151291

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

151291

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU EINSTEIN UZAYLARI

151291

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tonguç Çağın
509001100

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Nisan 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Mayıs 2004

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Elif Özkara Canfes (İ.T.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Abdülkadir Özdeğer (K.H.Ü)
Doç. Dr. Uğur Dursun (İ.T.Ü.)

HAZİRAN 2004

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşmasında bilgisi ve eşsiz desteğiyle bana rehberlik eden değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Elif Özkara Canfes'e ve yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşım Rojbin Özlem Doğan'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Nisan, 2004 Tonguç Çağın

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**
SUMMARY ..... **vii**

1. GİRİŞ. RIEMANN VE EINSTEIN UZAYLARI HAKKINDA TEMEL BİLGİLER **1**
1.1 Manifold kavramı 1
1.2 Riemann Manifoldu 4
1.3 Einstein Manifoldu 7

2. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU UZAYLAR **11**

2.1 Semi-simetrik metrik konneksiyon 11
2.2 Konneksiyon Katsayıları 12
2.3 Eğrilik tensörü, Ricci tensörü, skaler eğrilik ve Bianchi özdeşlikleri 15

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU EINSTEIN UZAYLARI **17**

3.1 Tanımlar 17
3.2. Teoremler 18
3.3. Örnek 21

4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER **23**

KAYNAKLAR **24**
ÖZGEÇMİŞ **25**

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU EINSTEIN UZAYLARI

ÖZET

Bu çalışmada fiziksel uygulamalarda oldukça önemli yer tutan iki uzayın, semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayla Riemann-Einstein ya da kısaca Einstein uzayının bir harmanı yapılmış, semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı tanımı verilmiş, 2 ve 3 boyutlu olanlar için sınıflandırmaya gidilmiştir.

Problemin doğası gereği yerel koordinatlar kullanılmıştır.

Bir g_{ij} Riemann metriği ile belirlenmiş n boyutlu bir M Riemann manifoldunu ele alalım. Riemann eğrilik tensörü R_{hijk}'nın daraltılması ile elde edilen R_{ij} Ricci tensörü ile λ genel olarak bir fonksiyon olmak üzere, uzayın metriği g_{ij} arasında

$$R_{ij} = \lambda g_{ij} \tag{1}$$

ilişkisi varsa bu uzaya Riemann-Einstein uzayı ya da kısaca Einstein uzayı denir ve $(RE)_n$ ile gösterilir.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın giriş niteliğindeki birinci bölümünde Riemann ve Einstein uzaylarına ilişkin bazı tanımlara yer verilmiş, 2 ve 3 boyutlu olanlara ilişkin temel teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem. 2 boyutlu her Riemann uzayı bir $(RE)_2$'dir.

Teorem. n boyutlu, sabit K eğrilikli bir Riemann manifoldu $(RE)_n$'dir ve $R = Kn(1-n)$

Teorem. $(RE)_3$ sabit eğriliklidir.

Teorem. $(n > 2)$ için $(RE)_n$ sabit skaler eğriliklidir.

İkinci bölümde ise semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzaylara ilişkin aydınlatıcı bilgiler verilmiştir.

Tanım. Herhangi bir π_j için ∇ asimetrik konneksiyonunun burulma tensörü

$$\Omega^i_{jk} = \pi_j \delta^i_k - \pi_k \delta^i_j$$

ise, bu uzaya semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay denir.

Bu uzayların L_{hijk} eğrilik tensörü ve L_{ij} Ricci tensörlerinin hesapları yapılmış, simetrik $(L_{(ij)})$ ve anti-simetrik $(L_{[ij]})$kısımları incelenmiş, ve aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem. Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşul π_i vektörünün yerel olarak bir gradyan vektör olmasıdır.

Çalışmanın çekirdeği denebilecek üçüncü bölümde ise semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı tanımı yapılmıştır.

Tanım. Semi simetrik metrik konneksiyonla belirlenmiş n boyulu bir M manifoldu, λ skaler bir fonksiyon olmak üzere

$$L_{(ij)} = \lambda g_{ij}$$

şartını sağlıyorsa bu manifolda semi simetrik metrik konneksiyonlu Einstein manifoldu denir ve $(SE)_n$ ile gösterilir.

2 ve 3 boyutlu $(SE)_n$'ler için aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem. 2 boyutlu her semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay bir $(SE)_2$ uzayıdır.

Teorem. Bir $(RE)_n$'nin $(SE)_n$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j = \beta g_{ij}$ olacak şekilde bir β skaler fonksiyonunun bulunabilmesidir.

Teorem. Her 3 boyutlu semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay $(SE)_3$'tür.

Ayrıca ikinci Bianchi özdeşliği kullanılarak λ çarpanının $(RE)_n$ uzaylarında olduğu gibi sabit olmadığı gösterilmiştir.

Bölüm $n > 3$ için $(SE)_n$'ye verilen bir örnekle noktalanmıştır.

Örnekler konusunda, çalışmanın matematiksel kısımlarının içeriğini oluşturduğu diğer bölümlerde bahsedilmesinin uygun olmayacağı bir noktaya hemen burada değinmekte yarar vardır. Einstein uzayları, kendisini tanımlayan denklemin kolaylığına karşın genel olarak örnek bulunması oldukça güç bir uzay tipidir. Bu zorlukla ilgili güzel ve imalı bir ifade Arthur L. Besse'nin Einstein Manifolds adlı kitabında görülebilir. Yazar bu uzaylara verilecek bir örnek karşılığında örneği veren kişiye bol yıldızlı bir restorantta mükellef bir akşam yemeği ikram etmeyi taahhüt etmektedir.(D.Examples 0.23. başlığı altında)

Çalışmada, örnek bulmaktaki bu zorluk daha önce U. De, Bandyopadhyay ve Mazumder tarafından gündeme getirilmiş olan R^n'de tanımlı

$$ds^2 = \varphi(dx^1)^2 + k_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2dx^1dx^n$$

metriği kullanılarak aşılmıştır. Burada latin indisler $n \geq 4$ olmak üzere $1, 2...n$ ve grek indisler $2, 3...n-1$ olarak değişmektedir. φ, x^n'den bağımsız bir fonksiyon, $k_{\alpha\beta}$ ise gerçel sayılardan kurulu $(n-1)$x$(n-1)$'lik tersi alınabilir simetrik bir matristir.

EINSTEIN SPACES WITH
SEMI-SYMMETRIC METRIC CONNECTIONS

SUMMARY

In this work, unification of two important spaces, namely Einstein spaces and spaces with semi-symmetric metric connection, those have an important role at the physical applications, is made; definition of Einstein Spaces with Semi-Symmetric Metric Connection is given and classification for the 2 and 3 dimensional ones is made.

Because of he nature of the problem local coordinates will be used.

Let M be an n dimensional Riemannian Manifold endowed with a metric g_{ij}. If there is a relation between Ricci tensor R_{ij}, obtained by a contraction on Riemann Curvature tensor of M, and the metric g such as $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, where lambda is a scalar function in general, then this manifold is called a Riemann-Einstein manifold or for sake of simplicity Einstein manifold which will be abbreviated with the symbol $(RE)_n$.

In the first chapter which is in fact an Introduction of this work which consists of three chapters, some definitions are stated and basic theorems are stated and proved for the 2 and 3 dimensional Riemannian manifolds and $(RE)_n$; $(n = 2, 3)$.

Theorem. Every 2 dimensional Riemannian space is a $(RE)_2$.

Theorem. An n dimensional Riemannian manifold with constant curvature K is a $(RE)_n$ and $R = Kn(1 - n)$.

Theorem. $(RE)_3$ has constant curvature.

Theorem. For $(n > 2)$ scalar curvature of a $(RE)_n$ is constant.

Theorem. In $(RE)_n$ the multiplier λ is a real constant.

In the second chapter enlighting knowledge are given for spaces with the semi symmetric connection.

Definition. A connection is called semi-symmetric connection if for any π_j, torsion tensor of a ∇ asymmetric connection is defined as follows;

$$\Omega^i_{jk} = \pi_j \, \delta^i_k - \pi_k \, \delta^i_j$$

Curvature (L^h_{ijk}) and Ricci (L_{ij}) tensors of these spaces are calculated, symmetric $(L_{(ij)})$ and anti-symmetric parts $(L_{[ij]})$ of the Ricci tensor are examined and proved that

Theorem. The Ricci tensor L_{ij} is symmetric if and only if π_i is locally gradient.

In the third chapter, which may be called the kernel of the work , definition of the Einstein spaces with semi symmetric metric connection is given.

Definition. An n dimensional manifold with semi symmetric metric connection is called an Einstein space with semi-symmetric metric connection and abbreviated with the symbol $(SE)_n$ if

$$L_{(ij)} = \lambda g_{ij}$$

where λ is a scalar function

Theorems for 2 and 3 dimensional $(SE)_n$ are given.

Theorem. Every 2 dimensional space with semi-symmetric metric connection is a $(SE)_2$.

Theorem. It's necessary and sufficient to find a scalar function β such that $\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j = \beta g_{ij}$ for a $(RE)_n$ be a $(SE)_n$.

Theorem. Every 3 dimensional space with semi-symmetric metric connection is a $(SE)_n$.

Additionally with a contraction on the second Bianchi identity it is shown that, unlike the Riemannian spaces, in Einstein spaces with semi symmetric-metric connection, the multiplier λ is not, in general, constant.

An example for $(RE)_n$ with $n > 3$ ended the section.

It is helpful to point an argument about the examples, here, but not in the chapters involving the mathematical content of the work which wouldn't be proper. It's hard to find examples to Einstein spaces although the equation defining them is a simple one. A beautiful and meaningful statement can be seen in the book Einstein Manifolds of Arthur L. Besse. Writer gives a word of a grand evening meal, to the one who finds an example that is not stated in his book, as an exchange with the example.(Section D.Examples 0.23)

Difficulty of finding an example to this spaces has been overcome by a metric defined on R^n, used by U. De, Bandyopadhyay and Mazumder which is stated below;

$$ds^2 = \varphi(dx^1)^2 + k_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2dx^1dx^n$$

Here Latin index run over 1 to n where $n \geq 4$ and Greek ones run over 2 to $(n-1)$. φ is a function of x^i where i runs over 1 to $(n-1)$ and $k_{\alpha\beta}$ is an $(n-1)$x$(n-1)$ symmetric non-singular matrix consisting of constants.

1. GİRİŞ
RIEMANN VE EINSTEIN UZAYLARI HAKKINDA TEMEL BİLGİLER

1.1. Manifold Kavramı

Geometri kavramının ilk ortaya çıkışından 19. yüzyılın başlarına kadar yapılan çalışmaların çok genelde 2, 3, en genel halde n boyutlu Euclid uzaylarında yapıldığı görülmektedir. 19. yüzyıl başlarında Lobacevsky, Riemann ve zamanın geometri çalışan diğer isimlerinin çalışmalarında ise uzayın boyutu üzerinde varılmış olan genellemenin uzayı temsil eden noktalar kümesi üzerine yansıtıldığını görüyoruz. O güne kadar kullanılan Euclid uzayı yapısı yerini daha genel olan manifold kavramına bırakmıştır.

Burada amaçlanan, geometriyi daha genel bir küme üzerinde kurmak ama bu genellemeyi Euclid yapısından hareketle oluşturmaktır. Dolayısı ile sonuçta elde edilen yapının ya da kümenin bir n boyutlu Euclid uzayına benzemesi gerekmektedir. Bu benzeşim ise kullanılacak olan daha genel yapı ile n boyutlu Euclid uzayı arasında kurulacak, kendisi ve tersi sürekli, birebir örten ve eğer mümkünse diferansiyellenebilen bir fonksiyon aracılığı ile sağlanacaktır. Bu özelliklere sahip fonksiyona homeomorfizma denir.

Ancak genelde manifold kavramı tek kelime ile manifold olarak değil ama onun özelliğini belirten bir sıfatla birlikte anılır. Örneğin; Diferansiyellenebilen manifold, Topolojik Manifold vb.

Bunlardan örneğin Topolojik Manifold;

Bir M Hausdorff uzayından alınan her m noktası için o noktanın E^n'ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabiliyorsa M'ye n boyutlu manifold denir.

şeklinde tanımlanır.

Diferansiyellenebilen Manifold (ki bu çalışmada ki işlem alanımızı teşkil edecektir) ise, temelde yukarıda adı geçen açık U komşuluğu ile E^n arasında diferansiyellenebilen bir homeomorfizma bulunabilmesi esasına dayanır. Tam tanımı ise aşagıdaki gibidir.

Tanım 1.1. n boyutlu diferansiyellenebilen bir manifold

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$

(2) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta)$ koşlunu sağlayan herhangibir α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ kümeleri R^n'de açık ve $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tasvirlerinin açık olması ve

(3) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesinin (1) ve (2) koşullarına göre maksimal olması

koşullarını sağlayan R^n'deki açık U_α'lardan M'e tanımlı, bire bir $x_\alpha : U_\alpha \subset R^n \to M$ tasvirlerinin bir ailesidir.

$p \in x_\alpha(U_\alpha)$ olmak üzere (U_α, x_α) ikilisine (veya x_α tasviri) M'nin p noktasındaki parametrizasyonu (veya koordinat sistemi) denir; $x_\alpha(U_\alpha)$'lar ise p'deki bir koordinat komşuluğu olarak adlandırılır. (1) ve (2) koşullarını sağlayan $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ ailesine M üzerinde diferansiyellenebilen bir yapı denir[1].

Konunun inşaası açısından önem arzeden bir diğer kavram konneksiyondur. Konneksiyon, n boyutlu bir manifold üzerindeki bir eğri üzerinde alınan P ve Q gibi iki noktadan birindeki bir teğet vektörün diğerine eğri boyunca kaydırılması amaçlanması sonucu ortaya çıkmış bir kavramdır. Koneksiyon en doğru deyimi ile vektörlerin paralelliğinin tanımı için ortaya çıkmış genel bir kavramdır.

Tensör, bir uzayın bir noktası ile ilişkilendirilmiş bazı sayısal değerlerin, bir koordinat dönüşümü altında, belli bir kurala uyması halinde aldığı isimdir. Daha net bir biçimde şöyle tanımlayabiliriz;

Tanım 1.2. V n boyutlu bir vektör uzayı, $1 \leq l_i, t_j \leq n$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ olmak üzere $a_{l_1 l_2 \ldots l_r}^{t_1 t_2 \ldots t_s}$ sayıları, bu uzayın bir $(u^1, u^2, ..., u^n)$ noktası ile ilişkilendirilmiş olsun. G'yi de bu uzay üzerinde tanımlı olan tüm tersi alınabilen koordinat dönüşümlerinin kümesi olarak alalım. Bu kümeden alınacak bir T dönüşümü, eski (u) ve yeni $(\bar{u})$ koordinatlarını birbirlerine

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, ..., u^n), \quad (1 \leq i \leq n)$$

ile bağlanmış olsun.

Eğer, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n)$ uzaydaki bir noktanın koordinatlarının T deki bir dönüşüm altındaki görüntüsü olmak üzere, a değerlerinin eski ve yeni koordinatlardaki ifadeleri arasında

$$\bar{a}^{k_1 k_2 ... k_s}_{m_1 m_2 ... m_r} = \frac{\partial \bar{u}^{k_1}}{\partial u^{t_1}} \frac{\partial \bar{u}^{k_2}}{\partial u^{t_2}} ... \frac{\partial \bar{u}^{k_s}}{\partial u^{t_s}} \frac{\partial u^{l_1}}{\partial \bar{u}^{m_1}} \frac{\partial u^{l_2}}{\partial \bar{u}^{m_2}} ... \frac{\partial u^{l_r}}{\partial \bar{u}^{m_r}} a^{t_1 t_2 ... t_s}_{l_1 l_2 ... l_r}$$

bağıntısı varsa $n^{(s+r)}$ tane sayının oluşturduğu a ifadesine G'ye göre, s. dereceden kontravaryant r. dereceden kovaryant olmak üzere, $n^{(r+s)}$. mertebeden tensör denir. Eğer $s = 0$ ise a r. mertebeden kovaryant, eğer $r = 0$ ise a s. mertebeden kontravaryant tensördür denir[2].

Konneksiyon katsayıları tanımı ve tekliğine ilişkin ifade aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.3. Bir g_{ij} metrik tensörü ile verilmiş bir M manifoldunda bu metrik tensörle uyumlu, Γ^i_{jk} ve $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$'lar sırasıyla x ve x''nün fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\beta}} = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\gamma}} \tag{1.1.1}$$

denklemini sağlayan bir ve yalnız bir konneksiyon vardır. Burada adı geçen Γ fonksiyonlarına konneksiyon katsayıları denir[3].

Burada tensörlerle yapılan işlemlerde çıkan bir sorun ve bu sorunun çözümüne dair bir paragraf açmakta yarar var. Tensörler de toplama çıkarma gibi işlemler tümüyle reel sayıların toplama ve çıkarmasından esinlenerek tanımlanmıştır. Bir işlem olarak son derece önem arzeden türetme işlemi de tensörün bileşenlerinin bağlı oldukları değişkenlere göre türetilmesi biçiminde tanımlanabilir. Ancak burada şöyle bir sorunla karşılaşılır; belirli bir tensörün türevi genel olarak bir tensör değildir. Bu teorik yapının kurulmasında kapalılık özelliğini beklenmedik biçimde zedeler. Bu sorunu ortadan kaldırmak için aşağıda sözü geçen kovaryant türev tanımı gündeme getirilmiştir.

Γ konneksiyonuna göre bir λ^i kontravaryant ve λ_i kovaryant vektör alanının kovaryant türevi, sırasıyla

$$\lambda^i_{|j} = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j} + \lambda^h \Gamma^i_{hj}, \qquad \lambda_{i|j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} - \lambda_k \Gamma^k_{ij} \tag{1.1.2}$$

şeklindedir.

1.2. Riemann Manifoldu

Bilindiği üzere üç boyutlu Euclid uzayında, herhangibir (x, y, z) noktası ile bu noktaya yakın bir başka $(x + dx, y + dy, z + dz)$ noktası arasındaki uzaklık

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dır.

Eğer kullanılan koordinat sistemi kartezyen (dik) değil ise yukarıdaki ifade; herhangibir (x, y, z) noktası ile bu noktaya diferansiyel ölçütlerde yakın bir başka $(x + dx, y + dy, z + dz)$ noktası arasındaki mesafe

$$ds^2 = adx^2 + bdy^2 + cdz^2 + 2edxdy + 2fdxdz + 2gdydz$$

olarak verilebilir şeklini alır. Son ifadede adı geçen a, b, c, e, f, g'ler koordinat fonksiyonlarıdır. Buradan ds yay elemanının karesinin koordinatların diferansiyellerine göre bir kuadratik form olduğu anlaşılır.

Bu kavram 1854'de Riemann tarafından n boyutlu uzaylara genelleştirilmiştir. Riemann herhangi bir koordinat sistemdeki koordinatları x^i ve $x^i + dx^i$ olan birbirine çok yakın iki nokta arasındaki sonsuz küçük mesafeyi aşağıdaki ifadeyle tanımlamıştır;

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \qquad (i, j = 1, 2, ..., n). \tag{1.2.1}$$

Burada g_{ij} katsayıları x^i koordinatlarının fonksiyonları olup aynı zamanda uzayın 1. esas formu olarak da bilinirler. Bu katsayılar ayrıca Riemann Metriği olarak adlandırılır. Böyle bir metrikle karakterize edilen uzaya Riemann uzayı ve Riemann metriğine dayanan geometriye de Riemann geometrisi denir[4].

Burada bir noktanın altını çizmekte fayda var. Metrik en genel anlamda uzaklık ölçen bir fonksiyondur. Dolayısı ile kullanıldığı yerlerde sağlaması beklenen çok temel bir özellik vardır ki bu da sonucunun aralarında ki uzaklığın bulunması amacı ile üzerinde uygulandığı nokta çiftinden bağımsız olarak sıfırdan büyük olmasıdır. Çalışmamızda bu şart ilerleyen kısımlarda göz önüne alınmayacaktır.

İki nokta arasındaki mesafe haliyle uzay üzerinde seçilen koordinat sisteminden bağımsızdır. Şu halde bir x^i koordinat sisteminde aldığı değerler g_{ij} fonksiyonları ile verilen metriğin bir diğer $\bar{x}^i$ koordinat sisteminde aldığı değerler eğer $\bar{g}_{ij}$ ile verilirse bu iki farklı koordinat sistemine ait değerler arasında paragraf başında verilen önerme doğrultusunda aşağıdaki bağıntı mevcut olmalıdır.

$$\bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j = g_{ab}dx^a dx^b$$

Bu denklemde $dx^a dx^b$ yerine denk bir diferansiyel ifade olarak

$$\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

yazılırsa

$$\bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

ve $d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ ifadelerinin katsayılarının, aynı iki noktanın arasındaki mesafeyi iki farklı koordinat sisteminde temsil ediyor olması nedeni ile aynı olması gerektiğinden

$$\bar{g}_{ij} = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}$$

sonucuna varılır. Bu g_{ij}'nin ikinci mertebeden bir kovaryant tensör olduğunun kanıtıdır. Bu eşitlik diferansiyellerin tüm değerleri için doğru olduğundan bu tensör simetriktir.

Özel olarak Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ ile gösterilir ve ifadesi g_{ij} Riemann metriği cinsinden aşağıdaki gibidir[4].

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{ih}[jk,h], \qquad [jk,h] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right) \tag{1.2.2}$$

Burada $[jk,h]$ ifadesine 1. cins Christoffel sembolü, $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ ifadesine ise 2. cins Christoffel sembolü denir. Görüldüğü gibi Christoffel sembolleri alt indislere göre simetriktir. Bir Riemann uzayında g_{ij} metrik tensörü ile bağdaşan bir ve yalnız bir ∇ konneksiyonu vardır, [3].

Bir V_n manifoldunun eğrilik tensörü

$$L^h_{ijk} = \partial_j\Gamma^h_{ik} - \partial_k\Gamma^h_{ij} + \Gamma^a_{ik}\Gamma^h_{aj} - \Gamma^a_{ij}\Gamma^h_{ak}, \qquad \left(\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \tag{1.2.3}$$

olarak tanımlanır [2, 4].

Eğer son ifadedeki Γ^h_{ij} fonksiyonları ikinci cins Christoffel sembolleri olan

$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$'lerle değiştirilirse, g_{ij} metrik tensörü ile verilen bir Riemann uzayının Riemann eğrilik tensörü elde edilir. İfadesi

$$R^h_{ijk} = \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\} - \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} a \\ ik \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ aj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ ak \end{matrix} \right\}, \left(\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \tag{1.2.4}$$

şeklindedir. Üst ve alt indislerde yapılacak bir daraltma ile Ricci Tensörü olarak bilinen ve ifadesi

$$R_{ij} = R^a_{ija} = \partial_j \left\{ \begin{matrix} a \\ ia \end{matrix} \right\} - \partial_a \left\{ \begin{matrix} a \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} a \\ bj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b \\ ia \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ba \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b \\ ij \end{matrix} \right\} \tag{1.2.5}$$

şeklinde olan önemli bir tensöre varılır.

Özel olarak, Riemann eğrilik tensörü R^h_{ijk}

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0, \qquad \nabla_l R^h_{ijk} + \nabla_j R^h_{ikl} + \nabla_k R^h_{ilj} = 0 \tag{1.2.6}$$

özdeşliklerini sağlar, ve bu özdeşlikler sırasıyla birinci ve ikinci cins Bianchi özdeşlikleri olarak adlandırılır [1].

Kovaryant türetme işleminin özel bir sonucu bu türetmenin g_{ij} metrik tensörüne uygulanması ile elde edilir:

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{hj} \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\} - g_{ih} \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - [j, ik] - [i, jk] = 0 \ , \end{aligned}$$

yani metrik tensörün türevi 0'dır, [4].

1.3. Einstein Manifoldu

Tanım 1.3.1. (M, g, n), g Riemann metriği ile belirlenen n boyutlu diferansiyellenebilen bir Riemann manifoldu olsun. R_{ij} Riemann uzayının Ricci tensörünün bileşenlerini göstermek üzere,

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \tag{1.3.1}$$

koşulunu sağlayan bir λ fonksiyonu bulunabiliyorsa (M, g, n) manifolduna n boyutlu Riemann-Einstein manifoldu ya da kısaca Einstein manifoldu denir ve çalışma boyunca $(RE)_n$ ile gösterilecektir. Bu denklemle verilen şart sözel olarak uzayın Ricci tensörüne göre homojen olması olarak da ifade edilebilir.

Eşitliğinin her iki yanını g^{ij} ile çarpar, i ve j üzerinde toplam alırsak, R Riemann uzayının skaler eğriliğini göstermek üzere

$$R = g^{ij} R_{ij} = n\lambda \tag{1.3.2}$$

ifadesine varılır. Sonuç olarak $(RE)_n$

$$R_{ij} = \frac{1}{n} R g_{ij} \tag{1.3.3}$$

denklemi ile karakterize edilmiş olur.
$(RE)_n$'ye ait kimi temel özellikleri aşağıdaki teoremlerde, [4], inceleyeceğiz. Ama önce ispatlarda kullanılacak olan bir kavram ve bu kavrama ait bir teoremden söz edeceğiz.

Tanım. n boyutlu bir Riemann manifoldunun, üzerindeki bir c noktasında, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ birim teğet vektörlerince belirlenmiş bir I kesitini göz önüne alalım. c noktası ve I kesitindeki ***kesitsel eğrilik***

$$K_{(c,I)} = \frac{R_{hijk} p^h q^i p^j q^k}{(g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}) p^h q^i p^j q^k}$$

ile verilir, [4].

Bu kavrama ilişkin, Schur teoremi olarak bilinen teorem ise aşağıdaki gibidir.

Teorem(Schur). Eğer bir Riemann manifoldunun her c noktasında ki K_g kesitsel eğriliği, noktadaki doğrultudan bağımsızsa, kesitsel eğrilik tüm uzay boyunca sabittir, [4].

Teorem 1.3.1. Her 2 boyutlu Riemann uzayı $(RE)_2$'dir.

İspat. V_2 parametrik eğrilerin ortogonal bir sistemi ile ilişkilendirilmiş olan 2 boyutlu bir Riemann uzayı olsun(Yani $g_{12} = 0$ olsun.). Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

$$\textit{i.}\ R_{12} = 0, \quad \textit{ii.}\ R_{11}g_{22} = R_{22}g_{11} = R_{1221}, \quad \textit{iii.}\ R = g^{ij}R_{ij} = \frac{2R_{1221}}{g_{11}g_{22}}$$

i. $R_{12} = g^{ij}R_{i12j}$, $(i, j = 1, 2)$

Toplamda $i \neq j$ olduğunda, uzayın parametrik eğrilerin ortogonal bir sistemi ile ilişkilendirilmiş olmasından dolayı $g^{ij} = 0$ olacağından $R_{12} = g^{ij}R_{i12j} = g^{11}R_{1121} + g^{22}R_{2122}$ olur. R_{ijkl} tensör bileşenleri $i = j$ veya $k = l$ durumlarında sıfır olduğundan $R_{12} = 0$ bulunur.

ii. $R_{11}g_{22} = g^{ii}R_{i11i}g_{22} = g^{11}R_{1111}g_{22} + g^{22}R_{2112}g_{22} = R_{2112} = R_{1221}$

$R_{22}g_{11} = g^{ii}R_{i22i}g_{11} = g^{11}R_{1221}g_{11} + g^{22}R_{2222}g_{11} = R_{1221}$

$$\textit{iii.}\ R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = g^{11}\frac{R_{1221}}{g_{22}} + g^{22}\frac{R_{1221}}{g_{11}} = \frac{[g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22}]R_{1221}}{g_{22}g_{11}} = \frac{2R_{1221}}{g_{22}g_{11}}$$

Son ifadeden $\frac{1}{2}Rg_{22}g_{11} = R_{1221}$ bulunur. Bu eşitliğin sırasıyla g^{11} ve g^{22} ile çarpılmasından $\frac{1}{2}Rg_{22} = R_{22}$ ve $\frac{1}{2}Rg_{22} = R_{22}$ eşitlikleri elde edilir. Bu ise genel olarak $R_{ij} = \frac{1}{2}Rg_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$ şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla $(RE)_n$'yi karakterize eden (1.3.3) denklemine göre ispat tamamlanmış olur.

Riemann-Einstein uzayları ile ilgili bir başka özellik aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.3.2. K sabit eğrilikli n boyutlu bir Riemann manifoldu, bir $(RE)_n$'dir ve $R = Kn(1-n)$dir.

İspat. Schur Teoreminin sonucu olarak elde edilen

$$R_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) \tag{1.3.4}$$

ifadesinin her iki yanı g^{hk} ile çarpılırsa $R_{ij} = K(\delta^k_j g_{ik} - ng_{ij})$ ve buradan da $R_{ij} = K(g_{ij} - ng_{ij}) = K(1-n)g_{ij}$ elde edilir ki bu da V_n nin bir $(RE)_n$ olduğunu kanıtlar. Son ifade g^{ij} ile çarpılırsa $R = K(1-n)g_{ij}g^{ij} = Kn(1-n)$ elde edilir ki bu da diğer aranan sonuçtur.

Teorem 1.3.3 $(RE)_3$ sabit eğriliklidir.

İspat. n boyutlu bir Riemann uzayının konform eğrilik tensörü

$$C^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h_j - g_{ij}R^h_k) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$$

ifadesiyle verilir, [7].

$n = 3$ için $C^h_{ijk} = 0$ olduğundan [7], buradan

$$R^h_{ijk} = -(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h_j - g_{ij}R^h_k) - \frac{R}{2}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$$

olarak bulunur.

Uzay $(RE)_3$ olduğundan $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ dir. Bu ifade, $R^h_j = R_{aj}g^{ah} = \lambda g_{aj}g^{ah} = \lambda\delta^h_j$ ve $\lambda = \frac{R}{3}$ ile birlikte kullanılırsa

$$R^h_{ijk} = -(\delta^h_j \frac{R}{3} g_{ik} - \delta^h_k \frac{R}{3} g_{ij} + g_{ik}\frac{R}{3}\delta^h_j - g_{ij}\frac{R}{3}\delta^h_k) - \frac{R}{2}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki ifade g_{hl} ile çarpılıp h üzerinde toplam alınırsa,

$$R_{lijk} = (-2\frac{R}{3} + \frac{R}{2})(g_{lj}g_{ik} - g_{lk}g_{ij})$$

elde edilir.

Buradan 3 boyutlu Riemann-Einstein uzayının sabit eğrilikli bir uzay olduğu sonucuna varılır.

Teorem 1.3.4. $(RE)_n$'nin skaler eğriliği sabittir.

İspat. 2. Bianchi özdeşliğini tekrar ele alalım.

$$\nabla_r R^i_{jkh} + \nabla_k R^i_{jhr} + \nabla_h R^i_{jrk} = 0$$

$i = h$ alarak yapacağımız daraltma ile

$$\nabla_r R_{jk} - \nabla_k R_{jr} + \nabla_h R^h_{jrk} = 0$$

elde edilir. Denklem g^{jk} ile çarpılırsa

$$\nabla_r R - \nabla_k R^k_r - \nabla_h R^h_r = 0$$

ifadesine varılır. Bu son ifade

$$\nabla_r R - 2\nabla_k R^k_r = 0$$

ile denktir. Buradan hareketle Einstein uzayı olmanın tanımınıda kullanarak

$$\begin{aligned}\nabla_r R = 2\nabla_k R^k_r &= 2\nabla_k R_{rh} g^{kh} = 2g^{kh}\nabla_k R_{rh} \\ &= 2g^{kh}\nabla_k \frac{R}{n} g_{rh} = 2g^{kh} g_{rh} \frac{1}{n}\nabla_k R \\ &= 2\delta^k_r \frac{1}{n}\nabla_k R \\ &= \frac{2}{n}\nabla_r R\end{aligned}$$

ve terimler bir tarafa toplanarak

$$(1 - \frac{2}{n})\nabla_r R = 0$$

bulunur. $n > 2$ için açık olarak $\nabla_r R = 0$ olmalıdır. R'nin türevi sıfır sonucuna varmış olduk. Yani R skaler eğriliği sabittir.

Burada kısa bir işlemle $R = R_{ij} g^{ij} = \lambda g_{ij} g^{ij} = \lambda n \Rightarrow \lambda = \frac{R}{n}$ sonucuna varılır ki bu da;

Teorem 1.3.5. Bir $(RE)_n$'de λ katsayısı gerçel sabittir.

şeklinde ifade edilebilir.

2. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU UZAYLAR

2.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon

Şu ana kadar bir uzayın ya da manifoldun üzerinde tanımlanan bir kavramla, konneksiyon kavramıyla ilgilenmiştik. Bir Riemann uzayı üzerinde uzayın adından esinli olarak Riemann konneksiyonunun tanımlı olduğunu gördük. Ancak, bu çalışmanın 1. bölümünde de verilmiş olan konneksiyon tanımının genelliğinin olağan bir sonucu, manifoldlar üzerinde Riemann konneksiyonundan esinli olan ama yapısı tümüyle değişik konneksiyonlar tanımlamanın mümkün olmasıdır.

1924 yılında Friedmann ve Schouten metrik olma şartı olmaksızın bir manifold üzerinde semi-simetrik lineer konneksiyonu tanımladı. 1932 yılında Hayden bir Riemann manifoldu üzerinde burulmalı metrik konneksiyonları inceledi. Buna ilişkin kısa bir matematiksel bilgilendirme aşağıda yapılmıştır.

V_n, C^∞ sınıfından ve yerel ifadesi $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ ile verilen bir Riemann metriğiyle belirlenmiş diferansiyellenebilen n boyutlu bir manifold olsun. V_n üzerindeki bir Γ^i_{jk} konneksiyon katsayısı simetrik ve asimetrik kısımlarına ayrıştırılabilir. Γ^i_{jk} konneksiyon katsayısının simetrik kısmını Λ^i_{jk} ve asimetrik kısmını da Ω^i_{jk} ile ifade edersek;

$$\Lambda^i_{jk} = \Gamma^i_{(jk)} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right), \qquad \Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) \tag{2.1.1}$$

şeklinde olup burada Λ^i_{jk} bir konneksiyon katsayısı, Ω^i_{jk} ise bir tensördür ve bu tensör konneksiyonun burulma tensörünü gösterir. (2.1.1) ile verilen eşitliklerden de kolayca görüleceği gibi

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^i_{jk} + \Omega^i_{jk} \tag{2.1.2}$$

olarak yazılabilir. Bunların ışığında semi-simetrik metrik konneksiyon tanımını verelim.

Tanım 2.1. Herhangibir π_j vektör bileşeni için, ∇ asimetrik konneksiyonunun burulma tensörü

$$\Omega^i_{jk} = \pi_j \delta^i_k - \pi_k \delta^i_j, \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu konneksiyona semi-simetrik konneksiyon adı verilir, [3, 5].

Friedman, Schouten ve Hayden'in fikirlerinin bir harmanı bizleri semi-simetrik konneksiyonlu uzay fikrine taşır. Bu fikir, 1970'de Yano tarafından uzaya metrik ilave edilerek diferansiyellenebilen bir V manifoldu üzerinde g metriği ile belirlenen semi-simetrik konneksiyonlu uzay kavramına genişletilmiştir. Son yıllarda De, Mazumder, Uysal, Bandyopadhyay gibi isimlerin bu konuda çalışmalar yapmıştır.

2.2. Konneksiyon Katsayılarının Varlığı

∇, semi simetrik metrik konneksiyonuna göre türevi ve $\overset{\circ}{\nabla}$ Riemann (Levi-Civita) konneksiyonuna göre türevi göstermek üzere

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^h_{ik} g_{jh} - \Gamma^h_{jk} g_{ih} = 0 \tag{2.2.1}$$

ve

$$\overset{\circ}{\nabla} g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\} g_{jh} - \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\} g_{ih} = 0 \tag{2.2.2}$$

dir.

(2.2.1) ile (2.2.2)'in farkı alınırsa,

$$\Gamma^h_{ij} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = U^h_{ij} \tag{2.2.3}$$

olmak üzere

$$U^h_{ik} g_{hj} + U^h_{jk} g_{ih} = 0 \tag{2.2.4}$$

elde edilir.

Buradan T^h_{ij} burulma tensörü

$$T_{ij}^h = U_{ij}^h - U_{ji}^h \tag{2.2.5}$$

olarak elde edilir. (2.2.5)'den;

$$\left(U_{ki}^h + T_{ki}^h\right) g_{hj} + \left(U_{kj}^h + T_{kj}^h\right) g_{ih} = 0$$

bulunur.

(2.2.4) denkleminde (i, j, k) indisleri devirsel olarak değiştirilirse her sıralama için bu denklem yazıldığında aşağıdakiler elde edilir;

$$\begin{aligned} U_{ik}^h g_{hj} + U_{jk}^h g_{ih} &= 0 \\ U_{ji}^h g_{hk} + U_{ki}^h g_{hj} &= 0 \\ U_{hi}^h g_{hi} + U_{ij}^h g_{hk} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Bu denklemlerden ilk ikisi sonuncunun ters işaretlisi ile toplanırsa

$$\left(U_{ik}^h + U_{ki}^h\right) g_{hj} + \left(U_{jk}^h - U_{kj}^h\right) g_{hi} + \left(U_{ji}^h - U_{ij}^h\right) g_{hk} = 0$$

bulunur.

(2.2.5) ifadesi kullanılarak

$$\left(U_{ik}^h + U_{ki}^h\right) g_{hj} + T_{hi}^h g_{hi} + T_{ji}^h g_{hk} = 0 \tag{2.2.7}$$

sonucuna varılır.

$$U_{ik}^h = T_{ik}^h + U_{ki}^h$$

olduğundan,

$$U_{ik}^h + U_{ki}^h = U_{ki}^h + T_{ik}^h + U_{ki}^h = 2U_{ki}^h + T_{ik}^h \tag{2.2.8}$$

elde edilir.

(2.2.8) de i ve k'nın yeri değiştirilirse

$$U_{ik}^h + U_{ki}^h = U_{ik}^h + T_{ki}^h + U_{ik}^h = 2U_{ik}^h + T_{ki}^h$$

sonucuna ulaşılır.

Bu sonucun ilk ve son kısmının denkliği, (2.2.7) da kullanılırsa

$$T^h_{ik}g_{hj} + T^h_{jk}g_{hi} + T^h_{ji}g_{hk} + 2U^h_{ki}g_{hj} = 0$$

denklemi elde edilir. g^{jl} ile çarpılıp j üzerinde toplam alınırsa

$$T^h_{ik}g_{hj}g^{jl} + T^h_{jk}g_{hi}g^{jl} + T^h_{ji}g_{hk}g^{jl} + 2U^h_{ki}g_{hj}g^{jl} = 0$$

sonucu bulunur. $g_{hj}g^{jl} = \delta^l_h$ olduğu göz önüne alınarak

$$T^l_{ik} + T^h_{jk}g^{jl}g_{hi} + T^h_{ji}g^{jl}g_{hk} + 2U^l_{ki} = 0$$

elde edilir. Denklemdeki U'lu ifade yalnız bırakılırsa

$$U^l_{ik} = -\frac{1}{2}\Big(T^l_{ik} + T^h_{jk}g^{jl}g_{hi} + T^h_{ji}g^{jl}g_{hk}\Big)T$$

sonucuna varılır. Buradan elde edilen U tensörü ifadesi (2.2.3) de yerine konarak

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\Big(T^l_{ik} + T^h_{jk}g^{jl}g_{hi} + T^h_{ji}g^{jl}g_{hk}\Big)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Burulma tensörü $T^l_{ik} = \delta^l_k\pi_i - \delta^l_i\pi_k$ olduğundan U tensörü

$$U^l_{ki} = \pi_k\delta^l_i - g_{ik}\pi^l$$

olarak bulunur. Sonuç olarak semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları

$$\Gamma^h_{ij} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + \pi_j\delta^h_i - g_{ij}\pi^h$$

olarak belirlenir, [6].

Semi-simetrik konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları en genel haliyle

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + \pi_j\delta^i_k - \pi^i g_{jk} \tag{2.2.9}$$

şeklindedir ve

$$\Lambda^\beta_{ij} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ ij \end{matrix} \right\}, \qquad \Omega^i_{jk} = \pi_j\,\delta^i_k - \pi^k\,g_{ij}$$

ifadeleri bu konneksiyon katsayılarının sırasıyla simetrik ve asimetrik kısımlarını oluşturur.

(2.2.9) ile verilen konneksiyon semi-simetrik metrik konneksiyondur. Bu konneksiyona sahip uzaylar ise semi-simetrik konneksiyonlu metrik uzaylar olarak adlandırılır.

2.3. Eğrilik Tensörü, Ricci Tensörü, Skaler eğrilik ve Bianchi özdeşlikleri

Semi-Simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü o metriğe göre alınan kovaryant türevler cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.
(2.2.9), (1.2.3)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
L^h_{ijk} &= \partial_j\left[\left\{\begin{array}{c} h \\ ik \end{array}\right\} + \pi_i\delta^h_k - \pi^h g_{ik}\right] - \partial_k\left[\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\} + \pi_i\delta^h_j - \pi^h g_{ij}\right] \\
&\quad + \left[\left\{\begin{array}{c} a \\ ik \end{array}\right\} + \pi_i\delta^a_k - \pi^a g_{ik}\right]\left[\left\{\begin{array}{c} h \\ aj \end{array}\right\} + \pi_a\delta^h_j - \pi^h g_{aj}\right] \\
&\quad - \left[\left\{\begin{array}{c} a \\ ij \end{array}\right\} + \pi_i\delta^a_j - \pi^a g_{ij}\right]\left[\left\{\begin{array}{c} h \\ ak \end{array}\right\} + \pi_a\delta^h_k - \pi^h g_{ak}\right] \\
L^h_{ijk} &= \left[\partial_j\left\{\begin{array}{c} h \\ ik \end{array}\right\} - \partial_k\left\{\begin{array}{c} h \\ ij \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} a \\ ik \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} h \\ aj \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} a \\ ij \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} h \\ ak \end{array}\right\}\right] \\
&\quad - \delta^h_j\left[\nabla_k\pi_i - g_{ik}\pi^2\right] + \delta^h_k\left[\nabla_j\pi_i - g_{ij}\pi^2\right] - g_{ik}\nabla_j\pi^h + g_{ij}\nabla_k\pi^h \qquad (2.3.1)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan, R^h_{ijk} Riemann eğrilik tensörünü göstermek üzere,

$$L^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \delta^h_j\left[\nabla_k\pi_i - g_{ik}\pi_l\pi^l\right] + \delta^h_k\left[\nabla_j\pi_i - g_{ij}\pi_l\pi^l\right] - g_{ik}\nabla_j\pi^h + g_{ij}\nabla_k\pi^h \qquad (2.3.2)$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte

$$\alpha_{ki} = \nabla_k\pi_i - \pi_i\pi_k + \frac{1}{2}g_{ki}\pi_t\pi^t \qquad (2.3.3)$$

dönüşümü kullanılarak

$$L^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_j\alpha_{ik} - \delta^h_i\alpha_{jk} + \alpha_{jl}g^{lh}g_{ik} - \alpha_{il}g^{lh}g_{jk} \qquad (2.3.4)$$

k ve h üzerinde daraltma yapılarakta

$$L_{ij} = R_{ij} - (n-2)\alpha_{ij} - \alpha g_{ij} \qquad (2.3.5)$$

bulunur. Burada L_{ij}, semi-simetrik metrik konneksiyona; R_{ij} ise Riemann konneksiyonuna göre Ricci tensörünü göstermektedir. Ricci tensörü, α_{ki}'nin açık ifadesi kullanılarak;

$$L_{ij} = R_{ij} - (n-2)\nabla_j\pi_i + (1-n)g_{ij}\pi_l\pi^l + g_{ij}\nabla_h\pi^h \qquad (2.3.6)$$

şeklinde de elde edilmiş olur. L_{ij} simetrik bir tensör değildir. Simetrik ve antisimetrik kısımları sırasıyla $L_{(ij)}$ ve $L_{[ij]}$ ile gösterilirse

$$L_{(ij)} = R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j\pi_i + \nabla_i\pi_j] + (1-n)g_{ij}\pi_l\pi^l + g_{ij}\nabla_h\pi^h$$

$$L_{[ij]} = \frac{(n-2)}{2}[\nabla_i \pi_j - \nabla_j \pi_i]$$

elde edilir. L_{ij}'nin simetrik bir tensör olması için asimetrik kısmının özdeş olarak sıfır olması yani yukarıdaki ikinci ifadeden açıkca görülebileceği üzere π'nin bir gradyan vektör olması gerekli ve yeterlidir.

(2.3.6) eşitliği g^{ij} ile çarpılırsa uzayın skaler eğriliği

$$L = R - 2\nabla_h \pi^h + (1-n)n\pi_l \pi^l \tag{2.3.7}$$

olarak bulunur. Burada L semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın skaler eğriliğini göstermektedir.

(2.3.7) $\alpha = \alpha_{ki} g^{ki}$ olmak üzere;

$$L = R - 2(n-1)\alpha \tag{2.3.8}$$

ifadesine eşdeğerdir.

Semi simetrik metrik konneksiyona göre 1. Bianchi özdeşliği

$$L_{hijk} + L_{hjki} + L_{hkij} = (\nabla_i \pi_k - \nabla_k \pi_i) g_{jh} + (\nabla_k \pi_j - \nabla_j \pi_k) g_{ih} + (\nabla_j \pi_i - \nabla_j \pi_k) g_{hk}$$

şeklini alır.

2. Bianchi özdeşliği ise

$$\nabla_r L^i_{jkh} + \nabla_k L^i_{jrh} + \nabla_h L^i_{jrk} = 2\Big(\pi_r L^i_{jkh} + \pi_k L^i_{jhr} + \pi_h L^i_{jrk}\Big)$$

şeklinde çıkar, [7].

Bu ifadede i yerine h yazılarak yapılacak olan bir daraltma ile

$$\nabla_r L_{jk} - \nabla_k L_{jr} + \nabla_h L^h_{jrk} = 2\Big(\pi_r L_{jk} - \pi_k L_{jr} + \pi_h L^h_{jrk}\Big)$$

ifadesine, bu ifadenin her iki yanı g^{jk} ile çarpılmak suretiyle

$$\nabla_r L - \nabla_k L^k_r - \nabla_h L^h_r = 2\Big(\pi_r L - \pi_k L^k_r - \pi_h L^h_r\Big)$$

ve buna denk olan

$$\nabla_r L - 2\nabla_k L^k_r = 2\Big(\pi_r L - 2\pi_k L^k_r\Big)$$

ifadelerine varılır. Son ifade üçüncü bölümde kullanılacaktır.

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU EINSTEIN UZAYLARI

Bu bölümde birinci bölümde tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiş olan Einstein uzayları ile ikinci bölümde incelenmiş olan semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayların bir harmanı yapılacak ve semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı tanımı yapılacaktır. Bu tanımdan hareketle 2 ve 3 boyutlu uzaylara ilişkin varılan bazı sonuçlara yer verilecek, 4 ve yukarı boyutlar için geçerli olan bir örneğin inşaası yapılacaktır.

3.1. Tanımlar

Tanım. E semi-simetrik metrik konneksiyonla verilmiş n boyutlu bir manifold olsun. Bu manifoldun eğrilik tensöründen daraltma yolu ile elde edilen L_{ij} Ricci tensörünün simetrik kısmı olan $L_{(ij)}$, uzayın üzerinde tanımlı olan g_{ij} metriği ile

$$L_{(ij)} = \lambda g_{ij} \tag{3.1.1}$$

denklemini gerçeklerse bu uzaya g'yi metrik kabul eden Semi Simetrik Metrik Konneksiyonlu Einstein Uzayı denir ve çalışmanın geri kalanı boyunca $(SE)_n$ ile gösterilecektir.

Semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayları ile ilgili teoremlerle devam etmeden önce semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Einstein uzayı tanımınıda yukarıdaki tanımdan esinlenerek verebiliriz.

E semi-simetrik metrik olmayan $\bar{\nabla}$ konneksiyonuyla verilmiş bir manifold olsun. Tanıma devam etmeden önce, konneksiyonun metrik olmama niteliğine denk olarak $\bar{\nabla}_k g_{ij} \neq 0$ ifadesini yazabiliriz. Bu manifoldun eğrilik tensöründen

daraltma yolu ile elde edilen $\bar{L}_{ij}$ Ricci tensörünün simetrik kısmı $\bar{L}_{(ij)}$, uzayın üzerinde tanımlı olan g_{ij} metriği ile

$$\bar{L}_{(ij)} = \lambda g_{ij} \tag{3.1.2}$$

denklemini gerçeklerse bu uzaya g'yi metrik kabul eden semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Einstein uzayı denir.

Şimdi semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzaylarına ilişkin teoremlere geçelim.

3.2. Teoremler

Teorem 3.2.1. 2 boyutlu her semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayı bir $(SE)_2$'dir.

İspat. Semi-simetrik metrik konneksiyonlu bir uzayın Einstein uzayı olması için bu bölümde verilmiş olan tanım uyarınca $L_{(ij)} = \beta g_{ij}$ denklemini sağlaması gerektiği ve ikinci bölümden

$$L_{(ij)} = R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j] + (1-n) g_{ij} \pi_l \pi^l + g_{ij} \nabla_h \pi^h$$

olduğu biliniyor. Ayrıca giriş bölümünde iki boyutlu her Riemann uzayının bir Einstein uzayı olduğu kanıtlanmıştı yani, R_{ij} Riemann manifoldunun Ricci tensörü olmak üzere, $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ sağlanıyor. Buradan $L_{(ij)}$ ifadesinde n yerine 2 yazılırsa

$$L_{(ij)} = R_{ij} - g_{ij} \pi_l \pi^l + g_{ij} \nabla_h \pi^h = (\lambda - \pi_l \pi^l + \nabla_h \pi^h) g_{ij} = \beta g_{ij}$$

Q.E.D

Teorem 3.2.2. Bir $(RE)_n$'nin $(SE)_n$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j = \beta g_{ij}$ olacak şekilde bir β skaler fonksiyonunun bulunabilmesidir.

İspat. $(RE)_n$ tanımı uyarınca $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ olacak şekilde λ skaler fonksiyonu vardır.

Gereklilik: Uzay $(SE)_n$ olsun. Şu halde

$$L_{(ij)} = R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j] + (1-n) g_{ij} \pi_l \pi^l + g_{ij} \nabla_h \pi^h = \gamma g_{ij}$$

olmalıdır. g_{ij}'nin katı olan ifadeler bir tarafa toplanıp g_{ij} parantezine alınırsa

$$\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j = \Big[\frac{2}{n-2}(\lambda - \gamma + (1-n)\pi_l \pi^l + \nabla_h \pi^h)\Big] g_{ij} = \beta g_{ij}$$

Yeterlilik:

$$\begin{aligned} L_{(ij)} &= R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j] + (1-n) g_{ij} \pi_l \pi^l + g_{ij} \nabla_h \pi^h \\ &= \lambda g_{ij} - \frac{(n-2)}{2} \beta g_{ij} + (1-n) g_{ij} \pi_l \pi^l + g_{ij} \nabla_h \pi^h \\ &= [\lambda - \frac{(n-2)}{2} \beta + (1-n)\pi_l \pi^l + \nabla_h \pi^h] g_{ij} \\ &= \gamma g_{ij} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem 3.2.3 Her 3 boyutlu semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay $(SE)_3$ uzayıdır.

İspat. Her 3 boyutlu Riemann uzayının konform eğrilik tensörü özdeş olarak sıfırdır, [7].

$$C^h_{ijk} = 0 \ , \ n = 3$$

Yano, bir Riemann metriğinin, eğrilik tensörü sıfır olan bir semi-simetrik metrik konneksiyon belirleyebilmesi için gerek ve yeter şartın Levi-Civita konneksiyonu ile elde edilen konform eğrilik tensörünün sıfır olması olduğunu ispatlamıştır, [8]. Bunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz;

$$C^h_{ijk} = 0 \Leftrightarrow L^h_{ijk} = 0$$

Bu teoremin yeterliliği bize konform eğrilik tensörü sıfır olan bir uzayın, eğrilik tensörü sıfır olan bir semi-simetrik metrik konneksiyon belirleyeceğini söyler.

$$C^h_{ijk} = 0 \Rightarrow L^h_{ijk} = 0$$

.

Bir tensör sıfır ise simetrik kısmıda sıfır olduğundan k ve h üzerinde daraltma yapılırsa;

$$L_{(ij)} = 0 = 0g_{ij}$$

elde edilir. Bu da λ skaler fonksiyonu sıfır olan bir Einstein uzayını tanımlar. Q.E.D.

Bir $(SE)_n$'de

$$L = L_{ij}g^{ij} = [L_{(ij)} + L_{[ij]}]g^{ij} = L_{(ij)}g^{ij} = \lambda g_{ij}g^{ij} = \lambda n \Rightarrow \lambda = \frac{L}{n}$$

yazılabilir. Ayrıca semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzaylarda 2. Bianchi özdeşliğinden hareketle aşağıdaki sonuç elde edilmişti.

$$\nabla_r L - 2\nabla_k L_r^k = 2\Big(\pi_r L - 2\pi_k L_r^k\Big)$$

Denklemde ki $\nabla_k L_r^k$ ifadesi için

$$\begin{aligned}\nabla_k L_L^k &= [\nabla_k L_{mr} g^{km}] = 2[\nabla_k L_{(mr)} g^{jm} + \nabla_k L_{[mr]} g^{jm}] \\ &= \nabla_k \frac{L}{n} g^{km} g_{mr} + \nabla_j L_{[mr]} g^{jm}\end{aligned}$$

yazılabilir. $g^{km}g_{ml} = \delta_r^k$ olduğu dikkate alınarak $\nabla_k L_r^k$ ifadesi ilk denklemde yerine konur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}\nabla_k L &= \frac{4n}{n-2}(\nabla_k L_{[mr]} g^{km} - \pi_L L - 2\pi_k L_r^k) \\ &= \frac{4n}{n-2}(\nabla_j(\pi_{m,r} - \pi_{r,m})g^{km} - \pi_k L - 2\pi_k L_r^k) \qquad (3.2.1)\end{aligned}$$

elde edilir. λ sabit olsaydı $(\lambda n =) L$'de sabit olurdu. Ancak L'nin türevi, (3.2.1)'de görüldüğü üzere genel olarak sıfır değildir. Şu halde son yapılanların özeti olarak

Teorem 3.2.4. Bir $(SE)_n$'de λ katsayısı genel olarak sabit değildir.

yazılabilir.

Son olarak $n \geq 4$ için bir $(SE)_n$ örneği vererek çalışmayı sonlandıralım.

3.3. Örnek

Örneğimizde ele alacağımız metriğin tanımı ve metrikle ilgili bilgiler [9] kaynaklıdır. İşlemler esnasında yaptığımız kabuller için esin kaynağımız, metriği benzer kabullerle kullanan [10]'dur.

R^n üzerinde

$$ds^2 = \varphi(dx^1)^2 + k_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2dx^1dx^n$$

şeklinde bir Riemann metriği tanımlansın. Burada latin indisler $n \geq 4$ olmak üzere $1, 2...n$ ve grek indisler $2, 3...n-1$ olarak değişmektedir. φ, x^n'den bağımsız bir fonksiyon, $k_{\alpha\beta}$ ise gerçel sayılardan kurulu nxn'lik tersi alınabilir simetrik bir matristir.

Bu metrik için sırasıyla sıfırdan farklı Christoffel Sembolleri ve Riemann eğrilik tensörü bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ 11 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}k^{\beta\alpha}\varphi_{.\alpha}\ , \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\varphi_{.1}\ , \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 1\alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\varphi_{.\alpha}$$

$$R_{1\alpha\beta1} = \frac{1}{2}\varphi_{.\alpha\beta}\ , \qquad R_{11} = \frac{1}{2}k^{\alpha\beta}\,\varphi_{.\alpha\beta} \tag{3.3.1}$$

Burada (.) koordinatlara göre kısmi türevi temsil etmektedir, ve $[k^{\alpha\beta}]$ $[k_{\alpha\beta}]$'nın tersidir.

Uzayın bir $(SE)_n$ olması için sağlanması gereken denklem;

$$L_{(ij)} = R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j\pi_i + \nabla_i\pi_j] + (1-n)g_{ij}\pi_l\pi^l + g_{ij}\nabla_h\pi^h = \lambda g_{ij} \tag{3.3.2}$$

di.

İşlemlere başlamadan, ilk kabulümüzü $[k_{\alpha\beta}]$'yı birim matris alarak yapalım. Bunun bir sonucu olarak $[k^{\alpha\beta}]$'da birim matris olur. Denklemde $L_{(ij)}$ ifadesinin

son iki terimi zaten g_{ij}'nin katı olduğundan $R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j]$ ifadesini metriğin bir β katı yapmak yeterlidir, dolayısıyla çözülecek olan denklem

$$R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j] = \beta g_{ij} \tag{3.3.3}$$

ye indirgenmiş olur. Son denklemdeki semi-simetrik metrik konneksiyona göre yazılmış olan kovaryant türev ifadelerinin açık halleri yazılırsa;

$$R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\left[(\pi_j)_{x_i} + (\pi_i)_{x_j} - 2\pi_a \left\{ \begin{matrix} a \\ ij \end{matrix} \right\} - 2\pi_i \pi_j + 2g_{ij}\pi_a \pi^a\right] = \beta g_{ij} \tag{3.3.4}$$

elde edilir. (3.3.2)'yi (3.3.3)'e indirgeyen neden (3.3.4)'ü de

$$R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}[(\pi_j)_{x_i} + (\pi_i)_{x_j} - 2\pi_a \left\{ \begin{matrix} a \\ ij \end{matrix} \right\} - 2\pi_i \pi_j] = \theta g_{ij} \tag{3.3.5}$$

e indirger.

Burada $\Pi = (\pi_1(x^1, x^2..., x^n), \pi_2(x^1, x^2..., x^n), ..., \pi_n(x^1, x^2..., x^n))$ vektör alanı için $\pi_i \equiv 0$, $i \neq 1$ ve π_1 sadece x^1'e bağlı olması kabullerini yapalım. Şu halde son denklem $i \neq j$ iken $i = 1$, $j = n$ durumu hariç özdeş olarak gerçeklenir. $i = 1$, $j = n$ durumunda ise $0 = \theta$'ya varılır. Bu sonuçtan sonra $i = j$ durumu

$$R_{ii} - (n-2)[(\pi_i)_{x_i} - \pi_a \left\{ \begin{matrix} a \\ ii \end{matrix} \right\} - \pi_i^2] = 0 \tag{3.3.6}$$

halini alır. $i = j$ iken sadece $i = 1$ halinde R_{ii} sıfırdan farklıdır ve

$$R_{11} = \frac{1}{2}[k_{\alpha\alpha}]\varphi_{.\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\varphi_{.\alpha\alpha}$$

olur. x^n'ye bağlı olmama şartı ile tanımlanmış olan φ'yi sadece x^1'e bağlı kabul ederek kısmı türevlerinin 2'den $(n-1)$'e kadar olan toplamını sıfır buluruz. Yani $i = j = 1$ iken $R_{11} = 0$ olur ve denklem

$$-(n-2)[(\pi_1)_{x_1} - \pi_a \left\{ \begin{matrix} a \\ 11 \end{matrix} \right\} - \pi_1^2] = 0 \tag{3.3.7}$$

halini alır. π_i'ler için yaptığımız kabuller ve (3.3.1) ile

$$(\pi_1)_{x_1} - \pi_1^2 = 0 \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Denklemin çözümü ile birlikte

$\Pi = (-\frac{1}{(x^1)^2}, 0, ..., 0)$, $\theta = 0$ sonuçlarına varılmış olur. İşlemlerde tersten yapılacak kısa bir takip λ'nın değerinin bu örnekte

$$\lambda = \frac{(3-2n)}{(x^1)^2}$$

şeklinde olduğunu gösterir. φ içinse, sadece x^1'e bağlı bir fonksiyon olma şartı dışında bir kısıt gelmemiştir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein uzayı $((SE)_n)$ tanımı verilmiş, iki ve üç boyutlu olanlar için aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

İki boyutlu her semi-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann uzayı bir $(SE)_n$'dir.

Bir Riemann-Einstein uzayının $((RE)_n)$, $(SE)_n$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla_j \pi_i + \nabla_i \pi_j = \beta g_{ij}$ olacak şekilde bir β skaler fonksiyonunun bulunabilmesidir.

Her üç boyutlu semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzay $(SE)_n$ uzayıdır.

Bir $(SE)_n$'de λ katsayısı genel olarak sabit değildir.

Bunlara ek olarak $n \geq 4$ için bir $(SE)_n$ örneği verilmiştir.

Bundan sonra benzer incelemeler Quasi-Einstein uzaylar için yapılabilir. Ayrıca semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonlar için Einstein uzayları ve alt uzaylarını incelemek ilginç olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] **Carmo, M. P. do**, 1992. Riemannian Geometry. Mathematics: Theory and Applications. Boston, Mass.

[2] **Kreyszig, E.**, 1968. Introduction to Differenetial Geometry and Riemannian Geometry. University of Toronto Press.

[3] **Eisenhart, L. P.**, 1927. Non-Riemannian Geometry. American Mathematical Society, Colloquium Publications, **Volume VIII.**

[4] **Weatherburn, C. E.**, 1966. An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] **Schouten, J. A.**, 1954. Der Ricci-Kalkül. Springer, Berlin

[6] **Yano, K.**, 1970. On Semi-symmetric metric connection. *Roum Pures et Appl.* Tome **XV No.9** P.1579-1586. Bucarest.

[7] **Eisenhart, L. P.**, 1926. Riemannian Geometry. Princeton University Press.

[8] **Yano, K. ve Kon, Masahiro**, 1984. Structures on manifolds. World Scientific, Series in pure mathematics, Singapore.

[9] **Roter, W.**, 1998. On Conformally Recurrent Metrics 1, Some General Results. *Colloquium Mathematicum,* **47** (1982), 39-46.

[10] **Uysal, S. A. ve Doğan, R. Ö.**, 2003. On recurrent spaces with semi-symmetric singh connection. *Indian J. pure appl. Math.*, **34**(7), 1061-1065, 2003

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. 1996 yılında Özel Kültür Lisesi'den ve 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühndisliği lisans programından mezun oldu. 2000 yılında aynı bölümde yüksek lisans eğitimine başladı ve 2001 yılında yine aynı bölüme araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.