\mathrm{S}\rho\alpha - \alpha^2$$
$$\mathrm{S}\rho\alpha - \alpha^2 = -\alpha\sqrt{-(\rho+\alpha)^2} \qquad (4.82e)$$

$$(\mathrm{S}\rho\alpha)^2 - 2a^2\,\mathrm{S}\rho\alpha + a^4 = -a^2(\rho^2 + 2\mathrm{S}\rho\alpha + \alpha^2)$$
$$a^2\rho^2 + (\mathrm{S}\rho\alpha)^2 = -a^4 - a^2\alpha^2 \qquad (4.82f)$$

eşitlikleri elde edilir. Bulduğumuz bu son ifadeyi sadeleştirirsek

$$a^2\rho^2+(\mathrm{S}\rho\alpha)^2=-a^4(1-e^2) \qquad (4.82g)$$

elde ederiz ki bu bize 4.81b eşitliği ile aynı sonucu vermektedir.

4.6.2 Elips

Eşitlik 4.82g ile verilen elips tanımı eşitlik 4.83 ile yeniden yazılabilir.

$$\mathrm{S}\cdot\rho\left[-\frac{a^2\rho+\alpha\mathrm{S}\alpha\rho}{a^4(1-e^2)}\right]=1 \qquad (4.83)$$

Bu eşitlikte eğer

$$-\frac{a^2\rho+\alpha\mathrm{S}\alpha\rho}{a^4(1-e^2)}=\phi\rho \qquad (4.84a)$$

olarak bir $\phi\rho$ fonksiyonu tanımlarsak bu durumda

$$\mathrm{S}\rho\phi\rho=1 \qquad (4.84b)$$

elde edilir ki bu bize yeni elips eşitliğimizi verecektir.

Eğer $\phi\rho$ fonksiyonunun alacağı değerler incelenirse ρ bir eksen üzerindeyken ρ ve $\phi\rho$ çakışır. σ bir vektör olmak üzere $\phi\rho$ fonksiyonu üzerinde $\mathrm{S}\cdot\sigma\times$ işlemini gerçekleştirirsek eşitlik 4.11 elde edilir.

$$\mathrm{S}\sigma\phi\rho=-\frac{a^2\,\mathrm{S}\sigma\rho+\mathrm{S}\sigma\alpha\mathrm{S}\alpha\rho}{a^4(1-e^2)} \qquad (4.85a)$$

Eğer $\phi\sigma$ üzerinde $\mathrm{S}\cdot\rho\times$ işlemini gerçekleştirirsek bu durumda

$$\mathrm{S}\rho\phi\sigma=-\frac{a^2\,\mathrm{S}\rho\sigma+\mathrm{S}\rho\alpha\,\mathrm{S}\alpha\sigma}{a^4(1-e^2)} \qquad (4.85b)$$

eşitliği geçerli olduğunda görülmektedir ki ϕ lineer fonksiyonu kendisine eşlenik bir fonksiyondur. Bu durum eşitlik 4.20e ile verilmiştir.

$$\mathrm{S}\rho\phi\sigma = \mathrm{S}\sigma\phi\rho \qquad (4.85c)$$

Eşitlik 4.84b ile elde ettiğimiz sonucun diferansiyelini alırsak

$$\mathrm{S}d\rho\phi\rho + \mathrm{S}\rho\, d\phi\rho = 0 \qquad (4.86a)$$

Bu toplamı elde etmek için dağılma özelliğini ve eşitlik 4.20e'yi kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\mathrm{S}d\rho\phi\rho + \mathrm{S}\rho\phi\, d\rho = 0 \qquad (4.86b)$$

$$\mathrm{S}\rho\phi\, d\rho + \mathrm{S}\rho\phi\, d\rho = 2\mathrm{S}\rho\phi\, d\rho = 0 \qquad (4.86c)$$

Bu eşitlik bize elips üzerinde bir noktadaki teğet vektörünü verecektir. π teğet çizgisi üzerindeki herhangi bir noktayı göstersin. ρ vektörü $\phi(\pi-\rho)$ vektörüne dik olacağından eşitlik 4.87a yazılabilir.

$$\pi = \rho + xd\rho \qquad (4.87a)$$

Bu durumda teğet eşitliği için

$$\mathrm{S}\rho\phi(\pi-\rho) = \mathrm{S}(\pi-\rho)\phi\rho = 0 \qquad (4.87b)$$

$$\mathrm{S}\pi\phi\rho = \mathrm{S}\rho\phi\rho = \mathrm{S}\rho\phi\pi = 1 \qquad (4.87c)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu sonuçla diyebiliriz ki $\phi\rho$ temas noktasındaki normal vektörüne paralel bir vektördür ve ρ'nun eksenle çakıştığı noktada ise ρ vektörüne paraleldir.

Elde ettiğimiz bu eşitlikleri kartezyen formlarına çevirelim. Bunun için CA boyunca bir i birim vektörü ve bu vektöre dik bir j birim vektörü tanımlayalım. P noktasının koordinatları x ve y ise bu durumda

$$\rho = xi + yj \qquad (4.88a)$$

ve $\alpha = \mathrm{CF}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\phi\rho &= -\frac{a^2\rho + \alpha \mathrm{S}\alpha\rho}{a^4(1-e^2)} = -\frac{a^2(xi+yj) + aei\,\mathrm{S}\cdot aei(xi+yj)}{a^4(1-e^2)} \\ &= -\frac{a^2 xi(1-e^2) + a^2 yj}{a^4(1-e^2)}\end{aligned} \qquad (4.88b)$$

yazılabilir. $1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ olduğundan

$$\phi\rho = -\left(\frac{xi}{a^2} + \frac{yj}{b^2}\right) \qquad (4.88c)$$

eşitliği elde edilebilir.

$$\mathrm{S}\rho\phi\rho = 1 = -\mathrm{S}\cdot(xi+yj)\left(\frac{xi}{a^2} + \frac{yj}{b^2}\right) \qquad (4.88d)$$

Sonuç olarak elipsin kartezyen formu için eşitlik 4.88e yazılabilir.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (4.88e)$$

Elipsin bir noktasındaki teğetin hesaplanması için ise, x' ve y' teğet üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları olmak üzere teğet çizgisini π olarak gösterirsek

$$\pi = x'i + y'j \qquad (4.89a)$$

$$\therefore\ \mathrm{S}\pi\phi\rho = 1 = -\mathrm{S}(x'i + y'j)\left(\frac{xi}{a^2} + \frac{yj}{b^2}\right) \qquad (4.89b)$$

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2 \qquad (4.89c)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler $e > 1$ olduğu durumda $1 - e^2 = -\frac{b^2}{a^2}$ alınarak eşitlik 4.90a ve eşitlik 4.90b ile verildiği gibi elde edilebilir.

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (4.90a)$$

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2 \qquad (4.90b)$$

4.6.3 Parabol

Eşitlik 4.79d ile verilen eşitlikte $e = 1$ konulursa 4.91 ile verilen parabol eşitliği elde edilir.

$$\alpha^2\rho^2 = (\alpha^2 - \mathrm{S}\alpha\rho)^2 \qquad (4.91)$$

Bu eşitlik karesi alınan parantez açılmak sureti ile içinde ρ bulunan terimlerin eşitliğin bir tarafına alınması sonucunda eşitlik 4.92a ile verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{\rho^2 + 2\mathrm{S}\alpha\rho - \alpha^{-2}(\mathrm{S}\alpha\rho)^2}{\alpha^2} = 1 \qquad (4.92a)$$

Bu eşitlikteki ρ^2 ifadesi zaten bir skalar olduğuna göre

$$\mathrm{S}\rho\left[\frac{\rho + 2\alpha - \alpha^{-2}\alpha\,\mathrm{S}\alpha\rho}{\alpha^2}\right] = 1 \qquad (4.92b)$$

ifadesi yazılabilir. Eğer

$$\phi\rho = \frac{\rho - \alpha^{-1}\mathrm{S}\alpha\rho}{\alpha^2} \qquad (4.92c)$$

olarak alınırsa

$$\mathrm{S}\rho(\phi\rho + 2\alpha^{-1}) = 1 \qquad (4.92d)$$

eşitliği elde edilir. Elips için olduğu gibi $\phi\rho$'nun 4.92c eşitliği ile tanımlı değeri için

$$\mathrm{S}\sigma\phi\rho = \mathrm{S}\rho\phi\sigma \qquad (4.93)$$

eşitliği yazılabilir. $\phi\rho$ üzerinde $\mathrm{S}\cdot\alpha\times$ işlemi gerçekleştirilirse

$$\mathrm{S}\alpha\phi\rho = 0 \qquad (4.94)$$

sonucu elde edilir. Bu bize $\phi\rho$ 'nun eksene dik olduğunu gösterecektir. $\phi\rho$ üzerinde $\mathrm{S}\cdot\rho\times$ işlemi gerçekleştirilirse bu durumda eşitlik 4.95 elde edilecektir.

$$\mathrm{S}\rho\phi\rho = \frac{\rho^3 - \alpha^{-3}(\mathrm{S}\alpha\rho)}{\alpha^2} = \alpha^2(\phi\rho)^2 \qquad (4.95)$$

Eşitlik 4.92d'nin diferansiyelini alırsak teğet vektörü için

$$2\mathrm{S}\rho\phi d\rho + 2\mathrm{S}d\rho\alpha^{-1} = 0 \qquad (4.96a)$$

eşitliğini elde ederiz. Teğet üzerinde herhangi bir noktayı veren genel ifade

$$\pi = \rho + xd\rho \qquad (4.97a)$$

olduğuna göre $d\rho$ yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathrm{S}\rho\phi(\pi - \rho) + \mathrm{S}(\pi - \rho)\alpha^{-1} = 0 \qquad (4.98a)$$

$$\mathrm{S}(\rho\phi\pi - \rho\phi\rho + \pi\alpha^{-1} - \rho\alpha^{-1}) = 0 \qquad (4.98b)$$

elde edilir. Bu sonuçları eşitlik 4.92d ile birleştirirsek bu durumda

$$\mathrm{S}\pi\phi\rho - 1 + 2\mathrm{S}\rho\alpha^{-1} + \mathrm{S}\pi\alpha^{-1} - \mathrm{S}\rho\alpha^{-1} = 0 \qquad (4.98c)$$

$$\mathrm{S}\pi(\phi\rho + \alpha^{-1}) + \mathrm{S}\rho\alpha^{-1} = 1 \qquad (4.98d)$$

elde ederiz.

Eşitlik 4.98b'den

$$S(\pi-\rho)(\phi\rho+\alpha^{-1})=0 \qquad (4.99a)$$

yazabileceğimizden $\pi-\rho$ teğet doğrultusunda bir vektör olduğuna göre $\phi\rho+\alpha^{-1}$ vektörü bize normalin doğrultusunu verir.

Eğer σ normal vektörünün herhangi bir noktasına çizilen bir vektör ise, normalin eşitliği

$$\sigma=\rho+x(\phi\rho+\alpha^{-1}) \qquad (4.100)$$

ile verilebilir.

Eşitlik 4.92d ile elde ettiğimiz sonucun kartezyen formunu yazmamız gerekirse $\rho=xi+yj$, ve $\alpha=FO=-pi$ değerlerini yerlerine yazarak 4.101a, 4.101b ve 4.101c eşitlikleri elde edilir.

$$\phi\rho=\frac{xi+yj-\frac{xpi}{p}}{-p^2}=-\frac{yj}{p^2} \qquad (4.101a)$$

$$\frac{y^2}{p^2}-\frac{2x}{p}=1 \qquad (4.101b)$$

$$y^2=2px+p^2 \qquad (4.101c)$$

BÖLÜM 5

QUATERNİONLARIN BİLGİSAYARDA GRAFİKTE KULLANIMI

Quaternionlar, bilgisayarda grafik alanında özellikle 1980'lerin ikinci yarısında ön plana çıkmıştır. Önceleri döndürme ve aydınlatma gibi konularda kullanılan quaternionlar, daha sonraları animasyonun her konusunda kaşımıza çıkmaya başlamıştır. Bilgisayarda grafiğin en temel amaçlarından biri olan hayattaki cisimlerin bilgisayar ortamında tanımlanıp canlandırılması olayının her adımında, farklı zamanlarda çalışmalar görmek mümkündür.

Bu bölümde üç boyutta noktalar matrisi ile modellenmiş bir cismin quaternionlar yardımı ile daha kolay ve hızlı nasıl döndürülebileceği, sanal gerçeklikte quaternionların hareketi yumuşatmak ve gerçek harekete benzetmek amacı ile nasıl kullanılabileceği gibi konuların yanısıra, bugün kadar pek sıklıkla rastlamadığımız cismin quaternionlar ile modellenmesi, ile projeksiyon aşamasında da quaternionların kullanılması durumundaki avantaj ve dezavantajlar incelenmiş, ve bu konuda bir sonuca varılmıştır. Ancak bu konulardan önce bilgisayar ile animasyonun her adımında yapılan işlemlerin kısa bir tanıtımı verilmektedir.

5.1 TEMEL BİLGİLER

Bilgisayarda grafiğin en temel amacı olan animasyon için, cismin uzayda modellenmesi, üzerinde hareketin tanımlanması ve isteniyorsa aydınlatma gibi diğer işlemlerden geçirilip bilgisayar ekranında görüntü halinde gösterilmesi gerekmektedir. Şimdi animasyonun uygulama aşamasında, atılması gereken her adımı tanımlayalım.

5.1.1 MODELLEME

Herhangi bir görüntüyü bilgisayar ortamında oluşturmak ve üzerinde işlem (döndürme, vs.) için o görüntünün, yani sahnenin, modelinin çıkarılması gereklidir. Bu sayede, görüntüyü hareketli hale getirebiliriz.

Bir sahnenin modellenebilmesi için o sahnede yer alan tüm nesnelerin matemetiksel olarak ifade edilebilmesi gerekir. Bunun için her objenin her yüzeyi poligonlarla, dörtgenlerle veya benzeri matemetiksel yüzey fonksiyonları ile tanıtılır ve bu bilgiler sahnenin uzayda kapladığı hacimi tanımlar.

Gerçek dünyada var olan üç boyutlu bir cisim matematiksel olarak *dünya koordinatları* adı verilen *xyz* eksenleri üzerinden tanımlanır. Cisimlerin gerçek görüntüsünü ekranda oluşturabilmek için cismin uzaydaki tüm hatları ile, *xyz* dünya koordinatları üzerinden, tanımlanmış olması gerekmektedir. Bilgisayarda grafikte, cismi bilgisayar ortamında tanımlayan noktalar ve noktaların birleştiği çizgiler kullanılır. Bu nokta ve çizgiler üzerinden cisim ile ilgili tüm ölçekleme, döndürme, dönüştürme ve nesnenin belli bir yönden görüntüsü oluşturma işlemleri gerçeklenebilir. Tüm bunları hesaplarken grafik fonksiyonlarından yararlanılır.

Üç boyutlu cisimlerin şeklini görüntüleyebilmek için o cismin şeklini çok iyi tanımlamak gerekir. Üç boyutlu cisimler üzerinde yapılmak istenen grafik fonksiyonları, bu şeklin doğru bir sentezi ile doğrudan ilişkilidir. Öteleme, döndürme, aynalama, ölçekleme gibi temel grafik işlemleri dönüşüm matrisi yardımı ile yapılabilir[4].

Üç boyutlu homojen koordinatlar için genelleştirilmiş 4x4 boyutunda dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\left[\begin{array}{c|c} & 3 \\ 3\times 3 & \times \\ & 1 \\ \hline 1\times 3 & 1\times 1 \end{array}\right] \qquad (5.1)$$

Yukarıda verilen matrisin sol üst 3x3 lük alt matrisi ölçekleme, aynalama, döndürme gibi dönüşümleri üretir. Sol alt 1x3 boyundaki alt matris ötelemeyi, üst sol 3x1 lik alt matris perspektif dönüşümü sağlar. Son olarak da solda yer alan 1x1 lik alt matris genel ölçeklemeyi sağlar.

Genel 4x4 lük dönüşümün köşegen terimleri lokal ve genel ölçeklemeyi sağlar. Verilen ölçek değerine göre cismin boyu küçülür veya büyür.

Döndürme işlemi ile cisim *xyz* ekseni etrafında istenen yönde ve açıda döndürülür. Örneğin bir makina modellemesinde, cismin her yüzeyi görülmek istendiğinde, cisim döndürülür.

Üç boyutlu cisimleri döndürdüğümüzde sonuçta oluşan cismin istenen şekli veremediği durumlarla karşı karşıya kalabiliriz. Bu gibi durumlarda sadece döndürmek yeterli olmaz. Cismi aynalamamız gerekebilir. Aynalama yapılan düzlem haricinde kalan koordinatların işaretleri tersine çevirilir. Cisme hareket vermek için pozisyonunu değiştirmek amaçlı cismi belirli bir yönde ötelememiz de gerekebilir. Bu durumda da yine dönüşüm matrisimiz kullanılabilmektedir.

5.1.2 Aydınlatma ve Gerçeğe Benzetme

Yapılan tüm bu işlemlerin ana hedefi, tabii ki gerçekçi bir sonuç görüntünün elde edilebilmesidir. Bunun için görüntüde yer alan tüm nesneler doku, yüzey, parlaklık, aydınlık gibi parametreler açısından incelenir ve buna göre çeşitli grafik işlemlerinden geçirilir. En son olarak da, bilgisayar ekranına uyarlanır.

Nesnelerin görünüşünün iyileştirilmesi için bütün bu özelliklerin (doku, renk, vs.) eklenmesine *gerçeğe benzetme (rendering)* adı verilir. Bir nesnenin tam dış görünüşünü yansıtmak için aydınlatma modelleri kullanılır ve cisimler renklendirilir. Gerçeğe benzetme için iyi ve gerçekçi bir aydınlatma modelinin oluşturulması gereklidir. En önemli noktalardan birisi ise, ortam içinde diğer cisimlerden gelen aydınlatma miktarıdır. Birçok aydınlatma modeli bunu tanımlayabilmek için sabit bir ortam ışık değerini gözönüne alır.

Aydınlatma modelleri arasında en çok kullanılan yöntemler : ışın izleme (ray tracing) ve ışınetkinliktir (radiosity). Işın izleme yöntemindeki esas prensip ışık kaynağından yollanan ışınların izlenmesidir. Bakış noktasından sahneye doğru bir ışın gönderilir ve o ışının izlediği yol üzerindeki diğer nesneler ile kesişimi bulunur. Işınetkinlikte ise, sahnede yer alan cisimler alt parçalara ayrılır ve her parçanın diğer parçalara birer ışık kaynağı gibi davranabildiği varsayılmaktadır. Ayrıca, ışınetkinlikte ortam içi yansımalar cisimlerin alt parçaları cinsinden hesaplanır, ve sabit bir değer olarak alınmaz.

5.1.3 Bilgisayarda Görüntüleme

Bilgisayarda grafikte en önemli konulardan biri de, oluşturulan cisimlerin ekranda görüntüleyebilmektir. Bilgisayarlarda görüntünün elde edileceği cihazların pek çoğu (ekran, yazıcı, çizici) iki boyutlu yapıdadır. Ancak, üç boyutlu bir görüntü oluşturulmak istenirse, dünya ve cihaz koordinatları arasındaki boyut farkı iki boyut üzerinde üç boyutlu görüntülemeyi sağlamayı gerektirir. Bu işlevi gerçekleyen sistemlere de genel olarak görüntüleme sistemleri adı verilir.

Görüntüleme sistemleri bilgisayarda grafik sistemlerinin en son safhasında yer almaktadır ve oluşturulan nesne ya da sahnelerin izleyiciye iletilmesini sağlar. Bu akış içerisinde her işlem adımı pek çok farklı teknik kullanılarak gerçekleştirilir. En önemli adımlar, görüntüleme sistemi koordinatlarına dönüşümün yapılması ve görüntü düzlemine projeksiyondur.

Üç boyutlu nesnelerin gösterilmesinden önce nesnenin bakış şekline göre görüntü koordinatlarını elde etmek gerekir. Ancak görüntüleme alanının iki boyutlu olması nedeniyle elde edilen koordinatların ayrıca iki boyuta indirgenmeleri gerekmektedir. Bu işlem düzlem projeksiyonu adını almaktadır. Projeksiyonu gerçekleştirmek için pek çok teknik kullanılmakla birlikte, bu teknikler paralel ve perspektif olmak üzere iki ana bölümde toplanmaktadır.

Perspektif projeksiyon tekniği, bilgisayarda grafikte en fazla kullanılan tekniktir. Paralel projeksiyonun tersine nesneler arasındaki bağıl boyutların korunmaması ve uzaktaki nesnelerin yakındakilere oranla daha küçük görümelerinden dolayı görüntülerdeki derinliğin algılanabilmesi, perspektif projeksiyonunun en olumlu özelliğidir.

Perspektif projeksiyonun oluşturulmasında en etkili parametre, projeksiyon merkezi olarak adlandırılan noktadır. Görüntüler, uzaydaki nesneleri belirleyen nokta kümelerindeki noktalardan projeksiyon merkezine çizilen doğruların projeksiyon düzlemini kesmeleriyle oluşan izdüşümleridir. Çizilen bu doğrulara *projektör* adı verilir.

Paralel projeksiyonlara örnek olarak; ortografik, axonometric projeksiyonlar verilebilir. Ortografik projeksiyonda, cismin bir düzlem üzerindeki kesiti görüntülenir. Axonometric projeksiyon üçe ayrılır. Bunlar sırasıyla, trimetrik, dimetrik ve izometrik projekisyonlardır ve birbirlerinin özel halleridir. Aralarındaki genel projeksiyon trimetrik projeksiyondur. Axonometric projeksiyonun amacı, cismin 3 komşu yüzünün de görünmesidir.

5.1.4 Animasyon

Bir animasyon, hazırlanan bir senaryo çerçevesinde görüntülerin peşpeşe ekrana getirilmesi ile oluşturulur. Yukarıda tanıtılan dönüşüm işlemleri animasyon sırasında kullanılır. Modelleme yapıldıktan sonra animasyonun gerçekleyeceği senaryo gereği dönüşüm, öteleme, vs. işlemler uygulanır, aydınlatma değerleri elde edilir ve ekrana projekte edilir. Böylece bir animasyon baştan sona tanımlanır.

5.2 QUATERNİONLARIN DÖNDÜRME İŞLEMİNDE KULLANIMI

Bu bölümde, bilgisayarda grafikte, bir cismin üç boyutlu uzayda döndürülmesinde quaternionların kullanımı hakkında bilgi verilecektir.[5] Bunun yanısıra getirdiği faydaların gözlenebilmesi amacı ile önce konunun quaternion çözümü olmadan bölüm 5.1'de verilen temel bilgiler bir parça detaylandırılacaktır.

5.2.1 Bilgisayarda Modellenmiş Bir Cismin Döndürülmesi

Bir noktanın bilgisayar ortamında tanımlanması amacı ile $[x \quad y \quad z]$ şeklinde üç boyutlu bir vektör kullanılır. Şimdi noktaları bu şekilde tanımlanmış basit bir cismi ele alıp bu cismin matris ve quaternion metodları ile nasıl döndürülebileceğini görelim.

5.2.1.1 Matris metodu ile bir cismin döndürülmesi

Cismin sadece bir noktasını alıp bu noktanın cisim merkezi etrafında bir ϕ açısı kadar döndürüldükten sonraki yerini matris metodu ile bulalım. Bunun için noktamıza ilişkin üç boyutlu vektör $[x \quad y \quad z \quad 1]$ şekline getirildikten sonra eşitlik 5.1'de verilen transformasyon matrisi ile çarpılır.

- Bu matriste şu anda bizim konumuz ile ilgili olan bölüm 3x3'lük bölümdür. Bu bölüm ölçekleme, aynalama, döndürme gibi dönüşümler için kullanılır. x ekseni etrafında θ açısı ile döndürmek için kullanılan 4x4 boyutundaki dönüşüm matrisi eşitlik 5.2 ile verilmiştir.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

Döndürme işlemi sonucu noktamızın yeni yeri

$$[X'] = [X][T] \qquad (5.3)$$

şeklinde tanımlanabilir.

5.2.1.2 Quaternion metodu ile bir cismin döndürülmesi

Noktamıza ilişkin koordinatlarımızı, merkezden bu noktaya olan bir vektör şeklinde düşünelim, ve quaternionların bir vektörü döndürme amaçlı nasıl kullanılabileceği konusunu inceleyelim.

Quaternionları bir skalar ile bir vektörün toplamı şeklinde tanımlamıştık. Bu tanımı

$$q = [\mathrm{S}q, \mathrm{V}q] \tag{5.4}$$

şeklinde ifade edelim. Bu tanımlama şekline göre üç boyutlu bir $\vec{v}$ vektörünü dört boyutlu uzaya taşımanın en kolay yolu bir $v = [0, \vec{v}]$ quaternionu tanımlamaktır. Şimdi döndürme işleminden sonra elde edilecek vektörü elde etmek için q quaternionu için eşitlik 5.5'te verilen quaternionu kullanalım ve bu v quaternionuna qvq^{-1} işlemini uygulayalım. Bu işlem quaternionlarla döndürme işleminin temelini oluşturmaktadır.

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}q = \cos(\frac{\phi}{2}), \quad \mathrm{V}q = \sin(\frac{\phi}{2})\vec{u} \\ &q = [\mathrm{S}q, \mathrm{V}q] \end{aligned} \tag{5.5}$$

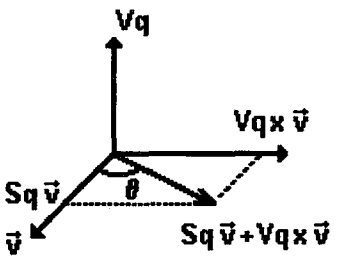
Bu eşitlikte neden ϕ açısı yerine $\phi/2$ açısının kullanıldığı ileride daha iyi anlaşılacaktır. Bu işlemin sonuçlarının nasıl olacağını inceleyebilmek amacı ile $\vec{v}$ vektörünü eşitlik 5.6'da verildiği gibi biri $\mathrm{V}q$'ya dik diğeri paralel iki bileşene ayıralım, ve bu iki bileşenin üzerindeki etkilerini inceleyelim.

$$\vec{v} = \vec{v}_{dik} + \vec{v}_{paralel} \tag{5.6}$$

<u>Dik bileşen için;</u>

$$\begin{aligned} &qv = [\mathrm{S}q, \mathrm{V}q][0, \vec{v}_{dik}] \\ &qv = [-\mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{dik}, \mathrm{S}q\vec{v}_{dik} + \mathrm{V}q \times \vec{v}_{dik}] \end{aligned} \tag{5.7}$$

Bu çarpma sonucunda Vq ve $\vec{v}_{dik}$ vektörleri birbirine dik olduğuna göre skalar çarpımlarının sonucunun sıfır olacağı kesindir. Buradan çarpım sonucunun doğrudan bir vektörü temsil ettiği söylenebilir. Bu vektör şekil 5.1'den de görülebileceği üzere $\vec{v}_{dik}$ vektörünün bir θ açısı kadar döndürülmesi ile elde edilmektedir.



Şekil 5.1 Bir quaternionun çarpım sonucu dik bir vektöre olan etkisi

Elde edilen sonuç vektörünün belirlenmesi için θ dönüş açısının tam olarak belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için önce Pisagor teoremi ve daha sonra Lagrange eşitliğinden faydalanarak, ve q quaternionunun versörü birim vektör kabul edilerek, adım adım aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{S}q\vec{v}_{dik}+\mathrm{V}q\times\vec{v}_{dik}\right\|^2 &= \left\|\mathrm{S}q\,\vec{v}_{dik}\right\|^2+\left\|\mathrm{V}q\times\vec{v}_{dik}\right\|^2 \\ &= \mathrm{S}^2 q\left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2+\left\|\mathrm{V}q\right\|^2\left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2\end{aligned} \qquad (5.8)$$

$$\mathrm{S}^2 q\left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2+\left\|\mathrm{V}q\right\|^2\left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2=(\mathrm{S}^2 q+\left\|\mathrm{V}q\right\|^2)\left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2 \qquad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^2 q+\left\|\mathrm{V}q\right\|^2 &= \|q\|=1 \\ \left\|\mathrm{S}q\mathrm{V}q+\mathrm{V}q+\vec{v}_{dik}\right\|^2 &= \left\|\vec{v}_{dik}\right\|^2\end{aligned} \qquad (5.10)$$

Görüldüğü gibi başlangıç ve sonuç vektörlerinin boyu aynıdır. Bu, işlemin saf bir döndürme işlemi olduğunu kesinleştirmektedir. Döndürme açısını θ olarak kabul edersek,

$$\cos(\theta)=\frac{\left\|\mathrm{S}q\vec{v}_{dik}\right\|}{\left\|\mathrm{S}q\vec{v}_{dik}+\mathrm{V}q\times\vec{v}_{dik}\right\|}=\frac{\left\|\mathrm{S}q\vec{v}_{dik}\right\|}{\left\|\vec{v}_{dik}\right\|}=\mathrm{S}q \qquad (5.11)$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sonucuna göre quaternionun skalar kısmı döndürme açısını, vektörel kısmı ise döndürme eksenini belirlemektedir. Quaternionun birim uzunluğa sahip olarak alınması, vektör parçasının belirlenmesinde dikkat edilmesi gereken bir noktadır. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} \|q\| &= \mathrm{S}^2 q + \|\mathrm{V} q\|^2 = 1 \\ \cos^2(\theta) &+ \|\mathrm{V} q\|^2 = 1 \\ \|\mathrm{V} q\| &= \sin(\theta) \end{aligned} \qquad (5.12)$$

elde edilir. Bu sonuçlarla bir quaternionun, vektör parçasına dik bir vektörle çarpımının o vektör üzerinde saf bir döndürme etkisi yapacağı görülmektedir.

Paralel bileşen için;

Şimdi $\vec{v}_{paralel}$ bileşeni üzerinde q quaternionumuzun etkisini görelim. Bu durum $\vec{v}_{paralel}$ vektörünün, q quaternionunun vektör kısmının bir skalar ile çarpımına eşit olduğu durumdur. Bu durum

$$a\vec{v}_{paralel} = Vq \qquad (5.13)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} qv &= \left[\mathrm{S}q, \mathrm{V}q\right]\left[0, \vec{v}_{paralel}\right] \\ &= \left[-\mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel}, \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel} + \mathrm{V}q \times \vec{v}_{paralel}\right] \\ &= \left[-\mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel}, \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel}\right] \end{aligned} \qquad (5.14)$$

eşitliğinde görüldüğü üzere sonuç quaternionunun skalar kısmı sıfırdan farklıdır, ve saf bir vektör ifadesi değildir. Ancak sonuçta bir vektör ifadesi elde etmemiz gerektiğinden çarpımımızı qvq^{-1} şeklinde geliştirelim. Sonuç 5.16 eşitliği ile verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
qvq^{-1} &= \left[- \mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel}, \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel} \right] \left[\mathrm{S}q, -\mathrm{V}q \right] \\
&= \left[-\mathrm{S}q \ \mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel} + \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel} \cdot \mathrm{V}q, (\mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel})\mathrm{V}q + \mathrm{S}^2 q + \vec{v}_{paralel} - \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel} \times \mathrm{V}q \right] \quad (5.15) \\
&= \left[0, \mathrm{S}q\vec{v}_{paralel} + (\mathrm{V}q \cdot \vec{v}_{paralel})\mathrm{V}q \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}^2 q\vec{v}_{paralel} + (\mathrm{V}q\vec{v}_{paralel})\,\mathrm{V}q &= \mathrm{S}^2 q\vec{v}_{paralel} + (a\vec{v}_{paralel} \cdot \vec{v}_{paralel})a\vec{v}_{paralel} \\
&= \mathrm{S}^2 q\vec{v}_{paralel} + (a\vec{v}_{paralel} \cdot a\vec{v}_{paralel})\vec{v}_{paralel} \quad (5.16) \\
&= (\mathrm{S}^2 q + \| \mathrm{V}q \|^2)\vec{v}_{paralel}
\end{aligned}
$$

Bu noktada dik bileşen üzerinde vq^{-1} işleminin sonucu incelenerek ortak bir ifadeye gitmek yararlı olacaktır.

$$
\begin{aligned}
vq^{-1} &= \left[0, \vec{v}_{dik} \right] \left[\mathrm{S}q, -\mathrm{V}q \right] \\
&= \left[\vec{v}_{dik} \cdot \mathrm{V}q, \ \mathrm{S}q\vec{v}_{dik} - \vec{v}_{dik} \times Vq \right] \quad (5.17) \\
&= \left[0, \mathrm{S}q\vec{v}_{dik} + \mathrm{V}q \times \vec{v}_{dik} \right] \\
&= q\vec{v}_{dik}
\end{aligned}
$$

$$
q(vq^{-1}) = q(qv) \quad (5.18)
$$

Bu sonuçla diyebiliriz ki qvq^{-1} işlemi dik olma durumunda $\vec{v}$ vektörünün iki kat dönmesine sebep olmaktadır. Elde edilen sonuçlar yardımı ile bir vektörün bir $\vec{u}$ ekseni etrafında döndürülmesinde kullanılacak genel eşitlikler aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
q &= \left[\mathrm{S}q, \mathrm{V}q \right] = \left[\cos(\frac{\theta}{2}), (\sin(\frac{\theta}{2})\vec{u}) \right] \quad (5.19) \\
qvq^{-1} &= \left[0, \vec{v} + 2\mathrm{S}q(\mathrm{V}q \times \vec{v}) + 2\,\mathrm{V}q \times (\mathrm{V}q \times \vec{v}) \right]
\end{aligned}
$$

Quaternionlarla iki ayrı döndürme işleminin birleştirilmesi kolayca yapılabilmektedir. Bir vektörü arka arkaya dönüşümlerden geçirmek yerine eşitlik 5.20 kullanımı ile tek dönüşümden geçirmek bir işlem kolaylığı getirmektedir.

$$
q_2(q_1 v q_1^{-1})q_2^{-1} = (q_2 q_1)v(q_2 q_1)^{-1} \quad (5.20)
$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Görülebileceği üzere her türlü oryantasyon, tek bir quaternion ile ifade edilebilmekte, daha hızlı ve klasik matris yönteminden daha az yer kaplaması dolayısı ile tercih edilen bir yöntem olmaktadır.

5.3 QUATERNION UZAYINDA SANAL GERÇEKLİK İÇİN GÜRÜLTÜNÜN YOKEDİLMESİ

Yumuşak hareket nesli bilgisayar animasyonunda ve sanal gerçeklik alanında önemli bir konudur. Genel olarak, katı bir cismin hareketi pozisyon ve yön değişikliğinden oluşur. Biçimlendirici 3-boyutlu Euclid uzayında bir uzay eğrisi ile tanımlanırken, diğeri de birim quaternion uzayında bir eğri ile tanımlanır. Euclid uzayındaki dönüşüm eğrilerini yumuşatmak için birçok teknik bilinse de, hareketi tamamında yumuşatan çok az sonuç elde edilmiştir. Bu yazı, önceki çalışmaları geliştirmekte ve daha sağlam bir algoritma sunmaktadır. Bu algoritma, gerilme enerjisinin ağırlıklı toplamını ve hataların karesinin toplamını en aza indirmenin yollarını arar. [6]

5.3.1 Sanal Gerçeklikte Hareket Yumuşatma

Uzayda yumuşak bir hareketi gerçeklemek, bilgisayarda grafikte, animasyon ve sanal gerçeklik (VR-Virtual Reality) alanlarındaki uygulamalar ile oldukça ilgi çekici bir iştir. Hareket eden cismin belirli bir andaki pozisyonu ve dönüşü bir çift oluşturur ve hareketin "*iskeleti*" olarak adlandırılır. Böylelikle, yumuşak hareketi gerçeklemek iki kısımdan oluşur: yumuşak çevirim ile döndürmenin gerçeklenmesi. Biçimlendirici için, farklı noktadaki veriler için değişen açılardaki sürekliliği sağlamak amacıyla pek çok eğri-yerleştirme ve eğri-uyumlaştırma yöntemleri bilinmektedir. Diğeri için ise, quaternionlardaki son gelişmelere kadar, döndürmeler arasındaki interpolasyonu yapmak zordu.

Döndürme 3x3 boyutunda matrisler şeklinde temsil edilebilse de, girişlerin kısmi bağımlılığından dolayı, uygulanabilir değildir. 1758'de Euler, Euler açıları olarak adlandırdığı bağımsız bir koordinat kümesini tanıttı. Bu açılar belli bir merkez etrafında verilen eksenlerde üç bağımsız, sıralı döndürmeler sırasında üç-boyutlu döndürmeyi tanımlar. Euler açıları ile döndürmelerin interpole edilmesi mümkünse de zordur. Diğer yandan, birim quaternion tek bir döndürme şeklinde bir konumu temsil eder ve basit interpolasyonları mümkün kılar.

Quaternion cebrindeki son ilerlemeler, yumuşak hareketi gerçeklemede yeni teknikleri geliştirmeye yöneltmektedir. Bu teknikler iki ayrı kategoride toplanabilir: hareket sentezi ve hareket uyumlaştırma. Hareket sentezinde, ilkönce bir dizi "anahtar çerçeve"ler verilir; örneğin, bir ev modeli içinde gezinti yaparken mutfak, oturma odasına ait görüntüler gibi çok önemli sahneleri tasarlayabilir, sonra bu anahtar çerçeveler arasında yumuşak bir hareketi simüle etmek için, biri Euler uzayı R^3 ve diğeri birim quaternion uzayı $SO(3)$ da yer alan iki spline eğrisi kullanılarak ana çerçeveler interpole edilir. Gezinti ve katı-cisim hareketleri gibi yumuşak animasyonları üreten hareket-sentezi tekniklerinin başarısına rağmen, eklemli yaratıklar için gerçeğe yakın yumuşak animasyonlar henüz gerçeklenememiştir. Bu belirsiz akışın arkasındaki temel sebep eklemli bir yaratığın hareketinin, ortam arasındaki karmaşık etkileşimlerinin görünmesinden oluşmasıdır. Sanal gerçeklikte olduğu gibi animasyon da bu sebeple, fiziksel dünyada örneklenip daha sonra bilgisayarda oluşturulması gereken hareketleri içeren pek çok hal vardır. Döndürme hareketi genellikle açısal hızı ölçen bir ciroskop ile hissedilir ve dönüşüm hareketi telemetri analizi ile lineer ivmeölçeri de kapsayan bir çok teknik ile ölçülür. Örneklenen pek çok veride olduğu gibi, örneklenen hareketlerin başarılı oluşturulması, örnekleme işlemi esnasında gürültüyü azaltma yeteneğine bağlıdır.

R^3 uzayında eğri-uyumlaştırma teknikleri, farklı noktalar için değişken açılarda sürekliliği sağlar. Diğer yandan, hareketi yumuşatma için çok az sonuç bildirilmiştir. R^3 uzayında gerilme enerjisini minimize eden bir uyumlaştırma algoritması anlatılmıştır. Bu algoritma, orijinal veriye göre kullanıcı tarafından tanımlanan hata sınırlarında, eğri içinde toplanan germe enerjisini tanımlayan birim quaternion eğrisinin türevlerinin ağırlıklı toplamını iteratif olarak en aza indirir. Önceki hareket uyumlaştırma algoritmalarında gelişmeye açık iki önemli konu: (i) formulasyon ölçekten bağımsızdır, örneğin, elde edilen sonuç hareketi çevirilen verinin ölçeği ile değişir.; (ii) bazı koşullar altında algoritma sonsuz döngüye girebilir. Bu iki kusuru gidermek için, gerilme enerjisinin ağırlıklı ortalaması ile hataların karesinin (SSE) toplamını minimize etmeyi hedefleyen bu yazıda daha sağlam bir algoritma sunuyoruz. Bu formulasyon sonsuz döngülere daha az elverişli ve gerilme enerjisinin SSE'ye karşı bağlantısını kurarak kullanıcıya son hareketin esnekliği için sezgisel bir kontrol sağlar. Aynı zamanda, bu formulasyon pozisyon verisinin düzgün ölçeklenmesi üzerinde değişken değildir.

Şimdi anlatılacak teknikle ilgili quaternionlar üzerine kısa bir bilgi hatırlatması yapalım. Daha sonra deneysel sonuçlar ile teoride verilen hareket uyumlaştırma tekniği anlatılmakta ve son olarak da kısa bir özet verilmektedir.

5.3.2 Quaternionlar Hakkında Kısa Hatırlatma

Bir karmaşık sayı şeklindeki bir a quaternionu bir gerçel kısım ve üç sanal kısımdan oluşur:

$$a = w + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad , w,x,y,z \in R \tag{5.21}$$

ve çarpma kurallarını sağlar:

$$\begin{aligned} &\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1, \\ &\hat{i}\hat{j} = \hat{k},\ \hat{j}\hat{i} = -\hat{k}, \\ &\hat{j}\hat{k} = \hat{i},\ \hat{k}\hat{j} = -\hat{i}, \\ &\hat{k}\hat{i} = \hat{j},\ \hat{i}\hat{k} = -\hat{j}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Bir a quaternionun tensörü $\mathrm{T}a$ ve tersi a^{-1} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}a = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &a^{-1} = (w - x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}) / \mathrm{T}a \end{aligned} \tag{5.23}$$

Bir a quaternionu iki ayrı parça ile ifade edilebilir $a = (w, \vec{u}), \vec{u} = (x,y,z) \in R^3$. Bir vektör $\vec{v} \in R^3$ quaternion uzayında tanımlanabilir:

$$\vec{v} \rightarrow (0, \vec{v}) \tag{5.24}$$

Bir birim quaternionu q, tensörü $\mathrm{T}q = 1$ olan bir quaterniondur. 3x3 boyutundaki döndürme matrislerine alternatif olarak birim quaternion kullanılarak, birim eksen $\vec{u}$ vektörü etrafında θ kadar döndürme birim quaternion q ile temsil edilebilir:

$$q = \left(\cos\frac{1}{2}\theta, \vec{u}\sin\frac{1}{2}\theta \right) \qquad (5.25)$$

ve $\vec{v}_1 \in R^3$ vektörü $\vec{v} \in R^3$ den q quaternionu kadar döndürülür, $Rq(\vec{v})$ ile gösterilir, bir quaternion çarpımı ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= Rq(\vec{v}) \\ &= q\vec{v}q^{-1} \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Yukarıdaki eşitlikte $\vec{v}_1$ ve $\vec{v}$ eşitlik 5.24 den yararlanılır. Eşitlik 5.26 nın $\vec{v}$ vektöründen ardışıl rotasyonlar $Rq_1, \ldots, Rq_n$ için genel hali aşağıdaki eşitlikte verilmiştir:

$$\begin{aligned} Rq_n\left(\ldots Rq_2\left(Rq_1\left(\vec{v}\right)\right)\ldots\right) &= q_n \cdots q_1 \vec{v} q_1^{-1} \cdots q_n^{-1} \\ &= \left(q_n \cdots q_1\right)\vec{v}\left(q_1^{-1} \cdots q_n^{-1}\right) \\ &= Rq_n \cdots q_1\left(\vec{v}\right) \end{aligned} \qquad (5.27)$$

Açısal hızın çok iyi bilinen şekli $\vec{v} = \theta\vec{u} \in R^3$ klasik mekanikte, birim eksen $\vec{u} = \vec{v}/\mathrm{T}\vec{v}$ etrafında bir $\theta = \mathrm{T}\vec{v}$ kadar döndürülmesiyle ifade edilir. $\vec{v}$ vektörünün birim quaternionu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \exp(\vec{v}) &= \left(\cos\theta, \hat{u}\sin\theta\right) \\ &= \left(\cos\mathrm{T}\vec{v}, \frac{\vec{v}}{\mathrm{T}\vec{v}}\sin\mathrm{T}\vec{v}\right) \end{aligned} \qquad (5.28)$$

Quaternion exponansiyeli (eşitlik 5.28) bire-bir olmadığından, $\mathrm{T}\vec{v} < \pi$ kısıtı uygulanır ve böylece birim quaternion q'nun ters fonksiyonu $\log q$ tanımlanır.

İki birim quaternionu q_1 ve q_2 için sabit bir eksen etrafındaki bir rotasyon ile bağlayan bir yol oluşturmak mümkündür. Bu döndürme yolundan birisi, geodesic interpolasyon veya sleptir ve Euler'in temel döndürme teoremi ile gerçekleştirilir.

$$G[q_1, q_2](t) = q_1 \exp\left(t \cdot \log\left(q_1^{-1} q_2\right)\right), \quad 0 \le t \le 1$$
$$= q_1 \left(q_1^{-1} q_2\right)^t, \quad 0 \le t \le 1 \qquad (5.29)$$

Burada $\log\left(q_1^{-1} q_2\right)$ ilişkili döndürme eksenidir. Geodesic yol, birim quaternion uzayı için uzaklık ölçüsüne katılmıştır ve böylelikle iki birim quaternionu q_1 ve q_2 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{dist}(q_1, q_2) = \text{T}\log\left(q_1^{-1} q_2\right) \qquad (5.30)$$

Bir uzay eğrisi $p(t)$ nin hızı $v(t)$ nin birinci dereceden türevi $p'(t)$ olduğu Euclid uzayından farklı olarak, birim quaternion eğrisi $q(t)$ nin açısal hızı $w(t)$ nonlineer bir şekil alır:

$$w(t) = 2q^{-1}(t)q'(t) \qquad (5.31)$$

Diğer yandan, açısal hızı $w(t)$ olarak verilen, birim quaternion eğrisi $q(t)$ quaternion integrasyonundan türetilir. Burada q_0 ilk konumudur

$$q(t) = q_0 \prod_0^t \exp\left(w(t)dt\right) \qquad (5.32)$$

5.3.3 Enerji Ve Uzaklık Ölçümleri

Bu bölümde, enerji ve uzaklık azaltılması açısından cisimlerin pozisyonları yumuşatılmıştır. R^3 uzayında bir eğri için enerji biriminin formulasyonu ile tartışma başlar ve birim quaternion eğrisi için devam eder. Uzaklık ölçüleri ile beraber, objektif fonksiyonlar elde edilir ve bilinen sayısal çözümler ile minimizasyon problemini çözecek sayısal yöntem verilir.

5.3.3.1 Enerji fonksiyonları

Katı bir cismin hareketi $r(t)$ pozisyon ve oryantasyonun bileşimi şeklinde ifade edilebilir. Şekillendirici R^3 uzayında bir eğri olan $p(t)$ ile, ve diğeri de birim quaternion eğrisi $q(t)$ ile tanımlanır. Böylelikle,

$$r(t) = \left(p(t), q(t)\right) \tag{5.33}$$

p, R^3 uzayında t zamanı ile ifade edilen bir uzay eğrisi olduğunu varsayalım. p eğrisinin t andaki hızı $v(t)$ ve ivmesi $a(t)$ olsun:

$$v(t) = p'(t) \tag{5.34}$$

$$a(t) = p''(t) \tag{5.35}$$

İvme (eşitlik 5.35) t anında yakın hızların değişimini ölçtüğünden, bir eğrinin yumuşaklığı toplam ivmenin en aza indirilmesi ile sağlanabilir.

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_p (\mathrm{T}\, p''(t))^2 dt \\ &= \int_p (\mathrm{T}\, a(t))^2 dt \end{aligned} \tag{5.36}$$

$E(p)$ küçüldükçe p eğrisi daha yumuşak olur. Böyle yumuşak bir eğri, $a(t)$ ivmesi her yerde sıfır olan, $E = 0$ olan düz bir çizgidir. Eğer p yay uzunluğu s ile ifade edilirse o zaman Eşitlik 5.35 $p(s)$ eğrisinin gerilme enerjisini temsil eder:

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_p (\mathrm{T}\, p''(s))^2 ds \\ &= \int_p \kappa(s)^2 ds \end{aligned} \tag{5.37}$$

Benzer şekilde, bir birim quaternion eğrisi $q(t)$ nin yumuşaklığını hızların açısı ve değişimleri açısından ölçmek mantıklıdır. Birim quaternion eğrisinin birinci dereceden türevi açısal hız değildir, ve quaternion eğrisinin ikinci türevi de açısal hızların değişim oranı değildir. Enerji fonksiyonu $\int_q \left(\mathrm{T}\, q''(t)\right)^2 dt$, Eşitlik 5.35 den

elde edilir. Gösterilebilir ki, birim hiper-kürenin dairesinden geçen, sabit açısal hızda yumuşak bir birim quaternion eğrisi, $\int_q \left(\mathrm{T}\, q''(t)\right)^2 dt$ ölçüsüne uymaz. Daha uygun bir enerji fonksiyonu, açısal hızın türevinin tensörünün integrasyonu ile doğrudan elde edilebilir:

$$E(q) = \int_q \left(\mathrm{T}\, w'(t)\right)^2 dt \qquad (5.38)$$

Sabit açısal hıza sahip, birim hiper-kürenin dairesinden geçen, birim quaternion eğrisi için enerji fonksiyonunun $E(q) = 0$ olacağı açıktır.

Bir haraketi tanımlamak için pozisyonların bir listesini oluşturan $P = \{p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}\}, p_i \in R^3$ değerleri ve oryantasyonları tanımlayan $Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ listelerinden oluşan bir $\{P, Q\}$ çifti tanımlanmalıdır. Ayrık enerji fonksiyonları bu sebepten dolayı önemlidir. R^3 uzayında ayrık bir pozisyon eğrisi $P = \{p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}\}$ için, birinci ve ikinci dereceden türevleri aşağıda verilmiştir:

$$\Delta^{(1)} p_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} \qquad (5.39)$$

$$\Delta^{(2)} p_i = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2} \qquad (5.40)$$

Burada h iki ardışıl nokta p_i ve $p_{i+1}, i \in [0 \ldots n-2]$ arasındaki zaman aralığıdır. P nin ayrık enerji fonksiyonu da aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} E(P) &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\mathrm{T}\, \Delta^{(2)} p_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\mathrm{T} \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2}\right)^2 \end{aligned} \qquad (5.41)$$

Ayrık bir quaternion eğrisi $Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ için, ayrık açısal hız w_i ve q_i değeri için w_i' türevi aşağıda verilmiştir:

$$w_i = \frac{\log\left(q_i^{-1} q_{i+1}\right)}{h} \tag{5.42}$$

$$w_i' = \frac{\log\left(q_i^{-1} q_{i+1}\right) - \log\left(q_{i-1}^{-1} q_i\right)}{h^2} \tag{5.43}$$

ve Q için ayrık enerji fonksiyonu ise aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} E(Q) &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\mathrm{T}\, w_i'\right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \left(\mathrm{T} \frac{\log\left(q_i^{-1} q_{i+1}\right) - \log\left(q_{i-1}^{-1} q_i\right)}{h^2} \right)^2 \end{aligned} \tag{5.44}$$

5.3.3.2 Uzaklık ölçüsü

Eşitlik 5.41 ve eşitlik 5.44 ile tanımlı enerji fonksiyonları pozisyon veya döndürme kümesinin tam olarak yumuşak bir hareket tanımlaması için gerekli ancak yeterli değildir, enerji fonksiyonlarını minimize ederek aşikar çözümler elde edilebilecek gibi görünür. Pozisyon verisi ile verilen noktalar düz bir çizgi oluşturmaya yönelir veya quaternion noktaları bir daire arkı meydana getirecek şekilde değer alırlar. Veri kümelerinin şeklini korumak amacıyla, orijinal veri ile yumuşak harekete ait veri kümesindeki noktaların uzaklıklarının karesinin toplamını ölçen, bir L_2-norm ölçütü ele alınır. P ve Q ya ait hareketi yumuşatma işleminden sonra oluşan sonuç veri kümeleri $P^* = \left\{p_0^*, p_1^*, \cdots, p_{n-1}^*\right\}$ ve $Q^* = \left\{q_0^*, q_1^*, \cdots, q_{n-1}^*\right\}$ şeklinde olsun. O halde, uzaklık ölçümleri $D(P^*)$ ve $D(Q^*)$ şöyledir:

$$D(P^*) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathrm{T}\left(p_i - p_i^*\right)\right)^2 \tag{5.45}$$

$$D(Q^*) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathrm{T}\log\left(q_i^{-1} - q_i^*\right)\right)^2 \tag{5.46}$$

Açıkça ifade edilirse, uzaklık ölçüleri eşitlik 5.45 ve eşitlik 5.46, orijinal veriler ile yumuşak harekete ait verilerin benzer olduğu durumda en aza indirgenmiş olur.

5.3.3.3 Optimizasyon ve sayısal yöntem

Pozisyon veri kümesi P ile döndürme veri kümesi Q nun yumuşatılması için formulasyonları elde edebiliriz. Pozisyon veri kümesinin sonuç hali P^*, $F(P^*)$ fonksiyonunun minimize edilmesi ile sağlanır:

$$\min F(P^*) = D(P^*) + \alpha E(P^*) \qquad (5.47)$$

Burada $D(P^*)$ ve $E(P^*)$ Eşitlik 5.41 ile 5.45 den gelmiştir, ve α sabiti enerji ölçüsünün uzaklık ölçüsü üzerindeki önem oranıdır. Eğer $\alpha = 0$ ise Eşitlik 5.47 için sonuç P kümesinin kendisi olur. Eğer $\alpha >> 0$ ise enerji fonksiyonu hakim olur, böylece P^* çözümü P nin düzelmiş versiyonu olur. Benzer şekilde, quaternion verisinin yumuşak hareket için sonuç verisi Q^*, $G(Q^*)$ fonksiyonunun minimize edilmesi ile elde edilebilir:

$$\min G(Q^*) = D(Q^*) + \beta E(Q^*) \qquad (5.48)$$

Burada ise, $D(Q^*)$ ve $E(Q^*)$ Eşitlik 5.44 ile eşitlik 5.46 dan sağlanır, ve β sabiti de enerji ölçüsünün uzaklık ölçüsü üzerindeki önem oranıdır.

Eşitlik 5.47 yi çözmek için kullanılacak sayısal yöntem üç adımdan oluşur:

1. Başlangıç değeri tanımlama :

$$P^0 \leftarrow P$$

2. İterasyon:

$$P^{k+1} = P^k - \lambda_1 \nabla F(P^k)$$

3. Sonlandıran koşul:

$$\mathrm{T}\nabla F(P^k) < \varepsilon_1$$

1.nci adım iteratif nokta P^0 için başlangıç değerini tanımlar. İkinci adımda, $\nabla F(P^k)$ nın $F(P^k)$ nın gradyanı ve λ_1 in hızın belirlenmesinde etken küçük bir değer olduğu $P^{k+1} = P^k - \lambda_1 \nabla F(P^k)$ iterasyonu ile $\{P^k\}$ ardışıl değerleri üretilir.

$\nabla F(P^k)$ gradyan değeri önceden tanımlı bir ε_1 sabiti ile sınırlı kaldığında iterasyon sona erer. Böylece, P^* çözümü $P^* = P^k$ olacaktır.

Aynı şekilde, Eşitlik 5.48 i çözmek için sayısal fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

1. Başlangıç değeri tanımlama:

$$Q^0 \leftarrow Q$$

2. İterasyon:

$$Q^{k+1} = Q^k \cdot \exp(-\lambda_2 \nabla G(Q^k))$$

3. Sonlandıran koşul:

$$\mathrm{T}\nabla G(Q^k) < \varepsilon_2$$

Başlangıç noktası Q^0 un tanımlanması ve iterasyonun sonlandırılması 1. Adım ile 3. Adımda gösterilmiştir. 2. Adımda ise iterasyon gösterilmiştir.

Önceki sayısal fonksiyonu uygularsak, iterasyon $Q^{k+1} = Q^k - \lambda_2 \nabla G(Q^k)$ olmalıdır. Ancak, bu iterasyon genelde birim quaternion noktaları üretmez. Bu yüzden daha iyi bir iterasyon planına ihtiyaç vardır. Birim quaternion q_i nin komşu birim quaternion noktaları, ω nın bir 3-boyutlu döndürme vektörü olduğu, $q_i \exp(\omega)$ şeklinde gösterilir. Aynı zamanda, q_i nin gradyanı olan $\nabla G(Q)$ nun bir elemanı $\nabla_i G(Q)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla G_i(Q) = \frac{\partial}{\partial \omega}\bigg|_{\omega=0} G(q_0, q_1, \cdots, q_i \exp(\omega), \cdots, q_{n-1}) \qquad (5.49)$$

ve gradyan $\nabla G(Q)$ aşağıdaki gibidir:

$$\nabla G(Q) = \{\nabla_i G(Q)\} \qquad (5.50)$$

$\nabla G(Q)$ gradyanının türevi için quaternion çarpımının, üssün ve logaritmanın diferansiyeline ihtiyaç vardır. Şimdi, iteratif noktalar, Eşitlik 5.49 ile eşitlik 5.50 un yardımıyla, önceki prosedüre benzer şekilde tanımlanabilir:

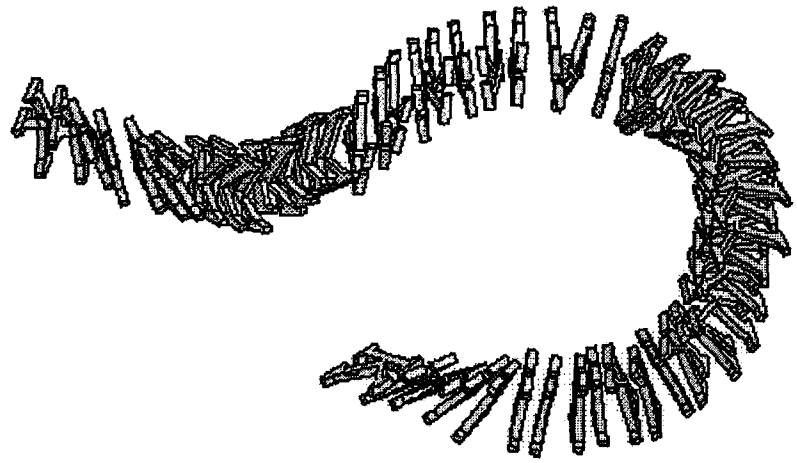
$$Q^{k+1} = Q^k \cdot \exp(-\lambda_2 \nabla G(Q^k)) \qquad (5.51)$$

5.3.3.4 Sayısal sonuçlar

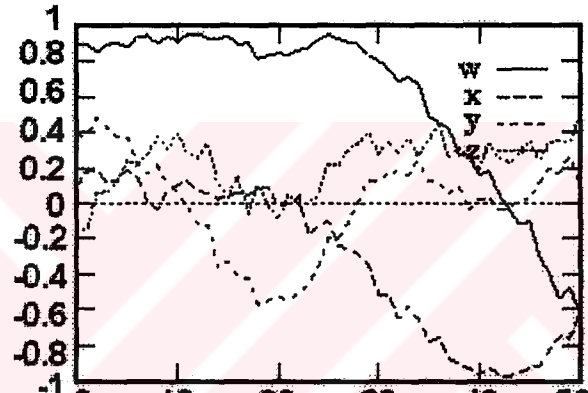
Hareket verisi $R = (P, Q)$, düzensiz gürültülerin eklendiği bozulmuş bir B-spline eğrisi ile bozulmuş quaternion B-spline eğrisinden örneklenir. Quaternion verisi birim hiper-küre üzerinde düzensiz yön ve düzensiz geodesic uzunluk ile bozulmuştur, öyle ki bozulan noktaların birim quaternion olduğu kesindir. Daha açıklayıcı olursak, örnekleme rastgele gürültünün boyuna bağlı olarak yapılır. Şekil 5.1'de gösterildiği gibi, hareket için sadece pozisyonları değil aynı zamanda oryantasyonlar da yumuşak değildir. Bir evvelki konuda tasvir edilen sayısal yöntem $\alpha = .1$ gibi küçük bir değer için uygulanırsa, sonuç hareketin pozisyonları, Şekil 5.2'de verildiği gibi, daha yumuşak gözükür. Döndürmelerin minimizasyonu ve $\beta = .1$ değerleriyle beraber yumuşak hareketin bütünü Şekil 5.3(a)da verilmiştir. Yumuşak quaternionlar da Şekil 5.3(b)de gösterilmiştir. Şekil 5.3'te hareket yolu boyunca düzensizlik görülmektedir. β nın daha büyük değerleri ile döndürmelerin yumuşaklığı arttırılabilir. Şekil 5.4 ve şekil 5.5, $\alpha = \beta = .3$ için yumuşatılmış pozisyonları ve hareketleri gösterir. Şekil 5.5 te harekete ait dönüşlerin Şekil 5.3'e göre daha yumuşak gözüktüğü açıktır.

5.3.4 Özet

Yumuşak hareket verisi için minimizasyon yöntemi tanıtılmıştır. Hareket verisinin yumuşaklığı α ve β faktörleriyle kontrol edilebilir. Her ikisi de enerji ölçüsünün öneminin uzaklık ölçüsünün önemine olan oranıdır. Yumuşak hareket $\alpha = \beta = 0$ olduğunda orijinal hareket ile aynıdır. α ve β arttıkça, hareketin orijinal şekli bozulmadan daha yumuşak bir hareket sağlanır. Açıklamalar, bu algoritmanın güvenirliliğini göstermektedir.

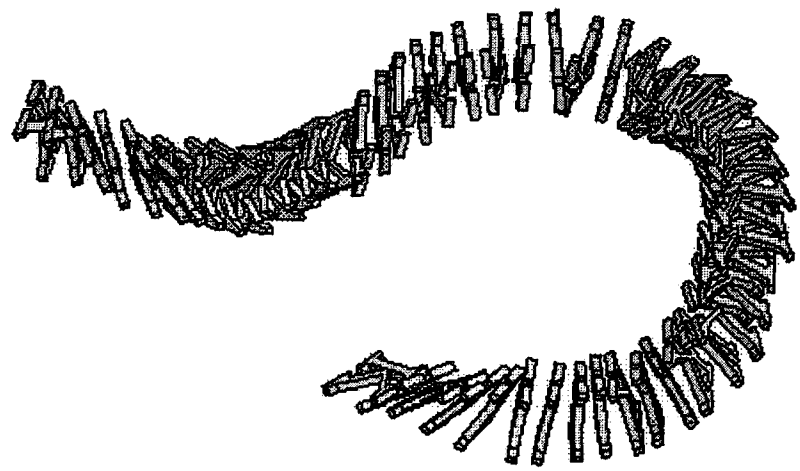


(a)

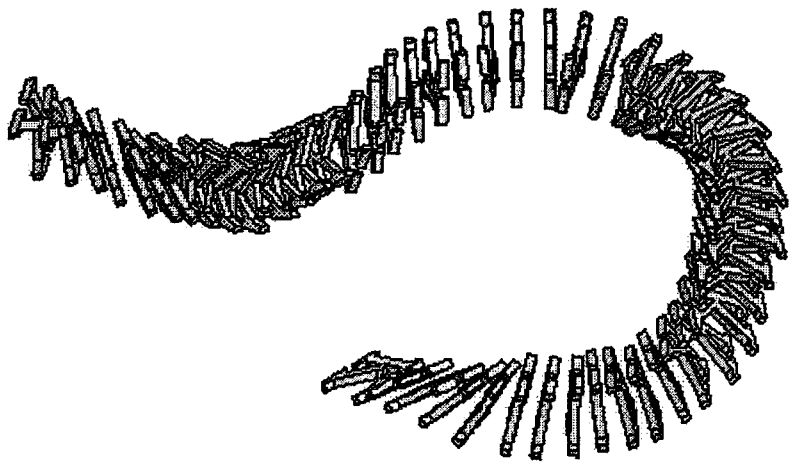


(b)

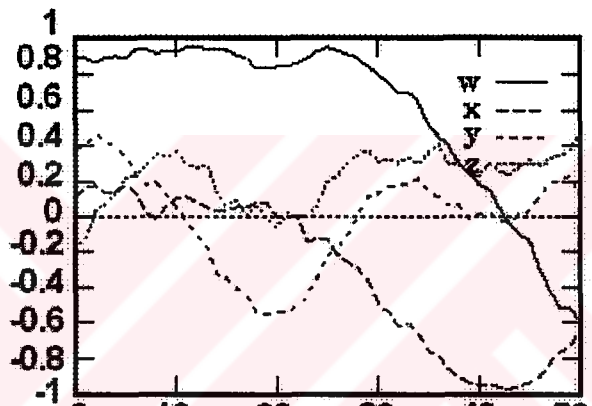
Şekil 5.1 Katı bir cismin bozulmuş hareketinin gösterilimi. (a) Katı cismin hareketi , (b) Quaternionun dört bileşeni



Şekil 5.2 $\alpha = .1$ iken elde edilen hareketin sonuç pozisyonu

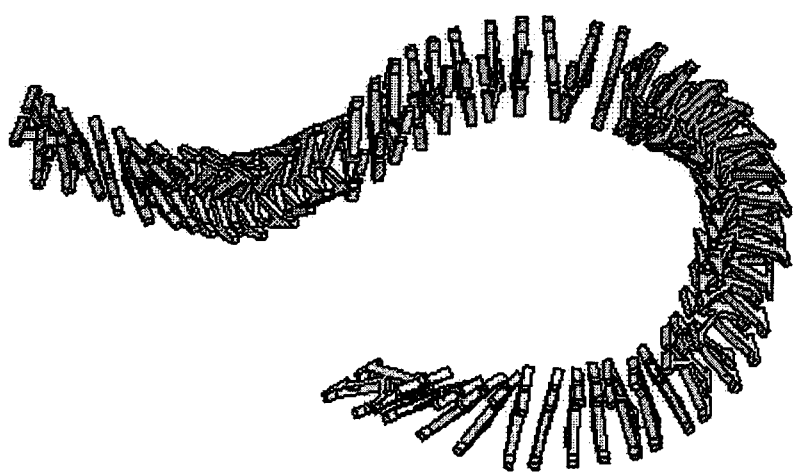


(a)

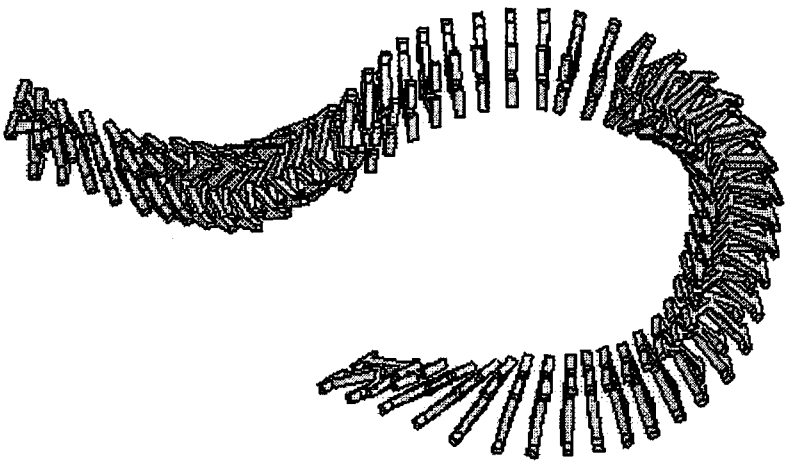


(b)

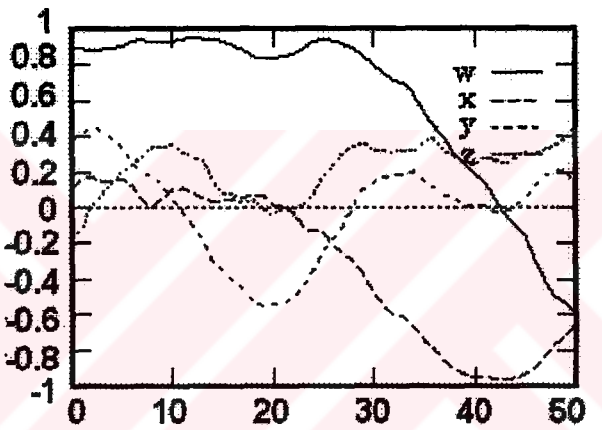
Şekil 5.3 $\alpha = \beta = .1$ olduğu yumuşatılmış hareket. (a) Yumuşatılmış hareket , (b) Quaternionun yumuşatılmış bileşenleri.



Şekil 5.4 $\alpha = .3$ iken sonuç pozisyonları.



(a)



(b)

Şekil 5.5 $\alpha = \beta = .3$ olduğunda elde edilen hareket. (a) Yumuşatılmış hareket , (b) Yumuşatılmış quaternionlar

5.4 BİLGİSAYARDA GRAFİKTE DÖNDÜRME YÖNTEMLERİNİN KIYASLANMASI

Bu konuda, quaternionların döndürme işlemlerinde kullanımı için bir geliştirme metodu düşünülmüş, bu metodun transformasyon matrisi yöntemi ve bu bölümün önceki konularında verilen yöntem ile kıyaslaması yapılmış, ayrıca bir cismi quaternion ile modellemenin döndürme ve öteleme, aynalama işlemlerine getireceği avantaj ve dezavantajlar incelenerek bir sonuca varılmıştır.

5.4.1 Yeni Bir Döndürme Tekniği

Temel quaternion bilgilerinin verildiği üçüncü bölümde iki vektörün bölümünün de, çarpımınında bir quaternion olduğunu ve bölümü ile çarpımı

arasındaki farkın tensörlerin bölümü ile çarpımı ve versörlerin küresel toplama ile çıkartılmasından ibaret olduğunu söylemiştik. Buradan elde edebileceğimiz bir sonuç, bir vektörü diğerine dönüştürmek için kullanacağımız ve iki vektörün birbirine bölünmesinden elde edilecek quaternion değerini, bu iki vektörün çarpılması ile de elde edebileceğimizdir.

İki vektörümüz α ve β olsun. Bu iki vektör üzerinde $q' = \beta \times \alpha$ ve $q = \frac{\beta}{\alpha}$ olacak şekilde iki quaternion tanımlayalım. Quaternionları tanımlayan her iki vektör de aynı olduğundan quaternion düzlemleri aynı olacak, dolayısı ile bu düzlemlere dik birim vektörler ise birbirlerine paralel olacaktır. Dolayısı ile iki quaternionun versörleri arasındaki tek fark yön farkı olacaktır.

$$q' = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta \cdot \mathrm{U}\beta \times \mathrm{U}\alpha \qquad (5.52a)$$

$$q = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{U}\beta}{\mathrm{U}\alpha} \qquad (5.52b)$$

Versörler arasındaki tek fark yön farkı olacağına göre

$$\frac{\mathrm{U}\beta}{\mathrm{U}\alpha} = -\mathrm{U}\beta \times \mathrm{U}\alpha \qquad (5.52c)$$

yazılabilir. Elde ettiğimiz bu sonucu 5.52a ve 5.52b eşitlikleri ile birleştirirsek,

$$q = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} \cdot \left(-\mathrm{U}\beta \times \mathrm{U}\alpha\right) \qquad (5.52d)$$

$$\mathrm{U}\beta \times \mathrm{U}\alpha = \frac{1}{\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta} \cdot q' \qquad (5.52e)$$

$$q = -\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} \cdot \frac{1}{\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta} \cdot q' = -\frac{1}{(\mathrm{T}\alpha)^2} \cdot \beta \times \alpha = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (5.52f)$$

elde edilir. Bu bize bir α vektörünü β vektörüne çevirecek olan quaternionun, bu vektörlerin çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini verir. Dolayısı ile pratikte hesaplanması zor görünen bir vektör bölme işlemi basitleştirilmiş olur.

5.4.2 Yeni Tekniğin 3-Boyutlu Döndürme İşleminde Kullanılması

Üçüncü bölümden hatırlanacak olursa, iki quatenionun birbirine eşit olması için üç temel kural vardı. Bunlar :

- Vektörlerin boylarının oranlarının eşit olması,
- Vektörlerin birbirlerine paralel düzlemlerde bulunması ve
- Düzlem üzerindeki döndürme açısının eşit olması idi.

Üç boyutlu bir cismi ele alırsak, ve bu cismin üzerindeki her noktayı uzayda kabul edeceğimiz ve döndürme ekseni üzerinde bulunan bir noktayı başlangıç noktası kabul ederek tanımlarsak, ilk şart işlem sadece bir döndürme işlemi olduğundan sağlanmaktadır. Üçüncü bir madde ise, cismin şekil değiştirmesi gibi bir işlemle ilgilenmediğimizden zaten geçerli olacaktır. Ancak ikinci şart cisim noktalarının hepsinin aynı düzlemde olması gibi bir sonuç getirmektedir ki bu üç boyutlu bir cisim için sağlanması mümkün olmayan bir durumdur.

Sonuç olarak bu yöntem ile aynı düzlem üzerinde çok fazla noktaya sahipsek, bir tek quaternion değeri ile çarpma yöntemi, döndürme işleminde önemli bir ölçüde kazanç sağlamaktadır.

5.4.3 Cisim Döndürme İşleminde Üç Yöntemin Kıyaslanması

Cisimlerin bir eksen etrafında döndürülmesini, döndürme ekseninin uzayı tanımladığımız birim vektörlerden biri ile çakışık olduğu ve döndürme ekseninin birim vektörlerden herhangi biri ile çakışık olmadığı durumlar için inceleyelim.

Eğer döndürme eksenimiz herhangi bir birim vektör ile çakışık ise, 4x4'lük transformasyon matrisimizin 11 adet elemanı 0 değerine sahip olacaktır. Bu çarpma için işlemcinin hiç zaman harcamayacağı anlamına gelecektir. Dolayısı ile işlem anında sadece 4 adet çarpma ve 2 adet toplama ile noktamızın yeni yeri tesbit edilecektir. Aynı durum için quaternion yöntemi minimum 12 adet çarpma ve 6 adet toplama ile sonuca ulaşmaktadır. Ancak eğer döndürme eksenimiz herhangi bir birim vektörümüz ile çakışık değilse bu durumda matris yönteminde 16 adet çarpma ile sonuca gidilebilmekte, ayrıca eksenlerin çakıştırılması gibi bir işlem sözkonusu olduğundan ikinci bir transformasyon matrisi de hesaba katılmaktadır ki bu işlem sayısını daha da arttırmaktadır. Buna karşılık quaternion metodu ile yine 12 çarpma işlemi ile sonuca gidilebilmektedir.

Eğer yukarıda bahsedilen quaternion metodu kullanılırsa, bir nokta için işlem miktarı 9 adet çarpma ve 9 adet toplama işlemine dönüşmektedir ve en

kazançlı olan gibi görülmektedir. Ancak dikkat edilmesi gereken husus, bu yöntemde kullanılabilecek quaternion değerinin hesaplanması için her düzlemde en az bir noktanın döndürüldükten sonraki yerinin tesbit edilmesinin gerektiğidir. Bu işlem için ise 15 adet çarpma yapılması gereklidir.

Bu sonuçlarla diyebiliriz ki, eğer döndürme eksenlerimiz birim vektörlerimiz ile çakışıyorsa en hızlı yöntem matris yöntemi, eğer eksenlerimiz birim vektörlerimiz ile çakışmıyorsa bu durumda en hızlı yöntem quaternion yöntemidir. Eğer amacımız bir düzlem üzerindeki çok sayıda noktanın herhangi bir döndürme eksenine göre döndürülüp yeni yerlerinin hesaplanması ise, en hızlı yöntem bu konunun ilk alt bölümünde anlatılan quaternion yöntemi olacaktır.

Karmaşık döndürme işlemleri söz konusu ise bu durumda döndürme eksenleri birim vektörler ile çakışık olsa bile transformasyon matrisindeki 0 olan eleman sayısında azalma olacağından yapılacak çarpma adedi artacak, dolayısı ile quaternion metodu yine daha hızlı duruma gelecektir.

5.5 CİSİM MODELLEME

Quaternionu bir vektörün, diğer bir vektöre dönüştürülmesi için gerekli operatör olarak da tanımlayabiliriz. Bunun bir sonucu olarak uzayda bir noktayı bir quaternion olarak tanıtmak iki şekilde olabilir.

1- Bir $\mathrm{P}=(x,y,z)$ noktasını $q=xi+yj+zk+0$ olarak ele almak,

2- Kabul edeceğimiz bir birim vektörün başlangıç noktasından P noktasına çizilebilecek bir vektöre dönüştürecek quaternion değerinin hesaplanması ile mümkündür.

Birinci metod ile nokta, merkezden noktaya tanımlı bir vektör olarak kabul edilmiştir. Bu metod kartezyen koordinat sisteminden bağımsız bir ifade haline getirilemediği için, kartezyen koordinat sisteminden tek farkı datanın bir manyetik ortamda saklanmasındaki alan kaybı olacaktır. Bu ise bize bir avantaj yerine sadece dezavantaj getirecektir.

İkinci metodda ise birim vektörün nasıl tanımlanacağı önem kazanmaktadır. Örneğin $u=xi$ şeklinde bir birim vektör ele alırsak bu durumda her noktanın bu vektöre göre tanımlanması gerekmektedir. Bu işlem ise bir öteleme halinde geçerliliğini kaybedeceğinden gerçek bir modelleme ifadesi tanımlamayacaktır. Açıktır ki, elde edilmesi gereken, cismin yer değiştirmesinden etkilenmeyecek bir modelleme tekniğidir. Çünkü amaç quaternionlar ile modellemek ise, bu modelin

döndürme ve öteleme gibi temel fonksyonları yerine getirebilmesi gerekmektedir. İşte bu noktada bir ikinci yöntem olarak cisim üzerinde bir noktayı başlangıç noktası kabul etmekle elde edilir. Bu durumda örneğin cisim bir eksen üzerinde bir miktar ötelendiyse, bu cisme ait bir koordinat sisteminin ötelendiğini kabul etmek gerekmektedir. Cismin herhangi bir kenarı üzerinde bir birim vektör alıp, diğer tüm kenarları bu birim vektörler olarak ele alırsak cismi, cisme ait koordinat sistemi merkezinin, gerçek koordinat sistemine olan koordinatları ile her nokta için bir quaternion tutarak cismi modelleyebiliriz. Bu ilk yöntemdeki dezavantajları ortadan kaldırmakta, ancak noktanın $q = (0, \mathrm{V}q)$ eşitliği ile ele alınmasından daha fazla bir avantaj sağlamamaktadır.

5.6 PROJEKSİYONLAR

Bu bölümün önceki konularında kısaca tanımını verdiğimiz projeksiyonlar arasında aksonometrik projeksiyon çeşitleri quaternionlar ile gerçeklenebilecek görüntüdedir. Bunun sebeb,i aksonometrik projeksiyonların her çeşidinde (trimetrik, dimetrik ve izometrik) temel olarak döndürme işlemlerinin yer almasıdır. Bu projeksiyonlar arasında trimetrik projeksiyon en genel olanıdır. Dolayısı ile sadece trimetrik projeksiyonları incelememiz yeterli olacaktır.

Cismin y ekseni etrafında ϕ, ve daha sonra x ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülüp z ekseni üzerindeki değerinin sıfırlanması ile elde edilir. Dönüşüm matrisi yöntemi ile bu işlem için eşitlik 5.53 ile verilen 4×4 matrisi kullanılır.

$$T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.53)$$

Aynı işlem quaternionlar ile de gerçeklenebilir. Eğer merkezden noktamıza olan vektör v ise ve y ekseni etrafında dönmeyi sağlayan quaternion q_y ve x ekseni etrafında dönmeyi sağlayan quaternion q_x ise eşitlik 5.54 ile tanımlanan vektörün x ve y koordinatları bize ekrandaki x ve y koordinatlarını verecektir.

$$q_x(q_y v q_y^{-1})q_x^{-1} = (q_x q_y)v(q_x q_y)^{-1} \qquad (5.54)$$

Bu eşitlikteki q_x ve q_y için eşitlik 5.55a ve eşitlik 5.55b yazılabilir.

$$q_x = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \qquad (5.55a)$$

$$q_y = \cos\frac{\phi}{2} + j\sin\frac{\phi}{2} \qquad (5.55b)$$

Bu durumda bizim $q_x q_y$ ve $(q_x q_y)^{-1}$ değerlerini elde etmemiz projeksiyonu quaternionlar ile uygulamamız için yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} q_x q_y &= \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\phi}{2} + j\sin\frac{\phi}{2}\right) \\ &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + j\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} + k\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \end{aligned} \qquad (5.56a)$$

$$\begin{aligned} (q_x q_y)^{-1} &= \left(\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\phi}{2} + j\sin\frac{\phi}{2}\right)\right)^{-1} \\ &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - j\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} - k\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \end{aligned} \qquad (5.56b)$$

Elde ettiğimiz bu iki quaternion kullanılarak istenilen aksonometrik projeksiyon quaternion metodu ile uygulanabilir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1843 yılında Sir William HAMILTON tarafından tanımlanan quaternionlar hakkında yapılmış olan araştırmalar, son on sene içinde bilgisayar teknolojisinin çok hızlı gelişmesi ile birlikte, bilgisayarda grafik ve animasyonun ön plana çıktığı günümüzde, hızla yükselen bir grafik çizmektedir. Bir çok grafik problemi dört boyuta geçildiğinde daha kolay ve çok daha hızlı çözülebilmektedir. Bu ise zaman içinde, üç boyuttan dört boyuta geçişin bir habercisidir.

Bu tez ile quaternionlar hakkında bilgi verilmeye çalışılmış, günümüze kadar yapılmış bazı araştırmaların sonuçları verilmiş, quaternionların bize sağladığı avantaj ve dezavantajlar değerlendirilmiştir. Bu tez ile hedeflenen, çok uzun bir zaman diliminde çok az miktarda yapılmış olan araştırma ve çalışmaları bir araya getirmek, quaternionlar ile modelleme ve projeksiyon metodları geliştirip bunların avantaj ve dezavantajlarını değerlendirmek ve quaternionlar konusunda gelecekte yapılacak araştırma ve geliştirmelere bir kaynak oluşturmaktır.

Bu tezin beşinci bölümü tamamı ile quaternionların bilgisayarda kullanımına ayrılmış, bir düzlem üzerindeki birçok noktanın quaternion yardımı ile döndürülmesi amacı ile bir metod geliştirilmiş, bu metodun aynı düzlem üzerinde birçok nokta için döndürme işlemi yapılırken avantaj getirirken, farklı düzlemlerdeki noktalar için döndürme işleminde kullanılmasının dezavantaj getirdiği tesbiti yapılmıştır. Ayrıca üretilen iki ayrı modelleme yönteminin işlem hızı açısından bir fayda sağlamazken veri saklamada dezavantaj getirdiği, buna karşılık çeşitli projeksiyon metodlarında kullanılmasının ise avantaj sağladığı gözlemlenmiştir. Çok düzlemli, üç boyutlu bir cisimin döndürülmesinin quaternionlarla nasıl çözümlenebileceği ve sanal gerçeklikte hareketin yumuşatılması için quaternionlardan nasıl faydalanabileceği konuları ise yine bu bölümde incelenmiş ve sağladığı avantajlar tesbit edilmiştir.

Bu tezde araştırılan bilgisayarda grafik konuları dışında daha birçok konuda quaternionlar konusuna rastlamak mümkündür. Bu tezin gelecekte bilgisayarda grafik konularına yeni bir temel teşkil edeceğine inandığım quaternionlar üzerine, modellemeden aydınlatmaya tüm grafik konularında geliştirme çalışmalarına temel oluşturacağını ümit ediyorum.

KAYNAKLAR

[1] **HARDY, A.S.** Elements of Quaternions, Ginn&Company, 1881.

[2] **HAMILTON, Sir W.R.** Quaternions, Chelsea Publishing Company, Volume 1, 1969.

[3] **THOMAS, G. B.** Calculus & Analytic Geometry, Arkadaş Yayınları, 1986.

[4] **ROGERS, D. F., ADAMS J. A.** Mathematical Elements For Computer Graphics

[5] **ERKMAN, G., TUNALI, F.** A 3D Animation and The Use of Quaternions for Orientation Interpolation, International Symposium on Computer and Information Sciences VII, 1992, pp.627-630.

[6] **KIM, M. J., HSIEH, C. C., WANG, M. E. ,WANG, C.K. , FANG, Y.C. , WOO. T.C.** Noise Smoothing For VR Equipment In The Quaternion Space

EK - A

LETTERS DESCRIBING THE DISCOVERY OF QUATERNIONS

Letter from Sir W. R. Hamilton to Rev. Archibald H. Hamilton.

Letter dated August 5, 1865.

MY DEAR ARCHIBALD - (1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on QUATERNIONS: and such now presents itself, by your mentioning in your note of yesterday, received this morning, that you ``have been reflecting on several points connected with them" (the quaternions), ``particularly on the Multiplication of Vectors."

(2) No more important, or indeed fundamental question, in the whole Theory of Quaternions, can be proposed than that which thus inquires What is such MULTIPLICATION? What are its Rules, its Objects, its Results? What Analogies exist between it and other Operations, which have received the same general Name? And finally, what is (if any) its Utility?

(3) If I may be allowed to speak of myself in connexion with the subject, I might do so in a way which would bring you in, by referring to an ante-quaternionic time, when you were a mere child, but had caught from me the conception of a Vector, as represented by a Triplet: and indeed I happen to be able to put the finger of memory upon the year and month - October, 1843 - when having recently returned from visits to Cork and Parsonstown, connected with a meeting of the British Association, the desire to discover the laws of the multiplication referred to egained with me a certain strength and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and

yourself, used to ask me, ``Well, Papa, can you multiply triplets"? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: ``No, I can only add and subtract them."

(4) But on the 16th day of the same month - which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy - I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse - unphilosophical as it may have been - to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the session: which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.

With this quaternion of paragraphs I close this letter I.; but I hope to follow it up very shortly with another.

Your affectionate father,
WILLIAM ROWAN HAMILTON.

Extract from a letter from Sir W. R. Hamilton to Professor P.G. Tait.

Letter dated October 15, 1858.

. . . P.S. - To-morrow will be the 15th birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on [Monday] the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge, which my boys have since called the Quaternion Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought close; and the sparks which fell from it were the fundamental equations between i, j, k; exactly such as I have used them ever since. I pulled out on the spot a pocket-book, which still exists, and made an entry, on which, at the very moment, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a problem to have been at that moment solved - an intellectual want relieved - which had haunted me for at least fifteen years before.

Less than an hour elapsed before I had asked and obtained leave of the Council of the Royal Irish Academy, of which Society I was, at that time, the President - to read at the next General Meeting a Paper on Quaternions; which I accordingly did, on November 13, 1843.

Some of those early communications of mine to the Academy may still have some interest for a person like you, who has since so well studied my volume, which was not published for ten years afterwards.

In the meantime, will you not do honour to the birthday to-morrow, in an extra cup of - ink? for it may be obsolete now to propose XXX, or even XYZ.

Note: Robert P. Graves notes in his biography of Hamilton that `Brougham Bridge', referred to by Hamilton in his letters regarding the discovery of quaternions, is properly referred to as Broome Bridge: so called from the name of a family residing near.

EK - B

QUATERNİONLAR ÜZERİNE ÇEŞİTLİ KAYNAKLAR

Bu bölümde internet üzerinden, kitaplardan ve yayımlanmış çeşitli yazılardan bir kısmı kısa bir bilgi olarak verilmiştir. Eğer istenirse listenin tamamı benden veya Prof. Füsun Selçuk'tan sağlanabilir.

EK B.1 İNTERNET

- Letters describing the Discovery of Quaternions

http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Letters/BroomeBridge.html

Letter from Sir W. R. Hamilton to Rev. Archibald H. Hamilton. . Letter dated August 5, 1865. MY DEAR ARCHIBALD - (1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on (See also Similar Pages)

- William Rowan Hamilton

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Hamilton.html

- Tom Holroyd's Fractal Folder (Quaternion Fractals)

http://bambi.ccs.fau.edu/~tomh/fractals/fractals.html

- How-to: Quaternions (Julia Sets in 4D)

http://www.krs.hia.no/~fgill/quatern.html

- John Puterbaugh's Home Page (Quaternions & Discovery of Quaternions)

http://www.music.princeton.edu/~john/

- SRC Modula-3: Modules (Quaternion Functions and Procedures)

http://www.research.digital.com/SRC/m3sources/html/href/M3_106.html

- Qaternion Bibliography

http://www.pd.uwa.edu.au/Keith/quatern.bib

EK B.2 KİTAPLAR

Quaternion konusu üzerinde Internet bağlantısı olan tüm dünya kütüphanelerinde yapılan araştırmada bugüne kadar basılmış olan quaternion konusu ile ilgili kitaplarınküçük bir bölümü hakkında bilgi aşağıda verilmiştir. Bu kitapların genellikle çok zor bulunan, veya konunun temelinin 1843'lere dayanması ve çok az sayıda kişinin ilgilenmesi nedeni ile artık basımı durdurulmuş kitaplardır.

Başlık	: Elements of Quaternions, ikinci baskı ; İki Cilt
Yazar	: William Rowan Hamilton
Yayınevi	: Longmans, Green and Co.
Basım Tarihi	: 1869
Başlık	: Elements of Quaternions
Yazar	: William R. Hamilton
Yayınevi	: Chelsea Pub Co
Basım Tarihi	: Mart 1969
Başlık	: Sir William Rowan Hamilton
Yazar	: Thomas L. Hankins
Yayınevi	: Johns Hopkins University Press
Basım Tarihi	: 1980
Başlık	: Rotations, Quaternions, and Double Groups
Yazar	: Simon L. Altman
Yayınevi	: Oxford University Press
Basım Tarihi	: 1986
Başlık	: The concept of number: from quaternions to monads and topological fields
Yazar	: Benno Artmann, H.B. Griffiths
Yayınevi	: Ellis Horwood Halsted Press
Basım Tarihi	: 1988
Açıklama	: Translated with additional exercises and material by H.B. Griffiths
Başlık	: Chaotic Dynamics Theory and Practice , On the quaternionic Julia sets
Yazar	: Peter Petek
Yayınevi	: Plenum Press
Basım Tarihi	: 1992
Başlık	: Division Algebras : Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics (Mathematics and Its Applications, Vol 290)
Yazar	: Geoffrey M.Dixon
Yayınevi	: Kluwer Academic Pub
Basım Tarihi	: Eylül 1994

EK B.3 SÜRELİ YAYINLAR

Başlık	: The Quaternion Calculus
Yazar	: Cipher A. Deavours
Yayın Adı	: Am. Math. Monthly , cilt:80
Yayın Tarihi	: 1973
Sayfa No	: 995-1008
Başlık	: Quaternionic Analysis
Yazar	: Anthony Sudbery
Yayın Adı	: Proc. Camb. Phil. Soc. , cilt:85
Yayın Tarihi	: 1979
Sayfa No	: 199-225
Başlık	: Quaternion Algebra for Three-Dimensional Computer Graphics and Modeling
Yazar	: D.S. Richardson
Yayın Adı	: Australian Computer and Science Community
Yayın Tarihi	: Şubat 1983
Sayfa No	: 109-120
Başlık	: Quaternions in Computer Vision and Robotics
Yazar	: Edward Pervin, Jon A. Webb
Yayın Adı	: Computer Vision and Image Processing
Yayın Tarihi	: Haziran 1983
Sayfa No	: 382-383
Başlık	: Quaternion Splines for Animating Orientation
Yazar	: T. Duff
Yayın Adı	: Proceedings of the USENIX Association Second Computer Graphics Workshop
Yayın Tarihi	: 1985
Sayfa No	: 54-62
Başlık	: Animating Rotation with Quaternion Curves
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Computer Grapihcs (SIGGRAPH '85 Proceedings)
Yayın Tarihi	: Temmuz 1985
Sayfa No	: 245-254
Başlık	: Quaternion Calculus and Fast Animation, Computer Animation: 3-D Motion Specification and Control
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: SIGGRAPH 1987 Tutorial
Yayın Tarihi	: 1987
Sayfa No	: 101-121
Başlık	: Faster Phong shading via angular interpolation
Yazar	: A.A.M. Kuijk, E.H. Blake
Yayın Adı	: Computer Grapihcs Forum
Yayın Tarihi	: Aralık 1989
Sayfa No	: 315-324

Başlık	: Quaternion calculus as a basic tool in computer graphics
Yazar	: Daniel Pletinckx
Yayın Adı	: The Visual Computer
Yayın Tarihi	: Mart 1989
Sayfa No	: 2-13
Başlık	: Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals
Yazar	: John C. Hart and Daniel J. Sandin and Louis H. Kauffman
Yayın Adı	: Computer Graphics , cilt:23 , sayı:3
Yayın Tarihi	: 1989
Sayfa No	: 289-96
Başlık	: ARCBALL: A user interface for specifying three-dimensional orientation using a mouse
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Proceedings of Graphics Interface '92
Yayın Tarihi	: Mayıs 1992
Sayfa No	: 151-156
Başlık	: Arcball Rotation Control
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Graphics Gems IV
Yayın Tarihi	: 1994
Sayfa No	: 175-192
Başlık	: Euler Angle Conversion
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Graphics Gems IV
Yayın Tarihi	: 1994
Sayfa No	: 222-229
Başlık	: Fiber Bundle Twist Reduction
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Graphics Gems IV
Yayın Tarihi	: 1994
Sayfa No	: 230-236
Başlık	: Polar Matrix Decompositon
Yazar	: Ken Shoemake
Yayın Adı	: Graphics Gems IV
Yayın Tarihi	: 1994
Sayfa No	: 207-221
Başlık	: Quaternion frame approach to steramline visualization
Yazar	: A.J. Hanson, Hui Ma
Yayın Adı	: IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics
Yayın Tarihi	: Haziran 1995
Sayfa No	: 164-174

ÖZGEÇMİŞ

Kanat Gezgen, 1972 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Kadıköy Anadolu Lisesinde yaptı. 1989 yılında İ.T.Ü. Elektrik ve Elektronik Fakültesi Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümüne girdi. 1993 yaz yarıyılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Bilgisayar programında yüksek lisans eğitimi yapmaya hak kazandı.