2255

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ İNŞAAT FAKÜLTESİ

KALINLIĞI SINIRINA DİK DOĞRULTUDA DEĞİŞEN YARIM DÜZLEM PROBLEMLERİ

İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesince «Doktor» payesinin tevcihi için kabul edilen tezdir.

Y.Müh. Yavuz ÖNDER

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 17 Aralık 1971
Tezin Müdafaa Edildiği Tarih : 6 Mart 1972

Doktorayı Yöneten Profesör : Prof. Dr. Sacit TAMEROĞLU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. İlhan KAYAN
Prof. Dr. Enver ÇETMELİ

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT FAKÜLTESİ MATBAASI
1972

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Bu çalışmayı yöneten sayın hocam Prof.Dr.Sacit Tameroğlu'na, çalışmalarım boyunca yakın ilgi, değerli fikir ve yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr. Erdoğan Şuhubi'ye, Doç.Dr.Tekin Özbek'e ve Doç.Dr. Mithat İdemen'e burada teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

•

Diyagramların çiziminde emeği geçen kıymetli arkadaşım Y.Müh.Altok Kurşun'a da teşekkür ederim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET I

SUMMARY III

BÖLÜM 1. GİRİŞ
§1.1. Konu ve Tarihçe 1
§1.2. Kabuller 2
§1.3. Temel Denklemler 3

BÖLÜM 2. KALINLIĞI SINIRINA DİK DOĞRULTUDA HİPERBOLİK OLARAK DEĞİŞEN YARIM DÜZLEM PROBLEMİ
§2.1. Problemin Tanımlanması 7
§2.2. Diferansiyel Denklemin Çözümü ve Gerilme Fonksiyonunun Elde Edilmesi 8
§2.3. P Yüklemesi Hali 13
§2.31. Sınır Şartlarının Uygulanması . 13
§2.32. Gerilme İfadeleri 16
§2.33. Şekil Değiştirme İfadeleri . . 18
§2.34. Yer Değiştirme İfadeleri. . . . 18
§2.35. Gerilme ve Yer Değiştirmeler İçin Ters Transformasyonlar . . 26
§2.36. Sayısal Uygulama ve Diyagramlar 42
§2.4. Q Yüklemesi Hali 43
§2.41. Sınır Şartlarının Uygulanması . 43
§2.42. Gerilme İfadeleri 45
§2.43. Şekil Değiştirme İfadeleri . . 46
§2.44. Yer Değiştirme İfadeleri. . . . 46
§2.45. Gerilme ve Yer Değiştirmeler İçin Ters Transformasyonlar . . 49
§2.46. Sayısal Uygulama ve Diyagramlar 50

BÖLÜM 3. KALINLIĞI, BİR CİVARINDA KÜÇÜK DEĞİŞİMLER GÖSTEREN YARIM DÜZLEM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

§3.1. Kalınlığı Bir Civarında Küçük Değişimler Gösteren Yarım Düzlem Problemlerinin Çözümü İçin Genel Bir Pertürbasyon Metodu 53
§3.2. Örnek ve Sayısal Uygulamalar . 56
§3.21. P Yüklemesi 57
§3.22. Q Yüklemesi 64

SONUÇLAR 71

EK 1. SABİT KALINLIKLI LEVHA PROBLEMİNİN FOURIER TRANSFORMASYONU İLE ÇÖZÜMÜ 73

EK 2. FILON SAYISAL INTEGRASYON METODU HAKKINDA KISA BİLGİ. 83

KAYNAKLAR 85

HAL TERCÜMESİ 88

Ö Z E T

Bu çalışmada, kalınlığı değişen levhaların elâstisite teorisinde, bazı yarım düzlem problemleri incelenmiştir. Çalışma esas olarak,üç bölüm halinde sunulmuştur.

Birinci bölümün ilk kısmında, kalınlığı değişen levha problemleri hakkında kısa bir tarihçe ve bibliyografya verilerek konu ana hatları ile açıklanmıştır. Bundan sonra klâsik elastisitede yapılan kabuller kısaca gözden geçirilmiş ve kalınlık değişiminin getirdiği ek kabul üzerinde durulmuştur.Bu bölümün son kısmında elastisitenin genel denklemleri ve özellikle kalınlığın değişimi halinde tamamen farklı bir biçim alan uygunluk şartı hakkında kısa bir özetleme yapılmıştır. Bu çalışmanın temel denklemini teşkil etmesi bakımından,kalınlığın sadece bir doğrultuda değişmesi halinde uygunluk şartının alacağı özel hal de ayrıca verilmiştir.

İkinci bölümde kalınlığın, sınıra dik doğrultuda $f(y)= 1/(A+By)$ şeklinde değişmesi hali incelenmiştir. Bu kalınlık değişimi, uygunluk şartını bir hayli kısaltmakta ve çözümü ν Poisson oranından bağımsız kılmaktadır. Bu bölümde, birincisi yarım düzlem sınırına dik, ikincisi sınır doğrultusunda birer tekil yükten ibaret olan iki esas yükleme ayrı ayrı ele alınmıştır. Çözüm metodu olarak Fourier Transformasyonundan yararlanılmıştır. Ancak, Gerilme ve Yer Değiştirme ifadelerinde geçen fonksiyonların ters transformasyon integralleri büyük matematik güçlükler gösterdiklerinden kapalı olarak yapılamamışlardır. Bu durumdan dolayı gerilmeler için sayısal integrasyon metodlarına başvurularak elde edilen sonuçlar çeşitli kesitler üzerinde diyagramlarla gösterilmiş, buna karşılık yer değiş - tirme ifadeleri için sadece $(A/B)\to\infty$ halindeki limit-

lerin klâsik çözümle üstüste düştüğü gösterilmekle yetinilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında, kalınlığı birim civarında küçük değişimler gösteren ve bu değişi - min küçük bir ε parametresi ile karakterize edil- diği, yarım düzlem problemlerinin çözümü için bir pertürbasyon metodu teklif edilmiş ve bu metoda ait pertürbasyon denklemleri çıkarılmıştır. Aynı bölüm- de örnek olarak kalınlığı $f(y) = 1 + \varepsilon e^{-by}$ şeklinde değişen bir yarım düzlem problemi, Bölüm 2 deki iki esas yükleme için çözülmüş ve gerilme diyagramları bölümün sonuna eklenmiştir.

Çalışmanın sonunda iki ek bölümü yer almakta- dır. Ek.1 de ikinci ve üçüncü bölümdeki problemle- rin sabit kalınlıklı levha halindeki çözümleri yi- ne Fourier Transformasyonları kullanılarak yapıl - mıştır. Bu bölümün sonuçları ve bazı ara ifadeleri, önceki iki bölümde limit kontrolları için sık sık kullanılmıştır. Ek 2 de ise bütün çalışma boyunca birçok defa kullanılan Filon'un sayısal integras- yon metodu hakkında kısa bilgi verilmiştir.

S U M M A R Y

In this study, some of the problems of semi-infinite elastic plates with varying thickness are discussed. The work is presented in three chap - ters.

The first section of the first chapter is devoted to a literature survey related to problems of plates with varying thickness, and a brief outline of the study is given. Hypotheses of classical theory of elasticity supplemented by another condition necessitated by the variation of thickness are reviewed. In the last part of the chapter the general equations of theory of elasticity, and especially the compatibility condition which differs considerably in the case of varying thickness, are outlined. As the fundamental equation of the present work the special form of the compatibility condition corresponding to the thickness variation in a single direction is provided.

The second chapter concerned with the problems of semi-infinite plane with the thickness varying in accordance with the expression $f(y)=1/(A+By)$ in the direction perpendicular to the boundary. This type of variation of thickness simplifies the compatibility condition and renders this equation and its solution independent of Poisson's ratio ν . Two loadings consisting of only concentrated forces, are examined separately. In the first loading the force is taken perpendicular to while in the second in the direction of the boundary line. Fourier transformation is used as the method of solution. Since the evaluation of integrals of inverse transformation involved in stress and displacement expressions presents great mathematical

difficulties they could not be done explicitly. Therefore the results for stresses, obtained through the use of the numerical integration methods, are shown on diagrams. Hovewer; only coincidence of limits for $(A/B) \to \infty$ with the classical solution, are verified for the displacements.

In the first section of the third chapter a perturbation method for the solution to some of problems of semi-infinite plane, the thickness of which displays small variations about unity characterized by a small parameter ε , is suggested and the related perturbation equations are developed. In the later parts of the chapter, a semi-infinite plane problem, with the thickness varying according to the expression $f(y) = 1 + \varepsilon e^{-by}$ is solved for the two loadings same as in Chapter 2.The stresses are shown in two diagrams.

Two appendices complete the present study.In Appendix 1, the problem of semi-infinite plane of constant thickness, under two loadings same as in the two preceding chapters, are solved using Fourier Transformations. Some expressions and results have been used frequently for checking related limits in those two chapters. In Appendix 2 a short account of Filon's numerical integration method, used repeatedly throughout the study , is given.

B Ö L Ü M 1

GİRİŞ

§1.1. Konu ve Tarihçe

Düzlemsel taşıyıcı sistemler, yükleme durumlarına göre iki esas gruba ayrılabilir. Bunların ilki ortalama düzlemine dik yükleri taşıyan plâklar, ikincisi ise yalnız düzlemi içinde yükleri taşıyan levhalardır. Birinci gruba giren ve geniş bir uygulama alanı bulan plâklar hakkında gerek sabit, gerek değişken kalınlıklı hallerde yapılan çalışmalar bir hayli fazla sayıdadır. İkinci gruptaki elemanlardan kalınlığı sabit olanlar da işlenmiştir.

Kalınlığı değişen levha problemleri polar ve karteziyen koordinatlarda ayrı ayrı, çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Kalınlığı değişen levha problemleri üzerinde ilk çalışma A.Föppl ve L.Föppl tarafından [1] yapılmıştır. Bu eserde kalınlığın değişmesi halinde diferansiyel denge denklemleri ve bunlara bağlı olarak bir gerilme fonksiyonu kavramı incelenmiş ve kalınlığı radyal doğrultuda değişen dönen disk problemi örnek olarak çözülmüştür. 1959 yılında Conway,[2] de radyal gerilme alanıyla ilgili denklemlerden hareket ederek basit eğilmeye maruz değişken kalınlıklı bir daire segmanına ait gerilme problemini çözmüştür. Aynı yazar [3] de karteziyen koordinatlarda değişken kalınlıklı bir kare levhada gerilme problemini incelemiştir. W.Vocke, 1961 tarihinde yayınlamış olduğu bir çalışmasında, [4] daha önce bulunmuş olan genel denklemler üzerinde çalışmış ve bir yönde kalınlık değişimi halinde karteziyen koordinatlarda bir dikdörtgen levha problemini, çeşitli yükleme hallerinde incelemiştir. Aynı yıl içinde

E.S.Şuhubi [5] de, [2] de verilen bazı özelliklerden faydalanarak bir ucu ankastre, daire eksenli , kalınlığı radyal değişen kiriş problemini uçtan moment ve tekil yük hallerinde çözümlemiştir.Aynı yazar 1963 de yayınlanan başka bir çalışmasında [6] , bir dikdörtgen levha problemini, kalınlığın yavaş değişiminden yararlanarak yaklaşık bir me - todla çözümlemiştir. Vocke [7] de, kalınlığı açı-ortay doğrultusunda değişen kama problemini polar koordinatlarda incelemiş ve tepe açısını π ye götürerek limit halde yarım düzleme geçmiştir.Polar koordinatlarda ele alınan kama problemlerinden yarım düzleme limit olarak geçişler, kalınlığın radyal değişiminde yalnız kama tepesinden çok özel yükleme hallerinde mümkün olmaktadır;açı ortay doğrultusunda kalınlık değişimi halinde ise yalnız özel bir kaç kalınlık değişimi incelenebilmiştir.Aynı yazar,kalınlığı değişen levhalar üzerindeki çalışmalarını 1966 da bir kitap halinde yayınlamıştır [8].Bu kitapta kalınlığı değişen levhaların elastisite teorisinde oldukça çeşitli problemler ve uygulamalar yer almıştır.Bunlar arasında yarım düzlem problemi olarak polar koordinatlarda r^n tipi kalınlık değişimi hali ve [7] de bahsedilen tipte çalışmalar sayılabilir. Bunlar dışında kenarından periyodik yüklü yarım düzlem problemi, yüksekliği sonsuza götürülen bir kirişin limit hali olarak incelenmiştir. Bütün bu çözümler yukarıda belirtildiği gibi çeşitli özellikler taşımaktadır.

Bu çalışmada kalınlığı sınıra dik doğrultuda belirli bir kanuna göre, azalarak değişen yarım sonsuz düzlem problemi, farklı iki kalınlık değişimi için ayrı ayrı ele alınmış ve sınırda tekil yük tipinde iki esas yükleme için çözümleri verilmiştir.

§1.2. Kabuller

Sabit kalınlıklı levhalarla ilgili elastisite problemlerinde yapılan kabuller, kalınlığı değişen

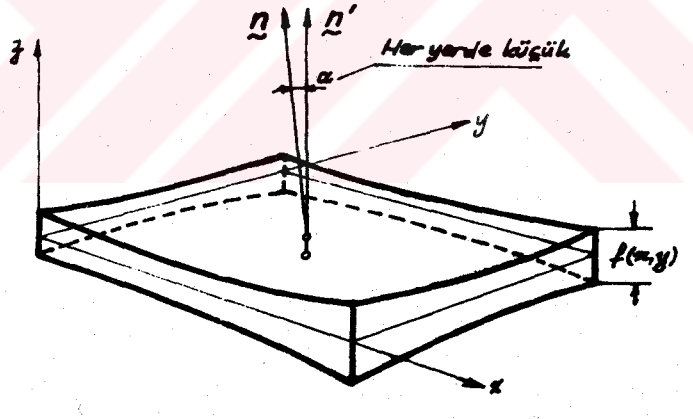
levhalarda da aynen geçerli olacaktır.Bunlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

a) Levha malzemesi homogen, izotrop ve lineer elastiktir.

b) Yer değiştirmeler ve şekil değiştirmeler cismin boyutları yanında küçüktür.

Levha kalınlığının değişken olması bu kabullere ek olarak aşağıdaki kabulü getirir.

c) Levha yüzeyinin normali $\underset{\sim}{n}$ ile ortalama düzlemin normali $\underset{\sim}{n}'$ arasındaki açı her yerde küçüktür (Şekil 1.2.1). Bu son şartın daha pratik bir ifade şekli kalınlığın yavaş değiştiğini belirtmek olabilir.



Şekil 1.2.1

§1.3. Temel Denklemler

Elastisitenin temel denklemleri denge denklemleri, gerilme-şekil değiştirme bağıntıları (Hooke Kanunları), yerdeğiştirme-şekil değiştirme bağıntıları ve şekil değiştirmeler arasındaki uygunluk şartlarından ibarettir.

Bu denklemlerin kalınlığı değişen levha problemindeki karşıtları aşağıda verilmiştir [8]. Buna göre denge denklemlerini, X ve Y kütle kuvvetlerini göstermek üzere,

$$\frac{\partial}{\partial x}(f\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f\tau_{xy}) = -Xf$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(f\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(f\sigma_y) = -Yf \qquad (1.3.1)$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad (1.3.2)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

yerdeğiştirme-şekil değiştirme bağıntılarını,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \qquad (1.3.3)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada görülen ilginç bir bir özellik, gerilmelerle kalınlık fonksiyonunun çarpımının, klâsik elastisitede gerilme ifadelerinin sağladığı denge bağıntılarını sağlaması ve bunun yanısıra gerilme-şekil değiştirme ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntılarında hiçbir değişme olmamasıdır. Bu özellik, kalınlığı yavaş değişen levhaların elastisitesinde de gerilme fonksiyonunun kullanılabileceğini göstermektedir. Gerçekten gerilme fonksiyonu

$$\sigma_x = \frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$
$$\sigma_y = \frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad (1.3.4)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

bağıntılarıyla işin içine sokulabilir.$(1.3.3)_a$ ifadesini y ye,$(1.3.3)_b$ ifadesini x e,$(1.3.3)_c$ ifadesini x ve y ye göre ikişer defa türeterek

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \qquad (1.3.5)$$

uygunluk şartı elde edilir. Şimdi $(1.3.4)_{a-c}$ ifadelerinin $(1.3.2)_{a-c}$ de yerine konulup gerekli türevlerin alınmasıyla, ϕ gerilme fonksiyonunun sağladığı uygunluk şartı aşağıdaki şekli alır :

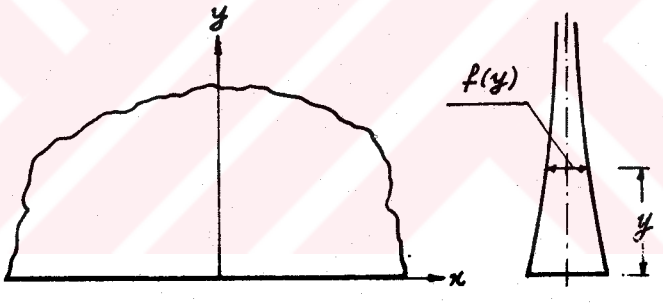
$$\begin{aligned}
&\Delta\Delta\phi - \frac{2}{f}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\phi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi)\right] \\
&-\frac{1}{f^2}\Bigg[\left\{f\Delta f - 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}\Delta\phi - (1+\nu)\Bigg\{\Bigg[f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&-2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Bigg]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \left[f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\
&-2\left(f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\Bigg\}\Bigg] = 0
\end{aligned} \qquad (1.3.6)$$

Bu şart incelenirse çözümün $f(x,y)$ kalınlık değişimi fonksiyonu ile ν Poisson oranına bağlı olacağı görülür. Bu noktada, kalınlığı yavaş değişen levhalarda elastisite probleminin çözümü,(1.3.6) kısmî türevli diferansiyel denkleminin, yükleme durumu ile ilgili sınır şartlarını sağlayan bir ϕ çözümünün belirtilmesine indirgenmiş olur. Burada kalınlık fonksiyonu f in sabit bir değer olması halinde

(1.3.6) ifadesinin

$$\Delta\Delta\phi = 0 \tag{1.3.7}$$

şeklini alacağı görülmektedir. Bu ise beklendiği gibi klâsik elastisitenin uygunluk şartıdır. Yukarıda elde edilmiş bulunan (1.3.6) denkleminde kalınlığın x ve y nin fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. Yani kalınlık her iki doğrultuda değişmektedir. Bu çalışmada kalınlığın, sadece yarım düzlemin kenarına dik doğrultuda (y-doğrultusunda) değişimi hali inceleneceğinden, (Bak. Şekil 1.3.1), (1.3.6) denkleminin aşağıdaki sadeleşmiş şekli kullanılacaktır.



Şekil 1.3.1

f fonksiyonu $f(y)$ olarak alınırsa (1.3.6) denkleminin ikinci tarafı basitleşir ve denklem aşağıdaki şekli alır :

$$\Delta\Delta\phi - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi) + \frac{1}{f^2}\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - f\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \nu\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{1.3.8}$$

Bu denklemin çözümü de, genel olarak ν ye bağlı olacaktır.

B Ö L Ü M 2

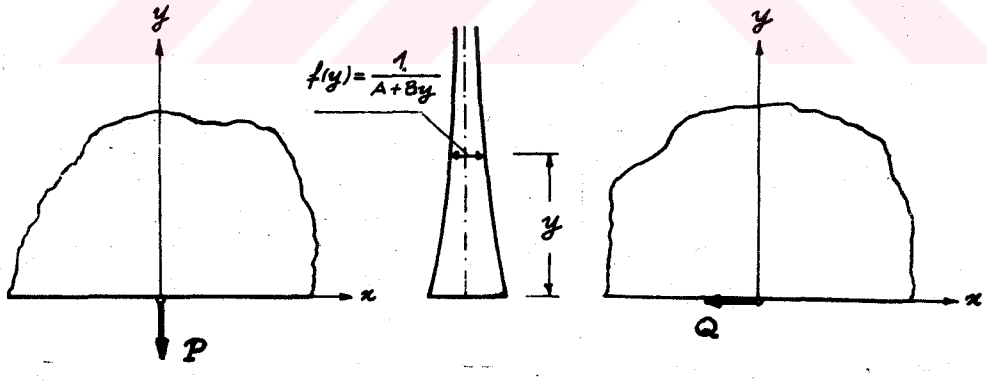
KALINLIĞI SINIRINA DİK DOĞRULTUDA HİPERBOLİK OLARAK DEĞİŞEN YARIM DÜZLEM PROBLEMİ

§2.1. Problemin Tanımlanması

Bu bölümde kalınlık değişimi fonksiyonu

$$f(y)=\frac{1}{A+By} \tag{2.1.1}$$

şeklinde olan yarım düzlemde, (Şekil 2.1.1 a ve b) de gösterilen iki esas yüklemeye ait elastisite problemlerinin çözülmesine çalışılacaktır. Kalınlık fonksiyonu $y=0$ için $1/A$ değerini almaktadır.



(a) (b)

Şekil 2.1.1.

Bu iki esas problemin, sınırından yüklü aynı kalınlık değişimini haiz bütün elastisite problemleri için bir temel çözüm niteliği taşımak bakı -

mından, özel bir önemi vardır.

Çözüm bakımından iki problem birbirine birçok noktalarda önemli yakınlıklar gösterdiğinden , P yüklemesi hali detaylı olarak incelenecek, Q yüklemesine ait sonuçlar çoğunlukla P yüklemesi sonuçlarından basit dönüştürmelerle elde edilecektir.Burada seçilen kalınlık değişimi fonksiyonu sadece y değişkenine bağlı olmaktan başka

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - f\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

şartını da sağladığından (1.3.8) denklemi daha da basitleşerek

$$\Delta\Delta\phi - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi) = 0 \qquad (2.1.2)$$

şeklini alır.Bu yeni basitleşmiş şekilde denklemde ν ye bağlı herhangi bir terim bulunmadığından çözüm de ν den bağımsız olacaktır.

§2.2.Diferansiyel Denklemin Çözümü ve Gerilme Fonksiyonunun Elde Edilmesi

§2.1. de belirtildiği gibi her iki temel yükleme halinde ϕ için geçerli olan kısmî türevli diferansiyel denklem

$$\Delta\Delta\phi - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi) = 0 \qquad (2.2.1)$$

dır.

Bu denklemin çözümü için kullanılacak metod aşağıda özetlenmiştir.

Önce

$$\psi = \Delta\phi \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanan bir ψ fonksiyonu işin içine sokulacaktır. Böylece (2.2.1) denklemi

$$\Delta\psi - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \tag{2.2.3}$$

şeklini alır. Bu işlemle problem,dördüncü mertebeden (2.2.1) denklemi yerine,iki tane ikinci mertebeden denklemin çözümüne getirilmiş olmaktadır. Bu iki denklemden oluşan sistemin çözüm metodu aşağıda anahatlarıyla açıklanmıştır.

Önce (2.2.3) denkleminin çözümü için, her iki yüklemede mevcut simetri ve antisimetri özelliklerinden dolayı, x değişkeni üzerine Fourier Transformasyonu (*)uygulanması kolaylık sağlayacaktır. Bu Transformasyonun uygulanması ile (2.2.3) kısmî difeferansiyel denklemi yerine sadece y değişkenine göre türevler ihtiva eden bir adî diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemden ψ nin Fourier Transformu olan $\bar{\psi}$ fonksiyonu çözülür. Bundan sonra (2.2.2) denkleminin Fourier Transformu alınır. Bu denklemde ψ nin transformu için daha önce bulunmuş fonksiyon yerine konarak yapılacak çözümden ϕ nin transformu olan $\bar{\phi}$ elde edilir. Transformasyon kullanılması $\frac{\partial}{\partial x}$ operatörünü $-i\lambda$ ile çarpıma çevirdiğinden çeşitli türetme ve integrasyon işlem-

---

(*) Fourier Transformasyonu için

$$\mathcal{F}\{f\} = \bar{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda$$

şekli seçilmiştir. Bu transformasyonun özellikleri hakkında daha geniş bilgi için [9] , [10] ve [18] e bakınız.

leri son derece basitleşmiş olacaktır.

Şimdi

$$\mathcal{F}\{\psi\} = \Psi \tag{2.2.4}$$

olmak üzere (2.2.3) denkleminin Fourier Transformu

$$\Psi'' - \lambda^2 \Psi - 2\frac{f'}{f}\Psi' = 0 \tag{2.2.5}$$

olur. Burada ($'$), y değişkenine göre türevi göstermektedir. (2.2.5) de $f(y)$ ifadesi yerine konularak, $z = \frac{A+By}{2B}$ değişken dönüşümü ile,

$$z\Psi^{++} + 2\Psi^{+} - 4\lambda^2 z\Psi = 0 \tag{2.2.6}$$

denklemine varılır. Burada ($^{+}$) işareti z değişkenine göre türev gösterir. Bu denklemin çözümü [11], 2.105 den

$$\Psi = c_1 \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} e^{+\sqrt{4\lambda^2}z} + c_2 \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} e^{-\sqrt{4\lambda^2}z} \tag{2.2.7}$$

bulunur. Bu çözüm düzenlenerek

$$\Psi = \frac{2|\lambda| c_1}{z} e^{2|\lambda|z} + \frac{2|\lambda| c_2}{z} e^{-2|\lambda|z} \tag{2.2.8}$$

şeklini alır.

(2.2.8) ifadesi ile verilen Ψ çözümünün birinci terimi Fourier Transformasyonunun gerektirdiği şartları sağlamaz. Ayni zamanda (2.2.2) den görülebileceği gibi ψ fonksiyonu, birinci gerilme invariantı olduğundan $y \to \infty$ için sıfıra gitmelidir. Bu matematik ve fizik şartlar nedeni ile (2.2.8) çözümünün birinci terimindeki c_1 katsayısı sıfır olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$\Psi = \frac{2|\lambda| C_2}{z} e^{-2|\lambda| z} \qquad (2.2.9)$$

sonucuna varılır. Bundan sonra C_2 nin tayini için $y \to \infty$ daki sınır şartlarının tamamının kullanılamıyacağına dikkat edilmelidir.

Şimdi Φ fonksiyonun elde edilebilmesi için (2.2.2) denkleminin Fourier Transformu alınmalıdır. Bu transform

$$\mathcal{F}\{\phi\} = \Phi \qquad (2.2.10)$$

gösterilimi ile

$$\Phi^{++} - 4\lambda^2 \Phi = 4\Psi \qquad (2.2.11)$$

denklemini verir. Bu denklemin homogen çözümü

$$\Phi_h = C_3 e^{2|\lambda| z} + C_4 e^{-2|\lambda| z} \qquad (2.2.12)$$

şeklindedir. Bunun bir özel çözümü Lagrange'nin Sabitlerin Değişimi Metodu (*) ile bulunabilir. Buna göre

$$\Phi_{öz} = D_3 e^{2|\lambda| z} + D_4 e^{-2|\lambda| z} \qquad (2.2.13)$$

tipinde seçilirse D_3^+ ve D_4^+ ifadeleri aşağıdaki lineer denklem takımının çözümünden bulunur.

$$D_3^+ e^{2|\lambda| z} + D_4^+ e^{-2|\lambda| z} = 0$$

$$2|\lambda| D_3^+ e^{2|\lambda| z} - 2|\lambda| D_4^+ e^{-2|\lambda| z} = 4\Psi$$

(*) Sabitlerin Değişimi Metodu hakkında geniş bilgi için [12] ye bakınız.

Dolayısıyla

$$D_3^+ = \frac{1}{|\lambda|}\Psi e^{-2|\lambda|z}$$

$$D_4^+ = \frac{1}{|\lambda|}\Psi e^{2|\lambda|z}$$

elde edilir. Bu ifadelerden D_3 ve D_4 nın elde edilmesi için z üzerinde integrasyon yapılması gerekir. Bu integrasyonlar yapılarak

$$D_3 = \frac{1}{|\lambda|}\int_{A/2B}^{z} \frac{2|\lambda|C_2}{\zeta} e^{-4|\lambda|\zeta} d\zeta$$

$$= 2C_2\left[\int_{\frac{2|\lambda|A}{B}}^{\infty} \frac{e^{-4|\lambda|\zeta}}{4|\lambda|\zeta} d(4|\lambda|\zeta) - \int_{4|\lambda|z}^{\infty} \frac{e^{-4|\lambda|\zeta}}{4|\lambda|\zeta} d(4|\lambda|\zeta)\right]$$

ve

$$D_4 = -\frac{1}{|\lambda|}\int_{A/2B}^{z} \frac{2|\lambda|C_2}{\zeta} d\zeta$$

$$= -2C_2 \log\left(\frac{2Bz}{A}\right)$$

elde edilir.Bu katsayıları daha derli toplu ifade edebilmek için [13] sayfa 228 deki Eksponansiyel İntegral (*) tanımlarından yararlanılabilir. Buna

---

(*) Eksponansiyel integraller [13] de $E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ve $E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t} dt$ tanımları ile verilmiş olup,Türevleri

$$\frac{d}{dz} E_n(z) = -E_{n-1}(z) \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ile bulunabilir. Ayrıca

göre

$$D_3 = C_2(\lambda)\left[E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right) - E_1(4|\lambda|z)\right]$$
$$D_4 = -C_2(\lambda)\log\left(\frac{2Bz}{A}\right) \qquad (2.2.14)$$

elde edilir. $\Phi = \Phi_h + \Phi_{öz}$ olduğu düşünülerek

$$\Phi = C_3 e^{2|\lambda|z} + C_4 e^{-2|\lambda|z} + \left[E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right) - E_1(4|\lambda|z)\right] C_2 e^{2|\lambda|z}$$
$$- C_2 \log\left(\frac{2Bz}{A}\right) e^{-2|\lambda|z} \qquad (2.2.15)$$

genel çözümü elde edilir.

§2.3. P Yüklemesi Hali

§2.31. Sınır Şartlarının Uygulanması

Burada (2.2.15) çözümündeki sabitler tayin edilecektir. Bu maksatla sınır şartlarını ifade etmek gerekir. Bu şartlar $z = A/2B$ $(y=0)$ ve $z \to \infty$ $(y \to \infty)$ hallerinde yazılabilir. Şöyle ki

$$z = A/2B \quad (y=0) \quad \text{için} \quad \sigma_y = f_0 P\,\delta(x)$$
$$z = A/2B \quad (y=0) \quad \text{için} \quad \tau_{xy} = 0 \qquad (2.31.1)$$
$$z \to \infty \quad (y \to \infty) \quad \text{için} \quad \sigma_y = 0$$

$$E_{n+1}(z) = \frac{1}{n}\left[e^{-z} - z E_n(z)\right] \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

rekürans bağıntısı da vardır.

$$z \to \infty \quad (y \to \infty) \quad \text{için} \quad \tau_{xy} = 0$$

Burada f_o , kalınlığın sınırdaki değeri olup $1/A$ dan ibarettir. $z \to \infty$ halinde $\sigma_x = 0$ şartı, §2.1 de kullanılan $z \to \infty$ için $\Psi = 0$ şartı ile (2.31.1) şartlarının üçüncüsünün sonucu olduğundan, kullanılmamıştır. Yukarıda görülen sınır şartlarının uygulanabilmeleri için

$$\Sigma_y = \mathcal{F}\{\sigma_y\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{f}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right\} = -\frac{1}{f}\lambda^2\Phi$$
$$T_{xy} = \mathcal{F}\{\tau_{xy}\} = \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right\} = \frac{i\lambda}{2}\cdot\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (2.31.2)$$

ifadeleri gerekir. Σ_y ifadesi Φ den kolaylıkla yazılabilir. T_{xy} için $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ türevini almak gerekir.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2|\lambda|C_3 e^{2|\lambda|z} - 2|\lambda|C_4 e^{-2|\lambda|z} + 2|\lambda|C_2 E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)e^{2|\lambda|z}$$
$$-2|\lambda|C_2 E_1(4|\lambda|z)e^{2|\lambda|z} + 2|\lambda|C_2 \log\left(\frac{2Bz}{A}\right)e^{-2|\lambda|z} \qquad (2.31.3)$$

(2.31.2) ve (2.31.3) ifadelerinden, (2.2.15) de gözününe alınarak $(2.31.1)_{a-d}$ şartları aynı sırayla

$$-\lambda^2 C_3 e^{A|\lambda|/B} - \lambda^2 C_4 e^{-A|\lambda|/B} = f_o P$$
$$C_3 e^{A|\lambda|/B} - C_4 e^{-A|\lambda|/B} = 0 \qquad (2.31.4)$$
$$C_3 + E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)C_2 = 0$$

şeklini alır. Dördüncü şart üçüncüyle tamamen üstüste düştüğünden hesaba katılmamıştır. $f_o = 1/A$ konularak $(2.31.4)_{a-c}$ takımı çözülürse

$$C_3 = -\frac{P}{2A\lambda^2} e^{-A|\lambda|/B}$$

$$C_4 = -\frac{P}{2A\lambda^2} e^{A|\lambda|/B} \qquad (2.31.5)$$

$$C_2 = \frac{P}{2A\lambda^2 E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)} e^{-A|\lambda|/B}$$

elde edilir.(2.31.5)$_{a-c}$ katsayılarının (2.2.15)de yerine konmasıyla Φ çözümü için

$$\Phi = -\frac{P}{2A\lambda^2}\left[e^{A|\lambda|/B} e^{-2|\lambda|z} + \frac{e^{-A|\lambda|/B}}{E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)} E_1(4|\lambda|z) e^{2|\lambda|z} + \frac{e^{-A|\lambda|/B}}{E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)} \cdot \log\left(\frac{2Bz}{A}\right) e^{-2|\lambda|z}\right]$$

bulunur. Bu ifadede $z = \frac{A+By}{2B}$ dönüşümü yapılarak ilk değişkenlere dönülürse $\alpha = A/B$ olmak üzere

$$\Phi = -\frac{P}{2A\lambda^2}\left[e^{-|\lambda|y} + \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda|y} + \frac{\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \qquad (2.31.6)$$

gerilme fonksiyonu bulunmuş olur. Bu ifadeden gerilme fonksiyonunun λ değişkeni bakımından bir çift fonksiyon olduğu; dolayısıyla normal gerilmelerin de çift fonksiyonlar olacağı, kayma gerilmesi ifadesinin ise tek fonksiyon olarak bulunacağı anlaşılmaktadır. Burada (2.31.6) ifadesinin $\alpha \to \infty$ halinde limiti

$$\lim_{\alpha \to \infty} \Phi = -\frac{P}{\lambda^2}(1+|\lambda|y) e^{-|\lambda|y} \qquad (2.31.7)$$

olur ki bu da levha kalınlığının sabit olması ha-

linde elde edilmiş olan klâsik çözümdeki (E.1.8) ifadesinin aynıdır.

§2.32. Gerilme İfadeleri

(2.31.6) gerilme fonksiyonu ifadesinden gerilmelerin transformları, $(1.3.4)_{a-c}$ gurubunun transformları olan

$$\Sigma_x = \frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$\Sigma_y = -\frac{\lambda^2}{f}\Phi \qquad (2.32.1)$$

$$T_{xy} = \frac{i\lambda}{f}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

ifadeleri kullanılarak elde edilir. Bu ifadelerin uygulanabilmesi için Φ nin y değişkenine göre ilk iki türevinin bilinmesi gerekir. Bu işlemin her iki yükleme halinde kullanılabilmesi için Φ nin türevleri aşağıda terim terim alınmıştır.

Birinci türevler

$$\frac{\partial}{\partial y}\, e^{-|\lambda| y} = -|\lambda| e^{-|\lambda| y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

$$= -\frac{e^{-2|\lambda|(\alpha+y)}}{(\alpha+y)\, E_1(2|\lambda|\alpha)}\, e^{|\lambda| y} + \frac{|\lambda|\, E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\, e^{|\lambda| y} \qquad (2.32.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+y}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} - |\lambda| \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}$$

ikinci türevler ise

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{-|\lambda| y} = \lambda^2 e^{-|\lambda| y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda| y}\right]$$

$$= \frac{\lambda^2 E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda| y} + \frac{1}{(\alpha+y)^2}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \qquad (2.32.3)$$

$$= -\frac{1}{(\alpha+y)^2}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} - \frac{2|\lambda|}{\alpha+y}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}$$

$$+ \lambda^2 \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}$$

olarak elde edilir.

Φ fonksiyonunun $(2.32.2)_{a-c}$ ve $(2.32.3)_{a-c}$ ifadeleriyle verilen terim terim alınmış türevleri (2.31.6) gözönünde tutularak $(2.32.1)_{a-c}$ ifadelerine götürülürse gerilmelerin Fourier Transformları aşağıdaki gibi elde edilir :

$$\Sigma_x = -\frac{P}{2Af}\left[e^{-|\lambda| y} + \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda| y} - \frac{2}{\alpha+y}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda| E_1(2|\lambda|\alpha)}\right.$$

$$\left. + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \qquad (2.32.4)$$

$$\Sigma_y = \frac{P}{2Af}\left[e^{-|\lambda| y} + \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda| y} + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

$$T_{xy} = \frac{iP\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2Af}\left[e^{-|\lambda| y} - \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda| y} + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

Son gerilmedeki $\mathrm{sgn}\,\lambda$ nın $\lambda\cdot|\lambda| = \mathrm{sgn}\,\lambda\cdot\lambda^2$ eşitliğinden kaldığına dikkat edilmelidir. Burada, normal gerilmelerin λ ya göre çift, kayma gerilmesinin ise tek fonksiyon olduğu görülür. Bu da yüklemenin simetrisinden beklenen bir sonuçtur. Burada

$(2.32.4)_{a-c}$ ifadelerinin $\alpha \to \infty$ için limitleri klâsik çözüme tamamen uymaktadır (Bak.Ek 1,$(E.1.8)_{a-c}$).

§2.33. Şekil Değiştirme İfadeleri

Şekil değiştirmeler için $(1.3.2)_{a-c}$ ifadeleri kullanılacaktır. Bu ifadelerde bütün katsayılar sabit olduğundan bunların Fourier transformları

$$E_x = \mathcal{F}\{\varepsilon_x\} = \frac{1}{E}\left[\Sigma_x - \nu\Sigma_y\right]$$

$$E_y = \mathcal{F}\{\varepsilon_y\} = \frac{1}{E}\left[\Sigma_y - \nu\Sigma_x\right] \qquad (2.33.1)$$

$$E_{xy} = \mathcal{F}\{\gamma_{xy}\} = \frac{2(1+\nu)}{E}\, T_{xy}$$

şeklinde kolaylıkla yazılabilir.

§2.34. Yer Değiştirme İfadeleri

x yönünde yer değiştirmeler u , y yönündeki yer değiştirmeler v olarak gösterilecektir. $(1.3.3)_a$ ifadesinin transformasyonu ile

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = E_x \qquad (2.34.1)$$

bulunur. Bu ise

$$-i\lambda U = \frac{1}{E}\left[\Sigma_x - \nu\Sigma_y\right]$$

buradan da

$$U = \frac{p\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2i|\lambda|AEf}\left[(1+\nu)e^{-|\lambda|y} + (1+\nu)\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}\right. \qquad (2.34.2)$$
$$\left. + (1+\nu)\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} - \frac{2}{\alpha+y}\,\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda|E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

ve benzer şekilde $(1.3.3)_b$ ifadesinin transformasyonu ile

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\} = E_y \tag{2.34.3}$$

veya

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[\Sigma_y - \nu \Sigma_\alpha\right]$$

bulunur. Burada gerilmeler yerine konarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{P}{2AEf}\Big[&(1+\nu)e^{-|\lambda|y} + (1+\nu)\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y} \\ &+ (1+\nu)\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} - \frac{2\nu}{(\alpha+y)}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda|E_1(2|\lambda|\alpha)}\Big]\end{aligned} \tag{2.34.4}$$

bağıntısına varılır.

V ifadesinin elde edilebilmesi için bu son ifadenin y üzerinde integre edilmesi gerekir. Bu işlemler aşağıda terim terim yapılacaktır. Birinci terim için

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{-|\lambda|y}}{f}dy &= \int (A+By)e^{-|\lambda|y}dy = A\int e^{-|\lambda|y}dy + B\int y e^{-|\lambda|y}dy \\ &= -\frac{A}{|\lambda|}e^{-|\lambda|y} - \frac{B}{\lambda^2}(1+|\lambda|y)e^{-|\lambda|y}\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\int \frac{e^{-|\lambda|y}}{f}dy = -\frac{1}{|\lambda|f}e^{-|\lambda|y} - \frac{B}{\lambda^2}e^{-|\lambda|y} \tag{2.34.5}$$

bulunur.

İkinci terim için

$$\int (A+By)\, E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy \tag{2.34.6}$$

$$= A\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy + B\int y\, E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy$$

integralleri yapılmalıdır. Önce sağdaki ilk integrali ele alalım.

$$\frac{\partial}{\partial y} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)] = -2|\lambda|\, E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]$$

ifadesi kullanılarak kısmî integrasyon yapıldığında

$$\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy = \frac{1}{i\lambda} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} + 2\int E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy$$

bulunur. Sağdaki ikinci terime kısmî integrasyon uygulanarak

$$\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy$$

$$= \frac{1}{i\lambda} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} + \frac{2}{i\lambda} E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y}$$

$$+ 4\int E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy + 4\int \frac{E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]}{2|\lambda|(\alpha+y)}\, e^{i\lambda y} dy$$

elde edilir. Sağdaki birinci integrale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{2|\lambda|} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\right] = E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]$$

bağıntısı ile kısmî integrasyon uygulanarak

$$\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} dy = \frac{1}{i\lambda} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{i\lambda y} \tag{2.34.7}$$

$$-\frac{2}{|\lambda|}E_0[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}-4\int\frac{e^{-2|\lambda|(\alpha+y)}}{[2|\lambda|(\alpha+y)]^2}e^{|\lambda|y}dy$$

sunucuna varılır. (2.34.7) nin sağ tarafındaki integralin çözümü aşağıda yapılmıştır.

$$4\int\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{4[|\lambda|(\alpha+y)]^2}dy=e^{-|\lambda|\alpha}\int\frac{e^{-|\lambda|(\alpha+y)}}{[|\lambda|(\alpha+y)]^2}dy$$

Bu integral $z=|\lambda|(\alpha+y)$ dönüşümü ve

$$\int\frac{e^{-z}}{z^2}dz=-\frac{e^{-z}}{z}-\int\frac{e^{-z}}{z}dz=-E_0(z)+E_1(z) \qquad (2.34.8)$$

kısmî integrasyonu gözönünde tutularak hesaplanabilir.

$$4\int\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{4[|\lambda|(\alpha+y)]^2}dy$$
$$=-\frac{e^{-|\lambda|\alpha}}{|\lambda|}E_0[|\lambda|(\alpha+y)]+\frac{e^{-|\lambda|\alpha}}{|\lambda|}E_1[|\lambda|(\alpha+y)]$$

Bu ifade (2.34.7) de yerine konarak sadeleştirilirse

$$\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}dy \qquad (2.34.9)$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}-\frac{1}{|\lambda|}E_1[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}$$

bulunur.(2.34.6) nın ikinci terimi için

$$\int y\,E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}dy$$

integrali yapılmalıdır. Bu maksatla $\int F(y)dy$ biliniyorsa

$$\int y\,F(y)dy=y\int F(y)dy-\int\left[\int F(y)dy\right]dy \qquad (2.34.10)$$

kısmî integral bağıntısı kullanılarak ve $F(y) = E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda| y}$ alınarak (2.34.10) formülünün sağdaki ilk terimi (2.34.9) dan elde edilir. İkinci integral ise aşağıda yapılmıştır.

$$\int\left[\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y}\, dy\right] dy$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\int E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y}\, dy - \frac{1}{|\lambda|}\int E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, dy$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y} - \frac{1}{\lambda^2}\int \frac{e^{-2|\lambda|(\alpha+y)}\, e^{|\lambda| y}}{\alpha+y}\, dy + \frac{e^{-|\lambda|\alpha}}{\lambda^2}\int (-|\lambda|) E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, dy$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y} - \frac{1}{\lambda^2} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha}$$

$$- \frac{1}{\lambda^2} E_2[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha}$$

Bu sonuç (2.34.9) ile birlikte (2.34.10) formülünde yerine konarak

$$\int y\, E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y}\, dy = \frac{y}{|\lambda|} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y}$$

$$- \frac{y}{|\lambda|} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha} + \frac{1}{\lambda^2} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y} \qquad (2.34.11)$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha} + \frac{1}{\lambda^2} E_2[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha}$$

elde edilir. Böylece $\frac{\partial V}{\partial y}$ ifadesinin ikinci teriminin integrali (2.34.9) ve (2.34.11) sonuçlarının (2.34.6) da yerine konulmasıyla

$$\int \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{f}\, e^{|\lambda| y}\, dy$$

$$= \frac{1}{|\lambda| f} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y} - \frac{1}{|\lambda| f} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha} \qquad (2.34.12)$$

$$+ \frac{B}{\lambda^2} E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{|\lambda| y} + \frac{B}{\lambda^2} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha}$$

$$+ \frac{B}{\lambda^2} E_2[|\lambda|(\alpha+y)]\, e^{-|\lambda|\alpha}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Üçüncü terim için önce aşağıdaki integralin yapılması gerekir.

$$\int \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} dy = e^{-2|\lambda|\alpha} \int \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda| y} dy$$

$$= -\frac{1}{|\lambda|} e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) + e^{-|\lambda|\alpha} \int \frac{e^{-|\lambda|(\alpha+y)}}{|\lambda|(\alpha+y)} dy$$

E_1 fonksiyonunun tanımı gözönüne alınarak bu sonuç

$$\int \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} dy \tag{2.34.13}$$

$$= -\frac{1}{|\lambda|} e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{e^{-|\lambda|\alpha}}{|\lambda|} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.34.10) ifadesinden yararlanılarak yukarıda yapılanlara benzer işlemlerle aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int y \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} dy$$

$$= -\frac{y}{|\lambda|} e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{y}{|\lambda|} e^{-|\lambda|\alpha} E_1[|\lambda|(\alpha+y)]$$

$$- \frac{1}{\lambda^2} e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{1}{\lambda^2} e^{-|\lambda|\alpha} E_1[|\lambda|(\alpha+y)] \tag{2.34.14}$$

$$- \frac{1}{\lambda^2} e^{-|\lambda|\alpha} E_2[|\lambda|(\alpha+y)]$$

Üçüncü terimin integrali (2.34.13) ve (2.34.14) den faydalanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int \frac{1}{f} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} dy$$

$$= -\frac{1}{|\lambda| f} \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} - \frac{1}{|\lambda| f} e^{-|\lambda|\alpha} E_1[|\lambda|(\alpha+y)] \tag{2.34.15}$$

$$-\frac{B}{\lambda^2}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}-\frac{B}{\lambda^2}e^{-|\lambda|\alpha}E_1[|\lambda|(\alpha+y)]$$

Dördüncü terimin integrali çok kolay yapılabilir.

$$\int e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}dy=-\frac{1}{|\lambda|}e^{-|\lambda|(2\alpha+y)} \qquad (2.34.16)$$

Şimdi V ifadesi,(2.34.5),(2.34.12),(2.34.15) ve (2.34.16) kısmî sonuçlarının (2.34.4) deki katsayılarla çarpılarak toplanması ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
V=\frac{P}{2AE}\Bigg[&-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}e^{-|\lambda|y}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}e^{-|\lambda|y}\\
&+\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]e^{|\lambda|y}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_2[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_2[|\lambda|(2\alpha+y)]e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&+\frac{2\nu B}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Bigg]+F(\lambda)
\end{aligned} \qquad (2.34.17)$$

Bu ifadede görülen $F(\lambda)$, y üzerinde yapılan integrasyonun sabiti rolünü oynayan Fourier Transforme edilebilir bir fonksiyon olmalıdır.Bu fonksiyon y nin sabit bir değeri için belirtilecektir. Bu sabit değer $y\to\infty$ seçilirse diğer bütün terimler sıfıra gittiğinden

$$V\big|_{y\to\infty}=0 \qquad (2.34.18)$$

şartından

$$F(\lambda)=0 \tag{2.34.19}$$

elde edilir. Bununla birlikte gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned} V=\frac{P}{2AE}\Bigg[&-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}e^{-|\lambda|y}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}e^{-|\lambda|y} \\ &+\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}-\frac{2(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha} \\ &+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}-\frac{2B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha} \\ &-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} \\ &+\frac{2\nu B}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.34.20}$$

sonucu bulunur.

Pratikte U ve V ifadelerinin $y=0$ daki değerleri önemli olmaktadır. Aşağıda $U|_{y=0}$ ve $V|_{y=0}$ ifadeleri verilmiştir.

$$U\Big|_{y=0}=\frac{P\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[\frac{(1+\nu)}{|\lambda|}-\frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{\alpha\lambda^2E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \tag{2.34.21}$$

$$\begin{aligned} V\Big|_{y=0}=\frac{P}{E}\Bigg[&-\frac{(1+\nu)}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{E_1(\alpha|\lambda|)e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|}\cdot\frac{E_1(|\lambda|\alpha)e^{-|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} \\ &+\frac{\nu}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.34.22}$$

(2.34.21) ve (2.34.22) ifadelerinin $\alpha\to\infty$ için bulunacak limitleri Ek 1 de elde edilen $(E.1.13)_{a,b}$ ifadeleriyle aynıdır.

§2.35. Gerilme ve Yerdeğiştirmeler İçin Ters Transformasyonlar

§2.32 ve §2.34 de elde edilen $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}, U|_{y=0}$ ve $V|_{y=0}$ ifadeleri sırasıyla σ_x, σ_y, τ_{xy} gerilmeleri ile $u|_{y=0}$ ve $v|_{y=0}$ yerdeğiştirmelerinin Fourier Transformlarıdır.Bu kısımda bunların ters transformasyonlarının yapılarak gerilme ve sınır yerdeğiştirme ifadelerinin bulunmasına çalışılacaktır. §2.2 de verilen ters transformasyon ifadesine göre $\bar{f}(\lambda,y)$ herhangi bir transform fonksiyon olmak üzere $f(x,y)$ fonksiyonu

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\lambda,y)\,e^{-i\lambda x}d\lambda \qquad (2.35.1)$$

integrali ile elde edilebilir. Bu ters transformasyon integralleri bizim problemimizde daima çift ya da tek fonksiyonlara uygulandığından

$$e^{-i\lambda x}=\cos\lambda x-i\sin\lambda x$$

bağıntısı gözönünde tutularak çift (simetrik) fonksiyonlar için

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\bar{f}(\lambda,y)\cos\lambda x\,d\lambda \qquad (2.35.2)$$

ve tek (antisimetrik) fonksiyonlar için

$$f(x,y)=-\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty}\bar{f}(\lambda,y)\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (2.35.3)$$

şekline dönüşür.

Aşağıda ters transformasyon integralleri için geçen integrand tipleri ve bunların $\lambda=0$ daki limit değerleriyle $\lambda\to\infty$ için asimptotik ifadeleri verilmiştir. Bu ifadelerin verilmediği integrallerin kapalı olarak yapılması mümkündür.

Tip	İntegrand	$\lambda=0$ limiti	$\lambda\to\infty$ için Asimptotik İfade
I_1	$e^{-\lambda y} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda x$	—	—
I_2	$\dfrac{E_1[2\lambda(\alpha+y)]e^{\lambda y}}{E_1(2\lambda\alpha)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda x$	1	$\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+y}\right)e^{-\lambda y}$
I_3	$\dfrac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{\lambda E_1(2\lambda\alpha)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda x$	∞	$2\alpha e^{-\lambda y}$
I_4	$\dfrac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda x$	0	$2\alpha\lambda e^{-\lambda y}$

Yukarıdaki tabloda verilen integrandların geçtiği ters transformasyon integrallerinin yapılış şekli aşağıda sırayla incelenmiştir.

I_1 integrali [14] sayfa 14 ve 72 den

$$I_1^c = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (2.35.4)$$

$$I_1^s = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (2.35.5)$$

şeklinde elde edilir.

I_2 integrali için $\lambda=0$ daki limit değer 1 olduğundan integrandın değeri

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+y}\right)e^{-\lambda y}$$

asimptotik ifadesiyle kıyaslanarak yeter yaklaşım elde edildiği bir B değeri bulunarak,

$$I_2^c = \int_0^B \frac{E_1[2\lambda(\alpha+y)]}{E_1(2\lambda\alpha)} e^{\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda + \frac{\alpha}{\alpha+y} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (2.35.6)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada B nin y ile değiştiğine dikkat edilmelidir. Sağ taraftaki ikinci integral kapalı olarak yapılabilir. Birinçisi ise Filon'un sayısal integrasyon metodundan (*) yararlanılarak hesaplanacaktır. Benzer hesaplama metodu ile

$$I_2^s = \int_0^B \frac{E_1[2\lambda(\alpha+y)]}{E_1(2\lambda\alpha)} e^{\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda + \frac{\alpha}{\alpha+y} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (2.35.7)$$

ters transformasyon integrali de elde edilebilir.

Tabloda verilen I_3 integrallerine ait integrand $\lambda = 0$ halinde sonsuza gitmektedir. Bu tekillik integre edilebilir bir tekillik olup bu integrasyon için aşağıda açıklanan usul kullanılmıştır.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda| E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{-i\lambda x} \, d\lambda \qquad (2.35.8)$$

integraline

$$\frac{d}{d\lambda} \log E_1(2|\lambda|\alpha) = \frac{-\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{|\lambda|}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} \operatorname{sgn}\lambda$$

bağıntısı düşünülerek kısmî integrasyon uygulanırsa

$$I_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} d\{\log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\} \operatorname{sgn}\lambda \, e^{-|\lambda| y - i\lambda x} \, d\lambda$$

(*) Bak. Ek 2

$$= -\log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\log[E_1(2|\lambda|\alpha)][\mathrm{sgn}\,\lambda\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}]'\,d\lambda$$

elde edilir. Bu ifadede (′) işareti λ değişkenine göre türev göstermektedir. Bu yazılış şeklinde ilk terim sıfırdır. İkinci terimdeki integral ikiye parçalanarak

$$I_3=-\int_{-\infty}^{0}\log[E_1(-2\lambda\alpha)][e^{\lambda y-i\lambda x}]'\,d\lambda+\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)][e^{-\lambda y-i\lambda x}]'\,d\lambda$$

$$=-(y-ix)\int_{-\infty}^{0}\log[E_1(-2\lambda\alpha)]\,e^{\lambda y-i\lambda x}\,d\lambda-(y+ix)\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)]\,e^{-\lambda y-i\lambda x}\,d\lambda$$

$$=-(y-ix)\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)]\,e^{-\lambda y+i\lambda x}\,d\lambda-(y+ix)\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)]\,e^{-\lambda y-i\lambda x}\,d\lambda$$

veya

$$I_3^c=-2y\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)]\,e^{-\lambda y}\cos\lambda x\,d\lambda-2x\int_{0}^{\infty}\log[E_1(2\lambda\alpha)]\,e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (2.35.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada I_3^c sembolünün kullanılmasının sebebi (2.35.8) ifadesinde $e^{-i\lambda x}$ hariç integrandın çift fonksiyon olmasıdır. Bu durumda $e^{-i\lambda x}$ ifadesi $\cos\lambda x$ ile değiştirilebilir. I_3^c için yapılanın tamamen benzeri işlemler yapılacaktır.

$$I_3^s=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}\,\lambda\,\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda|\,E_1(2|\lambda|\alpha)}\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$

integraline

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\log E_1(2|\lambda|\alpha)\right) = \frac{-\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{|\lambda|}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\,\mathrm{sgn}\,\lambda$$

ifadesi ile kısmî integrasyon uygulanarak

$$I_3^s = -\int_{-\infty}^{\infty} d\{\log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\}\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= -\log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\,[e^{-|\lambda|y-i\lambda x}]'\, d\lambda$$

bulunur. Burada ilk terim sıfır olur, ikinci integral

$$I_3^s = \int_{-\infty}^{\infty} \log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\,[\mathrm{sgn}\,\lambda\cdot(-y) - ix]\cdot e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= -y\int_{-\infty}^{\infty} \log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\, d\lambda - ix\int_{-\infty}^{\infty} \log[E_1(2|\lambda|\alpha)]\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x}\, d\lambda$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin düzenlemesi ile

$$I_3^s = 2iy\int_0^{\infty} \log[E_1(2\lambda\alpha)]\, e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda - 2ix\int_0^{\infty} \log[E_1(2\lambda\alpha)]\, e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda \qquad (2.35.10)$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi I_3^c ve I_3^s integrallerinin hesabı (2.35.9) ve (2.35.10) formülleri uyarınca aşağıda gösterilen iki integralin hesabına indirgenmiş olmaktadır. Bu integraller

$$I_{31} = \int_0^{\infty} \log[E_1(2\lambda\alpha)]\, e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda \qquad (2.35.11)$$

$$I_{32} = \int_0^{\infty} \log[E_1(2\lambda\alpha)]\, e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda \qquad (2.35.12)$$

olarak adlandırılacaklardır. Her iki integral için integrasyon $(0,\varepsilon)$, (ε,B), (B,∞) olmak üzere üç parçada yapılacaktır.

$(0,\varepsilon)$ aralığı için küçük λ lara tekabül eden açılımlar kullanılacaktır. (ε,B) aralığında integrandın kendi değeri ile Filon metodundan yararlanılarak sayısal integrasyon yapılacak, (B,∞) aralığında ise asimptotik açılımdan yararlanılacaktır. İntegrandın sıfır ve sonsuz değerlerinde geçerli olacak açılımları J_0 ve J_∞ ile gösterilirse

$$\log[E_1(2\lambda\alpha)]e^{-\lambda y}$$

ifadesi için [13], 5.1.11 den

$$J_0 = \log(-\gamma - \log 2\lambda\alpha)(1-\lambda y)$$

bu ifadede $\log k = \gamma$ olmak üzere bir k sabiti işin içine sokularak

$$J_0 = \log\left[\log\left(\frac{1}{2k\alpha\lambda}\right)\right](1-\lambda y) \qquad (2.35.13)$$

elde edilir.

λ nın küçük değerleri için $\cos\lambda x \cong 1$ ve $\sin\lambda x \cong \lambda x$ alınacaktır. (2.35.11) ve (2.35.12) nin integrasyonundan önce, λ nın büyük değerleri için geçerli asimptotik açılım hesaplanırsa [13], 5.1.51 den

$$E_1(z) \cong \frac{e^{-z}}{z}$$

olduğu dikkate alınarak

$$J_\infty = \log\left(\frac{e^{-2\lambda\alpha}}{2\lambda\alpha}\right)e^{-\lambda y}$$

veya

$$J_\infty = (-2\lambda\alpha - \log 2\lambda\alpha)e^{-\lambda y} \qquad (2.35.14)$$

elde edilir.

Gerek (2.35.11) gerekse de (2.35.12) integrallerinin $(0,\varepsilon)$ aralığında değerlendirilmesinde, (2.35.13) den anlaşılabileceği gibi

$$\begin{aligned} I_{yar,1} &= \int_0^\varepsilon \log\left[\log\left(\frac{1}{2k\alpha\lambda}\right)\right]d\lambda \\ I_{yar,2} &= \int_0^\varepsilon \lambda \log\left[\log\left(\frac{1}{2k\alpha\lambda}\right)\right]d\lambda \\ I_{yar,3} &= \int_0^\varepsilon \lambda^2 \log\left[\log\left(\frac{1}{2k\alpha\lambda}\right)\right]d\lambda \end{aligned} \qquad (2.35.15)$$

integrallerinin yapılması gerekir. Her üç integ - ralde

$$t = 2k\alpha\lambda \ , \ \lambda = \frac{t}{2k\alpha} \ , \ d\lambda = \frac{dt}{2k\alpha}$$

dönüşümü ile (2.35.15) grubu

$$\begin{aligned} I_{yar,1} &= \frac{1}{2k\alpha}\int_0^{2\alpha k\varepsilon} \log\log\frac{1}{t}\,dt \\ I_{yar,2} &= \frac{1}{4k^2\alpha^2}\int_0^{2\alpha k\varepsilon} t\log\log\frac{1}{t}\,dt \\ I_{yar,3} &= \frac{1}{8k^3\alpha^3}\int_0^{2\alpha k\varepsilon} t^2\log\log\frac{1}{t}\,dt \end{aligned} \qquad (2.35.16)$$

halini alır. Şimdi bu gruba

$$\log\frac{1}{t}=v \quad , \quad t=e^{-v} \quad , \quad dt=-e^{-v}dv$$

dönüşümü uygulanarak

$$I_{yar,1}=\frac{1}{2\alpha k}\int_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}e^{-v}\log v\,dv$$

$$I_{yar,2}=\frac{1}{4\alpha^2k^2}\int_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}e^{-2v}\log v\,dv \qquad (2.35.17)$$

$$I_{yar,3}=\frac{1}{8\alpha^3k^3}\int_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}e^{-3v}\log v\,dv$$

elde edilir. Bu integrallerin yapılabilmesi için aşağıdaki kısmî integrasyon işlemi esas alınacaktır.

$$\int_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}e^{-nv}\log v\,dv=-\frac{1}{n}\,e^{-nv}\log v\Big|_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}+\frac{1}{n}\int_{\log(1/2\alpha k\varepsilon)}^{\infty}\frac{e^{-nv}}{v}\,dv$$

$$=\frac{1}{n}\left[(2\alpha k\varepsilon)^n\log\log\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right]+\frac{1}{n}\,E_1\left[\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)\right]$$

Bu ifade (2.35.17) integrallerinde $n=1,2,3$ için kullanılarak

$$I_{yar,1}=\varepsilon\log\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)+\frac{1}{2\alpha k}\,E_1\left[\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)\right]$$

$$I_{yar,2}=\frac{\varepsilon^2}{2}\log\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)+\frac{1}{8\alpha^2k^2}\,E_1\left[2\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)\right] \qquad (2.35.18)$$

$$I_{yar,3}=\frac{\varepsilon^3}{3}\log\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)+\frac{1}{24\alpha^3k^3}\,E_1\left[3\log\left(\frac{1}{2\alpha k\varepsilon}\right)\right]$$

$(0,\varepsilon)$ aralığında I_{31} ve I_{32} integrallerinin sonuçları $(2.35.18)_{a-c}$ ifadeleri gözönünde tutularak

$$I_{31}^{(0,\varepsilon)} = I_{yar,1} - y\, I_{yar,2}$$
$$I_{32}^{(0,\varepsilon)} = x\, I_{yar,2} - xy\, I_{yar,3} \qquad (2.35.19)$$

şeklinde verilebilir.

I_{31} ve I_{32} integrallerinin (B,∞) aralığında değerlendirilmesi aşağıda yapılmıştır.

$$I_{31}^{(B,\infty)} = \int_B^\infty (-2\alpha\lambda - \log 2\lambda\alpha)\, e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda \qquad (2.35.20)$$

veya

$$I_{31}^{(B,\infty)} = -2\alpha \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda - \int_B^\infty \log(2\alpha\lambda)\, e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda \qquad (2.35.21)$$

Bu ifadenin sağ tarafındaki birinci integral [15], 2.667.6 formülünden elde edilir. İkinci integral ise aşağıda değerlendirilmiştir.

İkinci integrale

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{e^{-\lambda y}(-y\cos\lambda x + x\sin\lambda x)}{x^2+y^2}\right] = e^{-\lambda y}\cos\lambda x$$

olduğu düşünülerek kısmî integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_B^\infty e^{-\lambda y} \log(2\lambda\alpha) \cos\lambda x \, d\lambda &= \log(2\alpha\lambda) \frac{e^{-\lambda y}(-y\sin\lambda x + x\cos\lambda x)}{x^2+y^2}\Bigg|_B^\infty \\ &+ \frac{y}{x^2+y^2}\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda - \frac{x}{x^2+y^2}\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\sin\lambda x}{\lambda}\, d\lambda \end{aligned} \qquad (2.35.22)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{e^{-\lambda y}(-y\sin\lambda x - x\cos\lambda x)}{x^2+y^2}\right] = e^{-\lambda y}\sin\lambda x$$

olduğu düşünülerek

$$\int_B^\infty e^{-\lambda y}\log(2\lambda\alpha)\sin\lambda x\,d\lambda$$
$$= \log(2\alpha\lambda)\frac{e^{-\lambda y}(-y\sin\lambda x - x\cos\lambda x)}{x^2+y^2}\Bigg|_B^\infty \qquad (2.35.23)$$
$$+\frac{x}{x^2+y^2}\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda + \frac{y}{x^2+y^2}\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\sin\lambda x}{\lambda}d\lambda$$

ifadesi benzer şekilde bulunur.

Gerek (2.35.22) gerek (2.35.23) ifadelerinin hesaplanması

$$\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda \quad , \quad \int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\sin\lambda x}{\lambda}d\lambda$$

integrallerinin değerlendirilmesine indirgenmiş olur. Aşağıda bu integraller üzerinde çalışılacaktır.

$$\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda = -\int_B^\infty \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda + \int_B^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda$$
$$= -\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda + \int_0^B \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda + \int_B^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda$$

yazılabilir. Burada ilk integral [15], 3.951.3 den alınarak, sonucunun ise $Ci(Bx)$ fonksiyonunun tarifi olduğu ([13], 5.2.27) gözönüne alınarak

$$\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda = -\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - Ci(Bx) + \int_0^B \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda \qquad (2.35.24)$$

bulunur. (2.35.24) deki sonuncu integral Filon Me-

todu ile değerlendirilecektir. Burada

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\right) = y$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bu integral üzerindeki işlemlerin benzeri uygulanarak

$$\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = -\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda + \int_0^B \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda + \int_B^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$$

yazılabilir. Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk integral [15] , 3.951.2 den alınarak, sonuncunun ise $si(Bx)$ in tarifi ([13],5.2.26) olduğu gözönünde tutularak

$$\int_B^\infty \frac{e^{-\lambda y}\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - si(Bx) + \int_0^B \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (2.35.25)$$

elde edilir. Burada da sonuncu integral Filon Metoduyla sayısal olarak değerlendirilecektir. Yine

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\right) = y$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Sonuç olarak $I_{31}^{(B,\infty)}$ için (2.35.21),(2.35.22), (2.35.24),(2.35.25) ifadeleri birleştirilerek

$$\begin{aligned} I_{31}^{(B,\infty)} = {} & (2\alpha B + \log 2\alpha B)\left[\frac{e^{-By}(-y\cos Bx + x\sin Bx)}{x^2+y^2}\right] \\ & + 2\alpha y\left[\frac{e^{-By}(-y\sin Bx + x\cos Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right] - 2\alpha x\left[\frac{e^{-By}(-y\sin Bx + x\cos Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right] \\ & + \frac{y}{x^2+y^2}\left[-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - Ci(Bx) + \int_0^B \frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda\right] \end{aligned} \qquad (2.35.26)$$

$$-\frac{x}{x^2+y^2}\left[-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-si(Bx)+\int_0^B\frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda\right]$$

bulunur.

$I_{32}^{(B,\infty)}$ için [15], 2.667.5 ile (2.35.23), (2.35.24), (2.35.25) ifadelerinin sonuçları düzenlenerek

$$\begin{aligned}
I_{32}^{(B,\infty)} &= (2\alpha B+\log 2\alpha B)\left[\frac{e^{-By}(-y\sin Bx-x\cos Bx)}{x^2+y^2}\right] \\
&+2\alpha y\left[\frac{e^{-By}(-y\sin Bx-x\cos Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right]+2\alpha x\left[\frac{e^{-By}(-y\cos Bx+x\sin Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&+\frac{x}{x^2+y^2}\left[-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)-Ci(Bx)+\int_0^B\frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda\right] \\
&+\frac{y}{x^2+y^2}\left[-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-si(Bx)+\int_0^B\frac{1-e^{-\lambda y}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda\right]
\end{aligned} \tag{2.35.27}$$

elde edilir.

(2.35.26) ve (2.35.27) nin incelenmesinden her iki formüle (2.35.24) den gelen kısmın $x=0$ değeri için sonsuz verdiği görülür. Aslında aşağıdaki limit işlemi $Ci(Bx)$ in sonsuzluğunun logaritmik olmasından dolayı bu değerlerin sonlu çıkması gerektiğini göstermektedir.

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)-Ci(Bx)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{x^2}(x^2+y^2)\right)-Ci(Bx)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}\log\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \gamma - \log Bx\right]$$

$$= \log x - \log y - \gamma - \log B - \log x$$

$$= -\gamma - \log By$$

Şu halde (2.35.26) ve (2.35.27) formülleri $x>0$ için geçerli olup, $x=0$ için bu ifadelerde

$$-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - Ci(Bx)$$

yerine

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - Ci(Bx)\right] = -\gamma - \log By \qquad (2.35.28)$$

konmalıdır. $x=0$, $y=0$ özel halinde tekillik kaybolmaz bu ise beklenen bir sonuçtur.

I_3 integralinin değerlendirilmesi (2.35.9) ve (2.35.10) ifadeleri uyarınca I_{31} ve I_{32} integrallerine indirgenerek

$$I_{31} = I_{31}^{(0,\varepsilon)} + \int_{\varepsilon}^{B} \log[E_1(2\lambda x)e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda + I_{31}^{(B,\infty)} \qquad (2.35.29)$$

$$I_{32} = I_{32}^{(0,\varepsilon)} + \int_{\varepsilon}^{B} \log[E_1(2\lambda x)e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda + I_{32}^{(B,\infty)} \qquad (2.35.30)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada $I_{31}^{(0,\varepsilon)}$ ve $I_{32}^{(0,\varepsilon)}$ (2.35.19)$_{a,b}$, $I_{31}^{(B,\infty)}$ (2.35.26), $I_{32}^{(B,\infty)}$ ise (2.35.27) den alınacaktır. $I_{31}^{(B,\infty)}$ ve $I_{32}^{(B,\infty)}$ ifadelerinin kullanılışında (2.35.28) de verilen limite dikkat edilmelidir.(2.35.29) ve (2.35.30) daki integraller Filon Metodu ile sayısal olarak değerlendirilecektir.

Son olarak I_4^c ve I_4^s integrallerini ele alalım. Bu integraller için integrandların asimptotik ifadeleri bu kısmın başındaki tabloda

$$2\alpha\lambda e^{-\lambda y}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre

$$I_4^c = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \cos\lambda x \, d\lambda$$
$$I_4^s = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \sin\lambda x \, d\lambda \qquad (2.35.31)$$

integrallerinin değerlendirilmesi

$$I_4^c = \int_0^B \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \cos\lambda x \, d\lambda + 2\alpha \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda$$
$$I_4^s = \int_0^B \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \sin\lambda x \, d\lambda + 2\alpha \int_B^\infty \lambda e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \qquad (2.35.32)$$

şeklinde yapılacaktır. B sayısı

$$\frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)} \cong 2\alpha\lambda e^{-\lambda y}$$

yaklaşımını sağlayan λ değerini gösterir. Bu değerin hesabından sonra (2.35.32)$_{a,b}$ nin ikinci parçaları [15], 2.667.6 ve 2.667.5 formüllerinden kapalı olarak integre edilebilir. Birinci terimlerdeki integraller ise Filon Metoduyla nümerik olarak yapılacaktır. Buna göre

$$I_4^c=\int_0^B \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)}\cos\lambda x\,d\lambda+\left[\frac{2\alpha B e^{-By}(-y\cos Bx+x\sin Bx)}{x^2+y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha y e^{-By}(-y\cos Bx+x\sin Bx)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2\alpha x e^{-By}(-y\sin Bx-x\cos Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right] \qquad (2.35.33)$$

$$I_4^s=\int_0^B \frac{e^{-\lambda(2\alpha+y)}}{E_1(2\lambda\alpha)}\sin\lambda x\,d\lambda+\left[\frac{2\alpha B e^{-By}(-y\sin Bx-x\cos Bx)}{x^2+y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha y e^{-By}(-y\sin Bx-x\cos Bx)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2\alpha x e^{-By}(-y\cos Bx+x\sin Bx)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

bulunur.

Buraya kadar yapılan çalışmalar sonucu olarak $(2.32.4)_{a-c}$ ile verilmiş gerilme transformlarından gerilmelere geçmek mümkün olacaktır. Şöyle ki

$$\sigma_x=\frac{-P}{2\pi Af}\left[I_1^c+I_2^c-\frac{2}{\alpha+y}I_3^c+\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)I_4^c\right]$$
$$\sigma_y=\frac{P}{2\pi Af}\left[I_1^c+I_2^c+\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)I_4^c\right] \qquad (2.35.34)$$
$$\tau_{xy}=\frac{P}{2\pi Af}\left[I_1^s-I_2^s+\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)I_4^s\right]$$

Burada σ_x ve σ_y ,x in çift fonksiyonları, τ_{xy} ise x in tek fonksiyonu olacak şekilde $x<0$ bölgesine devam edecektir.

(2.34.19) ve (2.34.20) de verilen yerdeğiştirme ifadeleri esasen klâsik elastisitede dahi hakikate uygun olmadığından bunların $\alpha\to\infty$ limitlerinin kalınlığı sabit haldeki çözümle üstüste düştüğü gösterilmekle yetinilecektir.

$$\lim_{\alpha\to\infty} U\Big|_{y=0} = \frac{P\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[\frac{1+\nu}{|\lambda|} - \frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{\alpha\lambda^2\,\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{2|\lambda|\alpha}}\right]$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} U\Big|_{y=0} = \frac{iP\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{E}\left(\frac{1-\nu}{|\lambda|}\right) \qquad (2.35.35)$$

Bunun ters transformasyonu [13], 5.2.26 dan

$$u\Big|_{y=0} = -\frac{P(1-\nu)}{iE}\left(-\frac{i}{\pi}\right)\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\alpha}{\lambda}\,d\lambda$$

$$u\Big|_{y=0} = -\frac{P(1-\nu)}{\pi E}\,si(0)$$

şeklinde elde edilir. $si(0) = -\frac{\pi}{2}$ yerine konarak

$$u\Big|_{y=0} = \frac{P(1-\nu)}{2E} \qquad (2.35.36)$$

bulunur. Bu da klâsik çözümle üstüste düşer.

Şimdi V fonksiyonu için benzer işlemler yapılarak (2.34.20) den

$$\lim_{\alpha\to\infty} V\Big|_{y=0} = \frac{P}{2E}\left[-\frac{2(1+\nu)}{|\lambda|}\cdot\frac{\dfrac{e^{-|\lambda|\alpha}}{|\lambda|\alpha}}{\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{2|\lambda|\alpha}}\cdot e^{-|\lambda|\alpha}\right.$$

$$\left. - \frac{2(1+\nu)}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{\dfrac{e^{-|\lambda|\alpha}}{|\lambda|\alpha}}{\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{2|\lambda|\alpha}}\cdot e^{-|\lambda|\alpha} + \frac{2\nu}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{\dfrac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{2|\lambda|\alpha}}\right]$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} V\Big|_{y=0} = -\frac{2P}{E}\cdot\frac{1}{|\lambda|} \qquad (2.35.37)$$

bulunur.

Bu ifadenin ters transformasyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|}\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$

integrali yapılmalıdır. [16], sayfa 361, 27 den yapılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} e^{-i\lambda x} d\lambda = -2\gamma - 2\log|x|$$

ve buradan da

$$v\Big|_{y=0} = \frac{2P}{\pi E}\left(\gamma + \log|x|\right) \qquad (2.35.38)$$

elde edilir.

Bu bölümde yerdeğiştirmeler için bulunan limit ifadelerinden (2.35.36) ve (2.35.38) ifadeleri sırasıyla Ek 1 de elde edilen $(E.1.17)_a$ ve $(E.1.17)_b$ ile üstüste düşerler.

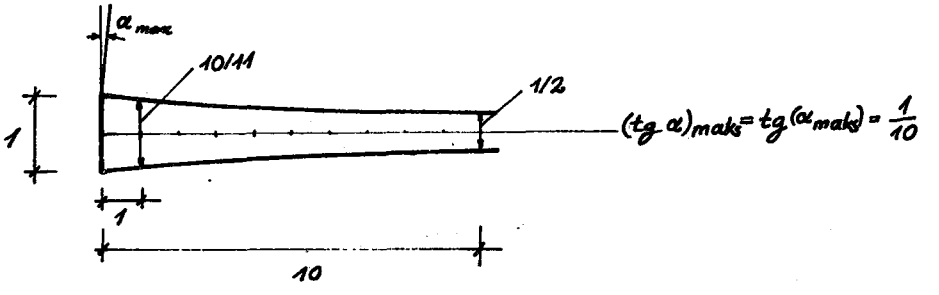
§2.36. Sayısal Uygulama ve Diyagramlar

$(2.35.34)_{a-c}$ ile verilen gerilmeler için fikir vermek amacıyla bu bölümde bazı sayısal uygulamalara ait sonuçlar verilecektir.

Bunun için

$$f(y) = \frac{1}{A + By} \qquad (2.36.1)$$

kalınlık değişimi fonksiyonunda $A=1$, $B=1/10$ alınacaktır. Bu durumda $\alpha=10$ olur. Bu özel halde levha pro-



Şekil 2.36.1

filinin y yönündeki değişimi Şekil 2.36.1 de gösterilmiştir. Bu levha için $y=1$ ve $y=10$ kesitlerinde σ_y ve τ_{xy} diyagramları ile $x=0$, $x=1$ ve $x=10$ kesitlerinde σ_x ve τ_{xy} diyagramları çizilmiştir (Diyagram 2.1). Bütün gerilme diyagramlarında (2.35.34) ifadelerinden elde edilen değerler

$$\frac{\text{Gerilme}}{P/2\pi}$$

oranıyla gösterilmiştir. Karşılaştırma kolaylığı bakımından klâsik çözümden elde edilen gerilme sonuçları her diyagramın üzerine kesikli çizgilerle işlenmiştir.

§2.4. Q Yüklemesi Hali

Bu yükleme hali daha önce de açıklandığı gibi birçok noktalarda P yüklemesine benzemektedir. Bu nedenle bileşenlerin pek çoğu P yüklemesinden alınarak bu bölümde tekrarlanmıyacaktır.

§2.41. Sınır Şartlarının Uygulanması

§2.3 dekilere benzer olarak sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
&z=A/2B \quad (y=0) \quad \text{için} \quad \sigma_y=0 \\
&z=A/2B \quad (y=0) \quad \text{için} \quad \tau_{xy}=f_0 Q\,\delta(x) \\
&z\to\infty \quad (y\to\infty) \quad \text{için} \quad \sigma_y=0 \\
&z\to\infty \quad (y\to\infty) \quad \text{için} \quad \tau_{xy}=0
\end{aligned} \qquad (2.41.1)$$

Bu bölümde de f_0 , kalınlık fonksiyonunun $y=0$ daki değeri olup $1/A$ dan ibarettir. $z\to\infty$ daki $\sigma_x=0$ şartı §2.3 de açıklanan gerekçelerle kullanılma-

mıştır. (2.31.2) ve (2.31.3) ifadelerinden yararlanılarak $(2.41.1)_{a-d}$ şartları aynı sırayla

$$
\begin{aligned}
& e^{A|\lambda|/B} C_3 + e^{-A|\lambda|/B} C_4 = 0 \\
& i\lambda^2 \operatorname{sgn}\lambda \, e^{A|\lambda|/B} C_3 - i\lambda^2 \operatorname{sgn}\lambda \, e^{-A|\lambda|/B} C_4 = f_0 Q \\
& C_3 + E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right) C_2 = 0
\end{aligned}
\tag{2.41.2}
$$

şeklinde yazılabilir. $(2.41.1)_d$ ile $(2.41.2)_c$ şartları birbirinin aynıdır.

$(2.41.2)_{a-c}$ denklem takımının çözümünden katsayılar

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \frac{Q \operatorname{sgn}\lambda}{2iA\lambda^2} e^{-A|\lambda|/B} \\
C_4 &= -\frac{Q \operatorname{sgn}\lambda}{2iA\lambda^2} e^{A|\lambda|/B} \\
C_2 &= -\frac{Q \operatorname{sgn}\lambda}{2iA\lambda^2} \cdot \frac{e^{-A|\lambda|/B}}{E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)}
\end{aligned}
\tag{2.41.3}
$$

olarak elde edilir. Bunlar (2.2.15) ifadesinde yerine konularak gerilme fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
\Phi = \frac{Q \operatorname{sgn}\lambda}{2iA\lambda^2} \Bigg[& -e^{A|\lambda|/B} e^{-2|\lambda| z} + \frac{e^{-A|\lambda|/B}}{E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)} E_1(4|\lambda| z) e^{2|\lambda| z} \\
& + \frac{e^{-A|\lambda|/B}}{E_1\left(\frac{2|\lambda|A}{B}\right)} \log\left(\frac{2Bz}{A}\right) e^{-2|\lambda| z} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.41.4}
$$

ifadesine varılır.

Bu ifadedeki $\operatorname{sgn}\lambda$ çarpanı fonksiyonun tek fonksiyon olmasını sağlar. Bu fonksiyon $\lambda > 0$ için $+1$, $\lambda < 0$ için -1 değerini alır. Dolayısıyla $1/\operatorname{sgn}\lambda = \operatorname{sgn}\lambda$ yazılmıştır.

(2.41.4) ifadesinde z yerine y değişkenine dönülerek $\alpha = A/B$ olmak üzere

$$\Phi = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iA\lambda^2}\left[-e^{-|\lambda|y} + \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y} + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \tag{2.41.5}$$

elde edilir. Bu ifade incelenirse gerilme fonksiyonunun λ değişkeni bakımından bir tek fonksiyon olduğu dolayısıyla normal gerilmelerin tek fonksiyonlar , kayma gerilmesinin ise bir çift fonksiyon olacağı görülebilir.

(2.41.5) ifadesinin $\alpha \to \infty$ için limiti

$$\lim_{\alpha\to\infty} \Phi = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{i|\lambda|}\, y e^{-|\lambda|y} \tag{2.41.6}$$

bulunur. (2.41.6) ile Ek 1 de elde edilen (E.1.18) ifadesi çakışmaktadır.

§2.42. Gerilme İfadeleri

Bu yükleme hali için de gerilme ifadeleri (2.32.1)$_{a-c}$ bağıntılarından elde edilecektir. (2.41.5) deki fonksiyonu kullanılarak gerilmeler

$$\Sigma_x = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iAf}\left[-e^{-|\lambda|y} + \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y} - \frac{2}{\alpha+y}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda|\,E_1(2|\lambda|\alpha)} + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right] \tag{2.42.1}$$

$$\Sigma_y = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iAf}\left[e^{-|\lambda|y} - \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y} - \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

$$T_{xy} = \frac{Q}{2Af}\left[-e^{-|\lambda|y} - \frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y} - \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

şeklinde hesaplanır. Bu ifadeler için yapılan ara işlemler §2.32 de yapılanlarla aynı olduğundan tekrar edilmemiştir. Burada, normal gerilmelerin

λ ya göre tek , kayma gerilmesinin ise çift fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum ise yüklemenin antisimetrikliğinden beklenen bir sonuçtur.

Bu bölümde elde edilen $(2.42.1)_{a-c}$ gerilme ifadelerinin $\alpha \to \infty$ halindeki limitleri $(E.1.19)_{a-c}$ ifadeleriyle üstüste düşmektedir.

§2.43. Şekil Değiştirme İfadeleri

§2.33 de olduğu gibi (1.3.2) ifadelerinden yararlanılarak

$$E_x = \frac{1}{E}\left[\Sigma_x - \nu \Sigma_y\right]$$

$$E_y = \frac{1}{E}\left[\Sigma_y - \nu \Sigma_x\right] \qquad (2.43.1)$$

$$E_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} T_{xy}$$

şeklinde yazılabilir.

§2.44. Yer Değiştirme İfadeleri

Burada da x yönündeki yerdeğiştirmeler u , y yönündeki yerdeğiştirmeler v olarak adlandırılmışlardır.

§2.34. dekine paralel düşüncelerle $(1.3.3)_a$ bağıntısının Fourier transformu alınarak, $(2.43.1)_a$ ve $(2.42.1)_{a,b}$ ifadelerinden

$$U = \frac{Q}{2|\lambda| A E_f}\left[-(1+\nu)e^{-|\lambda|y} + (1+\nu)\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)} e^{|\lambda|y}\right. \qquad (2.44.1)$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha+y} \cdot \frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda| E_1(2|\lambda|\alpha)} + (1+\nu)\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\right]$$

elde edilir. v yerdeğiştirmesinin transformu olan V için $(1.3.3)_b$ bağıntısının Fourier transformunda $(2.43.1)_b$, $(2.42.1)_{a,b}$ ifadeleri yerine konularak

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iAEf}\Big[-(1+\nu)e^{-|\lambda|y}+(1+\nu)\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}$$
$$-\frac{2\nu}{\alpha+y}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{|\lambda|E_1(2|\lambda|\alpha)}+(1+\nu)\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Big] \qquad (2.44.2)$$

elde edilir. (2.44.2) den V ifadesinin elde edilmesi y değişkenine göre integrasyon işlemini gerektirir. (2.44.2) ile (2.34.4) ifadesindeki terimler birbiri ile aynı olduğundan burada da §2.34 de yapılan integrasyon işlemlerinden yararlanılacaktır. Sadece (2.34.5),(2.34.12),(2.34.15) ve (2.34.16) kısmî sonuçlarının (2.44.2) deki katsayılarıyla çarpılarak toplanması ile

$$V=-\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iAE}\Big[\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}e^{-|\lambda|y}+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}e^{-|\lambda|y}$$
$$+\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}$$
$$+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}$$
$$+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_2[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)} \qquad (2.44.3)$$
$$-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}$$
$$-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_2[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}$$
$$+\frac{2\nu B}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Big]+F(\lambda)$$

ifadesi elde edilir. Burada $F(\lambda)$, integrasyon sabiti rolü oynayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon y nin bir sabit değeri için belirtilmelidir.Burada da $y\to\infty$ için diğer bütün terimler sıfıra

gittiğinden sonsuzda yerdeğiştirmelerin sıfır olması $F(\lambda)=0$ ile mümkündür. Gerekli toplama ve sadeleştirmeler yapılırsa V için

$$
\begin{aligned}
V=-\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iAE}\Bigg[&\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}e^{-|\lambda|y}+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}e^{-|\lambda|y}\\
&+\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}-\frac{2(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}\\
&+\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[2|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{|\lambda|y}-\frac{2B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\frac{E_1[|\lambda|(\alpha+y)]}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}\\
&-\frac{(1+\nu)}{|\lambda|f}\cdot\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}-\frac{B(1+\nu)}{\lambda^2}\cdot\log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\\
&+\frac{2\nu B}{\lambda}\cdot\frac{e^{-|\lambda|(2\alpha+y)}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.44.4}
$$

sonucu bulunur.

Pratikte önemli olması bakımından U ve V nin $y=0$ daki limit ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$
U\Big|_{y=0}=-\frac{Q}{E}\cdot\frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{\alpha\lambda^2E_1(2|\lambda|\alpha)}
\tag{2.44.5}
$$

$$
\begin{aligned}
V\Big|_{y=0}=-\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{2iE}\Bigg[&\frac{3(1+\nu)}{|\lambda|}+\frac{2(1+\nu)}{\alpha\lambda^2}-\frac{2(1+\nu)}{|\lambda|}\cdot\frac{E_1(\alpha|\lambda|)}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}\\
&-\frac{2(1+\nu)}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{E_1(|\lambda|\alpha)}{E_1(2|\lambda|\alpha)}e^{-|\lambda|\alpha}+\frac{2\nu}{\alpha\lambda^2}\cdot\frac{e^{-2|\lambda|\alpha}}{E_1(2|\lambda|\alpha)}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.44.6}
$$

Yüklemenin antisimetrikliğinden beklenen bir sonuç olarak (2.44.1) ve (2.44.5) ifadelerinde verilen U, λ ya göre çift, (2.44.4) ve (2.44.6) da verilen V ise tek fonksiyonlardır.

Burada (2.44.5) ve (2.44.6) ifadelerinin $\alpha\to\infty$ limitleri sırasıyla $(E.1.23)_a$ ve $(E.1.23)_b$ ifadelerini verirler.

§2.45. Gerilme ve Yerdeğiştirmeler için Ters Transformasyonlar

P yüklemesi haline ait $(2.34.4)_{a-c}$ ifadeleriyle verilen gerilmelerle Q yüklemesine ait $(2.42.1)_{a-c}$ ifadelerinin karşılaştırılması sonunda her iki halde gerilme ifadelerinin terim terim birbirine benzediği görülmektedir. Dolayısıyla §2.35 de yapılan ters transformasyon işlemlerinin hepsi burada da kullanılabilir. Ters transformasyon integralleri için tipler §2.35 de verilen tablodakilerle ayni olacaktır. Dolayısıyla bu bölümde yalnızca $(2.42.1)_{a-c}$ ifadelerindeki simetri ve antisimetri özellikleri düşünülerek $(2.35.31)_{a-c}$ ifadeleri yerine geçecek

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Q}{2\pi A_f}\left[-I_1^s + I_2^s - \frac{2}{\alpha+y} I_3^s + \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) I_4^s\right] \\
\sigma_y &= -\frac{Q}{2\pi A_f}\left[I_1^s - I_2^s - \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) I_4^s\right] \qquad (2.45.1) \\
\tau_{xy} &= \frac{Q}{2\pi A_f}\left[-I_1^c - I_2^c - \log\left(1+\frac{y}{\alpha}\right) I_4^c\right]
\end{aligned}$$

ifadeleri derhal yazılabilir. Burada σ_x ve σ_y x in tek fonksiyonları, τ_{xy} ise x in bir çift fonksiyonu olarak $x<0$ bölgesine devam ettirilecektir. $(2.45.1)_{a-c}$ ifadelerinde geçen integraller §2.35 de hesaplanmıştır.

(2.44.5) ve (2.44.6) da verilmiş bulunan yerdeğiştirme ifadeleri klâsik teoride dahi hakikate uygun sonuç vermediğinden burada bunların limitlerinin klâsik çözüme yakınsadığı gösterilmekle yetinilecektir.

$$\lim_{\alpha\to\infty} U\Big|_{y=0} = -\frac{2Q}{E}\cdot\frac{1}{|\lambda|} \qquad (2.45.2)$$

Bu ifadenin ters transformasyonu [16], sayfa 361, 27 den yapılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} e^{-i\lambda x} d\lambda = -2\gamma - 2\log|x|$$

ifadesi yardımıyla

$$u\Big|_{y=0} = \frac{2Q}{E}\left[\gamma + \log|x|\right] \qquad (2.45.3)$$

bulunur. Benzer işlemler $V\Big|_{y=0}$ için de yapılarak

$$\lim_{x\to\infty} V\Big|_{y=0} = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\cdot\frac{(1-\nu)}{|\lambda|} \qquad (2.45.4)$$

elde edilir. Bu ifadenin ters transformasyonu yapılarak

$$v\Big|_{y=0} = \frac{Q(1-\nu)}{iE}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda}d\lambda$$

$$= \frac{Q(1-\nu)}{iE}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot(i\pi\,\mathrm{sgn}\,x)$$

$$v\Big|_{y=0} = \frac{Q(1-\nu)}{2E}\,\mathrm{sgn}\,x \qquad (2.45.5)$$

sonucu elde edilir. ([16], sayfa 360, 19)

Burada (2.45.3) ile $(E.1.25)_a$ ve (2.45.5) ile $(E.1.25)_b$ ifadelerinin üstüste düştüğüne dikkat edilmelidir.

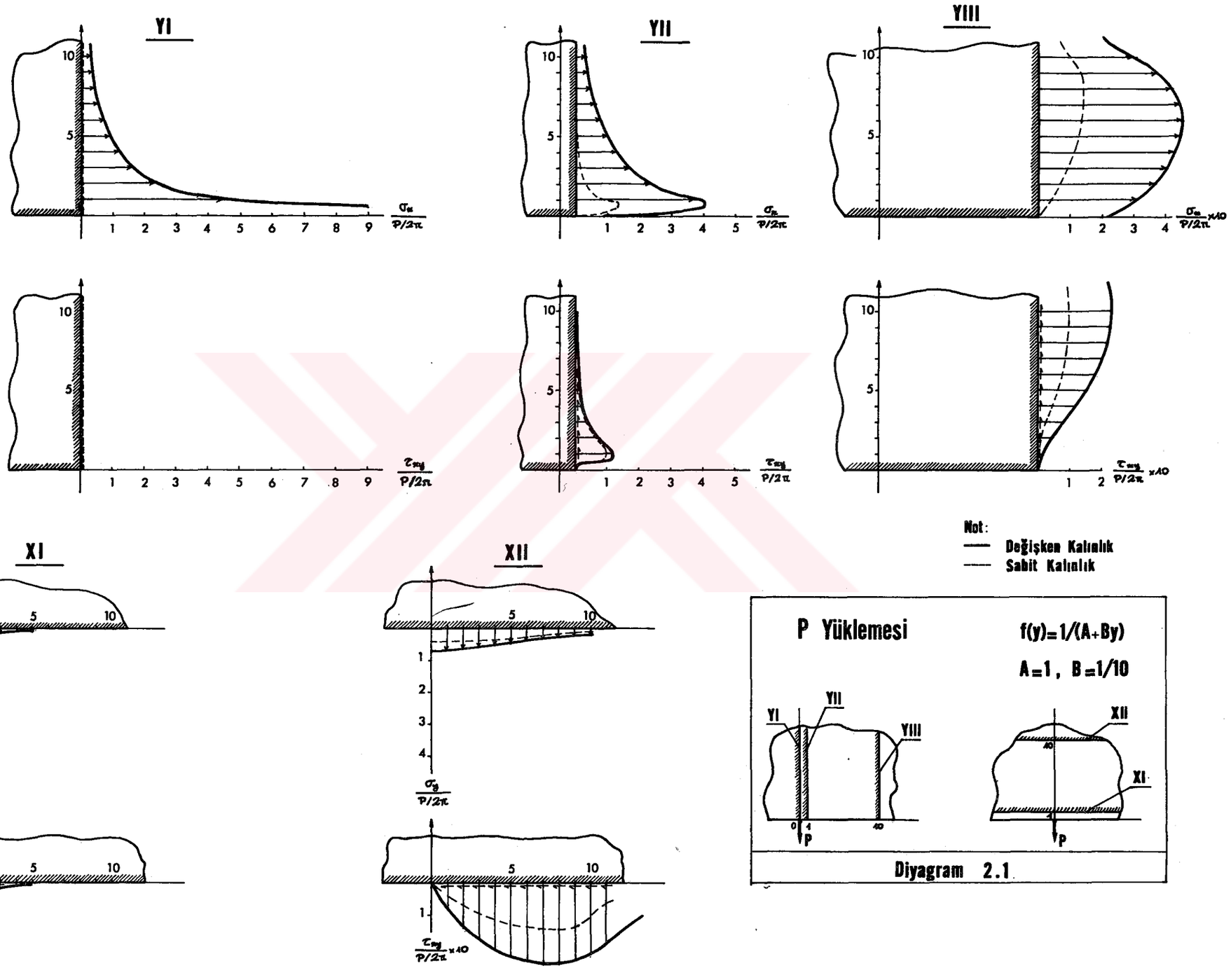
§2.46. Sayısal Uygulama ve Diyagramlar

$(2.45.1)_{a-c}$ ifadeleri ile verilen gerilmelerin dağılışları hakkında fikir vermek amacıyla §2.35 de verilen sayısal değerlerle $y=1$ ve $y=10$ kesitlerinde σ_y ve τ_{xy} dağılışı, $x=0$, $x=1$ ve $x=10$ kesitlerinde σ_x ve τ_{xy} dağılışı diyagramlarla verilmiştir

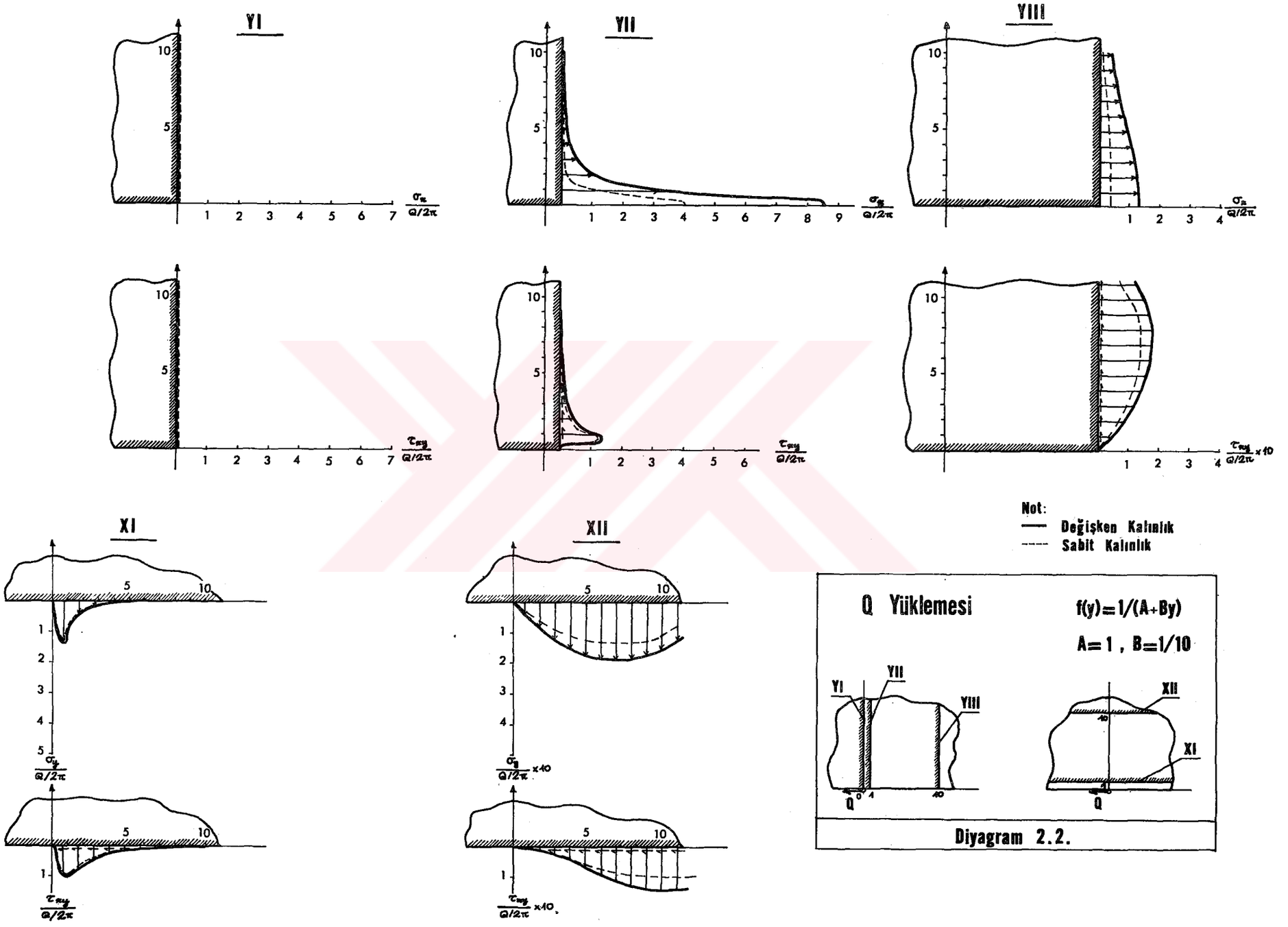
(Diyagram 2.2). Bütün diyagramlarda (2.45.1) $_{a-c}$ den hesaplanan gerilme değerleri

$$\frac{\text{Gerilme}}{Q/2\pi}$$

oranıyla gösterilmiştir. Karşılaştırma kolaylığı bakımından klâsik çözümden elde edilen gerilme sonuçları her diyagramın üzerine kesikli çizgilerle işlenmiştir.


YI
YII
YIII
XI
XII
Not:
Değişken Kalınlık
Sabit Kalınlık
P Yüklemesi
f(y)=1/(A+By)
A=1 , B=1/10
P

Diyagram 2.1


YI
YII
YIII
XI
XII
Not:
Değişken Kalınlık
Sabit Kalınlık
Q Yüklemesi
f(y)=1/(A+By)
A=1 , B=1/10

Diyagram 2.2.

B Ö L Ü M 3

KALINLIĞI BİR CİVARINDA KÜÇÜK DEĞİŞİMLER GÖSTEREN YARIM DÜZLEM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

§3.1. Kalınlığı Bir Civarında Küçük Değişimler Gösteren Yarım Düzlem Probleminin Çözümü İçin Genel bir Pertürbasyon Metodu

Bu bölümde, kalınlığı birim civarında küçük değişimler gösteren her türlü yarım düzlem probleminin çözümünde yararlı olabilecek genel bir pertürbasyon metodu üzerinde çalışılacaktır. Kalınlık değişimi fonksiyonu genel olarak

$$f(y) = 1 + \varepsilon g(y) \tag{3.1.1}$$

şeklinde alınacaktır. Burada $g(y)$ fonksiyonu, y nin bütün değerleri için sonlu kalan herhangi bir fonksiyon olarak seçilebilir. Burada ε sayısının küçük ve boyutsuz bir çarpan olduğuna ve $\varepsilon g(y)$ ek kalınlığının, bütün y değerleri için 1 in yanında küçük kaldığına dikkat edilmelidir.

Bu halde ϕ gerilme fonksiyonunun sağlayacağı uygunluk şartı (1.3.8) denklemi ile verilir. Buna göre

$$\Delta\Delta\phi - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi) + \frac{1}{f^2}\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Bu denklemdeki katsayılar $f(y)$ için (3.1.1) de verilen ifade ile hesaplanacaktır. Bu hesap sonucunda

$$\frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{1+\varepsilon g(y)}\cdot\varepsilon\cdot g'(y)=2[1-\varepsilon g(y)]\varepsilon g'(y)$$

veya ε un yüksek mertebeden kuvvetleri atılarak

$$\frac{2}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=2\varepsilon g'(y) \tag{3.1.3}$$

ve

$$\frac{1}{f^2}\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$
$$=\frac{1}{[1+\varepsilon g(y)]^2}\left[2\varepsilon^2 g'^2(y)-[1+\varepsilon g(y)]\varepsilon g''(y)\right]$$
$$=[1-2\varepsilon g(y)][2\varepsilon^2 g'(y)-\varepsilon g''(y)-\varepsilon^2 g(y)g''(y)]$$

veya yine ε un yüksek mertebeleri atılarak

$$\frac{1}{f^2}\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]=-\varepsilon g''(y) \tag{3.1.4}$$

ifadelerine varılır. Bu katsayılar (3.1.2) ifadesinde yerlerine konarak

$$\Delta\Delta\phi-2\varepsilon g'\frac{\partial\Delta\phi}{\partial y}-\varepsilon g''\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]=0 \tag{3.1.5}$$

bulunur.

Bu denklemde ϕ yerine

$$\phi=\phi_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\phi_k \tag{3.1.6}$$

tipinde bir pertürbasyon serisi konulabilir.Bu seride ϕ_0 , $\varepsilon=0$ haline tekabül eden çözüm olup, bunun burada incelenen problemde, sabit kalınlıklı halde yarım düzlem probleminin çözümünü veren gerilme fonksiyonu olduğu açıktır. ϕ_k fonksiyonları (3.1.6) serisinin (3.1.5) denkleminde yerine konarak ε un eş kuvvetlerinin çarpanlarının eşitlenmesiyle elde edilir. Bu çalışmada seriden sadece bir terim almakla yetinilecektir. Bu esasa göre ϕ_1 fonksiyonunun belirtilmesi için

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1$$

ifadesi (3.1.5) denklemine götürülür ve $\Delta\Delta\phi_0=0$ şartının sağlandığı düşünülürse

$$\Delta\Delta\phi_1 = 2g'\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\phi_0)+g''\left[\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\right]=0 \qquad (3.1.7)$$

denklemine varılır. ϕ_0 bilinen bir fonksiyon olduğundan problem ikinci taraflı (homogen olmayan) bir Laplace denkleminin çözümüne indirgenmiş olur. (3.1.7) denkleminin çözümü için bu bölümde de Fourier Transformasyonundan yararlanılacaktır. §2.2 de verilen transformasyon kullanılırsa , (3.1.7) denklemi

$$\mathcal{F}\{\phi_1\} = \Phi_1$$

olmak üzere

$$\Phi_1'''' - 2\lambda^2\Phi_1'' + \lambda^4\Phi_1 = 2g'(\Phi_0''' - \lambda^2\Phi_0') + g''(\Phi_0'' + \nu\lambda^2\Phi_0) \qquad (3.1.8)$$

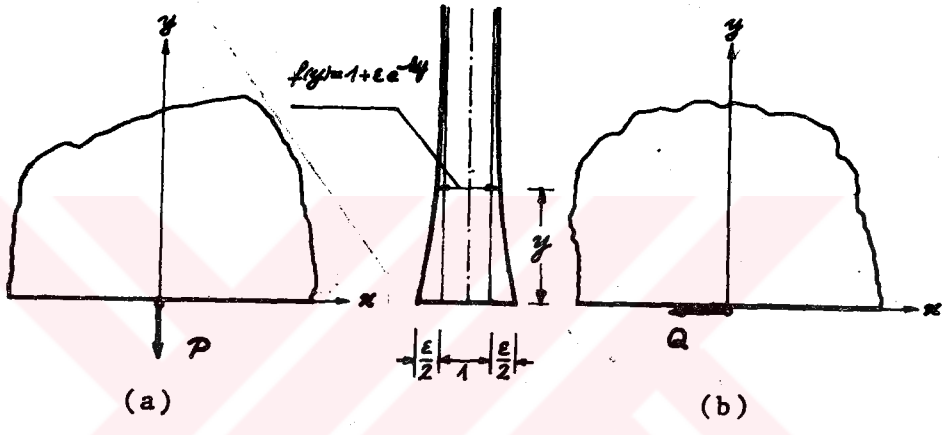
haline dönüşür.

Bundan sonraki kısımlarda (3.1.8) in çeşitli çözümlerini gerektiren bir örnek ele alınacak ve Bölüm 2 de incelenen iki esas yükleme için gerilme problemleri çözülecektir. Pertürbasyon

metodunun kullanılışında matematik güçlükler dolayısıyla ε mertebesinden öteye gidilmiyecektir.

§3.2. Örnek ve Sayısal Uygulamalar

Bu ve bundan sonraki kısımlarda §3.1 de verilen pertürbasyon metodunun bir uygulaması yapılacaktır.



Şekil 3.2.1

Örnek problemde

$$g(y) = e^{-ky} \tag{3.2.1}$$

alınacaktır. Buna göre

$$f(y) = 1+\varepsilon e^{-ky} \tag{3.2.2}$$

olur. Burada $f(0) = 1+\varepsilon$ ve $f(\infty) = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir. Problem, Bölüm 2 de olduğu gibi P ve Q yüklemeleri için ayrı ayrı ele alınacaktır. (Bak. Şekil 3.2.1)

Aşağıda, §3.21 de P yüklemesi, §3.22 de ise Q Yüklemesi incelenecektir.

§3.21. P Yüklemesi

Problemin çözümü için (3.1.8) denkleminin sağ tarafı bu özel hale göre düzenlenmelidir. (E.1.8) denkleminden Φ_0 için

$$\Phi_0 = -\frac{P(1+|\lambda|y)}{\lambda^2} e^{-|\lambda|y} \tag{3.21.1}$$

ifadesi alınabilir. Bunun gerekli türevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= P y e^{-|\lambda|y} \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} &= P(1-|\lambda|y) e^{-|\lambda|y} \\ \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial y^3} &= -P|\lambda|(2-|\lambda|y) e^{-|\lambda|y} \end{aligned} \tag{3.21.2}$$

Bu türevlerden yararlanılarak (3.1.8) denklemi P Yüklemesi halinde

$$\Phi_1'''' - 2\lambda^2 \Phi_1'' + \lambda^4 \Phi_1 = -4P|\lambda| e^{-|\lambda|y} g' + P[(1-\nu)-(1+\nu)|\lambda|y] e^{-|\lambda|y} g''$$

şeklinde yazılabilir.

Burada ele alınan örnek problemde $g(y) = e^{-ky}$ olduğundan Φ_1 in çözüleceği denklemin son şekli

$$\Phi_1'''' - 2\lambda^2 \Phi_1'' + \lambda^4 \Phi_1 = 4Pk|\lambda| e^{-(|\lambda|+k)y} + Pk^2[(1-\nu)-(1+\nu)|\lambda|y] e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.21.3}$$

olacaktır. Denklemin Fourier Transformasyonunun şartlarını sağlayan homogen çözümü

$$\Phi_1^{(h)} = (c_1 + c_2 y) e^{-|\lambda| y} \tag{3.21.4}$$

ile verilir.

Özel çözüm için

$$\Phi_1^{(öz)} = (\bar{a} - \bar{b} y) e^{-(|\lambda| + k) y} \tag{3.21.5}$$

tipi seçilecektir. Bu çözümü tamamlamak için $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ belirtilmelidir. Bunun için ise $\Phi_1^{(öz)''}$ ve $\Phi_1^{(öz)''''}$ türevlerinin verilmesi gerekir. Bu türevler aşağıda hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(öz)}}{\partial y^2} &= -2(|\lambda| + k)\bar{b} e^{-(|\lambda|+k)y} + (\bar{a} + \bar{b} y)(|\lambda| + k)^2 e^{-(|\lambda|+k)y} \\ \frac{\partial^4 \Phi_1^{(öz)}}{\partial y^4} &= -4(|\lambda| + k)^3 \bar{b} e^{-(|\lambda|+k)y} + (\bar{a} + \bar{b} y)(|\lambda| + k)^4 e^{-(|\lambda|+k)y} \end{aligned} \tag{3.21.6}$$

Bulunan bu ifadeler (3.21.3) de yerine konarak gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &-4\bar{b}k(2|\lambda| + k)(|\lambda| + k) + (\bar{a} + \bar{b} y) k^2 (2|\lambda| + k)^2 \\ &\qquad = 4P|\lambda| k + P k^2 [(1 - \nu) - (1 + \nu)|\lambda| y] \end{aligned} \tag{3.21.7}$$

ifadesine varılır.

Şimdi $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ nin belirtilmesi için(3.21.7) nin iki tarafındaki y li terimlerin katsayıları eşitlenerek

$$\bar{b} = -\frac{p(1+\nu)|\lambda|}{(2|\lambda|+k)^2} \tag{3.21.8}$$

ve y siz terimler eşitlenerek (3.21.8) in de yerine konulmasıyla

$$\bar{a} = \frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}\left[4(1-\nu)\lambda^2+2(1-3\nu)k|\lambda|+(1-\nu)k^2\right] \tag{3.21.9}$$

elde edilir. Buna göre $\phi_1^{(\ddot{o}z)}$ için

$$\Phi_1^{(\ddot{o}z)} = \frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}(a+by)e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.21.10}$$

ifadesi verilebilir. Burada a ve b , $|\lambda|$ nın ikinci dereceden polinomları olup

$$a = 4(1-\nu)\lambda^2+2(1-3\nu)k|\lambda|+(1-\nu)k^2$$

$$b = -2(1+\nu)k\lambda^2-(1+\nu)k^2|\lambda| \tag{3.21.11}$$

ifadeleriyle verilmişlerdir.

(3.21.4) ve $(3.21.11)_{a,b}$ ifadelerinin toplanmasıyla

$$\Phi_1 = C_1e^{-|\lambda|y}+C_2ye^{-|\lambda|y}+\frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}[a+by]e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.21.12}$$

bulunur.

Şimdi C_1 ve C_2 sabitleri tayin edilecektir.

$$\Phi = \Phi_0+\varepsilon\Phi_1$$

olduğuna göre, σ_y üzerine koşulacak homogen olmıyan sınır şartı (Bak.§2.31)

Φ_0 tarafından sağlanacağından Φ_1 , $y=0$ da $\sigma_y=0$ ve $\tau_{xy}=0$ şartlarını sağlamalıdır. Bunlar için Φ_1 ve Φ_1' ifadeleri gerekir. Burada sonsuzdaki şartların $e^{-|\lambda|y}$ çarpanları dolayısıyla kendiliğinden sağlandığına dikkat edilmelidir. Gerilme ifadeleri için Φ_1 in birinci ve ikinci türevlerinin verilmesi gerekir. Bu türevler aşağıda hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = (-|\lambda|C_1 + C_2)e^{-|\lambda|y} - C_2|\lambda|ye^{-|\lambda|y} + \frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}[b-(|\lambda|+k)(a+by)]e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.21.13}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = (\lambda^2 C_1 - 2|\lambda|C_2)e^{-|\lambda|y} + C_2\lambda^2 y e^{-|\lambda|y} - \frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}[2b(|\lambda|+k)-(|\lambda|+k)^2 a-(|\lambda|+k)^2 by] \tag{3.21.14}$$

Sınır şartı olarak $\sigma_y|_{y=0}=0$ a $\Sigma_y|_{y=0}=0$ ve dolayısıyla $-\lambda^2\Phi_1|_{y=0}=0$ tekabül eder. $\tau_{xy}|_{y=0}=0$ a ise $T_{xy}|_{y=0}=0$ ve dolayısıyla $i\lambda\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\Big|_{y=0}=0$ karşı gelir. Bu şartların kullanılmasıyla

$$C_1 = -\frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}a \tag{3.21.15}$$

$$C_2 = \frac{p}{k(2|\lambda|+k)^3}[ka-b]$$

elde edilir.

Bu sabitler (2.32.1) formüllerinden elde edilen gerilme ifadelerinde yerine konarak

$$
\begin{aligned}
f\Sigma_x^{(1)} &= \frac{P}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{[2|\lambda|b-(\lambda^2+2k|\lambda|)a]\,e^{-|\lambda|y} \\
&\quad +[k\lambda^2 a-\lambda^2 b]\,y e^{-|\lambda|y}+[(|\lambda|+k)^2 a-2(|\lambda|+k)b]\,e^{-(|\lambda|+k)y} \\
&\quad +(|\lambda|+k)^2 b y e^{-(|\lambda|+k)y}\Big\} \\
f\Sigma_y^{(1)} &= \frac{P}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{\lambda^2 a\, e^{-|\lambda|y}+[\lambda^2 b-k\lambda^2 a]\,y e^{-|\lambda|y} \\
&\quad -\lambda^2 a e^{-(|\lambda|+k)y}-\lambda^2 b y e^{-(|\lambda|+k)y}\Big\} \qquad (3.21.16) \\
f\tau_{xy}^{(1)} &= \frac{iP\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{[|\lambda|b-\lambda^2 a-k|\lambda|a]\,e^{-|\lambda|y} \\
&\quad +[k\lambda^2 a-\lambda^2 b]\,y e^{-|\lambda|y}+[\lambda^2 a+k|\lambda|a-|\lambda|b]\,e^{-(|\lambda|+k)y} \\
&\quad +[\lambda^2 b+k|\lambda|b]\,y e^{-(|\lambda|+k)y}\Big\}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Gerilme ifadelerinin ters transformasyonlarında $\sigma_x^{(1)}\big|_{y=0}$ bir özel hal teşkil eder. Dolayısıyla aşağıda ayrı olarak incelenmiştir.

$$f\Sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0}=P\left[\frac{ka-2b}{(2|\lambda|+k)^3}\right] \qquad (3.21.17)$$

elde edilir. a ve b polinomları yerine konursa

$$f\Sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0}=P\left[\frac{-8\nu k\lambda^2-8\nu k^2|\lambda|+(1-\nu)k^3}{(2|\lambda|+k)^3}\right] \qquad (3.21.18)$$

bulunur. Sağ taraftaki köşeli parantezin içinde bulunan rasyonel ifadenin asimptotik formu

$$\nu k\left[-\frac{1}{|\lambda|}+\frac{k}{2\lambda^2}\right] \qquad (3.21.19)$$

olur. Burada rasyonel fonksiyonla, (3.21.19) daki asimptotik formun birbirine yakınsadığı bir B değeri sayısal kıyaslama ile elde edilir. Ayrıca [13] , 5.2.27 den

$$\int_B^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = -Ci(Bx)$$

ayrıca kısmî integralle [13] , 5.2.26 da kullanılarak

$$\int_B^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2}\, d\lambda = -\frac{\cos \lambda x}{\lambda}\Big|_B^\infty - x\int_B^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda$$

$$= \frac{\cos Bx}{B} + x\, si(Bx)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$f\sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0} = \frac{P}{2\pi}\left\{ 2\int_0^B \frac{-B\nu k\lambda^2 - B k^2\lambda + (1-\nu)k^3}{(2\lambda+k)^3} \cos \lambda x\, d\lambda + 2\nu k\, Ci(Bx) + \nu k^2\left[\frac{\cos Bx}{B} + x\, si(Bx)\right]\right\} \tag{3.21.20}$$

elde edilir.

Bunun dışında bütün gerilmeler için ters transformasyon işlemleri aynı esas dahilinde yapılacaktır. Bu ifadeler aşağıda integral formda verilmiştir.

$$f\sigma_x^{(1)} = \frac{P}{\pi k}\left\{ \int_0^\infty \frac{2\lambda b - \lambda^2 a - k\lambda a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos \lambda x\, d\lambda + y\int_0^\infty \frac{k\lambda^2 a - \lambda^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos \lambda x\, d\lambda \right.$$

$$+ e^{-ky}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 a + 2k\lambda a + k^2 a - 2\lambda b - 2kb}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda$$

$$+ y e^{-ky}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 b + 2k\lambda b + k^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda \Bigg\}$$

$$f\sigma_y^{(1)} = \frac{p}{\pi k}\Bigg\{\int_0^\infty \frac{\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda \qquad (3.21.21)$$

$$+ y\int_0^\infty \frac{\lambda^2 b - k\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda + e^{-ky}\int_0^\infty \frac{-\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda$$

$$+ y e^{-ky}\int_0^\infty \frac{-\lambda^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\cos\lambda x\, d\lambda \Bigg\}$$

$$f\tau_{xy}^{(1)} = \frac{p}{\pi k}\Bigg\{\int_0^\infty \frac{\lambda b - \lambda^2 a - k\lambda a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda$$

$$+ y\int_0^\infty \frac{\lambda^2 b - k\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda + e^{-ky}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 a + k\lambda a - \lambda b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda$$

$$+ y e^{-ky}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 b + k\lambda b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y}\sin\lambda x\, d\lambda \Bigg\}$$

Bütün gerilme ifadelerinde a ve b polinomlarının λ^2, λ ve 1 le çarpımlarının $(2\lambda+k)^3$ ile bölümü vardır. Bu fonksiyonların hepsi $e^{-\lambda y}$ ile çarpıldığından λ nın büyük değerlerinde hızla küçülürler. Biz gerilme diyagramlarının çizimi için $(0,\infty)$ integralleri yerine $(0, B)$ integrallerini ele alacağız. Diyagramların çizimi için (x ve y) $= 0, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20$ değerleri kullanılacaktır. Bir hata kontrolu olmak üzere $\sin\lambda x$ veya $\cos\lambda x$ için 1 alarak en büyük değer vermesi tabiî olan $\lambda^2 a e^{-\lambda y}/(2\lambda+k)^3$ ifadesini $(0,B)$ aralığında, $y=0.5$ için sayısal olarak integre ederek, elde edilen sonuç, $B=20$ için 0.334830 olmaktadır. Oysa ki Asimptotik formun $(20,\infty)$ integrali 0.001494 değerini verir ki oransal hatanın mertebesi bütün y değerleri için bundan çok daha küçük olacaktır.

Dolayısıyla (3.21.21) ifadelerindeki integraller $(0,20)$ aralığında yapılacak sonra $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$ ve $\tau_{xy}^{(0)}$ ile

$$\text{Gerilme} = \text{Gerilme}^{(0)} + \varepsilon \times \text{Gerilme}^{(1)}$$

şeklinde toplanacaktır.

Bu hesabın sonuçları $\varepsilon = 0.001$ ile $\varepsilon = 0.5$ arasında değişmek üzere çeşitli ε değerleri için sayısal olarak elde edilmiştir. Nümerik hesaplarda $\nu = 0.3$ ve $k = 1$ alınmıştır. Sayısal sonuçlar Diyagram 3.1 de eğrilerle gösterilmiştir. Bu diyagramdan görüleceği gibi $\varepsilon = 0.5$ gibi oldukça büyük bir pertürbasyon parametresi değeri için dahi metod gayet iyi sonuç vermektedir.

§3.22. Q Yüklemesi

Problemin çözümü için önce, (3.1.8) denklemi nin sağ tarafı bu özel hale göre düzenlenmelidir. (E.1.18) ifadesinden

$$\Phi_0 = -\frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda|}\, y\, e^{-|\lambda| y} \tag{3.22.1}$$

alınarak buna ait türevler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= -\frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda|}(1-|\lambda| y)\, e^{-|\lambda| y} \\
\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} &= iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda\,(2-|\lambda| y)\, e^{-|\lambda| y} \\
\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial y^3} &= -iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda\,|\lambda|(3-|\lambda| y)\, e^{-|\lambda| y}
\end{aligned} \tag{3.22.2}$$

elde edilir. Bu türevlerden yararlanılarak (3.1.8) denklemi Q Yüklemesi halinde

$$\Phi_1'''' - 2\lambda^2\Phi_1'' + \lambda^4\Phi_1 = -4iQ\,\mathrm{sgn}\lambda\,|\lambda|\,e^{-|\lambda|y}g'$$
$$+ iQ\,\mathrm{sgn}\lambda\,[2-(1+\nu)|\lambda|y]\,e^{-|\lambda|y}g''$$

şeklini alır. Bu çalışmada örnek olarak $g(y) = e^{-ky}$ alındığından Φ_1 in çözüleceği diferansiyel denk - lemin son şekli

$$\Phi_1'''' - 2\lambda^2\Phi_1'' + \lambda^4\Phi_1 = 4iQ\,\mathrm{sgn}\lambda\,k|\lambda|\,e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.22.3}$$
$$+ iQ\,\mathrm{sgn}\lambda\,k^2[2-(1+\nu)|\lambda|y]\,e^{-(|\lambda|+k)y}$$

olacaktır. Denklemin Fourier transformasyonlarına ait şartları sağlayan homogen çözümü

$$\Phi_1^{(h)} = (c_1 + c_2 y)\,e^{-|\lambda|y} \tag{3.22.4}$$

şeklindedir . Özel çözüm için §3.21 de uygulanan metodun benzeri kullanılarak

$$\Phi_1^{(öz)} = \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}[a+by]\,e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.22.5}$$

elde edilir. Burada da a ve b , $|\lambda|$ nın ikinci dereceden polinomları olup

$$a = 4(1-\nu)\lambda^2 + 4(1-\nu)k|\lambda| + 2k^2 \tag{3.22.6}$$
$$b = -2(1+\nu)k\lambda^2 - (1+\nu)k^2|\lambda|$$

ifadeleriyle verilmişlerdir.

Buna göre (3.22.4),(3.22.5) ve (3.22.6) gözönüne alınarak Φ_1 için,

$$\Phi_1 = C_1 e^{-|\lambda| y} + C_2 y e^{-|\lambda| y} + \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}[a+by]e^{-(|\lambda|+k)y} \tag{3.22.7}$$

ifadesine varılır. C_1 ve C_2 katsayılarının belirtilmesi için $y=0$ da Φ_1 den meydana gelecek $\Sigma_y^{(1)}$ ve $\tau_{xy}^{(1)}$ in homogen sınır şartlarını sağlamaları gereğinden yararlanılacaktır. Gerilme ifadeleri için gerekli olan türevler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = (-|\lambda| C_1 + C_2) e^{-|\lambda| y} - C_2 |\lambda| y e^{-|\lambda| y} + \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}[b-(|\lambda|+k)(a+by)]e^{-(|\lambda|+k)y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = (\lambda^2 C_1 - 2|\lambda| C_2) e^{-|\lambda| y} + C_2 \lambda^2 y e^{-|\lambda| y} - \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}[2b(|\lambda|+k) - (|\lambda|+k)^2 a - (|\lambda|+k)^2 by] \tag{3.22.8}$$

Sınır şartları

$$y=0 \quad \text{için} \quad \ell \Sigma_y^{(1)} = 0$$

$$y=0 \quad \text{için} \quad \ell \tau_{xy}^{(1)} = 0$$

şeklinde ifade edilir. Bu şartlar, (3.22.7) ve (3.22.8)$_a$ ifadeleri kullanılarak

$$C_1 = -\frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3} a$$

$$C_2 = \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}[ka - b]$$

sonuçlarını verir.

C_1 ve C_2 katsayıları, (2.32.1) de verilen formüller ve (3.22.7) ve $(3.22.8)_{a,b}$ ifadelerinin bir arada kullanılması sonucunda

$$
\begin{aligned}
f\Sigma_x^{(1)} &= \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{[2|\lambda|b-(\lambda^2+2k|\lambda|)a]\,e^{-|\lambda|y} \\
&\quad +[k\lambda^2a-\lambda^2b]\,ye^{-|\lambda|y}+[(|\lambda|+k)^2a-2(|\lambda|+k)b]\,e^{-(|\lambda|+k)y} \\
&\quad +(|\lambda|+k)^2by\,e^{-(|\lambda|+k)y}\Big\} \\
f\Sigma_y^{(1)} &= \frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{\lambda^2a\,e^{-|\lambda|y}+[\lambda^2b-k\lambda^2a]\,ye^{-|\lambda|y} \\
&\quad -\lambda^2a\,e^{-(|\lambda|+k)y}-\lambda^2by\,e^{-(|\lambda|+k)y}\Big\} \qquad (3.22.9) \\
f\tau_{xy}^{(1)} &= \frac{Q}{k(2|\lambda|+k)^3}\Big\{[|\lambda|b-\lambda^2a-k|\lambda|a]\,e^{-|\lambda|y} \\
&\quad +[k\lambda^2a-\lambda^2b]\,ye^{-|\lambda|y}+[\lambda^2a+k|\lambda|a-|\lambda|b]\,e^{-(|\lambda|+k)y} \\
&\quad +[\lambda^2b+k|\lambda|b]\,ye^{-(|\lambda|+k)y}\Big\}
\end{aligned}
$$

gerilme ifadeleri bulunur.

Bu ifadelerin ters transformasyonları işlemminde $\sigma_x^{(1)}\big|_{y=0}$ ın elde edilişi ayrı bir özellik gösterir. Bu nedenle söz konusu gerilmenin hesabı aşağıda özel olarak ele alınmıştır. $(3.22.9)_a$ ifadesinde $y=0$ konularak

$$
f\Sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0} = iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda\left[\frac{ka-2b}{(2|\lambda|+k)^3}\right]
$$

bulunur. a ve b polinomları yerine konarak

$$f\Sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0} = iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda\left[\frac{8k\lambda^2+2(3-\nu)k^2|\lambda|-2k^3}{(2|\lambda|+k)^3}\right] \qquad (3.22.10)$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki rasyonel ifadenin asimptotik formu cebirsel bölme işlemi ile

$$k\left[\frac{1}{|\lambda|}-\frac{(3+\nu)}{4}\cdot\frac{k}{\lambda^2}\right] \qquad (3.22.11)$$

olarak bulunabilir. (3.22.11) yaklaşımını yeter yakınsaklıkla sağlayan bir B değeri, diğer değişkenlerin fonksiyonu olarak elde edilebilir. Bunun yanısıra [13] , 5.2.26 ve 5.2.27 ifadeleri gözönünde tutularak

$$\int_B^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = si(Bx)$$

ve

$$\int_B^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda^2}\,d\lambda = -\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\Big|_B^\infty + x\int_B^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$$
$$= \frac{\sin Bx}{B} - x\,Ci(Bx)$$

bağıntılarından yararlanılarak

$$f\sigma_x^{(1)}\Big|_{y=0} = \frac{Q}{2\pi}\left\{-2\int_0^B \frac{8k\lambda^2+2(3-\nu)k^2\lambda+2k^3}{(2\lambda+k)^3}\sin\lambda x\,d\lambda \right. \qquad (3.22.12)$$
$$\left. -2k\,si(Bx)-\frac{(3+\nu)}{2}\left[\frac{\sin Bx}{B}-x\,Ci(Bx)\right]\right\}$$

sonucu elde edilir.

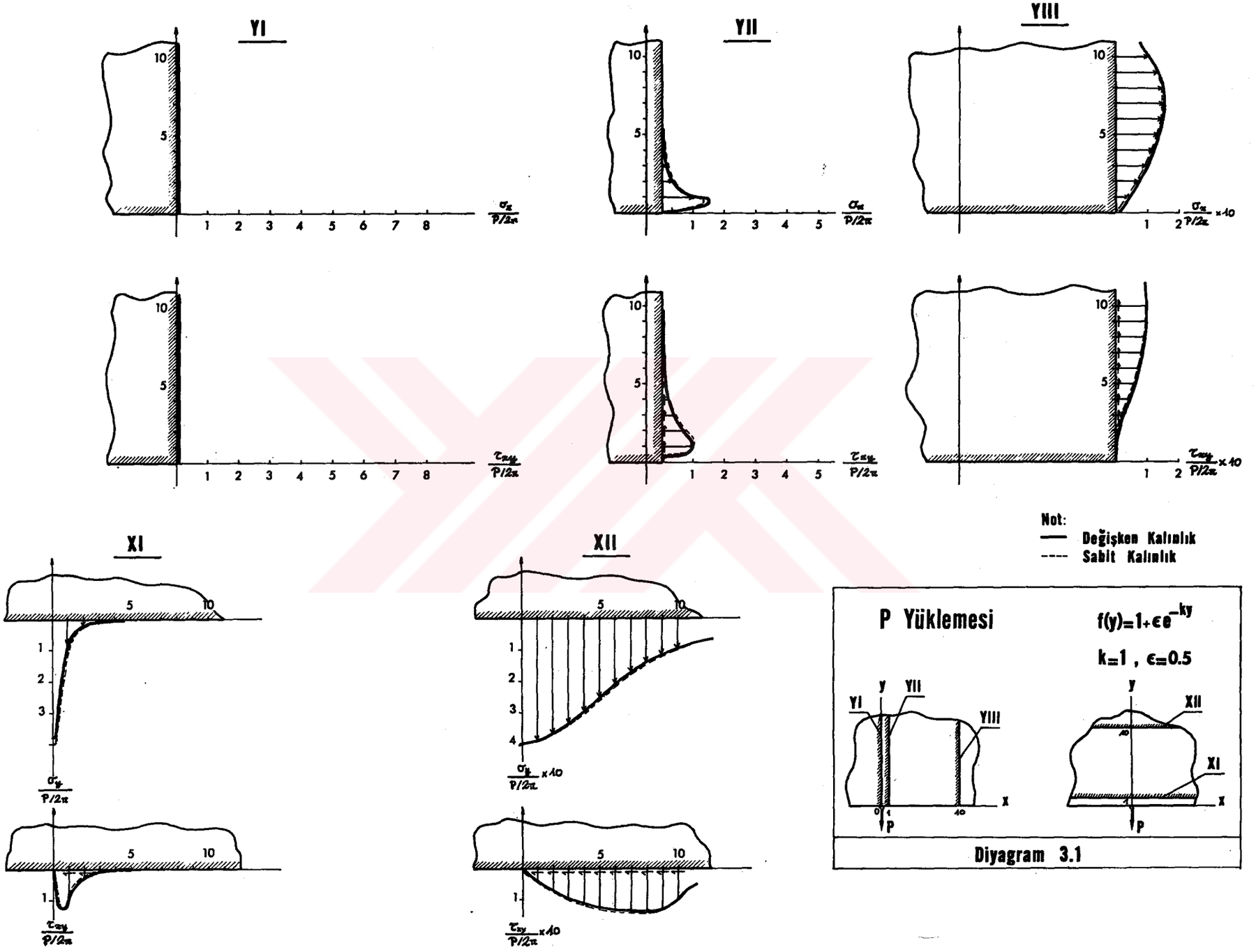
Diğer ters transformasyon integralleri için §3.21 de yapılan hata kontrolu burada da aynen geçerli olduğundan,

$$
\begin{aligned}
f\sigma_x^{(1)} = \frac{Q}{\pi k}\Bigg\{ & \int_0^\infty \frac{2\lambda b - \lambda^2 a - k\lambda a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \\
& + y \int_0^\infty \frac{k\lambda^2 a - \lambda^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \\
& + e^{-ky} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 a + 2k\lambda a + k^2 a - 2\lambda b - 2kb}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \\
& + y e^{-ky} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 b + 2k\lambda b + k^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \Bigg\}
\end{aligned}
$$

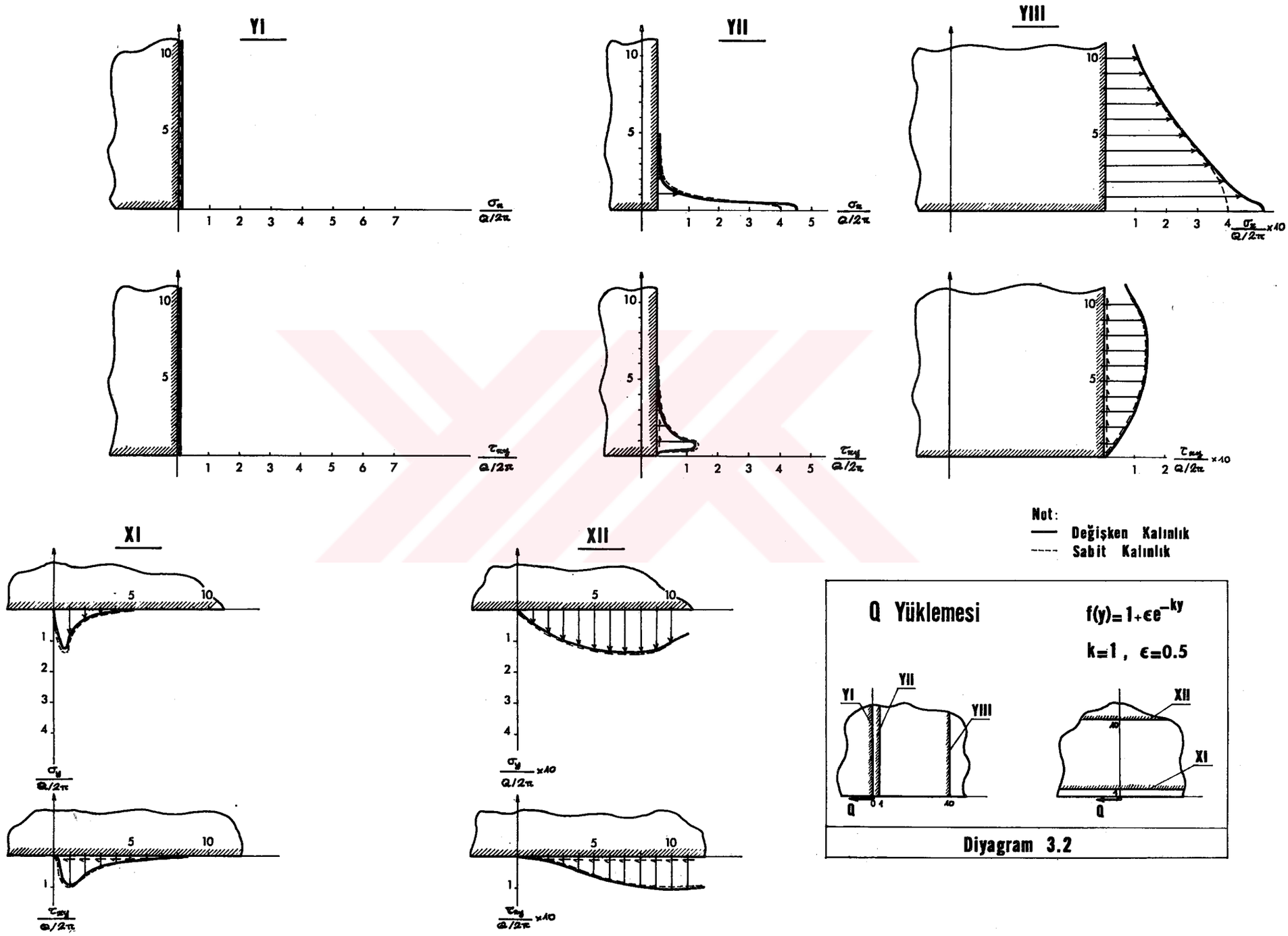
$$
\begin{aligned}
f\sigma_y^{(1)} = \frac{Q}{\pi k}\Bigg\{ & \int_0^\infty \frac{\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \\
& + y \int_0^\infty \frac{\lambda^2 b - k\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda + e^{-ky} \int_0^\infty \frac{-\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \\
& + y e^{-ky} \int_0^\infty \frac{-\lambda^2 b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \sin\lambda x \, d\lambda \Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (3.22.13)
$$

$$
\begin{aligned}
f\tau_{xy}^{(1)} = \frac{Q}{\pi k}\Bigg\{ & \int_0^\infty \frac{\lambda b - \lambda^2 a - k\lambda a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda \\
& + y \int_0^\infty \frac{\lambda^2 b - k\lambda^2 a}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda + e^{-ky} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 a + k\lambda a - \lambda b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda \\
& + y e^{-ky} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 b + k\lambda b}{(2\lambda+k)^3} e^{-\lambda y} \cos\lambda x \, d\lambda \Bigg\}
\end{aligned}
$$

gerilme ifadelerindeki integraller yerine, $(0,B)$ aralığında yapılan integraller kullanılmıştır. §3.21 de olduğu gibi burada da $B=20$ seçilmiştir. Sayısal sonuçlar $\nu=0.3$ ve $k=1$ için Diyagram 3.2 de gösterilmiştir. Burada da §3.21 de olduğu gibi $\varepsilon=0.5$ değeri gayet uygun sonuçlar vermektedir.


YI
YII
YIII
XI
XII
Not:
Değişken Kalınlık
Sabit Kalınlık
P Yüklemesi
f(y)=1+ϵe^-ky
k=1 , ϵ=0.5
P

Diyagram 3.1


YI
YII
YIII
XI
XII
Not:
Değişken Kalınlık
Sabit Kalınlık
Q Yüklemesi
f(y)= 1+εe^-ky
k=1 , ε=0.5
Q

Diyagram 3.2

S O N U Ç L A R

Konusu, kalınlığı değişen yarı sonsuz bir levhanın iki farklı yükleme altındaki çözümü olan bu çalışmanın ikinci bölümünde esas alınan kalınlık değişimi, gerilme fonksiyonu için verilmiş uygunluk şartını çok kısalttığından denklemin Fourier transformasyonu ile kesin çözümünün yapılması mümkün olmuştur. Ters transformasyon integralleri, integrandların çok karışık yapıda olması yüzünden kapalı olarak yapılamamış ve sayısal integrasyon metodlarına başvurulmuştur.

Üçüncü bölümde $f(y) = 1 + \varepsilon e^{-ky}$ tipinde bir kalınlık değişimi için genel karakterli bir pertürbasyon metodu verilmiştir. Bu metod, $g(y)$ fonksiyonunun y nin bütün değerleri için sonlu kaldığı hallerde uygulanabilecek bir metod olarak düşünülmüştür. Bu metodda $g(y)$ fonksiyonunun uygun seçimi, Fourier Transformasyonu ile dönüştürülmüş uygunluk şartı denkleminin özel çözümünün bulunması kolaylığı bakımından, önemli rol oynayabilir. Bu çalışmada üçüncü bölümün son kısımlarında, ikinci bölümde de ele alınan iki esas yükleme, $g(y) = e^{-ky}$ özel halinde incelenmiş ve bunlara ait gerilme ifadeleri integral formda elde edilmiştir. Bu integrallerin hesabı da sayısal integrasyon metodlarından yararlanılarak yapılabilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde incelenen problemin çözümü tamamen orijinaldir. Bu çözümde transformasyon tekniği kullanılmıştır. Üçüncü bölümdeki problemin çözümü için teklif edilen tipte bir pertürbasyon metoduna da yapılan literatür araştırmalarında rastlanmamıştır. Dolayısıyla bu metodun da bir orijinallik taşıdığı söylenebilir. Bu pertürbasyon metodunun ε parametresinin oldukça büyük bir değerinde ($\varepsilon = 0.5$) dahi yakınsak bir çözüm ver-

miş olması metodun aynı tipte başka problemlere de başarı ile uygulanabileceği ümidini vermektedir.Bu düşünceyi kuvvetlendiren bir özellik bu çalışmada ele alınan problemin tekil yük hallerine ait olması ve dolayısıyla kuvvetli singülerlikler göstermesidir. Bu duruma göre yayılı yük gibi singüler olmayan yüklemelerde, analitik bir çözüm verilebilmesi çok zor olmakla beraber, nümerik hesap metodları yardımı ile söz konusu,pertürbasyon metodunun başarılı bir şekilde uygulanma ihtimali daha kuvvetli görünmektedir. Bununla birlikte pertürbasyon metodlarının genel karakteri icabı,bir tek uygulamaya dayanarak varılacak hükümlerin kesin bir değeri olamıyacağı hatırda tutulmalıdır.

Bu çalışmanın çeşitli bölümlerinde bazı ters transformasyon integralleri için klâsik fonksiyonların yanısıra genelleştirilmiş fonksiyonların (distribüsyonlar) kullanılmış olması da daha önce bu konularda yapılmış çalışmalarda rastlanmamış olup, bir yenilik olarak gösterilebilir.

E K 1

KALINLIĞI SABİT LEVHA PROBLEMİNİN FOURİER TRANSFORMASYONU İLE ÇÖZÜMÜ

Bölüm 2 ve Bölüm 3 de kalınlığı sadece y doğrultusunda değişen levhalar için P ve Q yüklemeleri incelenmiştir. $f(y)=sabit$ halinde bu çözümlerin klâsik çözüme yakınsadığını göstermek gerekir. Bu nedenle kalınlığı sabit levha probleminin Fourier Transformasyonu ile yapılan çözümüne ihtiyaç vardır. Yarım düzlem problemi levha kalınlığının sabit olduğu halde

$$\Delta\Delta\phi=0 \qquad \text{(E.1.1)}$$

denklemini ve sınır şartlarını sağlayan ϕ fonksiyonunun belirtilmesiyle çözülecektir. (E.1.1) denklemine Fourier Transformasyonu uygulanırsa

$$\lambda^4\Phi-2\lambda^2\Phi''+\Phi''''=0 \qquad \text{(E.1.2)}$$

denklemi elde olunur. Burada Φ , ϕ nin Fourier transformu olup λ ve y nin fonksiyonudur. (E.1.2) diferansiyel denklemi sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem olduğundan

$$\Phi=e^{ry}$$

tipinden çözümleri kabul eder. Bu tip yerine konulursa karakteristik denklem olarak

$$r^4-2\lambda^2r^2+\lambda^4=0 \qquad \text{(E.1.3)}$$

bulunur. (E.1.3) denklemi $(r^2-\lambda^2)$ nin tam karesi olduğundan

$$\Phi = (C_1+C_2y)e^{-|\lambda|y} + (C_3+C_4y)e^{|\lambda|y}$$

bulunur. Bütün gerilmeler $y\to\infty$ için sıfıra gide - ceğinden

$$C_3 = C_4 = 0$$

olmalıdır. Böylece

$$\Phi = C_1 e^{-|\lambda|y} + C_2 y e^{-|\lambda|y} \qquad \text{(E.1.4)}$$

çözümü elde edilmiş olur.

Sınır şartları gerilmeler üzerinde yazıldığından aşağıdaki türevler gerekli olacaktır.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-C_1|\lambda|+C_2)e^{-|\lambda|y} - C_2|\lambda|y e^{-|\lambda|y} \qquad \text{(E.1.5)}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = (C_1\lambda^2 - 2C_2|\lambda|)e^{-|\lambda|y} + C_2\lambda^2 y e^{-|\lambda|y} \qquad \text{(E.1.6)}$$

Bu türevlerden yararlanılarak

$$\Sigma_x = (C_1\lambda^2 - 2C_2|\lambda|)e^{-|\lambda|y} + C_2\lambda^2 y e^{-|\lambda|y}$$

$$\Sigma_y = -C_1\lambda^2 e^{-|\lambda|y} - C_2\lambda^2 y e^{-|\lambda|y} \qquad \text{(E.1.7)}$$

$$T_{xy} = -i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\,(C_1\lambda^2 - C_2|\lambda|)e^{-|\lambda|y} - i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, C_2\lambda^2 y e^{-|\lambda|y}$$

elde edilir.

Burada problem P yüklemesi ve Q yüklemesi olmak üzere ikiye dallandırılacaktır. Önce P

yüklemesi ele alınacaktır.

$(E.1.7)_b$ ve $(E.1.7)_c$ ifadeleri için $y=0$ da sınır şartlarının uygulanması gerekir. Bu yüklemeye ait sınır şartlarının Fourier transformasyonu ile

$$\Sigma_y\Big|_{y=0}=P$$

$$T_{xy}\Big|_{y=0}=0$$

denklemine varılır. Bunlar $(E.1.7)_b$ ve $(E.1.7)_c$ ifadeleriyle aşağıdaki şekilde yazılır.

$$-C_1\lambda^2=P$$

$$C_1\lambda^2-C_2|\lambda|=0$$

Buradan sabitler

$$C_1=-\frac{P}{\lambda^2}$$

$$C_2=-\frac{P}{|\lambda|}$$

olarak elde edilir. Bu sabitler (E.1.1) ve (E.1.7) ifadelerine götürülerek gerilme fonksiyonu

$$\Phi=-\frac{P}{\lambda^2}(1+|\lambda|y)e^{-|\lambda|y} \qquad (E.1.8)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeden gerilmeler

$$\Sigma_x = Pe^{-|\lambda|y} - P|\lambda|ye^{-|\lambda|y}$$

$$\Sigma_y = Pe^{-|\lambda|y} + P|\lambda|ye^{-|\lambda|y} \qquad \text{(E.1.9)}$$

$$T_{xy} = i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, P|\lambda|y\, e^{-|\lambda|y}$$

şeklinde hesaplanır. Gerilmelerden Hooke kanunları ile

$$E_x = \frac{P}{E}\left[(1-\nu)e^{-|\lambda|y} - (1+\nu)|\lambda|ye^{-|\lambda|y}\right]$$

$$E_y = \frac{P}{E}\left[(1-\nu)e^{-|\lambda|y} + (1+\nu)|\lambda|ye^{-|\lambda|y}\right] \qquad \text{(E.1.10)}$$

$$E_{xy} = \frac{2i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\,(1+\nu)P}{E}|\lambda|y\, e^{-|\lambda|y}$$

bulunur. Yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntılarının Fourier Transformasyonu ile

$$U = \frac{iP\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda|E}\left[(1-\nu)e^{-|\lambda|y} - (1+\nu)|\lambda|ye^{-|\lambda|y}\right] \qquad \text{(E.1.11)}$$

ve

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{P}{E}\left[(1-\nu)e^{-|\lambda|y} + (1+\nu)|\lambda|ye^{-|\lambda|y}\right]$$

ve buradan da

$$V = \frac{P}{E}\left[-\frac{2e^{-|\lambda|y}}{|\lambda|} - (1+\nu)ye^{-|\lambda|y}\right] \qquad \text{(E.1.12)}$$

elde edilir.

Bunlardan pratik önemi dolayısıyla $y=0$ ha -

lindeki limit değerler hesaplanarak

$$U\Big|_{y=0} = \frac{i(1-\nu)P\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{E|\lambda|}$$
$$V\Big|_{y=0} = -\frac{2P}{E|\lambda|} \qquad \text{(E.1.13)}$$

bulunur. Aşağıda (E.1.9)$_{a-c}$ deki gerilme,(E.1.13)$_{a,b}$ deki yerdeğiştirme ifadelerinin ters transformasyonları yapılacaktır. Gerilmeler için [14],1.4.1 ve 1.4.5 den yararlanılarak

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\left[1-\frac{x^2}{y^2}\right] \qquad \text{(E.1.14)}$$

aynı eserde 2.4.1 ve 2.4.3 den yararlanılarak

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}\sin\lambda x\,d\lambda = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(E.1.15)}$$

ifadeleri kullanılacaktır. Bunlarla gerekli işlemler yapılarak

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi}\cdot\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi}\cdot\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(E.1.16)}$$
$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

bulunur. Bu ifadeler diğer metodlarla yapılan çözümlerle üstüste düşer.(Bak.[17],82.2).

Yerdeğiştirme ifadeleri için [16] ,sayfa 360, 19 dan yararlanılarak

$$u\big|_{y=0} = \frac{P(1-\nu)}{2E}\,\mathrm{sgn}\,x$$

$$v\big|_{y=0} = \frac{2P}{\pi E}\left[\gamma + \log|x|\right] \qquad \text{(E.1.17)}$$

elde edilir. Bu ifadeler de diğer metodlarla yapılan çözümlerle tamamen aynıdır.(Bak. [17], 82.5 ve 82.6). Burada (E.1.14) ifadeleri ile [17],82.6 arasında sadece rijit ötelenme farkı olduğuna dikkat edilmelidir.

Q yüklemesi için bu bölümün başında elde edilen (E.1.4), Φ ifadesi ve aşağıdaki sınır şartları uygulanarak sabitler tayin edilecektir.

$$\Sigma_y\big|_{y=0} = 0$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=0} = Q \qquad \text{(E.1.18)}$$

Bu sınır şartları $(E.1.7)_b$ ve $(E.1.7)_c$ ifadeleri ile

$$-\lambda^2 C_1 = 0$$

$$-i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, C_1 \lambda^2 + i\,\mathrm{sgn}\,\lambda\, C_2 |\lambda| = Q$$

halini alır. Buradan da

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{i|\lambda|}$$

bulunur. Bu sabitler (E.1.4) de yerine konularak

$$\Phi = -\frac{iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda|}\, y e^{-|\lambda| y}$$

ve (E.1.7)$_{a-c}$ ifadelerine götürülerek

$$\Sigma_x = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{i}\left[-2e^{-|\lambda| y} + |\lambda| y e^{-|\lambda| y}\right]$$

$$\Sigma_y = iQ\,\mathrm{sgn}\,\lambda\; |\lambda| y e^{-|\lambda| y} \qquad \text{(E.1.19)}$$

$$T_{xy} = Q\left[e^{-|\lambda| y} - |\lambda| y e^{-|\lambda| y}\right]$$

elde edilir. Bu gerilme ifadelerinden Hooke Kanunları uyarınca

$$E_x = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[-2e^{-|\lambda| y} + (1+\nu)|\lambda| y e^{-|\lambda| y}\right]$$

$$E_y = \frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[2\nu e^{-|\lambda| y} - (1+\nu)|\lambda| y e^{-|\lambda| y}\right] \qquad \text{(E.1.20)}$$

$$E_{xy} = \frac{2Q(1+\nu)}{E}(1 - |\lambda| y)\, e^{-|\lambda| y}$$

şekildeğiştirmeleri bulunur. Yerdeğiştirme fonksiyonları için

$$U = \frac{Q}{E|\lambda|}\left[-2e^{-|\lambda| y} + (1+\nu)|\lambda| y e^{-|\lambda| y}\right] \qquad \text{(E.1.21)}$$

ve

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[2\nu e^{-|\lambda|y}-(1+\nu)|\lambda|y\,e^{-|\lambda|y}\right]$$

buradan da integrasyonla

$$V=\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\left[(1+\nu)\,y e^{-|\lambda|y}+(1-\nu)\,\frac{e^{-|\lambda|y}}{|\lambda|}\right] \qquad \text{(E.1.22)}$$

elde edilir. $(E.1.21)_a$ ve (E.1.22) ifadelerinin $y=0$ için limitleri

$$U\Big|_{y=0}=-\frac{2Q}{E}\cdot\frac{1}{|\lambda|}$$
$$V\Big|_{y=0}=\frac{Q\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{iE}\cdot\frac{(1-\nu)}{|\lambda|} \qquad \text{(E.1.23)}$$

olur.

Q yüklemesi çözümüne ait $(E.1.19)_{a-c}$ ile verilmiş gerilme ifadelerinin ters Fourier Transformasyonları $(E.1.14)_{a,b}$ ve $(E.1.15)_{a,b}$ ifadelerinden yararlanılarak yapılabilir.

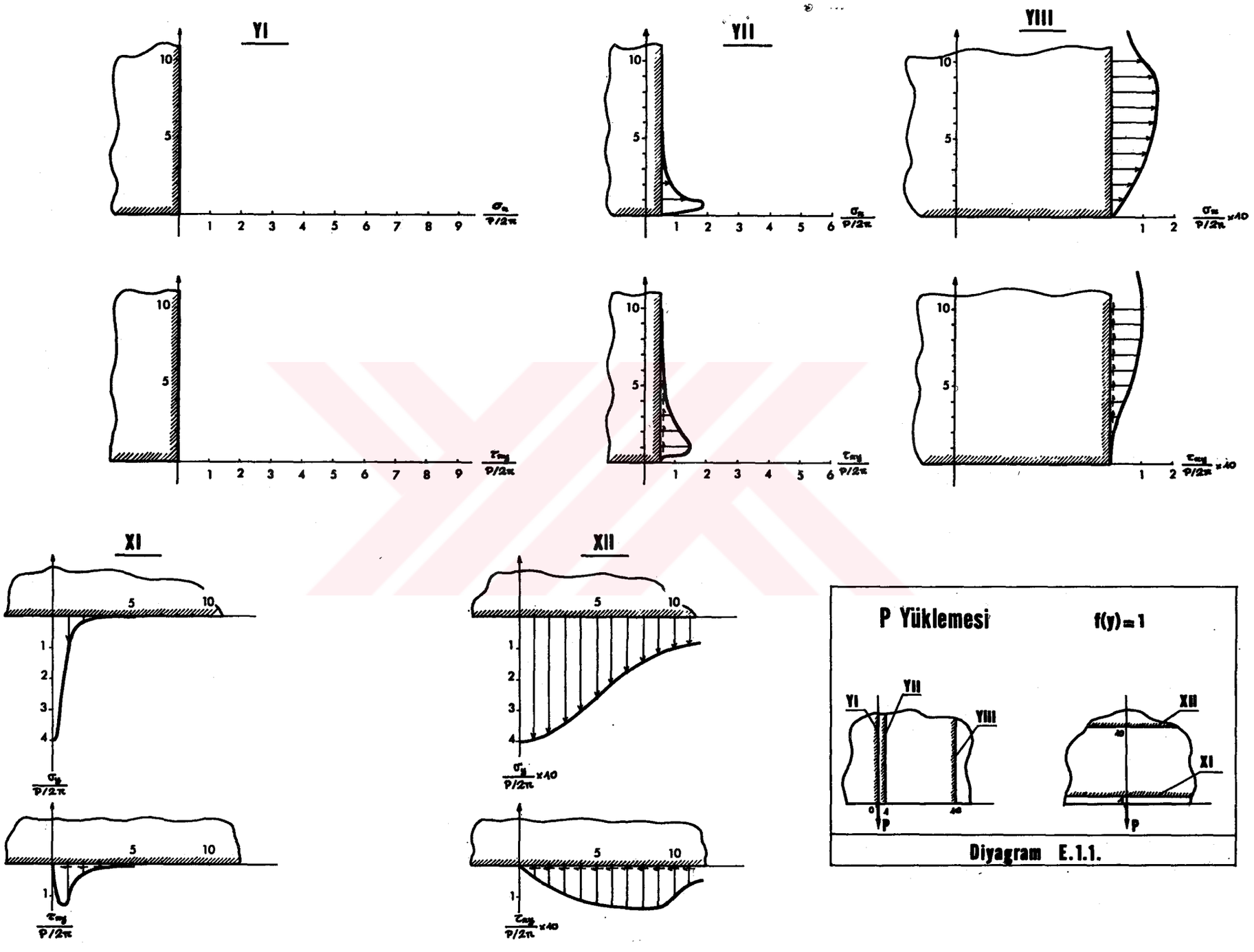
$$\sigma_x=\frac{2Q}{\pi}\cdot\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\sigma_y=\frac{2Q}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(E.1.24)}$$
$$\tau_{xy}=\frac{2Q}{\pi}\cdot\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Bu ifadeler [17],82.11 ile üstüste düşer. Yerdeğiştirme ifadelerinin ters transformasyonları sırasıyla [16], sayfa 361, 27 ve [16], sayfa 360, 19 dan yararlanılarak

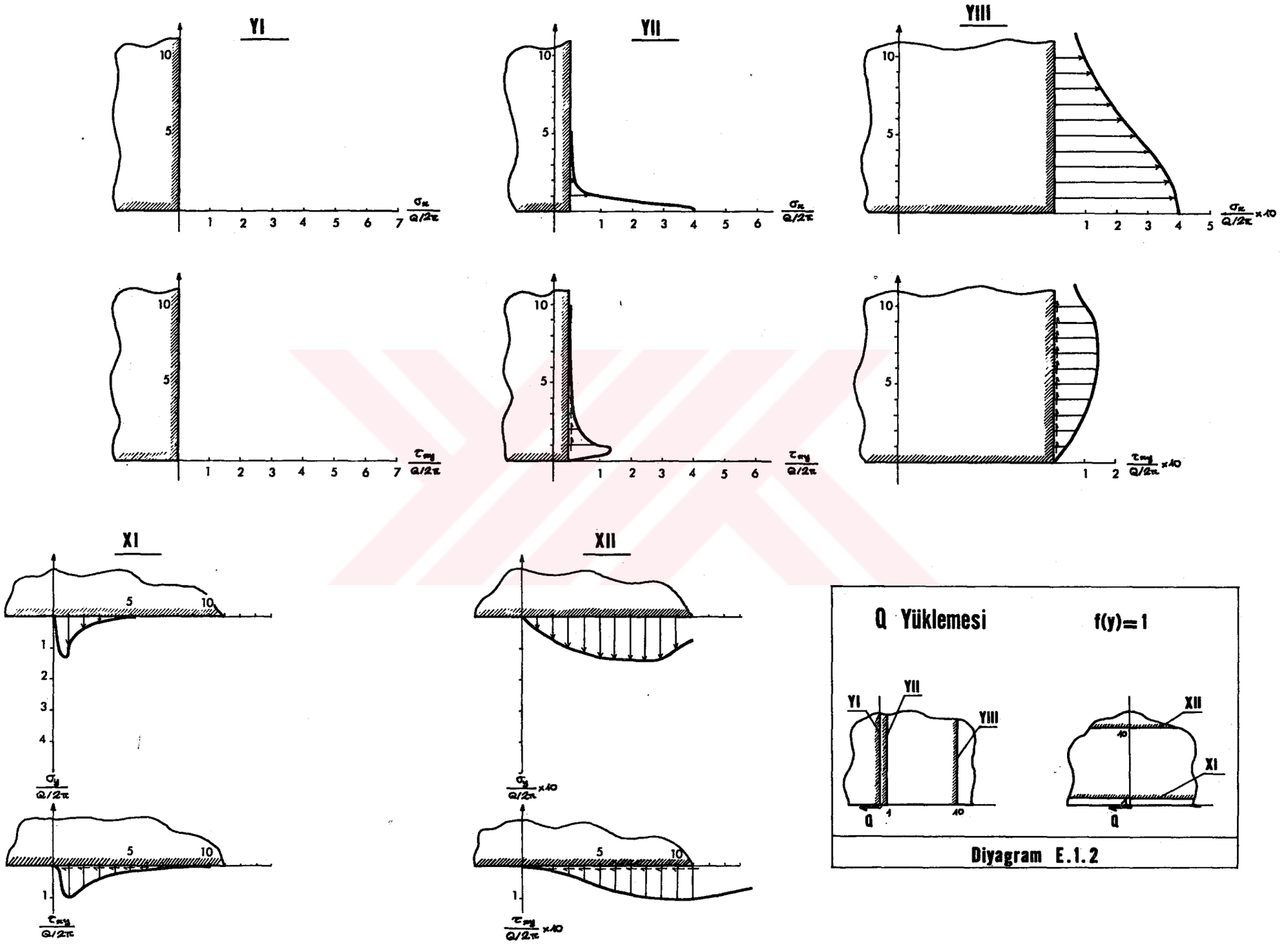
$$u\Big|_{y=0} = \frac{2Q}{\pi E}\left[\gamma + \log|x|\right]$$

$$v\Big|_{y=0} = \frac{Q(1-\nu)}{2E}\,\mathrm{sgn}\,x \qquad \text{(E.1.25)}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler ise [17],82.12 ve [17], 82.15 le aynıdır. $(E.1.25)_a$ ifadesinin [17] deki karşıtı ile bir rijit ötelenme farkı olduğuna dikkat edilmelidir.



Diyagram E.1.1.



Diyagram E.1.2

E K 2

FİLON SAYISAL İNTEGRASYON METODU HAKKINDA KISA BİLGİ

Filon tarafından 1928 de ortaya atılmış bulunan bir sayısal integrasyon metodu

$$I^c = \int_A^B f(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda \qquad \text{(E.2.1)}$$

ve

$$I^s = \int_A^B f(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda \qquad \text{(E.2.2)}$$

integrallerinin, $f(\lambda)$ nın karışık yapıda olması halinde, değerlendirilmesini sağlamaktadır. Metodun uygulanması $[A, B]$ aralığını $2n$ eşit parçaya bölüp $f(\lambda)$ fonksiyonunun bu $\lambda_i, (i=1,2,\dots,2n+1)$ noktalarındaki değerlerini hesaplamakla başlar. Bu değerler $f(\lambda_i)$ ile gösterilsin. Bundan sonra $2k-1$, $2k$ ve $2k+1$ inci noktalardan geçirilecek bir parabolle $\lambda_{2k-1} < \lambda < \lambda_{2k+1}$ aralığında $f(\lambda)$ fonksiyonunun eğrisine yaklaşabildiği farzedilir. Bu metod literatürde Simpson metodu olarak geçmektedir. Filon, Simpson metodunu aşağıda açıklandığı gibi (E.2.1) ve (E.2.2) tipindeki integrallere uygulanabilecek şekilde geliştirmiştir. $[\lambda_{2k-1} ; f(\lambda_{2k-1})]$ $[\lambda_{2k} ; f(\lambda_{2k})]$ ve $[\lambda_{2k+1} ; f(\lambda_{2k+1})]$ noktalarından geçen parabol denklemi

$$F(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \qquad \text{(E.2.3)}$$

dir. Burada a, b, c; k sayısına göre değişen sabitlerdir. Dolayısıyla

$$I_{2k}^{c} = \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} f(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda$$
$$= a\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \lambda^2\cos\lambda x\, d\lambda + b\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \lambda\cos\lambda x\, d\lambda + c\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \cos\lambda x\, d\lambda$$
$$I_{2k}^{s} = \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} f(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda \qquad \text{(E.2.4)}$$
$$= a\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \lambda^2\sin\lambda x\, d\lambda + b\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \lambda\sin\lambda x\, d\lambda + c\int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k+1}} \sin\lambda x\, d\lambda$$

yazılabilir. Her iki integral kısmî integrasyon metodları kullanılarak kapalı olarak değerlendirilebilir. Bundan sonra (E.2.1) ve (E.2.2) yerine

$$I^{c} = \sum_{k=1}^{n} I_{2k}^{c}$$
$$I^{s} = \sum_{k=1}^{n} I_{2k}^{s} \qquad \text{(E.2.5)}$$

formülleri kullanılabilir. Filon bu esas fikri sayısal hesap için elverişli bir şekle sokmuş ve integraller yerine bazı toplamlar koymuştur.

Burada metodun bu detaylarına inmekte yarar görülmemiştir. Metod hakkında daha geniş bilgi ve sayısal integrasyonda kullanılacak formüller için [9],Appendix B.2,[13] sayfa 890 ve [18] §5.4 e bakılabilir.

K A Y N A K L A R

[1] Föppl,A.und Föppl,L.:Drang und Zwang,Erster Band,Druck und Verlag von R.Oldenbourgh,München und Berlin, 1920.

[2] Conway,H.D. : Analysis of Plane Stress in Polar Coordinates and with Varying Thickness, Journal of Applied Mechanics, 1959, p.p.437-439.

[3] Conway,H.D. : Analysis of Plane Stress in Cartesian Coordinates and Varying Thickness,Ingenieur - Archiv, XXIX.Bd, 3.Heft,1960.

[4] Vocke,W.:Der Profil-ebene Spannungszustand ZAMM 41 Heft 6, S.257-261.

[5] Şuhubi,E.S.: A Problem in Plane Stress With Varying Thickness in Polar Coordinates,İ.T.Ü.Bülteni Cilt 14, 1961.

[6] Şuhubi,E.S.: An Approximate Plane Stress Analysis in Rectangular Plates With Linearly Varying Thickness, İ.T.Ü.Bülteni, Cilt 16, Sayı 3, 1963.

[7] Vocke,W.: Die Beanspruchung des ebenen Keiles mit Keilprofil,ZAMM 44, S. 218-220, 1964.

[8] Vocke,W.: Lineare Elastizität,Veb Fachbuchverlag, Leipzig, 1966.

[9] Sneddon,I.N. : Fourier Transforms, McGraw Hill, 1957.

[10] Ditkin, V.A. and Prudnikov,A.P.:Integral Transforms and Operational Calculus, Pergamon Press,1965.

[11] Kamke,E. :Differential-Gleichungen,Zweite Auflage, Akademische Verlag Verlagsgesellschaft Becker und Erler Kom.-Ges., Leipzig,1943.

[12] Courant,R. : Differential and Integral Calculus Vol.II,Blackie and Son Ltd., London and Glasgow , 1967.

[13] Abramowitz,M.and Stegun,I.A.(Editörler) : Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications. Inc., New York, 1968.

[14] Erdelyi, A.; Magnus, W.;Oberhettinger,F.; Tricomi,F.G. : Tables of Integral Transforms, Vol.I, (Bateman Manuscript Project), McGraw Hill, 1954.

[15] Gradshteyn,I.S.; Ryzhik,I.M.: Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York and London, 1965.

[16] Gel'fand,I.M. ; Shilov,G.E.: Generalized Functions Vol.I, Academic Press, New York and London, 1964.

[17] İnan,M. : Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü.Kütüphanesi, İstanbul,1969.

[18] Tranter,C.J. : Integral Transforms in Mathematical Physics, Methuen Monographs on Physical Subjects, New York, London, 1951.

H A L T E R C Ü M E S İ

Yavuz Önder 1944 yılında Kırıkkale'de doğmuş, lise tahsilini İzmit Lisesinde 1961 yılında tamamlamıştır. Aynı yıl İ.T.Ü.İnşaat Fakültesine kaydolmuş ve yüksek öğrenimini 1966 yılı Haziran döneminde bitirmiştir. 1 Ağustos 1966 da İ.T.Ü.İnşaat Fakültesi Ahşap ve Çelik Yapılar Kürsüsüne asistan adayı olarak tayin edilmiştir. 1968 yılı Nisan ayından itibaren aynı fakültenin Teknik Mekanik ve Genel Mukavemet Kürsüsüne naklen tayin edilmiş olup, halen aynı kürsüde asistanlık görevine devam etmektedir.

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi