

7 5331

BASIK DAİRESEL SİLİNDİRİK KABUKLARIN AEROELASTİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Uçak Müh. Burak Durak

7 5331

- Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19 Ocak 1998
Tezin savunulduğu Tarih :13 Şubat 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zahit Mecitoğlu *Z. Mecitoğlu* 19/1/98

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Cengiz Dökmeçi *C. Dökmeçi*
Doç. Dr. Ali Rana Atılğan *A. Rana Atılğan*

F.İ. YÖNETİM KURULU
DOĞ. VEYASIN KURULU

Şubat 1998

ÖNSÖZ

Aeroelastisite hava akımına maruz bir katı cisimde oluşan elastik, atalet ve aerodinamik kuvvetleri etkileşimini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu karşılıklı etkileşimler sistemi kimi zaman kararsız bir duruma getirir. Bu kararsız durumlardan biri de bu tezin konusunu oluşturan flaterdir (flutter). Bu çalışmada iki boyutlu bir kontrol veya taşıma yüzeyinin flater sınırı incelenmiştir. Katı cisim modeli Donnel-Mushtari ince kabuk teorisine, aerodinamik teori ise lineerleştirilmiş ses üstü akım teorisine dayanır.

Flater ilk kez ikinci dünya savaşında Alman V-2 savaş roketlerinde ortaya çıkmıştır. O zamandan beri flater sınırı özellikle yüksek hızla uçan uçak, roket gibi araçlarda bir dizayn parametrisi olmuştur. Bu çalışma TÜBİTAK-SAGE (Savunma Araştırma-Geliştirme) tarafından tez destek programına alınmıştır ve bu kuruluş tarafından üretilen roketlerin kontrol yüzeylerinde oluşabilecek aeroelastik olaylar için bilgi birikimi oluşturmayı hedeflemektedir.

Bu çalışmada gösterdiği ilgi ve çaba için danışman hocam Sayın Prof. Dr. Zahit Mecitoğlu'na sonsuz teşekkürler ederim.

16.01.1998

Uçak Müh. Burak Durak

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xi
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 BASIK DAİRESEL SİLİNDİRİK KABUKLAR	4
2.1 Tanımlar ve Kabuller	4
2.2 Uzama Oranı Yer Değiştirme İlişkileri	6
2.3 Denge Denklemleri	13
2.4 Bünye Denklemleri	14
2.5 Gerilmeler ile Kuvvet ve Momentler Arasındaki Bağlılıklar	16
2.6 Hareket Denklemleri	17
2.7 Sınır Koşulları	22
BÖLÜM 3 AERODİNAMİK TEORİ : PİSTON TEORİSİ	28
3.1 Aeroelastisite	28
3.2 Akışkanlar Mekaniğinin Temel Kavramları ve Temel Denklemleri	28
3.2.1 Navier-Stokes Denklemleri	32
3.2.2 Enerjinin Korunumu Denklemi	33
3.2.3 Süreklilik Denklemi	34
3.2.4 Hal Denklemi ve İç Enerji Denklemi	34
3.3 Aerodinamik Yük İfadesinin Elde Edilmesi	35
3.3.1 Hız Potansiyeli Denklemi	36
3.3.2 Lineerleştirilmiş Hız Potansiyeli Denklemi	44
3.3.3 Lineerleştirilmiş Hız Potansiyeli Denkleminin Çözümü	49
3.3.4 Basınç Katsayısı ve Hava Yükü İfadesinin Elde Edilmesi	52
BÖLÜM 4 ÇÖZÜM YÖNTEMİ	58
4.1 Ritz Metodu	58
4.2 Sonlu Elemanlar metodu	61
4.2.1 Şekil (Yaklaşım) Fonksiyonlarının Tayini	63

4.3	Kinetik Enerji, Potansiyel Enerji ve Aerodinamik Yük	67
4.4	Sonlu Elemanlar Formülasyonunun Elde Edilmesi	69
BÖLÜM 5	UYGULAMA	76
5.1	Ritz Metoduyla Bir Ucu Ankastre Plakların Flater Sınırının Belirlenmesi	76
5.2	Sonlu Elemanlar Çözümü	78
BÖLÜM 6	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR		89
EKLER		91
ÖZGEÇMİŞ		103



SEMBOL LİSTESİ

$A_{n,m}^e$	: Eleman aerodinamik yük matrisi
a	: Kabuğun düz kenarına ait uzunluk, ses hızı
a_0	: Durma noktasındaki ses hızı
a_∞	: Sonsuzdaki ses hızı
b	: Kabuğun eğrilikli kenarının uzunluğu
C	: Uzama rijitliği
C_p	: Sabit basınçta özgül ısınma ısısı
C_v	: Sabit hacimde özgül ısınma ısısı
c	: Sabit
$c_1, \dots, c_{12}$	: Yaklaşım fonksiyonu katsayıları
$C_1, \dots, C_n$	: Katsayılar
D	: Eğilme rijitliği
$\bar{D}'$	: Akışkan için birim şekil değiştirme vektörü
$d\bar{s}$	: Akım çizgisi üzerinde alınan diferansiyel yol
E	: Elastisite modülü
e	: İç enerji
G	: Kayma modülü
h	: Kabuk kalınlığı, entalpi
h_1, h_2	: Farklı noktalardaki entalpi
$K_{n,m}^e$	: Eleman katılık matrisi
k	: Isı iletim katsayısı
L	: Lagranjien
L_e	: Elemana ait Lagranjien
M	: Mach sayısı
M_∞	: Sonsuzdaki Mach sayısı
$M_{n,m}^e$	: Eleman kütle matrisi
m_y, m_x	: Birim boya etkiyen eğilme momentleri
m_{xy}, m_{yx}	: Birim boya etkiyen burulma momentleri
n_y, n_x	: Birim boya etkiyen normal kuvvetler
n_{xy}, n_{yx}	: Birim boya etkiyen kesme kuvvetleri
p	: Basınç
p_z	: Aerodinamik yük
p_∞	: Sonsuzdaki basınç
p_1, p_2	: Farklı iki noktadaki basınçlar
R	: Kabuğun yarıçapı, gaz sabiti
T	: Kinetik enerji, sıcaklık
T_e	: Elemana ait kinetik enerji
T_∞	: Sonsuzdaki sıcaklık

u	: Orta yüzeyin x yönündeki yer değiştirmesi
u_z	: Kalınlık üzerindeki bir noktanın x yönündeki yer değiştirmesi
u'	: Akışkan partikülünün x yönündeki hızı
$\hat{u}'$	: Akışkan partikülünün x yönündeki pertürbasyon hızı
V	: Serbest akım hızı
V_1, V_2	: Farklı iki noktadaki hızlar
$\vec{V}$	: Hız vektörü
v	: Orta yüzeyin y yönündeki yer değiştirmesi
v_z	: Kalınlık üzerindeki bir noktanın y yönündeki yer değiştirmesi
v'	: Akışkanın y yönündeki hızı
$\hat{v}'$	: Akışkan partikülünün y yönündeki pertürbasyon hızı
Q	: Kabuğa etkiyen aerodinamik kuvvet
Q_n^e	: Eleman üzerinde virtüel iş yapan genelleştirilmiş kuvvet
$q_1, \dots, q_{20}$	: Düğüm noktası yer değiştirmeleri
$q_1, \dots, q_m$	: Genelleştirilmiş koordinatlar
$\bar{q}_y, \bar{q}_x$	: Sınırdaki eşdeğer kesme kuvvetleri
$\bar{q}', \bar{q}'_1$	: Yakın iki noktadaki akışkan hızları
X_x, X_y, X_z	: Kütle kuvvetleri
w	: Orta düzlemin z yönündeki yer değiştirmesi
w_z	: Kalınlık üzerindeki bir noktanın z yönündeki yer değiştirmesi
w'	: Akışkanın z yönündeki hızı
β	: Aerodinamik basınç parametresi
$\Delta P_{alt}, \Delta P_{üst}$	: Bir yüzeyde oluşan net basınç farkı
ΔP	: Net basınç farkı
$\delta \bar{W}$	: Virtüel iş
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	: Uzama oranları
$\varepsilon^0_{xx}, \varepsilon^0_{yy}, \varepsilon^0_{xy}$	: Orta düzleme uzama ve kayma oranları
$\varepsilon^{0y}_{yy}, \varepsilon^{0z}_{yy}$	: Orta düzleme ait y yönündeki uzama oranı bileşenleri
$\psi(x, y)$	: w 'ye ait yaklaşım fonksiyonları
$\phi_m(x, y)$	: v 'ye ait yaklaşım fonksiyonları
$\hat{\phi}$	: Pertürbasyon hız potansiyeli
ϕ'	: Hız potansiyeli
Φ	: Dissipasyon fonksiyonu
$\varphi_m(x, y)$	: u 'ya ait yaklaşım fonksiyonları
γ	: İdeal gaz sabiti
κ	: Boyutsuz özdeğer
Γ	: Gerilme fonksiyonu
λ	: Boyutsuz dinamik basınç
μ	: Dinamik vizkosite
∇	: Nabla operatörü
ρ	: Katı cisme ait yoğunluk
ρ_0	: Akışkana ait yoğunluk
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	: Normal gerilmeler

$\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$	: Kayma gerilmeleri
ω	: Özdeğer
ω_i	: Özdeğerin sanal bileşeni
ω_R	: Özdeğerin reel bileşeni
θ	: Hücum açısı



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1	Bir genel kabuk ve eksen takımı	5
Şekil 2.1	Dairesel silindirik kabuk	6
Şekil 2.2	Orta yüzeyin x yönündeki şekil değiştirmesi	7
Şekil 2.3	Orta yüzeyin y yönündeki şekil değiştirmesi	8
Şekil 2.4	x yönündeki yer değiştirmelerin geometrisi	10
Şekil 2.5	y yönündeki yer değiştirmelerin geometrisi	11
Şekil 2.6	Basık silindirik kabuk ve genel silindirik kabuk örnekleri	12
Şekil 2.7	Diferansiyel kabuk elemana etkiyen kuvvetler	13
Şekil 2.8	Pozitif gerilmeler	16
Şekil 2.9	Burulma momentinin kuvvet çiftine dönüştürülmesi	24
Şekil 2.10	Burulma momentinin eşdeğer kesme kuvvetine dönüştürülmesi	24
Şekil 3.1	Bir akışkan partikülünün hareketleri	29
Şekil 3.2	Bir akışkan partikülünün dt zamanında yaptığı hareket	29
Şekil 3.3	Kabuğa gelen hava akımının yönü	35
Şekil 3.4	Akıma maruz bir katı cisim üzerinde oluşan akım hızı bileşenleri	36
Şekil 3.5	Akışkana ait koordinat eksen, üniform akım hızı ve pertürbasyon hızları	44
Şekil 3.5	Akıma maruz bir yüzey üzerindeki bir noktanın hücum açısı	51

Şekil 4.1	Silindirik kabuk eleman ve düğüm noktası yer değiştirmeleri	63
Şekil 5.1	Bir ucu ankastre mesnetli plak	76
Şekil 5.2	Tüm kenarları basit mesnetli ve bir yüzü akıma maruz bir kare plağın flater davranışı	78
Şekil 5.3	Bir ucu ankastre mesnetli ve bir yüzü akıma maruz bir kare plağın flater davranışı	80
Şekil 5.4	Bir ucu ankastre mesnetli ve iki yüzü akıma maruz bir kare plağın flater davranışı	81
Şekil 5.5	Düşük açıklık oranlı bir plağın flater davranışı	82
Şekil 5.6	Yüksek açıklık oranlı bir plağın flater davranışı	83
Şekil 5.7	Tüm kenarlarından ankastre mesnetli basık dairesel silindirik kabuk için flater karakteri	84
Şekil 5.8	Tüm kenarlarından basit mesnetli basık dairesel silindirik kabuk için flater karakteri	85

ÖZET

Bu çalışmada hava akımına maruz ve çeşitli sınır şartlarına sahip plak ve basık dairesel silindirik kabukların aeroelastik davranışı incelenmiş ve flater sınırları belirlenmeye çalışılmıştır. Basık kabuk denklemleri homojen malzeme, küçük yer değiştirmeler için, Donnel-Mushtari ince kabuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Plaklar kabukların bir özel hali olduğundan yarıçap çok büyük alınarak plak çözümlerine gidilmiştir. Aerodinamik kuvvet ise dinamik basınç ve kabuk üzerindeki noktaların dönmeleri cinsinden lineerleştirilmiş sesüstü akım teorisiyle ifade edilmiştir. Bu teoride sınır tabakanın hemen üzerindeki vizkoz olmayan bölge ele alınmakta, hava ideal gaz olarak kabul edilmekte ve sistemin izantropik olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca kabuk yüzeyini şekil değişimlerinin küçük olduğu varsayılmaktadır.

Çözüm aşamasında sonlu elemanlar metodu ve Ritz metodu seçilmiştir. Sonlu elemanlar çözümünde eleman olarak dört düğüm noktalı ve her düğümde beş serbestlik derecesi bulunan, toplam yirmi serbestlik dereceli bir silindirik kabuk eleman seçilmiştir. Bu elemana ait kütle, katılık ve aerodinamik matrisler için bir sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilmiş daha sonra çeşitli sınır şartlarını inceleyen bir bilgisayar programı Fortran dilinde yazılmıştır. Ritz metodu ile yapılan çözümde ise bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş bir silindirik kabuk için yaklaşım fonksiyonları uygun polinomlar olarak alınmış, daha sonra çözüme gidilmiştir. Ritz metodu içinde bir bilgisayar programı Matlab dilinde yapılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyduğu gözlenmiştir.

AEROELASTIC ANALYSIS OF SHALLOW CYLINDRICAL SHELLS

SUMMARY

Aeroelasticity is a science that deals with interaction between the aerodynamic, inertia and elastic forces which appear on a solid body which is exposed to air flow. This interaction can cause an unstable motion on the structure. Flutter is one of these unstable motions. This study is to try to determine the flutter boundary of plates and shallow cylindrical shells which have various boundary conditions. For a given two dimensional control or lifting surface, the flutter mechanism happens as follows: the elastic body deforms due to outer effects, deformation of the body changes the angle of attack. The aerodynamic forces and moments which depend on angle of attack shift also. The changing of aerodynamic forces and moments change the angle of attack again. This cycle continues until the aerodynamic forces and moments become less than bending and torsion stiffness of the body. After this point, the motion turns back. On a certain critical dynamic pressure, the aerodynamic forces which depend on angle of attack become greater than elastic forces which depend on angle of attack. This point is flutter boundary. At the flutter boundary, if the dynamic pressure goes on to increase, the motion of structure becomes unstable. A harmonic motion happens and it's amplitude gets greater and greater. This phenomena causes the structure failure.

On the derivation of the equations of motion, the theory used is linear. The air flow is parallel to the straight edge of the surface i.e. x axis of plates and shells as shown following.

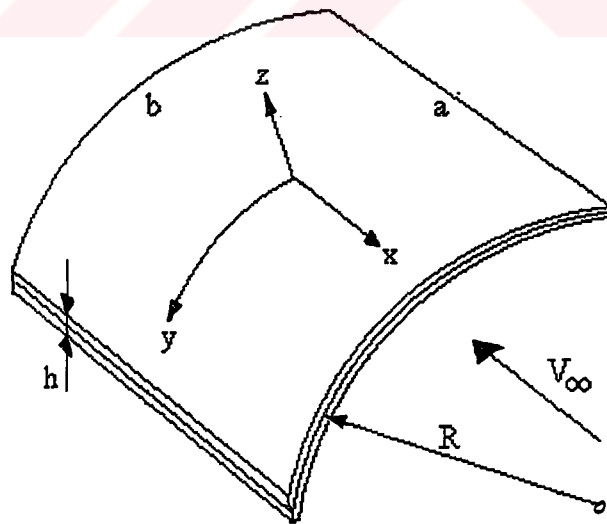


Figure-1 Air flow direction versus to shell

To obtain the differential equation of the shell, an aerodynamic force has been considered which is normal to the shell surface. Aerodynamic drag has been omitted. This lifting force that is normal to the shell surface has been accounted for by using

piston theory. In this theory it is assumed that the flow is inviscid, the considered region is just above the boundary layer, the deformation of the points on the solid surface, in other words the angle of attack of the points due to aerodynamic forces is small, air is assumed as ideal gas, the system is isentropic, the body forces can be neglected, the flow is steady state. For the supersonic flow the piston theory is obtained by the solution of a linear partial differential equation. This differential equation is a combination of Navier-Stokes equations, continuity equation, energy equation, ideal gas relationship and state equation. The combining of these equations is arrived at by defining a potential function for flow velocities. The Resulting differential equation is nonlinear. To get a linear differential equation, the small perturbation theory is used under the acceptance of small deflection of the body. This linear differential equation is called linearized supersonic potential flow theory equation. The solution of this equation is substituted at the pressure coefficient formula. At the supersonic flows the aerodynamic pressure is obtained as:

$$p_z = \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

In the above equation, if only one surface is exposed to air flow; $n=1$ and if both upper and lower surface are exposed to air flow; $n=2$.

The valid assumptions during the derivation of equation of motion owing to shallow cylindrical shell are: the thickness is small compared to the shell's edge length (approximately $h/L < 1/10$), displacements and deformations are small enough, the normal stress can be neglected among other stress, Bernoulli-Navier hypothesis is valid, structural damping is omitted.

The shallow cylindrical shell assumption for a cylindrical shell depends on the ratio of b/R as shown following.

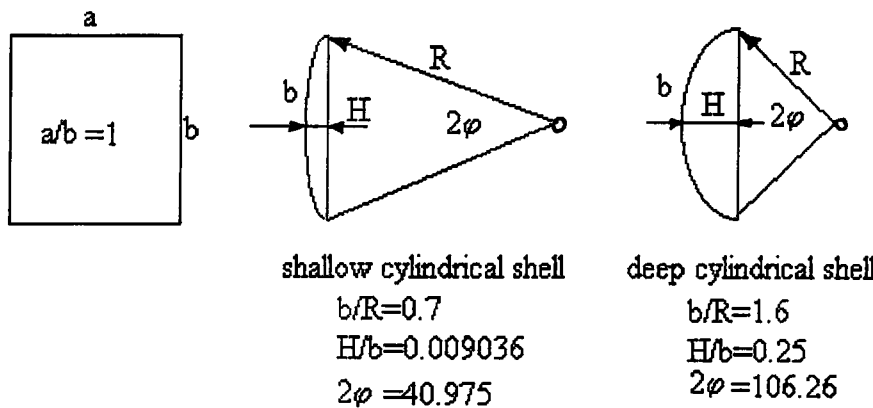


Figure-2 Comparison of shallow shell and deep shell

The differential equation of the cylindrical shallow shell which is exposed to air flow has been obtained by using Newton's second law, stress-strain relationship, geometric

properties come from Bernoulli-Navier hypothesis, the shallow shell approximation ($R + z \cong R$) and piston theory for the aerodynamic force. The result equation is

$$D \nabla^8 w + \frac{E \cdot h}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho h \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (2)$$

Here

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}$$

and

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

are the defined statements.

In the above equation; w denotes the middle surface displacement in z direction.

Analytical solution of this differential equation cannot be found unless convenient boundary conditions exist. For this reason in this study numerical methods have been preferred for the solution. Selected numerical solutions are the Ritz method and finite element method.

In the Ritz method, an approximate solution is obtained for the varitional statement from which the differential equation has been derived instead of the given differential equation. Thus there needs to be a varitional statement for the differential equation. But in solid mechanics there is always a variational statement for the equation of motion. It is the Hamilton principle which is given as

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta W] dt = 0 \quad (3)$$

where T is the kinetic energy, V is the potential energy, δW is the virtual work that the outer force does. For the shallow shells the kinetic energy can be found as

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_A (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy \quad (4)$$

The potential energy is

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ C \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{w}{R} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \right. \\ \left. + D \left[\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] \right\} dx dy \quad (5)$$

And the aerodynamic force can be found by integrating the pressure which was formulated before by the piston theory over surface area:

$$Q = \iint_A p_z dx dy = \iint_A \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (6)$$

The virtual work which the aerodynamic force does is

$$\delta W = Q \delta w = \iint_A \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dx dy \quad (7)$$

In Ritz method, calculations have been made on a cantilevered plate. The approximate function is selected to satisfy the essential boundary conditions and it is assumed that the dependent variables has the form of

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \psi_m(x, y) \cdot q_m(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Here ϕ_m , ϕ_m and ψ_m are the approximate functions which satisfy the essential boundary conditions. For cantilevered plates following function family supplyies the essential boundary conditions.

$$\phi(x, y) = \left(\frac{y}{b}\right)^P \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^R \quad P=1,2,\dots,P \ ; \ R=0,1,\dots,R$$

$$\phi(x, y) = \left(\frac{y}{b}\right)^S \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^T \quad S=1,2,\dots,S \ ; \ T=0,1,\dots,T$$

$$\psi(x, y) = \left(\frac{y}{b}\right)^M \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^N \quad M=2,3,\dots,M \ ; \ N=0,1,\dots,N$$

Hence the aerodynamic virtual work could be obtained by substituting defined approximate function into (7):

$$\delta W = \iint_A \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\sum_{m=1}^M \frac{\partial \psi_m}{\partial x} q_m \right) \psi_n(x, y) dx dy \quad (9)$$

In flutter analysis for the time dependent variable q_m , the following equation is assumed:

$$q_m = e^{i\omega t} \bar{q}_m \quad (10)$$

Here ω has two components, i.e:

$$\omega = \omega_R + i\omega_i \quad (11)$$

In the above expression ω_R denotes the real root which means stable motion and ω_i denotes the imaginer root which means unstable motion . Thus, if there is any imaginer root in the solution , it means that the system is unstable i.e in the flutter.

If (8) and (9) expressions are substituted into (3) finally this is obtained:

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ \sum_{m=1}^{20} \left(q_m [\rho h \omega^2 (\phi_m \phi_n + \phi_m \phi_n + \psi_m \psi_n)] + C \left[\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} + \frac{\psi_n}{R} \right) - \right. \right. \right. \\ & (1-\nu) \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\psi_n}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right) \right] \right. \\ & + D \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \right] \right] + \frac{2nq_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \psi_n \left. \right\} dx dy = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

In the above equation n, m denotes row and column of the eigenvalue matrice respectively

For finite elements formulation Hamilton principle can be written as so:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta W] dt = \sum_{e=1}^E \left(\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_e - V_e) + \delta W_e] dt \right) = 0 \quad (11)$$

So elements matrice can be obtained by using

$$L_e = \int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_e - V_e) + \delta W_e] dt \quad (12)$$

It can be easily seen , the equation (12) is the same with the equation (3), but the right hand side of the equation is not zero this time. Thus (10) formulation can be used for the finite element formulation. The selected element for the finite element solution has four nodes at four corners, each has five degrees of freedom so totally twenty degrees of freedom as shown below.

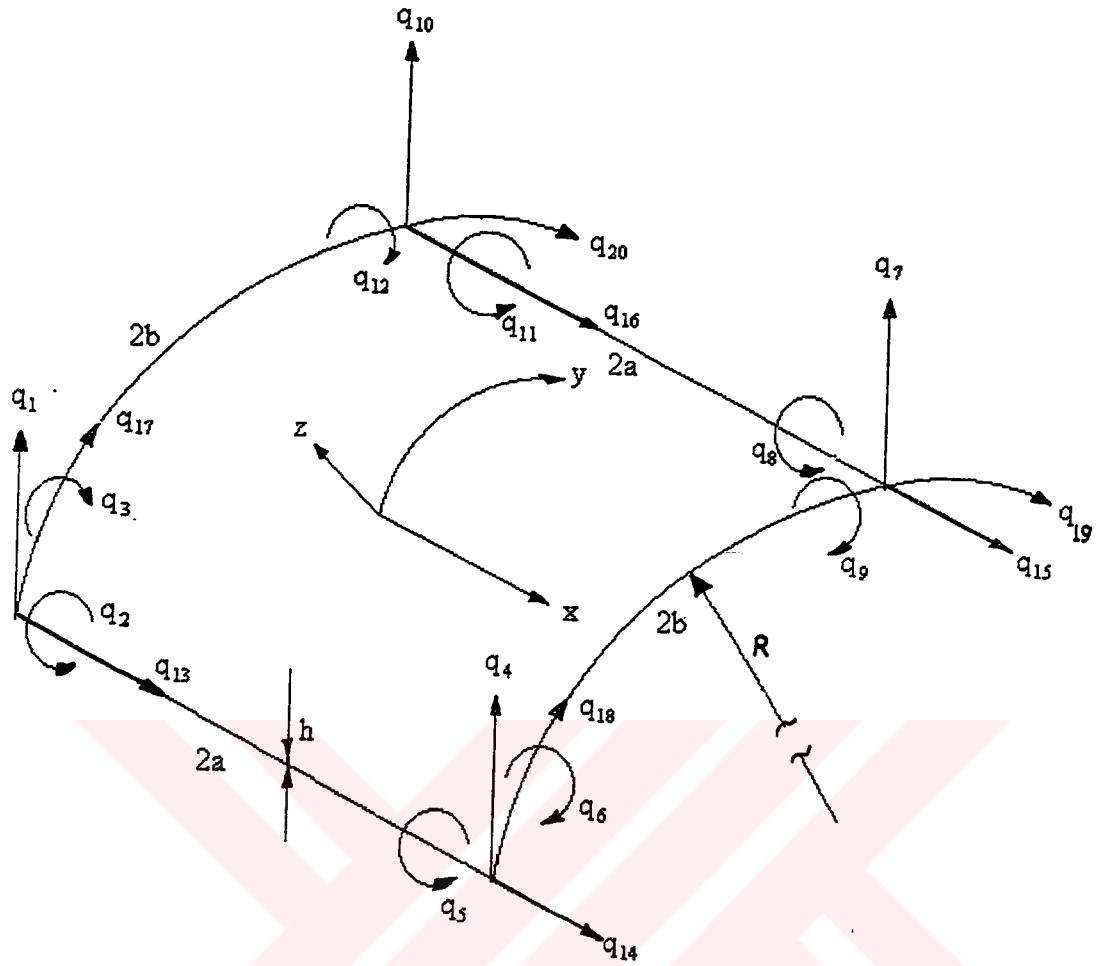


Figure-3 The shell element and it's degrees of freedom

The shape function has been obtained from polynomials by utilising compatibility and displacement conditions on nodes. The calculated shape functions are:

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{8} b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2$$

$$\psi_3(x, y) = -\frac{1}{8} a \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(2 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\psi_5(x, y) = \frac{1}{8} b \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\psi_6(x, y) &= \frac{1}{8}a(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{x}{a})^2 \\
\psi_7(x, y) &= \frac{1}{8}(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(2 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) \\
\psi_8(x, y) &= -\frac{1}{8}b(1 + \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b})^2 \\
\psi_9(x, y) &= \frac{1}{8}a(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(1 + \frac{x}{a})^2 \\
\psi_{10}(x, y) &= \frac{1}{8}(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(2 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) \\
\psi_{11}(x, y) &= -\frac{1}{8}b(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b})^2 \\
\psi_{12}(x, y) &= -\frac{1}{8}a(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{x}{a})^2 \\
\phi_{13}(x, y) = \phi_{17}(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \\
\phi_{14}(x, y) = \phi_{18}(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \\
\phi_{15}(x, y) = \phi_{19}(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b}) \\
\phi_{16}(x, y) = \phi_{20}(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})
\end{aligned} \tag{13}$$

For the following approximate functions , the shape functions which are defined above is valid. Thus:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m=13}^{16} \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \quad , \quad v(x, y, t) = \sum_{m=17}^{20} \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \\
w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{12} \psi_m(x, y) \cdot q_m(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

For the finite element solution, the element matrices (mass, stiffness and aerodynamic matrices) have been calculated by a soft ware called as DERIVE. Then an finite element program has been written by FORTRAN language which can consider various boundary conditions for shallow cylindrical shells.

For the Ritz method a computer program has been written in MATLAB which consider flutter analysis of cantilevered plates.

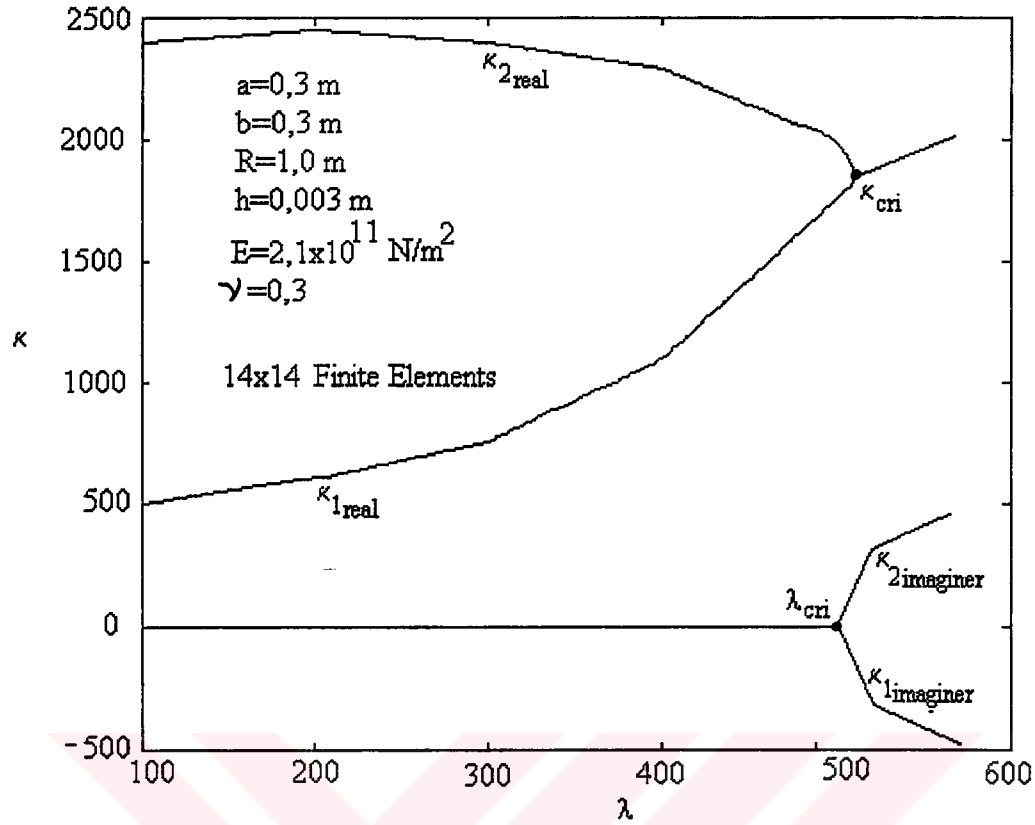


Figure 4 The flutter character of simply supported cylindrical shell

Here:

$$\lambda = \frac{a^3}{D} \frac{2q_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad \kappa = \omega^2 \frac{\rho h a^4}{D} \quad (15)$$

In this study, the results obtained by finite elements and Ritz method are very close to each other and to literature.

The Figure 4 is the typical flutter behaviour of a lifting or control surface. As shown above figures two roots try to come near and flutter happens when two mode coalescence. This phenomena can be explained as the aerodynamic forces which depend on angle of attack increase more than elastic forces which depend on angle of attack. Beyond the flutter boundary, the aerodynamic forces are greater than the elastic forces which cause a stable harmonic motion. If the dynamic pressure goes on to increase, the motion of structure becomes unstable. A harmonic motion happens and it's amplitude gets greater and greater. This phenomena causes the structure failure.

BÖLÜM 1 GİRİŞ

Aeroelastisite hava akımına maruz bir katı cisimdeki aerodinamik, elastik ve atalet kuvvetlerinin etkileşimlerini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu karşılıklı etkileşimler kimi zaman kararsız bir davranışa neden olur. Bu kararsız davranışlardan biri de bu çalışmanın konusunu oluşturan **flater**dir (flutter). Flater aerodinamik kuvvetlerdeki hücum açısına bağlı artışın, elastik kuvvetlerdeki hücum açısına bağlı artıştan büyük olmasına neden olacak bir kritik dinamik basınç nedeniyle meydana gelir. Bu kritik dinamik basınçta aerodinamik kuvvetler elastik kuvvetlerden daha büyük bir değer alır ve sistem ıraksak bir davranışa girer. Bu olay sistemin kırılmasına veya bir süre sonra yorularak kopmasına neden olur. Aeroelastik bir olayda cisme etkiyen kuvvetler akım yönüne, cismin geometrisine, cismin akım yönüne nazaran, konumuna ve cismin yaptığı şekil değiştirmelere çok fazla bağlı olabilirler. Bunun tersi de doğrudur. Yani cismin yer veya şekil değiştirmesi veya akım yönüne nazaran konumu da etkiyen kuvvete bağlıdır. Bu karşılıklı etkileşim kimi zaman stabil olmayan bir davranışa neden olur. Tahmin edilebileceği gibi stabil olmayan bu durum hava akımının şiddetine (daha açık bir ifadeyle dinamik basınca) ve elastik cisme ait özelliklere (Elastisite modülü, cismin boyutları, poisson oranı) bağlıdır. Flater analizi yapılacak yapı bir kaldırma veya kontrol yüzeyi ise ki bu durumda yapı iki boyutludur, dikkate alınacak kuvvetler daha çok yüzeye dik yönde olanlardır. Çünkü cisimde en çok şekil değişimine neden olacak ve cismin şekil değişimi nedeniyle değeri en çok değişecek yegane kuvvetler yüzeye dik yönde olanlardır. İki boyutlu bir taşıma veya kontrol yüzeyinde flater mekanizması şöyle gelişir: Bir dış etki nedeniyle elastik cisim şekil değiştirir, değişen bu şekil nedeniyle hücum açısında oluşan değişim cisme etkiyen kuvvet ve momentleri de değiştirir. Değişen kuvvet ve momentler cisimde tekrar bir şekil değişimine, yani hücum açısının değişimine neden olur. Bu döngü hava yükü nedeniyle oluşan aerodinamik kuvvet ve momentlerin cismin eğilme ve burulma rijitliklerinden küçük bir değer almasına kadar devam eder. Bu noktadan sonra hareket ters yönde devam eder. Belli kritik bir dinamik basınca kadar bu olay sabit genlikli bir harmonik hareket

şeklinde devam eder. Ancak kritik dinamik basınca ulaşıldığında aerodinamik kuvvetler elastik kuvvetlerden daha büyük olmaya başlamıştır, bu noktadan sonra sistem artan genlikli bir harmonik harekete başlar. Bu ise yapının bir süre sonra kırılmasına neden olur. Bu çalışmada çeşitli sınır şartları ve geometrilere sahip kabuk ve plakların flater sınırları belirlenmeye çalışılmıştır.

Flater analizleri, özellikle yüksek hızda uçan uçak, helikopter, roket gibi hava-uzay araçlarının tasarımında ve türbin palleri gibi akışkan yüküne maruz katı cisimlerin dizaynında önemli bir yer tutar. Ses duvarının aşılmasıyla birlikte flater sınırı önemli bir dizayn parametrisi olmuştur.

Plak ve kabukların flater analizi ile ilgili çeşitli çalışmalarda en çok kullanılan aerodinamik teori Piston Teorisidir. Bu teori ilk kez 1956 yılında *Ashley* ve *Zartarian* [1], tarafından önerilmiştir. *Dowell* ve *Voss* [2], panel flater sınırını piston teorisini kullanarak teorik ve deneysel olarak incelemişlerdir. *Bisplinghoff* ve *Ashley* [3] aeroelastisite hakkında geniş bir çalışma yapmışlardır. Yine *Dowell* [4], plak ve kabukların aeroelastik analizinin geniş bir incelemesini yapmıştır. *Han* ve *Yang* [5], sonlu elemanlar metoduyla basit mesnetli ve ankastre mesnetli plakların nonlinear aeroelastik davranışını incelemiştir. Yine *Voss* [6], silindirik kabukların flater analizine basık kabuk ve piston teorisi aerodinamiği ile yaklaşmıştır. Yine *Dowell* [7] panel flateri konusunda yapılan çalışmaları özetlemiştir. *Voss* ve *Dowell* [8], aerodinamik sönümün ince panellerin aeroelastik davranışına etkisini incelemiştir. *Bismarc-Nasr* [9], plak ve kabukların aeroelastik analizi hakkında yapılan çalışmaları derlemişlerdir.

Bu çalışmada çeşitli sınır şartlarına sahip iki boyutlu taşıyıcı veya kontrol yüzeylerinin flater sınırı elde edilmeye çalışılmıştır. Geometri ve malzeme gibi flater sınırında önemli yeri olan büyüklükler bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş plaklar için incelenmiştir.

TÜBİTAK-SAGE (Savunma Araştırma-Geliştirme) tez destek programına alınmış olan bu çalışma, SAGE tarafından üretilen roketlerin, kontrol yüzeylerinin flater sınırı hakkında bir bilgi birikiminin oluşmasını hedeflemektedir. Plak ve dairesel silindirik kabuk geometrisine sahip bu kontrol yüzeyleri için Donnel-Mushtari ince kabuk teorisi kullanılmıştır. Malzemenin homojen ve izotrop olduğu kabul edilmiş hareket denklemleri Newton'un ikinci kanunu kullanılarak elde edilmiştir. Aerodinamik kuvvet lineerleştirilmiş sesüstü akım teorisi ile elde edilmiştir. Kullanılan teori Mach

sayısının 1,2'den büyük ve (yaklaşık olarak) 5,0 'dan küçük olduğu durumlar için geçerlidir. Üretilen roketlerin hızı bu sınırın üstünde olduğundan bu teori dizayn için yeterli mertebede sonuç verir



BÖLÜM 2 BASIK DAİRESEL SİLİNDİRİK KABUKLAR

2.1 TANIMLAR VE KABULLER

İnce kabuk birbirine yakın olarak konumlandırılmış iki eğri yüzeyin sınırladığı bir cisimdir. İnce kabukların kalınlığı diğer boyutlarına göre bir mertebe daha küçüktür ($h/L < 1/10$), [11]. Bu durum kabuk probleminin iki boyutlu hale indirgenebilmesini sağlar. Bir kabuğun üç temel belirleyici özelliği vardır: Referans yüzeyi, kalınlığı ve sınırları. Bunların arasında en önemli yeri referans yüzeyi tutar. Çünkü referans yüzeyi kabuğun şeklini tanımlar ve kabuğun davranışı referans yüzeyinin davranışı ile ilişkilidir. Eğer kabuk homojen tek bir malzemeden yapılmışsa referans yüzeyi orta yüzeydir.

Üç boyutlu elastisite teorisinde temel denklemler üç geniş kategoride ortaya çıkarlar. Bunlardan birincisi hareket denklemleridir ki ele alınan ortamın sonsuz küçük bir elemanı üzerine etki eden kuvvetlerin dengesinden elde edilir. İkincisi uzama oranı yer değiştirme denklemleridir ki bunlar elastik cismin deformasyonunun geometrik olarak incelenmesinden elde edilir. Üçüncüsü deneysel sonuçlar olan bünye denklemleridir ve uzama oranları ile gerilmeler arasındaki ilişkileri belirtir. Ancak üç boyutlu elastisite denklemlerinin çözümü çok güç olduğundan ele alınan kabuğun çözümü için bazı basitleştirici kabuller yaparak problemi iki boyutlu hale indirmek gerekmektedir. Bu çalışmada elde edilen kabuk denklemleri aşağıdaki kabullere dayandırılmıştır [10]:

- 1-Kabuk katı homojen ve elastik bir yapıya sahiptir. Bu katı cisme ait elastisite modülü ve poisson oranı sabittir.
- 2 Kabuğun kalınlığı diğer boyutları yanında yeterince küçüktür ($h/L < 1/10$).

3-Uzama oranları ve yer değiştirmeler yeterince küçük miktarlardadır. Dolayısıyla uzama oranı yer değiştirme denklemlerinde ikinci ve daha yüksek mertebeden terimler, birinci mertebe terimlerin yanında ihmal edilebilir.

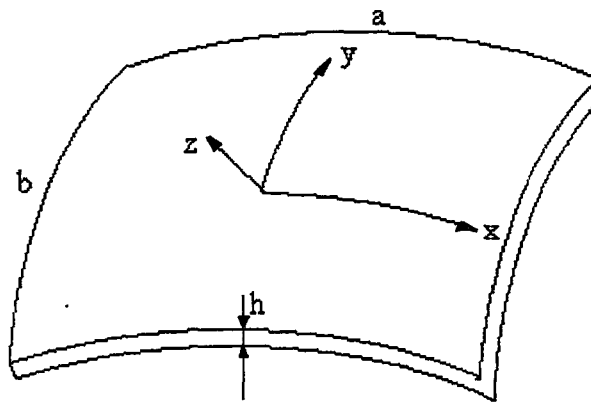
4-Kabuğun referans yüzeyine dik olarak etki eden normal gerilmeler diğer gerilme bileşenleri yanında ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

5-Kabuğun referans yüzeyinin normalleri deformasyon sonrasında da referans yüzeyine normal kalırlar (Bernolli-Navier hipotezi).

6-Tüm yer değiştirmeler kabuk kalınlığına nazaran küçüktür,

7-Yapısal sönüm etkileri ihmal edilmiştir.

Yukarıdaki kabuller arasındaki incelik kabulü diğer tüm kabullerin ve tüm teorinin ilk ve esas basamağını oluşturur. İnceliğin kesin bir tanımı olmamakla birlikte genel bir kural olarak kalınlığı diğer boyutların 1/10'undan küçük olan kabuklar ince sayılır[11]. Kabuğun çökme miktarının küçük olması bütün türevleri ve hesaplamaları kabuğun orjinal (deforme olmamış) şekline göre yapılabilmesini sağlar. Eğer bünye için Hooke kanunu kullanılırsa bunlar teorinin lineer ve elastik olmasını sağlarlar. Dördüncü kabul referans yüzeyinin normali yönündeki gerilmelerin sıfır olması, kalınlığın küçük olması nedeniyle bu yönde oluşacak uzama oranlarının küçük olması dolayısıyla gerilmenin de diğer gerilme bileşenlerine göre küçük olması demektir. Bu kabul aynı zamanda kalınlığın değişmediği anlamına da gelir. Ayrıca Bernolli-Navier hipotezinin geçerli olması aynı zamanda referans yüzeyine dik yöndeki kayma şekil değiştirmelerinin de ihmal edildiği anlamına geldiğinden hareket denkleminin çıkartılması esnasında kullanılmayacak, sıfır alınacak gerilmeler ve uzama oranları şunlardır:

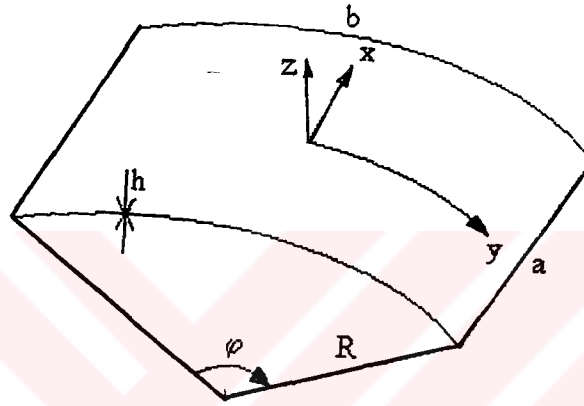


şekil 1.1 Bir genel kabuk ve eksen takımı

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Burada z orta yüzeye normal doğrultuyu göstermektedir. (Şekil 1.1)

2.2 UZAMA ORANI-YER DEĞİŞTİRME İLİŞKİLERİ



Şekil 2.1 Dairesel silindirik kabuk

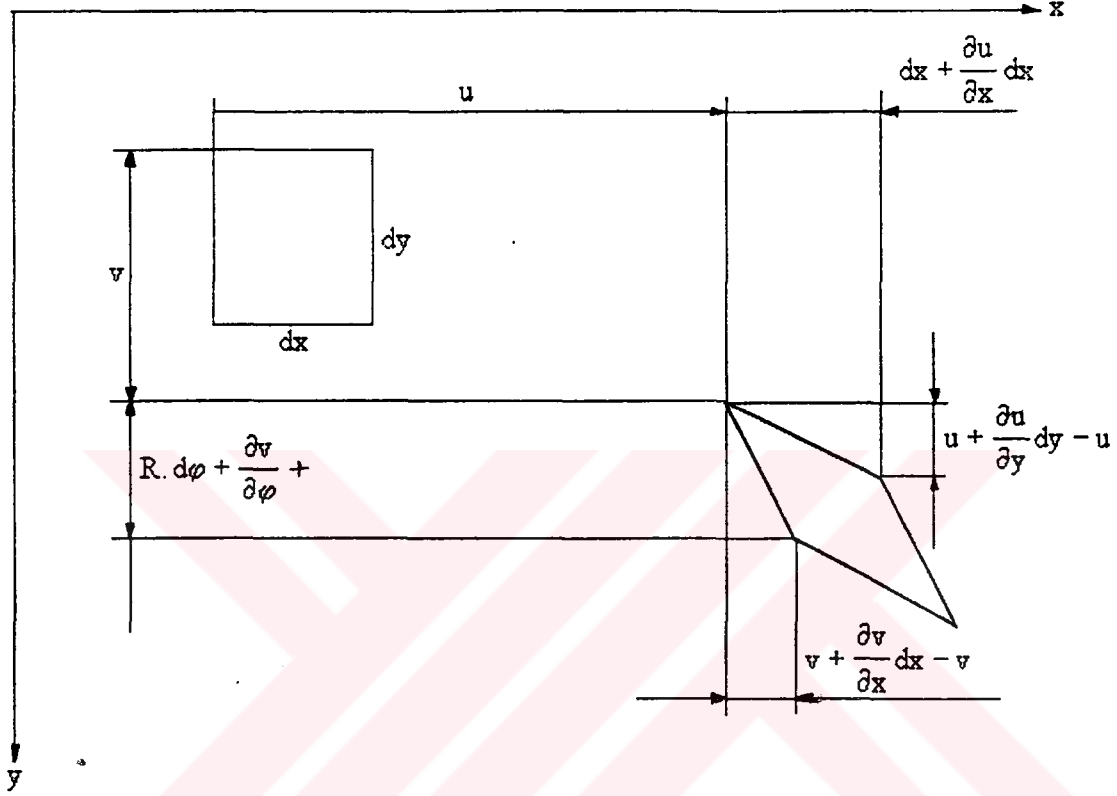
Şekil-2.1 'de ince dairese silindirik bir kabuk, temel boyutları ve koordinat sistemi görülmektedir. Koordinat sistemi orta düzlem üzerindedir. Kalınlık üzerindeki herhangi bir noktanın uzama oranı bileşenlerini bulmak için önce orta düzleme ait uzama oranı bileşenleri elde edilir. Bu bileşenler $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ (sırasıyla orta yüzeyin x yönündeki uzama oranı, y yönündeki uzama oranı ve z yönündeki birim kayma şekil değişimi) olarak gösterilir. Şekil 2.2 'den x yönündeki uzama oranı için

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx}$$

Buradan

$$\epsilon^0_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

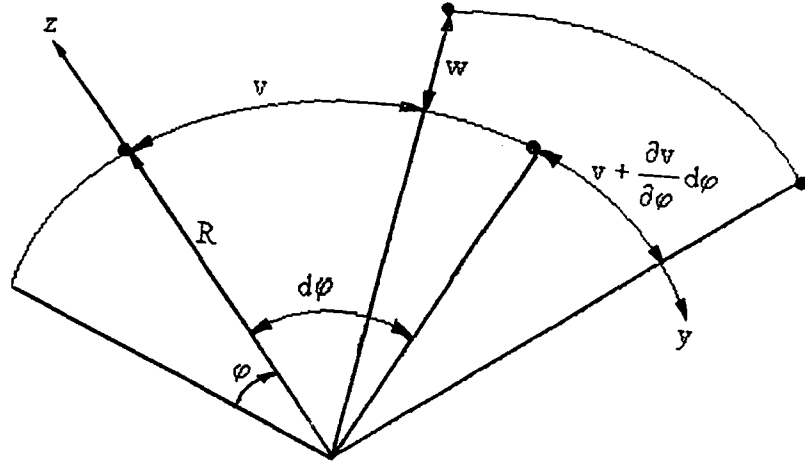
olarak elde edilir.



Şekil 2.2 Orta yüzeyin x yönündeki şekil değiştirmeleri

Y yönündeki uzama oranı ϵ^0_{yy} ise şu şekilde elde edilir: y yönü eğrilik taraf olduğundan bu yönde oluşacak uzama oranı sadece y yönündeki yer değiştirmelere değil z yönündeki yer değiştirmelere de bağlıdır. Matematiksel olarak eğrisel koordinatlardaki baz vektörlerinin türevlerinin var olmasından dolayı oluşan bu fark aşağıda geometrik olarak elde edilmiştir.

Sadece y yönünde olan bir yer değiştirme sonucu oluşan uzama oranına ϵ^{0y}_{yy} ve sadece z yönünde olan bir yer değiştirme sonucu oluşan uzama oranına ise ϵ^{0z}_{yy} olsun. Şimdi sadece y (φ) yönünde bir hareketin olması durumunda ϵ^{0y}_{yy} için Şekil 2.3' den



Şekil 2.3 Orta yüzeyin y yönündeki şekil değiştirmeleri

$$\varepsilon_{yy}^{0y} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi - v}{R \cdot d\phi}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\varepsilon_{yy}^{0y} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

olarak bulunur.

Sadece z yönünde bir hareket olması durumunda deformasyon öncesi $R \cdot d\phi$ olan elamanter uzunluk, deformasyon sonrası $(R + w) \cdot d\phi$ olacağından. ε_{yy}^{0z} için

$$\varepsilon_{yy}^{0z} = \frac{(R + w) \cdot d\phi - R \cdot d\phi}{R \cdot d\phi} = \frac{w}{R}$$

elde edilir. Şimdi ε_{yy}^0 için

$$\varepsilon_{yy}^0 = \varepsilon_{yy}^{0y} + \varepsilon_{yy}^{0z} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{R} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \quad (2.2)$$

olarak bulunur. Kayma birim şekil değıştirme bileşeni ise Şekil-2.2 'den görüldüğü gibi

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

olarak yazılabilir. Kalınlık üzerinde referans yüzeyinden z mesafesinde bulunan bir nokta için bu bağıntılar (u_z, v_z, w_z kalınlık üzerindeki bir noktanın sırasıyla x,y, ve z yönündeki yer değıştirmeleri olmak üzere):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{w_z}{R+z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \text{ 'dır.} \quad (2.4)$$

şeklindedir. w_z ifadesi kalınlığı küçük olması ve deformasyon sonrasında kalınlıkta meydana gelecek değışimin küçük olması kabulü nedeniyle yaklaşık olarak w ' ye eşittir. Dolayısıyla $w=w_z$ alınabilir. Şimdi orta yüzeydeki yer değıştirmelerle, kalınlık üzerindeki herhangi bir noktanın yer değıştirmeleri arasında ilişkiler kurulacaktır. Bu ilişkileri görmek için geometrik bağıntılardan faydalanılacaktır.

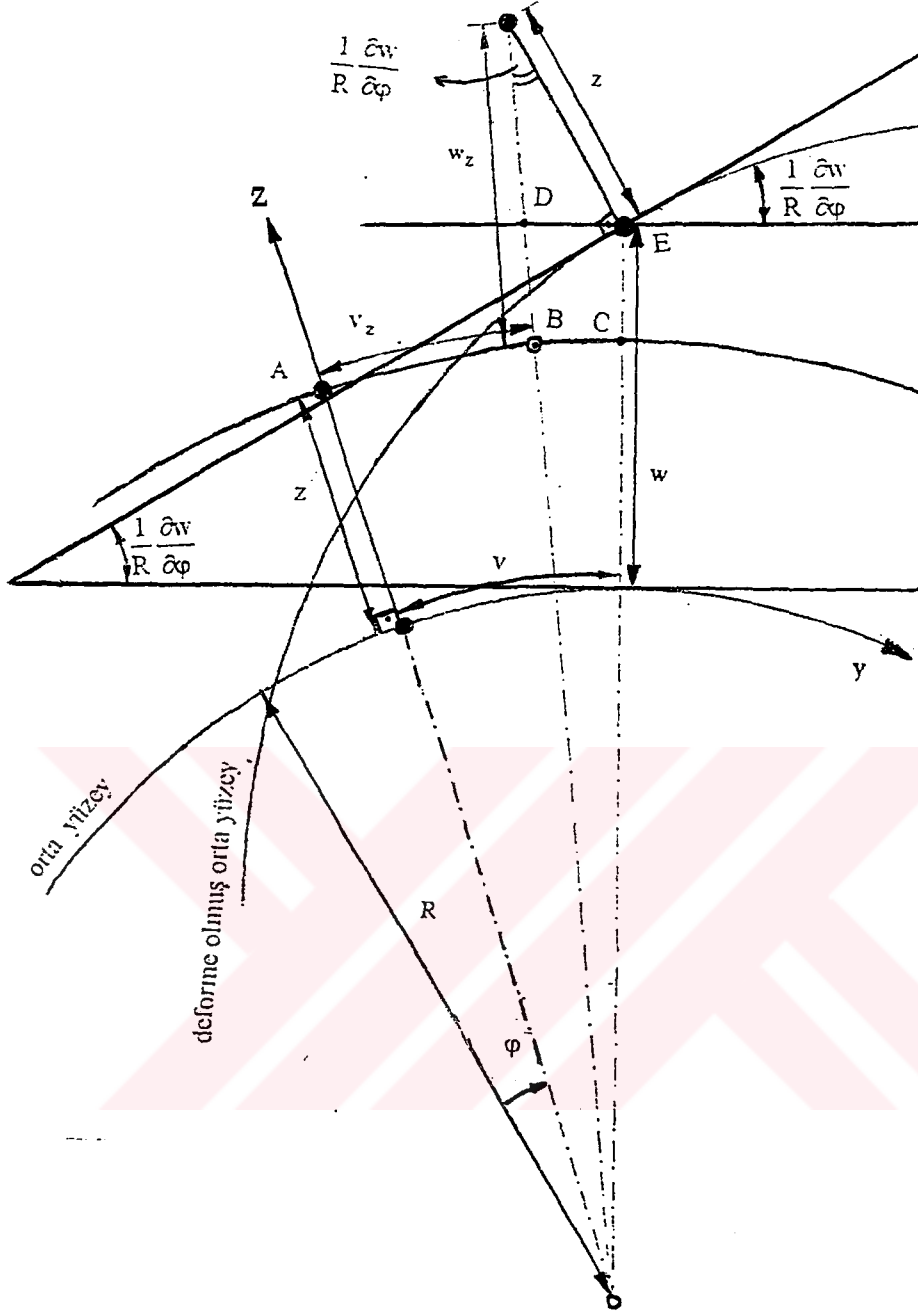
Aşağıdaki şekilde kalınlık üzerindeki herhangi bir noktanın x yönündeki yer değıştirmesiyle orta yüzey üzerinde bulunan bir noktanın yer değıştirmeleri arasındaki geometrik bağıntılar gösterilmiştir. u_z kalınlık üzerindeki bir noktanın x yönündeki yer değıştirmesini göstermek üzere, u_z için Şekil 2.4' den

$$u_z = u - z \cdot \sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Ancak küçük dönmeler söz konusu olduğundan bu ifade

$$u_z = u - z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.5 y yönündeki yer değiştirmelerin geometrik ilişkileri

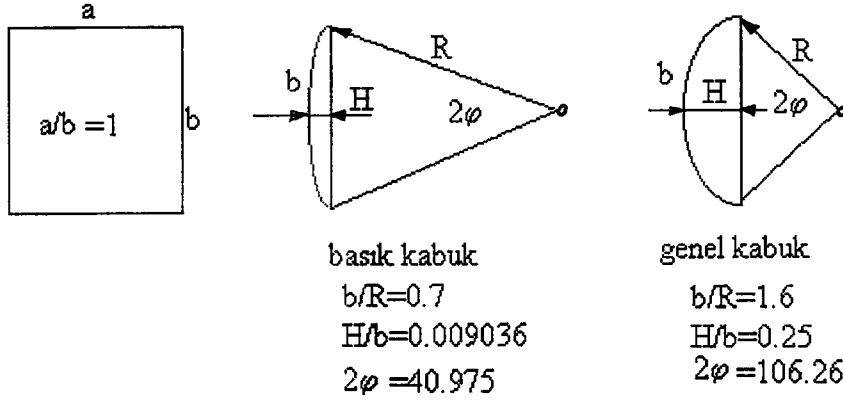
(2.5) ve (2.6) ifadeleri (2.4)'de denklemlerinde yerine koyulursa

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{R+z} \left(\frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \frac{w}{R+z} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + \frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \quad (2.9)$$

şeklinde genel silindirik kabuk için uzama oranı yer değiştirme denklemleri elde edilmiş olur. Basık kabuklarla genel kabuklar arasındaki geçiş yay uzunluğunun kabuk yarıçapına oranına (b/R) bağlıdır. b/R oranının yeterince küçük olduğu bir kabuk **basık kabuk** olarak kabul edilebilir.



Şekil 2.6 Basık silindirik kabuk ve genel silindirik kabuk örnekleri

Kesin bir rakam olmamasına karşın bu oran için $b/R < 0.7$ basık kabuk ve $b/R > 1.6$ ise genel kabuk olarak alınır,[12]. Bu iki değerin arasındaki orana sahip kabuklar (orta derecede) basık kabuklardır. Bu çalışmada basık kabuklar incelendiğinden b/R oranının yeterince küçük olduğu kabulü ile yukarıda elde edilen uzama oranı yer değiştirme bağıntıları daha basit bir şekle dönüştürülebilir. Yani $R+z \cong R$ yaklaşımı ile

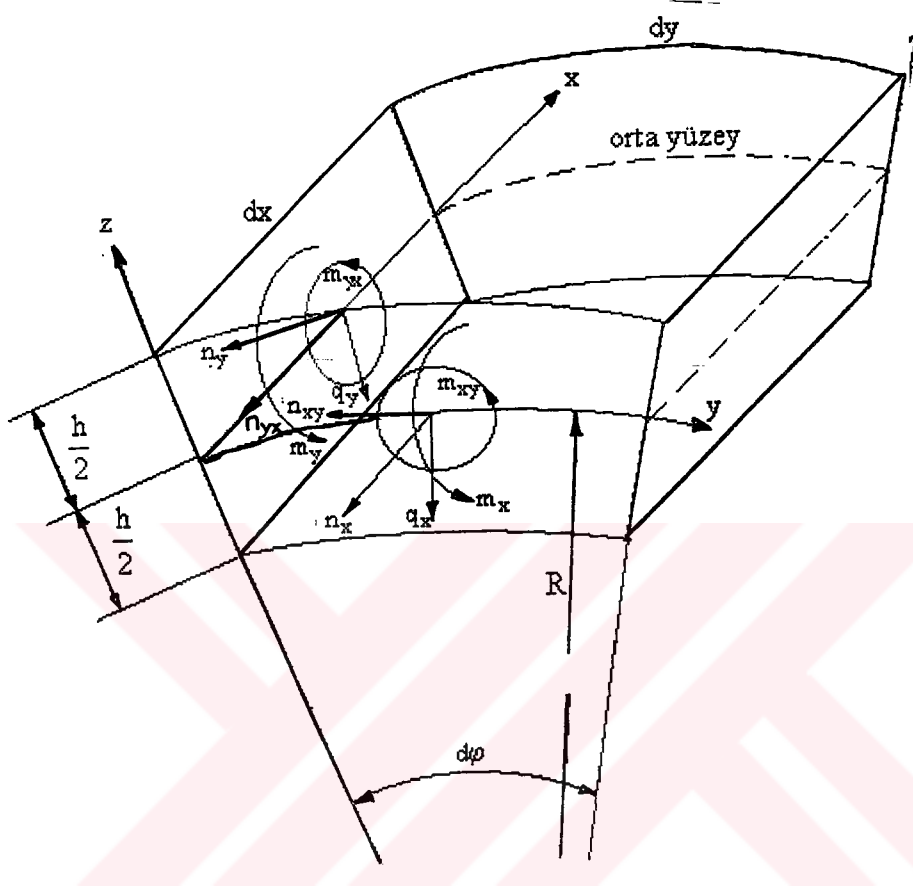
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{R} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \quad (2.12)$$

olarak basık dairesel silindirik kabuğa ait uzama oranı yer değiştirme bağıntıları elde edilmiş olur.

2.3 DENGİ DENKLEMLERİ



Şekil 2.7 Diferansiyel kabuk elemana etkiyen kuvvet ve momentler

Şekil 2.7 den görüldüğü gibi kabukların her kenarında üç adet kuvvet ve iki adet moment vardır. Bu kuvvet ve momentler birim kenara etkimektedirler. Bu uzay kuvvetler sistemine altı adet denge şartı uygulanabilir. Bu şartlar üç adet kuvvetler dengesi ve üç adet momentler dengesidir. Bu denge şartlarının yazılması sonucunda ortaya çıkan denklemler aşağıdaki gibidir.[10]

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + p_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{q_y}{R} + p_y = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{n_y}{R} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} - q_x = 0 \quad (2.17)$$

$$m_{yx} + R(n_{yx} - n_{xy}) = 0 \quad (2.18)$$

Görüldüğü gibi Newton 'un ikinci kanunundan 6 adet denklem elde edildi. Ancak yukarıdaki bilinmeyenler $u, v, w, n_x, n_y, n_{xy}, n_{yx}, q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}$ olmak üzere 13 tanedir. Dolayısıyla problem hiperstatiktir. Fazladan denkleme sokulması gereken bileşenler ise yer değiştirmelerdir.

2.4 BÜNYE DENKLEMLERİ

İzotropik lineer elastik bir malzemenin üç boyutlu haldeki bünye denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Bölüm 1.1 de ifade edilen 4. kabul neticesinde (2.19) denklemleri şu hale indirgenebilir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})$$

Buradan σ_{xx} ve σ_{yy} çözülerek

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir.

τ_{xy} için ise bölüm 1.1 de ifade edilen 5. kabul gereği

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla (2.20) denklemlerinden sadece

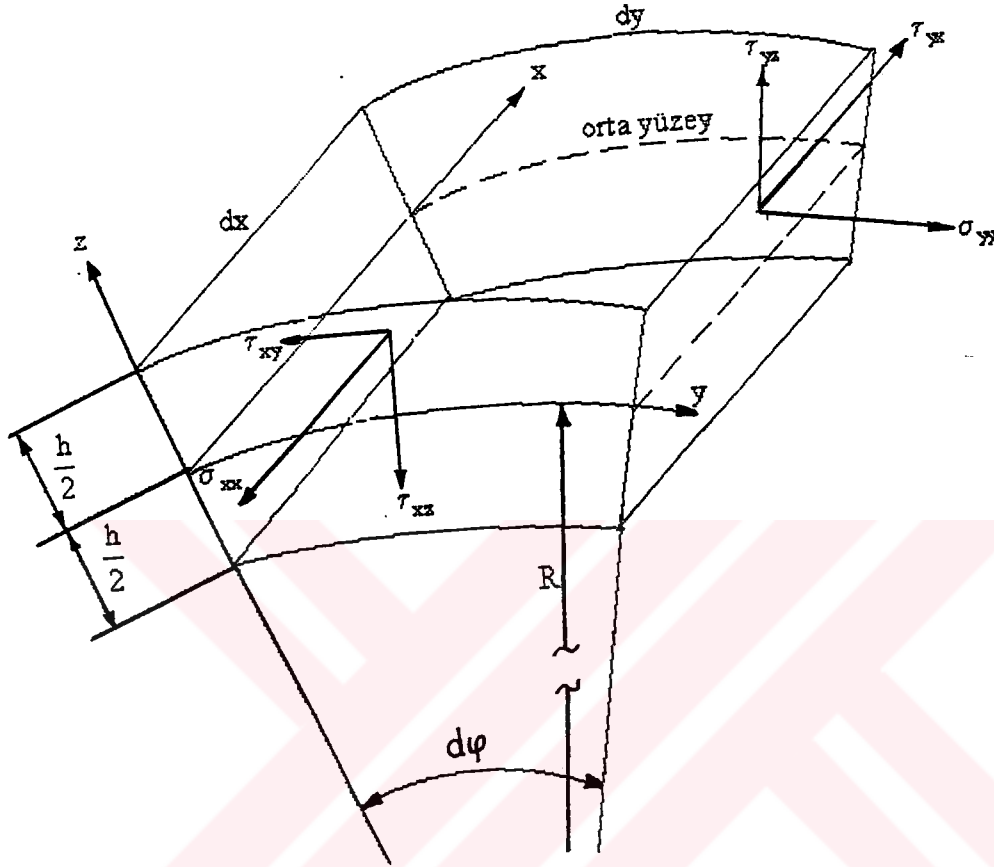
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.22)$$

kalır. Buradan malzeme izotrop, homojen olduğundan kayma modülü G' nin , E ve ν cinsinden değeri yerine koyulursa;

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy} \quad (2.23)$$

elde edilir.

2.5 GERİLMELER İLE KUVVET VE MOMENTLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR



Şekil 2.8 Pozitif gerilmeler

Yukarıdaki şekilde dairesel silindirik bir kabuktan çıkartılmış, birim uzunlukta kenarlara ve h kalınlığına sahip diferansiyel bir elemanın referans yüzeyinden z uzaklıkta etkiyen pozitif gerilmeler gösterilmiştir. Daha önce (2.13)-(2.18) denklemlerini elde ederken kullanılan moment ve kuvvetlerle bu gerilmeler arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir, [10].

$$n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz$$

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$\begin{aligned}
n_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz & n_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz & m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \\
m_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz & m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \\
q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz & q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.6 HAREKET DENKLEMLERİ

Bölüm 2.3 de elde edilen (2.18) denklemi $m_{yx} + R(n_{yx} - n_{xy}) = 0$ ifadesi için bu eşitlikteki moment ve kuvvetler yerine bunların (2.24) 'deki değerleri koyulursa;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \cdot dz + R \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dz - R \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz = 0$$

ifadesine varılır. Ancak yukarıdaki ifadenin sol tarafı $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olduğundan özdeş olarak sıfıra eşittir. Dolayısıyla geriye sağlanması gereken 5 adet denklem kalır.

Ele alınan kabuğun z yönündeki hareketi (eğilme ve burulma davranışı) incelenmek istendiğinden x ve y yönündeki atalet kuvvetleri dikkate alınmayacaktır. Ayrıca kabuğun x ve y yönünde herhangi bir aerodinamik sürtünme kuvvetine maruz kalmadığı da kabul edilecektir. Bu kabuller altında (2.13)-(2.18) denklemleri tekrar yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{q_y}{R} &= 0 \\
\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{n_y}{R} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} - q_x &= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Denklemleri elde edilir. Burada p_z yüzeye dik yönde (z ekseninde) birim alana etkiyen aerodinamik kuvvettir. Bu kuvvetin değeri daha sonraki bölümlerde elde edilecek. Yukarıda yazılan ve momentler dengesini belirten son iki denklemden q_x ve q_y çekilip ilk üç denklemde yerine yazılırsa sonuç olarak şu üç denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{n_y}{R} + p_z &= \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.26) denklemlerinin ikincisinde bulunan $\frac{1}{R} \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right)$ ifadesi yarıçapın büyük olması halinde (basık kabuk kabulü) diğer terimler yanında ihmal edilebilir. Sonuç olarak çözülmesi gereken 7 bilinmeyenli şu üç denklem kalır:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{n_y}{R} + p_z = \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Problem hiperstatik olduğundan birim şekil değiştirmeler hesaplara sokulmak durumundadır. Bu amaçla (2.24)'de bulunan birim kenara etkiyen kuvvet ve momentler yer değiştirmelere bağlı olarak yazmak için (2.10), (2.11), (2.12) denklemleri (2.21) ve (2.23)'de yerine yazılır ve elde edilen denklemler (2.24)'de yerine koyulursa birim kenara etkiyen kuvvet ve momentler için (basık kabuklarda

$$1 + \frac{z}{R} \cong 1 \text{ yaklaşımı ile)}$$

$$n_x = C(\epsilon_{xx}^0 + \nu \epsilon_{yy}^0)$$

$$n_y = C(\epsilon_{yy}^0 + \nu \epsilon_{xx}^0)$$

$$n_{xy} = n_{yx} = C(1 - \nu) \frac{\epsilon_{xy}}{2} \quad (2.28)$$

elde edilir. Momentler için de benzer işlemler yapılırsa;

$$m_x = D \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$m_y = D \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = D(1 - \nu) \frac{-1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \quad (2.29)$$

Elde edilir. Kabuk teorisinde C büyüklüğüne uzama rijitliği adı verilir ve

$$C = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \quad (2.30)$$

olarak ifade edilir. D ise eğilme rijitliğidir ve

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.31)$$

şeklindedir.

Böylece 3 adet denklem içeren (2.27) denklemlerinde bulunan bilinmeyen kuvvet ve momentlerin tümü u, v ve w cinsinden elde edilmiştir. Dolayısıyla problem iyi tanımlanmıştır ve çözülebilir. Şimdi (2.27) denklemlerde bulunan birim kenara etkiyen kuvvetleri bir potansiyel kuvvet fonksiyonu olan $\Gamma(x, y)$ 'ye bağlı olarak ifade edilirse, [11].

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \\ n_y &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir. Eğer (2.32) ile verilen kuvvetler (2.27) ile verilen denklemlerin ilk ikisinde yerine koyulursa, bunların ilk iki denklemini özdeş olarak sağladığı görülecektir. (2.27) 'nin üçüncü denklemdeki moment ifadeleri yerine bunların (2.30)'daki değerleri koyulursa bu denklem de şu hale gelir ;

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - p_z = \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

Şimdi uygunluk koşulunu hesaba katarak bir denklem daha elde edilecektir. Bu amaçla (2.1) denklemini y 'ye göre ve (2.2) denklemini x 'e göre iki defa türetip taraf tarafa

toplandıktan sonra (2.3) denklemini x 'e ve y 'ye göre türetip bulunan toplamdan çıkartılırsa şu uygunluk koşulu elde edilir ;

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.34)$$

Diğer taraftan (2.28) denklemleri çözülerek ε_x^0 , ε_y^0 ve ε_{xy} için şu ifadeler elde edilebilir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{E \cdot h} (n_x - \nu \cdot n_y) \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{E \cdot h} (n_y - \nu \cdot n_x) \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{2(1+\nu)}{E \cdot h} n_{xy} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Şimdi (2.35) denklemleri (2.34) 'de yerine koyulursa

$$\frac{1}{E \cdot h} \left[\frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.36)$$

elde edilir. Buradan (2.32) ile tanımlanan potansiyel kuvvet fonksiyonları (2.36)'da yerine koyulursa;

$$\frac{\partial^4 \Gamma}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Gamma}{\partial y^4} - \frac{E \cdot h}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.37)$$

denklemini elde edilir.

Böylece (2.33) ve (2.37) ile $w(x,y,t)$ ve $\Gamma(x,y,t)$ 'nin belirlenebileceği bağlı lineer iki kısmi diferansiyel denklem elde edilmiş oldu. Bu iki denklem tek bir kısmi lineer diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bunun için (2.33) denklemini

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$$

ile ve (2.27) denklemi

$$\left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa şu ifade elde edilir;

$$D\nabla^8 w + \frac{E \cdot h}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_z = \rho h \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \quad (2.38)$$

Burada

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4\frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

olarak tanımlanır.

Dolayısıyla basık dairesel silindirik kabuğa ait w cinsinden elde edilmiş diferansiyel denklem 8. mertebeden lineer bir kısmi diferansiyel denklemdir.

2.7 SINIR KOŞULLARI

(2.38) denkleminde görüldüğü gibi gerekli sınır koşullarının sayısı 16 gerekli başlangıç koşullarının sayısı ise 2 'dir. Flater problemi bir özdeğer problemi olduğundan başlangıç koşullarına ihtiyaç yoktur. 16 sınır koşulu ise 4 kenara ait yazılacak 4'er sınır koşulundan belirlenecektir. Fakat daha önce diferansiyel eleman üzerinde denge denklemleri yazılırken her kenarda toplam 5 kenar büyüklüğü olduğu görüldü. Bu ise her kenarda 5 sınır koşuluna dolayısıyla toplam 20 sınır koşuluna

tekabül eder. Bu uyumsuzluğun sebebi yer değiştirmeler ve uzama oranlarında yapılan yaklaşımlardır. Daha önce diferansiyel eleman üzerinde yazılan denge denklemlerinde z yönündeki kuvvetler dengesini yazılırken kesme kuvvetleri hesaplara sokulmuştu. Denge denklemlerinin sayısı sistemin çözümü için yeterli olmadığından birim şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasında ve bunlarla da kuvvet ve momentler arasında ilişkiler kurulmuştu. Ancak bunlar yapılırken kesme kuvvetlerinin oluşturacağı kayma şekil değiştirmelerini hesaba katılmamıştır. Dolayısıyla denge denklemlerinde gözükken kesme kuvvetlerinin etkileri şekil değişimlerinde hesaba alınmamıştır. İşte görünüşteki uyumsuzluğun sebebi budur. Ancak sınır koşulları yazılırken aşağıda ayrıntılı olarak inceleneceği gibi bu sorun giderilmeye çalışılır.

1) $y = \text{sabit kenarı}$

a) Serbest kenara ait sınır koşulları ,

$$n_y = 0$$

$$q_y = 0$$

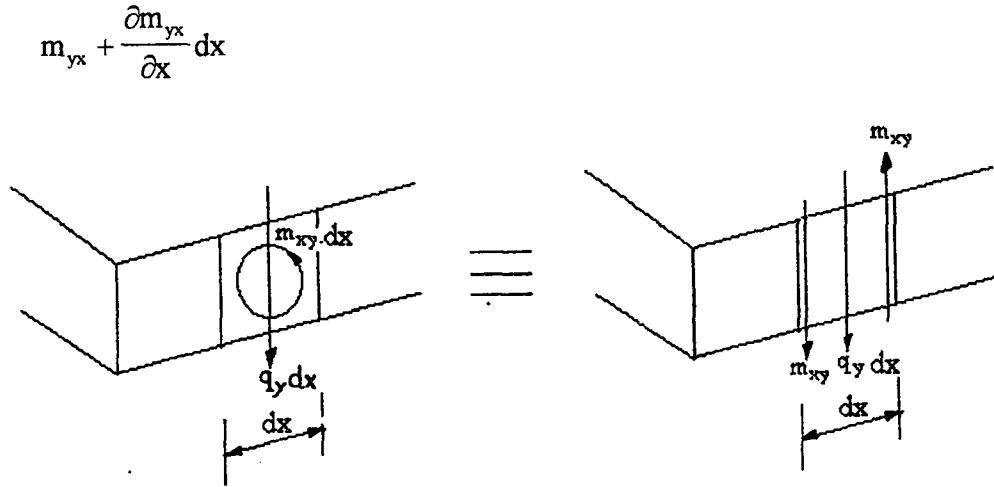
$$n_{yx} = 0$$

$$m_y = 0$$

$$m_{yx} = 0$$

Daha önce açıklandığı gibi her kenar üzerinde 4 adet sınır koşulu olmalıydı. Bunu düzeltmek için şöyle bir yol izlenir. Önce kenar burulma momentleri bunlara statik bakımdan eşdeğer olan ve sürekli olarak yayılan eşdeğer kesme kuvvetlerine dönüştürülür. Daha sonra bu eşdeğer kesme kuvvetleri kenara tesir eden kesme kuvvetleriyle toplanır. Ortaya çıkan yeni kesme kuvveti sınırdaki yeni kesme kuvvetidir. Bundan sonra bu sınır kuvvetinin sınır şartlarını sağlaması istenir,[10]. Bu sorunu çözmek için kenar üzerindeki m_{yx} burulma momenti her birinin değeri m_{yx} olan bir kuvvet çifti gibi süperpoze edilir. Kenarın dx boyuna isabet eden burulma momenti $m_{yx} dx$ olup bu kuvvet kolu dx olan bir kuvvet çiftine eşdeğerdir(Şekil 2.9).

Komşu dx elemanında ise

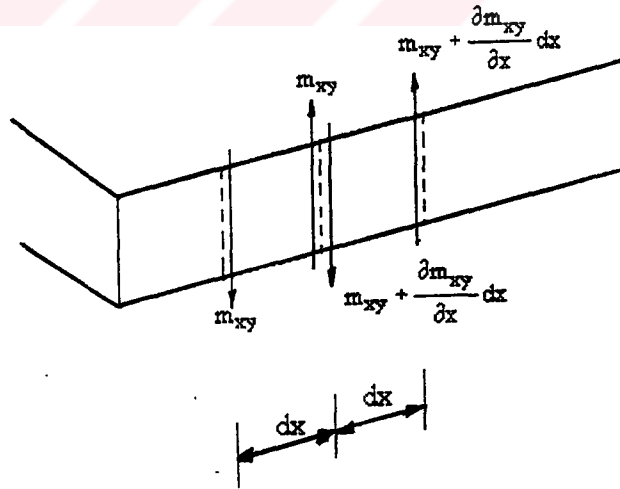


Şekil 2.9 Burulma momentinin kuvvet çiftine dönüştürülmesi

büyükluğüne sahip bir kuvvet çifti mevcuttur(Şekil 2.10). Bu durumda ortak kesitlerde bulunan kuvvetler birbirini götürür ve geriye

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dx$$

tekil kuvveti kalır.



Şekil 2.10 Burulma momentinin eşdeğer kesme kuvvetine dönüştürülmesi

Bu halde birim boya etkiyen kuvvet ise $\frac{\partial m_{yx}}{\partial x}$ olarak bulunur. Bu değer kesme kuvveti ile birleştirerek sınır koşulu olarak değerlendirecek yeni kesme kuvveti bulunmuş olur. Bu yeni sınır koşulunu $\bar{q}_y$ ile gösterilirse,

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}$$

ifadesini elde edilmiş olur. Ancak köşelerde kılacak terim kalmadığından bu noktalarda m_{yx} tekil kuvvetleri kalır. Böylece $y=0$ kenarındaki yeni sınır koşulları dörde indirgenmiş olur ve

$$n_y = 0$$

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = 0$$

$$n_{yx} = 0$$

$$m_y = 0$$

şeklinde yazılabilir.

b) Ankastre kenara ait sınır koşulları,

$$u=0$$

$$v=0$$

$$w=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

c) Basit mesnetli kenara ait sınır koşulları,

$$u=0$$

$$v=0$$

$$w=0$$

$$m_y = 0$$

2) x=sabit kenarı

a) Serbest kenara ait sınır şartları,

$$n_x = 0$$

$$q_x = 0$$

$$n_{xy} = 0$$

$$m_x = 0$$

$$m_{xy} = 0$$

Böyle bir kenarda da önceki duruma benzer şekilde n_x, n_{xy}, m_x, m_{xy} gibi beş kenar büyüklüğü mevcuttur. Burada da dx kenar elemanındaki $m_{xy}dx$ burulma momenti yerine bir kuvvet çifti koyulabilir. Bitişik iki elemanın ortak kesitindeki $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy$ fark kuvveti, birim kenar boyu için $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ büyüklüğünü ve bunun q_x kesme kuvveti ile olan toplamı bu kenarda yeni sınır koşulu olarak kabul edilecek q_x kesme kuvvetini verir. Dolayısıyla bu değer için;

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

kenar kuvveti elde edilmiş olur. Fakat elemanlardaki bu m_{xy} kuvvetleri tam paralel olmayıp radyal yönde yönelmiş olduklarından bu kenar üzerinde orta eğrinin teğeti doğrultusunda da bir kenar kuvvetinin doğmasına neden olurlar. Bu kuvvetin değeri

$m_{xy} \frac{dy}{R}$ kadardır. Birim kenar boyuna gelen ve şiddeti $\frac{m_{xy}}{R}$ olan bu kuvvetleri

tekrar yok edebilmek için aynı büyüklükte ve ters yönde kuvvetler tatbik edilir. Bunlar n_{xy} kesme kuvvetleriyle birleştirilerek artık bu kenarda uygulanacak sınır kuvveti $\bar{n}_{xy}$ elde edilmiş olur:

$$\bar{n}_{xy} = n_{xy} - \frac{1}{R} m_{xy}$$

Dolayısıyla x =sabit serbest kenarı için yazılacak sınır koşulları şu şekilde elde edilir:

$$n_x = 0$$

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{n}_{xy} = n_{xy} - \frac{1}{R} m_{xy} = 0$$

$$m_x = 0$$

b) Ankastre kenara ait sınır şartları,

$$u=0$$

$$v=0$$

$$w=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

c) Basit mesnetli kenara ait sınır şartları ,

$$u=0$$

$$v=0$$

$$w=0$$

$$m_x = 0$$

Şeklinde bulunmuş olur.

BÖLÜM 3 AERODİNAMİK TEORİ : PİSTON TEORİSİ

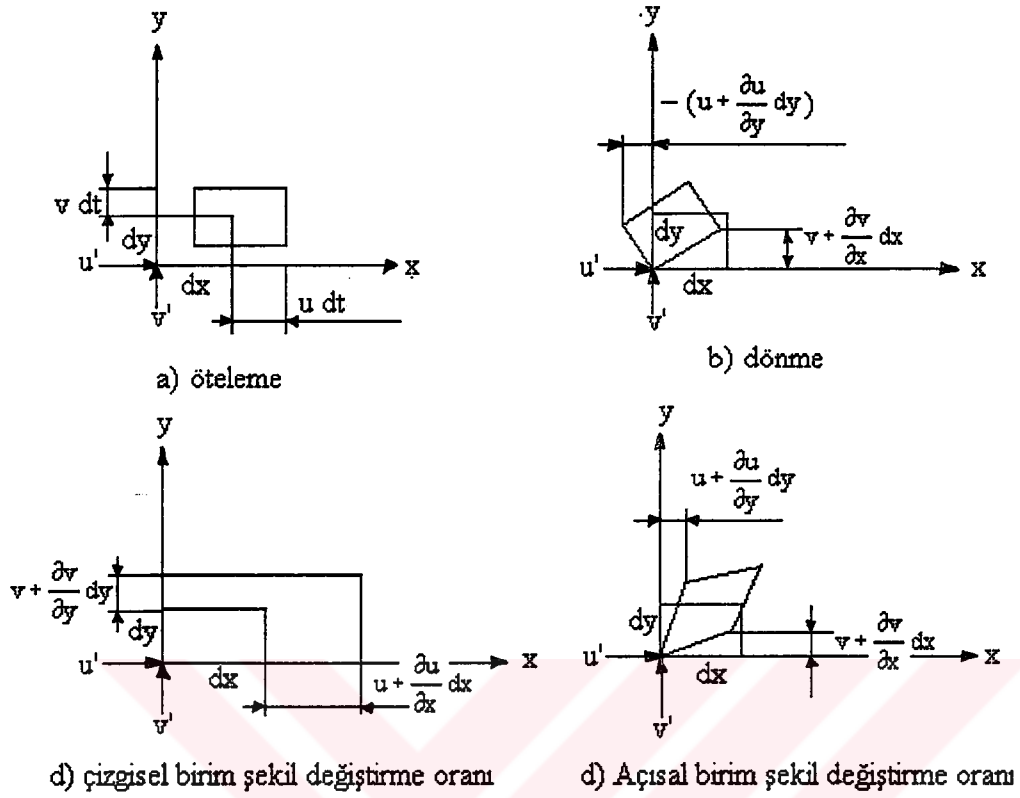
3.1 AEROELASTİSİTE

Daha önceki bölümde kabuk denklemlerinin elde edilmesi sırasında kuvvetler dengesi yazılırken z yönünde (p_z ile gösterilen) birim alana etkiyen bir aerodinamik olduğu düşünülmüş ve hareket denklemleri de bu hava yükü hesaplara sokularak elde edilmişti. Bundan sonraki bölümlerde aerodinamik teorilerden faydalanarak bu hava yükünü başta tanımı verildiği gibi dinamik basıncın ve cismin şekil değişimleri cinsinden elde edilmeye çalışılacak.

3.2 AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN TEMEL KAVRAMLARI VE TEMEL DENKLEMLERİ

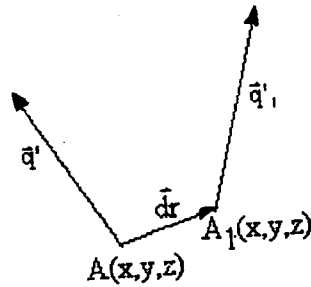
Bir akışkan partikülünün hareketi iki türlü yaklaşımla betimlenebilir. Birinci yaklaşım metodu "Lagrangien", ikinci yaklaşım ise "Eulerian" metottur. "Lagrangien" metotta bir akışkan partikülünün herhangi andaki bir konumunu veren bir ifade varsa, bu o partikülün hareketini tam olarak betimler. "Eulerian" metotta ise bir akışkan partikülüyle ilgilenilmez. Bunun yerine uzayda sabit bir noktada bir hacim belirlenir ve bu hacimden geçen akışkan patiküllerinin zamana bağlı değişimi ele alınır. Bu sabit hacme **kontrol hacmi** adı verilir [14].

Katı cisim mekaniğinin tersine akışkanlar mekaniğinde "Eulerian" yaklaşımı kullanmak özellikle rejim halindeki akışlarda oldukça faydalıdır. Bu yüzden akışkanlar mekaniğinde "Eulerian" yaklaşım kullanılmıştır. İki boyutlu bir akışta, bir akışkan partikülünün hareketleri öteleme, dönme ve şekil değiştirme oranı (rate of deformation) olarak belirlenir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Bir akışkan partikülünün hareketleri

En genel halde bir akışkan partikülünün hareketi yukarıda verilen hareketlerin toplamıdır[14]. Burada u' , v' akışkanın sırasıyla x ve y yönlerindeki hızıdır. Şimdi şekil 3.2 de gösterilen bir akışkan partikülünün hareketi ele alınsın.



Şekil 3.2 Bir akışkan partikülünün dt zamanında yaptığı hareket

$A(x, y, z)$ noktasındaki hızı $\vec{q}'$ ve A 'dan dr uzaklığındaki bir $A_1(x, y, z)$ noktada ise hızı $\vec{q}'_1$ olsun. $\vec{q}'_1$ için

$$\vec{q}' = u' \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$\vec{q}'_1 = u'_1 \vec{i} + v'_1 \vec{j} + w'_1 \vec{k} = \vec{q}' + d\vec{q}' \quad (3.2)$$

yazılabilir. $\vec{q}'$ diferansiyeli alınıp (3.2) de yerine koyulursa ;

$$\vec{q}'_1 = u' \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k} + \frac{\partial \vec{q}'}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{q}'}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{q}'}{\partial z} dz$$

elde edilir. Burada $\vec{q}'$ yerine (3.1) eşitliği koyulursa

$$\begin{aligned} \vec{q}'_1 = & \left[u' + \frac{\partial u'}{\partial x} dx + \frac{\partial u'}{\partial y} dy + \frac{\partial u'}{\partial z} dz \right] \vec{i} + \left[v' + \frac{\partial v'}{\partial x} dx + \frac{\partial v'}{\partial y} dy + \frac{\partial v'}{\partial z} dz \right] \vec{j} + \\ & \left[w' + \frac{\partial w'}{\partial x} dx + \frac{\partial w'}{\partial y} dy + \frac{\partial w'}{\partial z} dz \right] \vec{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Akışkanlar mekaniğinde

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (3.4)$$

vektörel büyüklüğü vortisiti olarak tanımlanır. Şimdi (3.3) denklemini şu şekilde ifade edilebilir:

$$\vec{q}'_1 = \vec{q}' + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \times d\vec{r} + \vec{D}' \quad (3.5)$$

Bu denklemden

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{D}' = & \left[\frac{\partial u'}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) dz \right] \vec{i} + \\ & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial v'}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) dz \right] \vec{j} + \\ & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial u'}{\partial x} dz + \right] \vec{k}\end{aligned}\quad (3.6)$$

şeklindedir.

(3.5) denklemi bir akışkan partikülünün en genel hareketini tanımlar. İlk terim q' akışkanın herhangi bir şekil değişimine uğramaksızın doğrusal hareketini gösterir. Vortisiti olarak adlandırılan ikinci terim akışkan partikülünün rijit dönmesini belirtir. Üçüncü terim ise akışkanın birim şekil değiştirme oranına eşittir. (3.6) ifadesinin birim şekil değiştirme oranı tansörü olduğuna dikkat edilmelidir.

Viskoz olmayan bir akışta, akışkan partikülleri dönmesine neden olacak bir etki olmaması nedeniyle vortisiti sıfıra eşittir. Böyle akışlara **irrotasyonel akış** adı verilir.

En genel bir durumda bir akış probleminde yedi adet bilinmeyen vardır. Bunlar üç adet hız bileşeni, sıcaklık, basınç, yoğunluk ve iç enerjidir. Dolayısıyla en genel bir akış problemini çözmek için yedi adet denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler üç yönde yazılan momentumun korunumu (Navier-Stokes) denklemleri, enerjinin korunumu (termodinamiğin birinci kanunu) denklemi, süreklilik (kütlenin korunumu) denklemi, hal denklemi ve iç enerji denklemdir. Bu denklemlerin en genel halde kapalı çözümleri olmamakla birlikte bir veya iki boyutlu akışlarda problemin özelliği gereği bu denklemlerin sayısı düşer ve kimi özel durumlarda da kapalı çözümlere gidilebilir.

3.2.1 Navier-Stokes Denklemleri

Üç boyutlu sıkıştırılabilir, viskos akışlarda sırasıyla x, y ve z yönündeki momentumun korunumunu gösteren Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki gibidir [14]:

$$\rho_0 \frac{Du'}{Dt} = \rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \vec{q}' \cdot \nabla u' \right) = \rho_0 X_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{q}') \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho_0 \frac{Dv'}{Dt} = \rho_0 \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + \vec{q}' \cdot \nabla v' \right) = \rho_0 X_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{q}') \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho_0 \frac{Dw'}{Dt} = \rho_0 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + \vec{q}' \cdot \nabla w' \right) = \rho_0 X_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{q}') \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right]$$

Bu denklemlerde u' , v' ve w' akım hızının sırasıyla x, y ve z yönündeki bileşenleri olmak üzere $\vec{q}'$

$$\vec{q}' = u' \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k}$$

hız vektörünü gösterir. Nabla operatörü

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

olarak tanımlanır. Eulerian türev olarak da adlandırılan $\frac{D}{Dt}$ ifadesi ise akım hızındaki değişimin zamana ve koordinata bağlı olduğunu gösterir ve açılımı şöyledir :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z}$$

Yukarıdaki denklemlerde viskoziteyi gösteren μ 'nün sabit olması durumunda Navier-Stokes denklemleri vektörel formda şu şekilde yazılabilir:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{q}'}{\partial t} + \vec{q}' \cdot \nabla \vec{q}' \right) = \rho_0 \vec{X} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{q}' + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{q}') \quad (3.7)$$

(3.7) ifadesinin sağ tarafındaki terimler atalet terimlerini, sol taraftaki ilk terim kütle kuvvetlerini, ikinci terim basınç değişimini ve üçüncü terim ise viskoz kuvvetleri gösterir.

3.2.2 Enerjinin Korunumu Denklemi

Termodinamiğin birinci kanununa göre kapalı bir sisteme verilen enerji birim akışkan kütlesinin iç enerjisini artırır. Sisteme verilen enerji akışkan verilen ısı veya iş olabilir. Bunu ifade eden enerji denklemi, [14]:

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{q}')^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right]$$

şeklinde bir büyüklük tanımlanarak aşağıdaki gibi verilir, [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi = \rho_0 \frac{\partial (C_p \cdot T)}{\partial t} + \rho_0 u' \frac{\partial (C_p \cdot T)}{\partial x} + \rho_0 v' \frac{\partial (C_p \cdot T)}{\partial y} \\ + \rho_0 w' \frac{\partial (C_p \cdot T)}{\partial z} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + u' \frac{\partial p}{\partial x} + v' \frac{\partial p}{\partial y} + w' \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada T kelvin olarak sıcaklık, k birim sıcaklık başına, birim boydan birim zamanda geçen Joule cinsinden ısıyı belirten termal ısı iletim katsayısıdır. C_p ise sabit basınçtaki özgül ısınma ısıdır. Burada h entalpi olmak üzere $h = C_p \cdot T$ bağıntısı geçerlidir.

3.2.3 Süreklilik Denklemi

Kütlenin korunumunu belirten süreklilik denklemi,[13]:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u')}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v')}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_0 w')}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

olarak verilir.

3.2.4 Hal Denklemi ve İç Enerji Denklemi

Ele alınan aeroelastisite probleminde akışkan havadır. Bu çalışmada havanın ideal gaz olduğu kabul edilmiştir. Hal denklemi

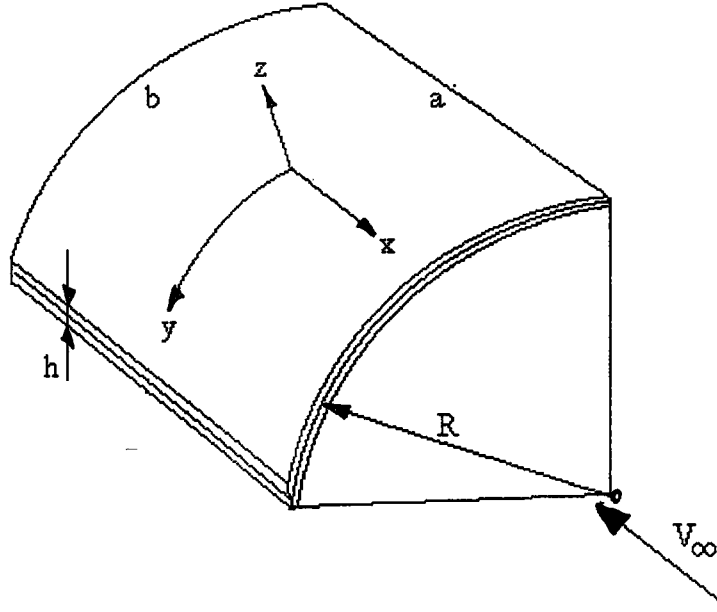
$$p = \rho_0 R T \quad (3.10)$$

olarak iç enerji denklemi ise ideal gazlarda;

$$e = C_v T \quad (3.11)$$

olarak verilir.

3.3 AERODİNAMİK YÜK İFADESİNİN ELDE EDİLMESİ

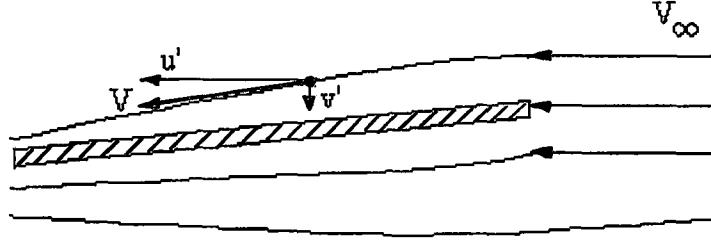


Şekil 3.3 Kabuğa gelen hava akımının yönü

Bu çalışmada flater sınırları incelenen plak ve kabuklara gelen hava akımının yönü Şekil.3.3. de gösterildiği gibi düz kenarına paraleldir. Akımın bu şekilde etkimesi problemin iki boyutta incelenmesini sağlar. Aerodinamik yük ifadesinin elde edilmesi şu kısıtlamalar ve kabuller altında yapılır:

- 1) Akışkana (havaya) ait özellikler (viskozite, termal ısı iletim katsayısı, özgül ısınma ısısı) sabittir.
- 2) Akış viskoz değildir. Ele alınan yüzey sınır tabakanın hemen üstündeki yüzeydir.
- 3) Elastik yüzeyin hava yükü nedeniyle olan deformasyonları küçüktür.
- 4) Hava ideal gaz olarak kabul edilmiştir.
- 5) Akım sürekli rejim halindedir.
- 6) Sistem izantropiktir.
- 8) Kütle kuvvetleri ihmal edilebilecek mertebededir.
- 9) Aerodinamik sönüm ihmal edilmiştir.

3.3.1 Hız Potansiyeli Denklemi



Şekil 3.4 Hava akımına maruz bir katı yüzey üzerinde oluşan akım hızı bileşenleri

Bu tezde yapılması amaçlanan aeroelastik analizin akışkanlar mekaniği kısmı (kabuğa gelen hava yükü ifadesi) lineerleştirilmiş sesüstü akım teorisine dayanır. Bu teorinin gerçeğe yakın olması için yukarıda yapılan kabullerden başka lineerleştirmeyi sağlayan küçük perturbasyonlar teorisi büyük önem taşır. Bu teorinin geçerliliği ise aşağıda ayrıntılı olarak inceleneceği gibi elastik cismin şekil değişimlerinin küçük olmasına bağlıdır. Cismin küçük şekil değişimleri kabulü kabuk denklemleri çıkartılırken de yapılmıştı. Dolayısıyla bu kısıtlama hem katı cisim hem de akışkanlar mekaniği denklemlerinin ortak kabulüdür ve teorinin gerçek duruma yaklaşması için bu kabul diğerlerinden biraz daha önemli olabilir. Lineerleştirilmiş sesüstü akım teorisine ait denklemler elde edilirken daha önce verilen temel denklemlerden faydalanılacaktır.

Viskoz olmayan ve sıkıştırılabilir bir akım irrotasyoneldir. Böyle bir akışta akışkan parçacıklarının dönmesine neden olacak herhangi bir etki yoktur. İki boyutlu , sürekli rejim halinde izantropik, irrotasyonel bir akış için $\phi = \phi(x, y)$ olan bir hız potansiyeli tanımlanabilir. Yani

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (3.12)$$

yazılabilir.. Böylece iki boyutlu halde kartezyen koordinatlardaki hız bileşenleri, bu hız potansiyeline bağlı olarak ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \phi'}{\partial x} \\ v' &= \frac{\partial \phi'}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Şimdi süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin bir birleşimi olan ve sadece ϕ 'nin bir fonksiyonu olan bir denklem elde edilecektir. Böyle bir denklemi elde etmek tek bilinmeyenli genel bir denkleme tekabül edeceğinden oldukça yararlı olur. Bu amaçla daha önce verilen denklemler teker teker ele alınarak sadece hız potansiyeli cinsinden elde edilmeye çalışılacak.

Süreklilik denklemi (3.9), akımın iki boyutlu ve sürekli rejim halinde olması nedeniyle ;

$$\frac{\partial(\rho_0 u')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v')}{\partial y} = 0$$

haline gelir. Bu denklem açılır ve (3.13) ile verilen hız potansiyelleri kullanılırsa

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (3.14) denklemi sadece ϕ 'nin bir fonksiyonu değildir. Dolayısıyla yukarıdaki denklemden ρ_0 elimine edilmek durumundadır. Bu amaçla önce x yönündeki momentum denklemi; viskoz kuvvetlerin ve kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği ve akımın iki boyutlu ve sürekli rejim halinde olduğu durum için basitleştirilirse

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.15)$$

denklemi elde edilir. (3.15) denkleminin her iki tarafını dx ile çarpılırsa

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} dx + v' \frac{\partial u'}{\partial y} dy = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.16)$$

haline gelir. Şimdi bir akım çizgisi boyunca $\vec{V}$ hızına sahip bir akış ele alınsın. Akım çizgisi üzerindeki hız akım çizgisi üzerindeki alınan yola paralel olacağından bu iki büyüklüğün vektörel çarpımı sifıra eşittir. Yani

$$d\vec{s} \times \vec{V} = 0$$

bağıntısı geçerlidir.

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$\vec{V} = u'\vec{i} + v'\vec{j}$$

olmak üzere bu çarpım yapıp sifıra eşitlenirse

$$v'.dx = u'.dy \quad (3.17)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı (3.16) 'da yerine koyulursa

$$u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} dx + \frac{\partial u'}{\partial y} dy \right) = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

elde edilir. Ancak bu denklemin parantez içi u' 'nün diferansiyeline eşittir. Dolayısıyla

$$u'.du' = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

veya

$$\frac{1}{2}d.(u'^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı işlemler y yönündeki momentum denkleminde uygulanırsa şu denklem elde edilir;

$$\frac{1}{2}d.(v'^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (3.19)$$

(3.18) ve (3.19) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{2}d.(u'^2 + v'^2) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \quad (3.20)$$

bulunur. Ancak (3.20) ifadesinin sağ tarafı da p' nin diferansiyeline eşittir . Ayrıca

$$u'^2 + v'^2 = V^2$$

olduğundan (3.20) denklemi

$$\frac{1}{2}d.(V^2) = -\frac{1}{\rho_0} dp \quad (3.21.a)$$

veya

$$dp = -\rho_0 V dV \quad (3.21.b)$$

biçiminde yazılabilir. (3.21.b) ifadesine Euler denklemi adı verilir. Bu denklem kütle kuvvetlerinin olmadığı viskoz olmayan akımlar için geçerlidir. (3.21.b) denklemi

$$dp = -\frac{\rho_0}{2} (u'^2 + v'^2) \quad (3.22)$$

formunda yazılıp (3.13)'de bulunan hız potansiyelleri (3.22) denklemlerinde yerine koyulursa

$$dp = -\frac{\rho_0}{2} d \left[\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

elde edilmiş olur. İzantropik bir akım için ses hızı a , aşağıdaki bağıntıyla verilir [13]:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho_0} \quad (3.24)$$

Buradan dp çekilip (3.23) de yerine koyulursa

$$d\rho_0 = -\frac{\rho_0}{2 \cdot a^2} d \left[\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.25)$$

bulunur. (3.25) ifadesinin her iki tarafı dx ve dy 'ye bölünürse sırasıyla şu iki bağıntı elde edilir:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \right) \quad (3.27)$$

(3.26) ve (3.27) denklemleri (3.14) ' de yerine koyulursa yoğunluk terimleri kısalarak

$$\left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) denkleminde **hız potansiyeli denklemi** adı verilir. Bu denklem ses hızı terimi haricinde sadece ϕ ye bağlıdır. Ancak ses hızı da ϕ ' nin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu amaçla önce viskoz olmayan, adyabatik rejim halindeki akış için enerji denklemi yazılır. Daha sonra bu denklem sıcaklığa bağlı olarak ifade edilir. Bundan sonra ise ses hızının sıcaklığa bağlı bir ifadesi elde edilmeye çalışılır. Bu eşitlik sıcaklığa bağlı enerji ifadesinde yerine koyularak ses hızı, akım hızının bir fonksiyonu olarak elde edilir. Bu açıklamalar ışığında rejim halindeki viskoz olmayan ve adyabatik akışlarda enerji denklemi şu formda yazılabilir [13]:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.29)$$

Burada h entalpi, V ise hızdır. İdeal gazlar için entalpinin sıcaklığa bağlı ifadesi

$$h = C_p \cdot T$$

şeklindedir. Bu denklem (3.29)' da yerine yazılırsa;

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.30)$$

enerji denkleminin sıcaklığa bağlı ifadesine varılır.

Şimdi ses hızı sıcaklığın bir fonksiyonu olarak elde edilmeye çalışılacaktır. Bu yapılırken ses hızı akım hızı cinsinden, dolayısıyla potansiyel fonksiyoları cinsinden elde edilmiş olur. Bu amaçla İzantropik bir durumda ideal gazlar için

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \quad (3.31)$$

bağıntısı geçerlidir,[13]. Burada

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

olarak tanımlanır. (3.31) bağıntısı

$$\frac{p}{\rho_0^\gamma} = \text{sabit} = c$$

veya

$$p = c \cdot \rho_0^\gamma \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir. (3.32) ifadesi ρ ' ya göre türetilirse,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_0} = c \cdot \gamma \cdot \rho_0^{\gamma-1}$$

ifadesi elde edilir. (3.32) eşitliğinden c çekilip yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_0} = \left(\frac{p}{\rho_0^\gamma} \right) \gamma \cdot \rho_0^{\gamma-1} = \frac{\gamma \cdot p}{\rho_0} \quad (3.33)$$

olur. Bu denklemde (3.24) eşitliği kullanılarak ses hızının

$$a = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho_0}} \quad (3.34a)$$

veya (3.10) hal denklemi kullanılarak

$$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T} \quad (3.34b)$$

olduğu bulunur. İdeal gazlarda, [14]

$$C_p - C_v = R \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

olduğundan, bu iki bağıntıdan

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1} \\ C_v &= \frac{R}{\gamma - 1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

olarak bulunur. (3.35) denklemlerinin ilk bağıntısı (3.30)' da yerine koyulursa

$$\frac{\gamma \cdot R \cdot T_1}{\gamma - 1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma \cdot R \cdot T_2}{\gamma - 1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.34b) denkleminden $a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$ olduğundan (3.36) denklemi için:

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.37)$$

yazılabilir. Durma noktasındaki ses hızı, ki bu bir akış sabitidir , şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2}$$

Buradan ses hızı a için

$$a^2 = a_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} V^2 = a_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (u'^2 + v'^2) \quad (3.38)$$

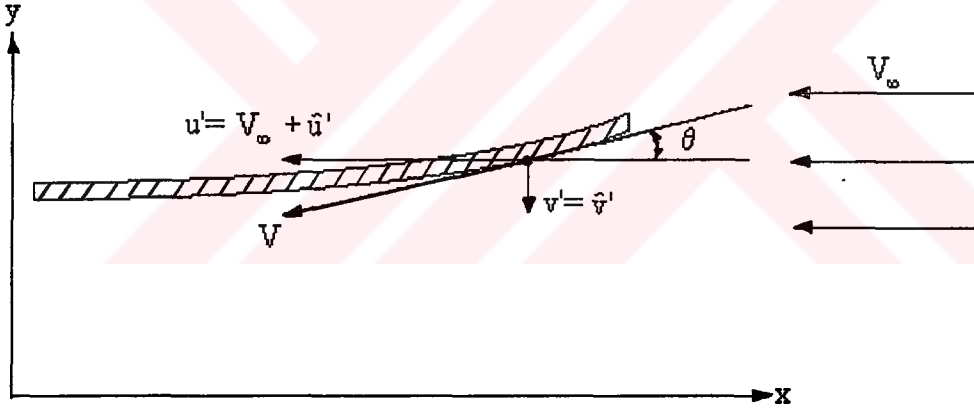
eşitliğine varılır. (3.38) eşitliğinde (3.13) hız potansiyelleri koyulursa

$$a^2 = a_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.39)$$

olarak ses hızı, hız potansiyeli cinsinden ifade edilmiş olur.

Dolayısıyla (3.28) ifadesindeki hız potansiyel denklemi süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin bir kombinasyonudur ve bu denklemde tek bilinmeyen olarak ϕ kalmıştır. Bu denklemin kapalı çözümü denklemin nonlineer olması nedeniyle yoktur. Dolayısıyla 3.3 de yapılan kabullerden özellikle küçük şekil değişimleri göz önüne alınarak bu durum altında nonlineer karaktere sahip bu denklemi lineerleştirmeye çalışılacaktır.

3.3.2 Lineerleştirilmiş Hız Potansiyeli Denklemi



Şekil 3.5 Akışkana ait koordinat eksenleri, üniform akım hızı ve pertürbasyon hızları

Şekil 3.5'de gösterilen iki boyutlu irrotasyonel, izantropik bir akım göz önüne alınsın. Serbest akım hızı V_∞ cisim üzerine gelince u' ve v' olmak üzere iki bileşene ayrılacaktır. Cisim akıma maruz kaldıktan sonra orijinal durumuna göre bir miktar şekil değiştirir ve başlangıçta da söylendiği gibi bu şekil değişimleri yeterince küçük miktardadır. Şekilden de görüldüğü gibi hız bileşenlerinden v' , u' 'ne göre bir mertebe daha küçüktür. Büyüklükler arasındaki bu farkın mertebesi cisim şekil değiştirdikten sonra orijinal haline nazaran farkı mertebelerindedir. Bu farkın yeteri

kadar küçük olduğu düşünülduğünden u' ile v' arasındaki farkın da yeterince fazla olduğu kabul edilir. Nonlineer hız potansiyel denklemi bu kabulden faydalanarak lineerleştirilir.

Yukarıdaki açıklamalar ışığı altında Şekil 3.4 'den de görüldüğü gibi u' ve v' için şöyle bir yaklaşım yapılabilir:

$$\begin{aligned} u' &= V_{\infty} + \hat{u}' \\ v' &= \hat{v}' \end{aligned} \quad (3.40)$$

Bu yaklaşıma **perturbasyon teorisi** adı verilir. $\hat{u}'$ ve $\hat{v}'$ büyüklüklerine perturbasyon hızları adı verilir. Şimdi daha önce tanımlanan hız potansiyeli perturbasyon hızları cinsinden yazılırsa:

$$\phi' = V_{\infty}x + \hat{\phi} \quad (3.41)$$

Burada $\hat{\phi}$ ile perturbasyon hızları arasında

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \hat{u}' \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = \hat{v}' \quad (3.42)$$

bağıntıları geçerlidir. Dolayısıyla türetmelerde

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x} = V_{\infty} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \quad (3.43a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x \partial y} \quad (3.43b)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlar (3.28) hız potansiyeli denkleminde yerine koyulursa

$$\left[a^2 - \left(V_\infty + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} - 2 \left(V_\infty + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.44)$$

denklemini elde edilir. (3.44) denkleminde **perturbasyon hız potansiyeli denklemi** adı verilir. Şimdi yukarıdaki denklemden ses hızını elimine etmek amacıyla önce (3.44) denklemindeki potansiyel fonksiyonlar yerine (3.40),(3.42),(3.43a) ve (3.43b) eşitliklerin den yararlanarak perturbasyon hızları koyulursa

$$\left[a^2 - (V_\infty + \hat{u}')^2 \right] \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + (a^2 - \hat{v}')^2 \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} - 2(V_\infty + \hat{u}') \cdot \hat{v}' \frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} = 0 \quad (3.45)$$

denklemini elde edilir. Ses hızı için (3.37) denklemini sonsuzdaki ve katı cisim üzerindeki bir nokta için yazılır ve cisim üzerindeki akım hızı için perturbasyon teorisi yaklaşımı kullanılırsa

$$\frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{(V_\infty + \hat{u}')^2 + \hat{v}'^2}{2} \quad (3.46)$$

ifadesine varılır. (3.46) denklemini (3.45) de kullanılıp denklem düzenlenirse şu ifadeye varılır:

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} &= M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{\hat{u}'}{V_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\hat{v}'^2}{V_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\hat{v}'^2}{V_\infty^2} \right] \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \\ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{\hat{u}'}{\hat{v}'} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\hat{v}'^2}{V_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\hat{u}'^2}{V_\infty^2} \right] \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} &+ M_\infty^2 \left[\frac{\hat{v}'}{V_\infty} \left(1 + \frac{\hat{u}'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

(3.47) denkleminin sol tarafı lineer sağ tarafı ise nonlineerdir. Ancak başta söylendiği gibi cismin şekil değiştirmeleri küçüktür. Bir başka deyişle şekil değişiminden sonra cismin üzerindeki noktaların hücum açıları küçüktür. Şekil değişimlerin mertebesi, $\hat{u}$ ve $\hat{v}$ hızlarının serbest akım hızından yeteri kadar küçük olmasını sağlayacak kadar olmalıdır. Buradan;

$$\frac{\hat{u}'}{V_\infty}, \frac{\hat{v}'}{V_\infty} \ll 1$$

$$\frac{\hat{u}'^2}{V_\infty^2}, \frac{\hat{v}'^2}{V_\infty^2} \lll 1 \quad (3.48)$$

olduğu sonucu çıkar. Ayrıca şekil değişimleri küçük olduğundan hız değişimleri de küçüktür. Dolayısıyla perturbasyon hızlarının türevleri de yeteri kadar küçük mertebededir. Buradan şu sonuçlar elde edilebilir.

1) $0 \leq M_\infty \leq 0,8$ veya $M_\infty \geq 1,2$ durumunda

$$M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{\hat{u}'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x}$$

terimi

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x}$$

yanında ihmal edilebilir. Ayrıca

$$M_\infty \left[(\gamma - 1) \frac{\hat{u}'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y}$$

terimi $\frac{\partial \hat{v}'}{\partial y}$ yanında ihmal edilebilir. Benzer şekilde ele alınan aralıkta

$$M_\infty^2 \left[\frac{\hat{v}'}{V_\infty} \left(1 + \frac{\hat{u}'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} \right) \right] \cong 0$$

alınabilir.

2) $M_\infty < 5$ (yaklaşık olarak) durumunda

$$M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{\hat{u}'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x}$$

terimi

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x}$$

yanında ihmal edilebilir. Ayrıca

$$M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{\hat{u}'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y}$$

terimi $\frac{\partial \hat{v}'}{\partial y}$ yanında ihmal edilebilir. Benzer şekilde ele alınan aralıkta yine

$$M_\infty^2 \left[\frac{\hat{v}'}{V_\infty} \left(1 + \frac{\hat{u}'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} \right) \right] \cong 0$$

alınabilir. Buradan Mach sayısının 1'e yakın olmadığı ve 5'den büyük olmadığı durumunda (3.47) denkleminin sol tarafı, sağ tarafına göre bir mertebe daha küçüktür. Dolayısıyla yapılan bu yaklaşımlar altında (3.47) denklemi yaklaşık olarak şu hale gelir:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (3.49)$$

Bu denklem **lineerleştirilmiş hız potansiyeli denklemidir**. Dolayısıyla Bölüm 3.3'de belirtilen kabuller altında elde edilmiş bulunan (3.49) denklemi lineer bir kısmi

diferansiyel denklemdir. Bu denklem denklemler ses altı ve ses üstü akımlarda kullanılabilir. Ancak görüldüğü gibi (3.49) kısmi diferansiyel denkleminin karakteri, Mach sayısının 1'den küçük veya büyük olmasına bağlıdır.

Daha önce de belirtildiği gibi Mach sayısının 1'e yakın olduğu durumlarda veya (yaklaşık olarak) 5'den büyük olduğu durumlarda denklemin geçersizliği görülmektedir.

3.3.3 Lineerleştirilmiş Hız Potansiyeli Denkleminin Çözümü

Sesüstü hızlarla ilgilenildiğinden $1 - M_{\infty}^2$ büyüklüğü (3.49) denklemini hiperbolik karaktere sahip bir denklem haline getirir.

$$\lambda^2 = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}$$

olmak üzere (3.49) denklemi şöyle yazılabilir:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (3.50)$$

Bu denklemin çözümü $x - \lambda y$ ifadesinin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla:

$$\hat{\phi} = f(x - \lambda y) \quad (3.51)$$

yazılabilir. (3.51) eşitliğinin bir çözüm olabileceğinin ispatı için bu ifadenin x 'e göre türevi alınırsa:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = f'(x - \lambda y) \frac{\partial (x - \lambda y)}{\partial x}$$

veya;

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = f' \quad (3.52)$$

olarak bulunur. Burada f' 'nün anlamı f nin değişkeni olan $x - \lambda y$ 'ye göre türevidir. (3.52) ifadesi bir kez daha x 'e göre türetilirse:

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} = f'' \quad (3.53)$$

bulunur. Benzer işlemler y için de yapılırsa;

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = -\lambda \cdot f' \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = \lambda^2 f'' \quad (3.55)$$

eşitliklerine varılır. (3.53) ve (3.55), (3.50)' de yerine koyulursa yerine koyulursa:

$$\lambda^2 f'' - \lambda^2 f'' = 0$$

elde edilir ve denklemin sağlandığı görülür. Şimdi (3.52) ve (3.54) eşitlikleri göz önüne alınsın. Bunların pertürbasyon hız potansiyelleri olduğu göz önüne alınırsa

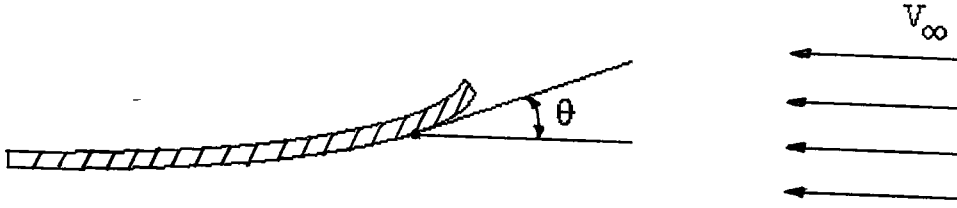
$$\hat{u}' = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = f' \quad (3.56)$$

$$\hat{v}' = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = -\lambda \cdot f' \quad (3.57)$$

olduğu görülür. Fakat perturbasyon teorisinden $\hat{v}' = v'$ olduğundan

$$\hat{v}' = V \cdot \tan \theta \quad (3.58)$$

yazılabilir. Burada θ akımına maruz yüzey üzerindeki herhangi bir noktanın **hücum açısıdır**. Bir noktanın hücum açısı Şekil 3.6 da gösterildiği gibi, o noktadan geçen ve yüzeye teğet olan doğru ile serbest akım hızının doğrultusu arasındaki açıdır.



Şekil 3.6 Akıma maruz bir yüzey üzerindeki bir noktanın hücum açısı

Şekil değişimlerinin küçük olması hücum açılarını da küçük yapacağından $V \cong V_\infty$ kabul edilebilir. Dolayısıyla (3.58) eşitliği için yaklaşık olarak

$$\hat{v}' = V_\infty \cdot \theta \quad (3.59)$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi (3.56) ve (3.57) denklemleri taraf tarafa bölünürse

$$\hat{u}' = -\frac{\hat{v}'}{\lambda} \quad (3.60)$$

bulunur. (3.59) 'eşitliği (3.60) da yerine koyulursa;

$$\hat{u}' = -\frac{V_\infty \theta}{\lambda} \quad (3.61)$$

elde edilir. Böylece (3.60) ve (3.59) denklemleriyle perturbasyon hızları basit bir formda elde edilmiş olur.

3.3.4 Basınç Katsayısı ve Aerodinamik Yük İfadesinin Elde Edilmesi

C_p basınç katsayısının tanımı [14],

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (3.62)$$

şeklindedir. (3.62) ifadesindeki p hava akımına maruz bir cismin üzerindeki herhangi bir noktadaki basınçtır. p_∞ ve q_∞ ise cisimden sonsuz uzaklıktaki bir noktanın sırasıyla basıncı ve dinamik basıncıdır. q_∞ dinamik basıncının değeri;

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (3.63)$$

formülü ile İle belirlenir. Burada ρ_∞ ve V_∞ benzer olarak cisme sonsuz uzaklıktaki bir noktanın sırasıyla yoğunluğu ve hızıdır. (3.63) ifadesi Mach sayısı cinsinden de ifade edilebilir.

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma p_\infty}{\gamma p_\infty} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{\gamma}{2} p_\infty \left(\frac{\rho_\infty}{\gamma p_\infty} \right) V_\infty^2 \quad (3.64)$$

Şimdi (3.34a) bağıntısı cisimden sonsuz uzaklıktaki bir nokta için yazılırsa,

$$a_\infty^2 = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \quad (3.65)$$

elde edilir. Bu denklem (3.64)'de yerine koyulursa

$$q_\infty = \frac{\gamma}{2} p_\infty \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2$$

bağıntısı elde edilir .Bu (3.62) de yerine koyulursa basınç katsayısı

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (3.66)$$

şeklinde ifade edilir. (3.66) ifadesi basınç katsayısı için yaklaşık değil kesin bir eşitliktir. Şimdi lineerleştirilmiş sesüstü akım için basınç katsayısını belirlemek gerekmektedir. Bu amaçla (3.29) denklemini katı cisim üzerindeki bir nokta ve sonsuzdaki bir nokta için entalpi yerine $h = C_p T$ koyarak yazılırsa

$$T + \frac{V^2}{2C_p} = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2C_p} \quad (3.67)$$

elde edilir. Ayrıca (3.35) eşitliği (3.67) 'de yerine koyulup düzenlenirse

$$T - T_\infty = \frac{V_\infty^2 - V^2}{2\gamma R / (\gamma - 1)} \quad (3.68)$$

yazılabilir. Ayrıca $a_\infty^2 = \sqrt{\gamma R T_\infty}$ olduğundan (3.68) ifadesi şu hale gelir:

$$\frac{T}{T_\infty} - 1 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{\gamma R T} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{a_\infty^2} \quad (3.69)$$

Hızın pertürbasyon hızları cinsinden yazıldığı

$$V^2 = (V_\infty + \hat{u}')^2 + \hat{v}'^2$$

eşitliği (3.69) da yerine koyulursa

$$\frac{T}{T_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2a_{\infty}^2} (2\hat{u}' V_{\infty} + \hat{u}'^2 + \hat{v}'^2) \quad (3.70)$$

denklemini elde edilir. Akış izantropik olduğundan basınçla sıcaklık arasında ideal gazlarda şöyle bir ilişki vardır,[13]:

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.71)$$

(3.70) denklemini (3.71) de yerine yazılırsa

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2a_{\infty}^2} (2\hat{u}' V_{\infty} + \hat{u}'^2 + \hat{v}'^2) \right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

veya

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \left(\frac{2\hat{u}'}{V_{\infty}} + \frac{\hat{u}'^2 + \hat{v}'^2}{V_{\infty}^2} \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.72)$$

denklemini elde edilir. (3.72) ifadesi halen kesin bir ifadedir. Ancak basınç katsayısı ifadesinde yerine koyulduğunda lineer olmayan bir ifade ile karşılaşılacağı görülür. Bu yüzden lineer bir basınç katsayısı elde etmek için perturbasyon hızları için (3.48) yaklaşımları göz önüne alınarak (3.72) ifadesi için

$$\frac{p}{p_{\infty}} = (1 - \varepsilon)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.73)$$

yazılabilir. Burada ε

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \left(\frac{2\hat{u}'}{V_{\infty}} + \frac{\hat{u}'^2 + \hat{v}'^2}{V_{\infty}^2} \right) \quad (3.74)$$

şeklindedir ve ε 'nin değeri 1'e göre küçüktür. (3.73) 'e binom açılımını uygulayarak ve yüksek mertebeden terimleri ihmal ederek

$$\frac{p}{p_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \varepsilon + \dots \quad (3.75)$$

yaklaşık ifadesi elde edilir. (3.74) denkleminde (3.75) eşitliği yerine koyulursa

$$\frac{p}{p_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma}{2} M_{\infty}^2 \left(\frac{2 \cdot \hat{u}'}{V_{\infty}} + \frac{\hat{u}'^2 + \hat{v}'^2}{V_{\infty}^2} \right) + \dots \quad (3.76)$$

elde edilir. Bu denklem (3.66) da yerine koyulursa

$$C_p = - \frac{2 \cdot \hat{u}'}{V_{\infty}} + \frac{\hat{u}'^2 + \hat{v}'^2}{V_{\infty}^2} \quad (3.77)$$

ifadesine varılır. Ancak (3.77) yaklaşık eşitliği de perturbasyon hızlarının serbest akım hızına göre küçük olmasından dolayı aşağıdaki hale dönüşür:

$$C_p = - \frac{2 \cdot \hat{u}'}{V_{\infty}} \quad (3.78)$$

Şimdi (3.61) eşitliği (3.78)' de yerine koyulursa

$$C_p = \frac{2 \cdot \theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (3.79)$$

elde edilmiş olur. Daha önce θ için cismin herhangi bir noktasının hücum açısı olduğu ifade edilmişti. Şekil değiştirmeler söz konusu olduğundan ve akım Şekil.3.3'den görüldüğü gibi düz bir kenar (x ekseni) boyunca etkidüğinden herhangi bir noktanın küçük şekil ve açı değiştirmeler için θ , şekil değiştiren düz kenardaki bu noktanın x

ekseni ile yaptığı açıdır ve bu da küçük şekil değişimlerinde yaklaşık olarak eğime eşittir. Dolayısıyla θ için

$$\theta \cong \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.80)$$

yazılabilir. Buradan basınç katsayısı için (3.70) eşitliği (3.79)'da yerine koyulursa:

$$C_p = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.81)$$

elde edilir. Herhangi bir noktadaki basınç (birim alana etkiyen hava yükü) ile basınç katsayısı arasındaki bağıntı ise (3.62)'den yararlanarak

$$p = q_\infty \cdot C_p + p_\infty \quad (3.82)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde (3.81) bağıntısı kullanılarak

$$p = \frac{2 \cdot q_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} + p_\infty \quad (3.83)$$

şeklinde elde edilir. Buraya kadar elde edilen tüm büyüklükler akımın cismin bir yüzünden etkidiği kabul edilerek elde edilmişti. Dolayısıyla (3.83) ile verilen büyüklük cismin bir yüzeyi, bu çalışmada ise üst yüzündeki basınç demektir. Yani;

$$p_{\text{üst}} = \frac{2 \cdot q_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} + p_\infty \quad (3.84)$$

Elde edilen bu basınç hücum açısına bağlı olarak p_∞ basıncından daha büyük veya daha küçük olacaktır. Oluşan bu basınç farkının değeri

$$\Delta p_{\text{Üst}} = \frac{2 \cdot q_{\infty}}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.85)$$

kadardır. Ancak alt tarafta ise akışta bir sıkışma etkisi oluşur. Bu yüzden alt yüzdeki basınç p_{∞} basıncından daha büyüktür. Üst tarafta da bir p_{∞} basıncı olduğundan oluşan net basınç farkı

$$\Delta p_{\text{Alt}} = \frac{2 \cdot q_{\infty}}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x}$$

değerinde olacaktır. Dolayısıyla üst yüzde bir vakum oluşmuş iken alt yüzde bir basınç oluşur. Bu iki etkinin toplamı bir yüzeyin her iki yüzüne de akımın etkimesi durumunda oluşan toplam basınçtır. Dolayısıyla bir taşıyıcı veya bir kontrol yüzeyinin aeroelastik analizinde kullanılacak olan hava yükü ifadesi elde edilmiş olur:

$$p_z = \Delta p = \frac{4 \cdot q_{\infty}}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.86)$$

Elde edilen bu değer [3],[4] kaynaklarında elde edilen ve flater analizinde kullanılan değerlerle aynıdır. (3.85) ve (3.86) denklemleri **piston teorisi** olarak bilinir. Bu denklemlerde aerodinamik sönümlenme etkileri görülmemektedir. Bu ihmalin hesaplara etkisi katı cisim yoğunluğunun akışkan yoğunluğuna oranına bağlıdır, [3]. $\rho h / \rho_0 a$ değerinin 10'dan büyük olması durumunda sönüm etkileri hesaplarda ciddi bir hataya neden olmaz. Burada ρ katı cisme ait yoğunluk, h yüzey kalınlığı, ρ_0 akışkana ait yoğunluk ve a ise katı yüzeyin akım yönüne paralel olan uzunluğudur. Bu çalışmada incelenen sistemde bu oran her zaman sağlanacağından sönüm etkilerinin ihmali hesaplarda ciddi bir hataya neden olmayacaktır.

BÖLÜM 4 ÇÖZÜM YÖNTEMİ

(2.38) diferansiyel denkleminin analitik çözümü uygun sınır koşulları olmadığı müddetçe yoktur. Flater analizi yapılacak roket kanatları, bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş plak veya kabuk olarak modellenmiştir. Bu şekilde mesnetlenmiş plak ve kabuklar için ağırlıklı artıklar tipi çözümler doğal sınır koşullarını sağlayabilecek yaklaşım fonksiyonlarının elde edilmesindeki güçlükler nedeniyle tercih edilmemiştir. Bu yüzden çözüm yöntemi olarak Ritz metodu ve sonlu elemanlar metodu seçilmiştir.

Ritz metodunda kullanılacak yaklaşım fonksiyonlarının sadece doğal sınır koşullarını sağlamasının zorunlu olması, bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş plak ve kabuklar için yaklaşım fonksiyonlarının kolayca bulunabilmesini sağlar.

Sonlu elemanlar çözümünde ise yöntemin sınır koşullarına uygulanabilmesinin kolaylığı nedeniyle çeşitli sınır koşullarına sahip plak ve kabukların flater analizleri elde edilebilir.

4.1 RİTZ METODU

Ritz metodu çözülmesi istenen diferansiyel denklem yerine, bu diferansiyel denklemin türetildiği fonksiyonel ifadeye yaklaşık bir çözüm getirir. Ritz metodunun katı cisim mekaniğine ait problemlerin çözümünde diğer yaklaşık çözüm yöntemlerine göre bir avantajı tahmin edilen yaklaşım fonksiyonunun sadece geometrik sınır koşullarını sağlamasının zorunlu olmasıdır. Geometrik sınır koşullarını sağlayan bir yaklaşım fonksiyonu bulunduktan sonra bu ifade sisteme ait fonksiyonel ifade de yerine koyulur. Bu fonksiyonel ifadenin varyasyonunun sıfır olması diferansiyel denklemin kendisine tekabül edeceğinden fonksiyonelin varyasyonu alınır ve çıkan ifade sıfıra eşitlemek suretiyle diferansiyel denklemin türetildiği varyasyonel ifadeye dolayısıyla diferansiyel denkleme yaklaşık bir çözüm getirilir. Bu yapıldığı zaman alınan yaklaşım fonksiyonlarının sayısı kadar denklem ortaya çıkar. Bu işlem yaklaşım fonksiyonlarının çarpanı durumunda olan katsayıların minimizasyon için düzenlenmesi

veya fonksiyonel ifadeyi minimum yapacak kat sayılarının bulunması anlamına gelir. Dolayısıyla sınır koşullarını tam olarak sağlayan ancak varyasyonel ifadeyi yaklaşık olarak sağlayan bir çözüm bulunmuş olur. Alınan yaklaşım fonksiyonlarının sayısı arttıkça gerçek çözüme yaklaşma olur. Ritz metodu diğer metotlara göre (özellikle ağırlıklı artıklara göre) sınır koşullarının sağlanmasında izin verdiği kolaylık nedeniyle bir miktar daha avantajlıdır. Ayrıca seçilen yaklaşım fonksiyonları eğer doğal sınır koşullarını da sağlıyorsa bu çözüme daha hızlı bir yakınsamayı sağlar.

Ancak ilerde görülebileceği gibi Ritz metodunda özellikle kabuk çözümleri için stabilite problemleri ortaya çıkabilir. Birinci problem gibi Ritz metodu bazı ara modlara iyi yaklaşamayabilir, [16]. İlk modu bulmadaki başarısını bazı ara modlar için gösteremeyebilir. İkinci mahsuru ise yaklaşım fonksiyonlarında ki sınırlamalardır. Eğer yaklaşım fonksiyonu olarak polinomlar seçilmişse stabilite ve yakınsama problemleri sadece alınan yaklaşım fonksiyonlarının sayısı ile değil sırasıyla da ilgilidir. [12].

Örnek olarak $w=w(x,t)$ olmak üzere bir özdeğer problemine tekabül ettiğini düşünülen

$$C_n \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + C_{n-1} \frac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}} + \dots + C_1 \frac{\partial w}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin Ritz metoduyla çözümü aransın. Katı cisim mekaniğine ait yapısal bir problemi karşıladığı düşünülen bu denklemin geometrik sınır koşulları belli olsun. Bu diferansiyel denklemin, varyasyon olarak türetildiği fonksiyonel ifadenin var olduğunu ve şu formda olduğu kabul edilsin:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx dt \quad (4.2)$$

$w=w(x,t)$ fonksiyonu için Ritz metodu uyarınca geometrik sınır koşullarını sağladığı düşünülen şöyle bir fonksiyon seçilsin

$$w(x,t) = \sum_m \psi_m(x) \cdot q_m(t) \quad (4.3)$$

Burada $\psi_m(x)$ geometrik sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları $q_m(t)$ ise genelleştirilmiş koordinat da denen $w(x,t)$ yaklaşım fonksiyonunun t değişkenine ait fonksiyonlardır.

Şimdi (4.3) yaklaşım fonksiyonları (4.2) de yerine yazılırsa :

$$J[x, t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_m(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g(x, t, q_m(t), \dot{q}_m(t)) dx dt \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) ifadesinde varyasyon değişkeni (fonksiyon) olarak sadece $q_m(t)$ ve $\dot{q}_m(t)$ genelleştirilmiş koordinatlar kalmıştır. (4.4) ifadesinin varyasyonunu almak için (4.3)'de yapılan değişkenlere ayırma yaklaşımı gereği Euler-Lagrange formülü kullanılabilir:

$$G = \int_{x_1}^{x_2} g[x, t, q_m(t), \dot{q}_m(t)] dx$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial G}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial G}{\partial q_2} = 0$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial G}{\partial q_m} = 0 \quad (4.5)$$

(4.5) denklemleri bir özdeğer problemi oluşturur. Bunun çözümü seçilen yaklaşım fonksiyonlarının sayısına bağlı olarak ise aranan özdeğerlere yakın bir sonuç verir.

4.2 SONLU ELEMANLAR METODU

Bundan önceki bölümlerde yapılan açıklamalardan anlaşılacağı gibi aeroelastisite problemi sistemi zorlayan bir kuvvet olmasına karşın bu kuvvetin yer değiştirmelere bağlı olmasından ötürü bir özdeğer problemidir. Sınır koşullarının kolay bir çözüme olanak sağlaması durumunda silindirik kabukların veya plakların aeroelastik davranışları yaklaşık metotlarla veya uygun hallerde, tüm kenarların basit mesnetli olması gibi, analitik metodlarla kapalı çözümleri elde edilebilir. Ancak mesela bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş kabuklar, çözümlerinde bir takım güçlükleri de beraberinde getirir. Kapalı bir çözüm sınır koşullarının güçlüğü nedeniyle yoktur. Yaklaşık metotlar arasından ağırlıklı artıklar tipi çözümleri de uygulamak yine doğal sınır koşullarından ötürü oldukça güçtür.

Bahsedilen bu nedenlerden ötürü çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar metodu seçilmiştir. Sonlu elemanlar metodunda bölge ayrıklaştırılır ve pek çok basit geometrili bölgeden oluştuğu düşünülür. Bu basit geometrili parçalara sonlu eleman adı verilir. Daha sonra Galerkin, kollokasyon veya Ritz metodu gibi metodlardan biri bu elemanların tümüne birden uygulanır. Uygulanan yönteme göre sonlu elemanlar formülasyonunun tipi de değişir. Eğer ağırlıklı artıklar tipin de (Galerkin, kollokasyon) bir çözüm uygulanmışsa sonlu elemanların tipi de ağırlıklı artıklar, varyasyonel yaklaşık metodlar (Ritz, Kantorovich) uygulanmışsa sonlu elemanlar formülasyonu varyasyonel yaklaşık tipinde olur, [15]. Bu çalışmada sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesi esnasında varyasyonel yaklaşık bir çözüm yöntemi olan Ritz metodu kullanılmıştır. Bu yöntemlerden herhangi biriyle bir sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilebilir. Adı geçen global yaklaşık çözüm yöntemleriyle sonlu elemanlar arasındaki fark sonlu elemanların global değil ayrıklaştırılmış (discrete) bir çözüm yöntemi olmasıdır. Yukarıda adı geçen global yaklaşık çözüm yöntemlerinin sonlu elemanlara uygulanması klasik şekilden bir farklılık gösterir. Bu fark herhangi bir elemana ait yaklaşım (şekil) fonksiyonlarının yazılması esnasında ortaya çıkar. Bölgeyi oluşturduğu düşünülen sonlu elemanlar üzerinde düğüm noktası adı verilen noktalar oluşturulur. Düğüm noktaları elemanlar arası uygunluk koşullarının sağlamaları açısından eleman kenarlarında seçilmelidir. Kenarlarında düğüm noktasına sahip elemanların iç bölgelerinde de düğüm noktaları seçilebilir. Bu düğüm

noktalarında eleman hareketini betimleyen serbestlik dereceleri oluşturulur. Sistemin kabul edilen serbestlik dereceleri, sistemi oluşturan sonlu eleman üzerindeki tüm düğüm noktalarında da olmalıdır. Global çözümlerden farklı olarak şekil fonksiyonları (yaklaşım fonksiyonları) eleman üzerinde seçilen düğüm noktası sayısına ve düğüm noktalarındaki serbestlik derecesi sayısına bağlıdır.

Sonlu elemanlar prosedürü genel hatlarıyla şöyledir:

1) Bölgeyi daha önce seçilmiş elemanlara ayırma . (Bu adım sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesinden sonra da yapılabilir.)

- a) Seçilen eleman tipine göre ayırma yapılır
- b) Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır
- c) Problem için gerekli olan özellikler belirlenir

2) Ayırılmış bölgede bulunan tipik bir eleman için sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesi.

- a) Tipik bir eleman için varyasyonel formülasyon elde edilir
- b) Probleme ait bağımlı değişkenlerin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

olduğu kabul edilir ve bu ifade 2-a adımında yerine koyulup

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

elde edilir

- c) ψ_i şekil fonksiyonları elde edilir ve eleman matrisleri hesaplanır

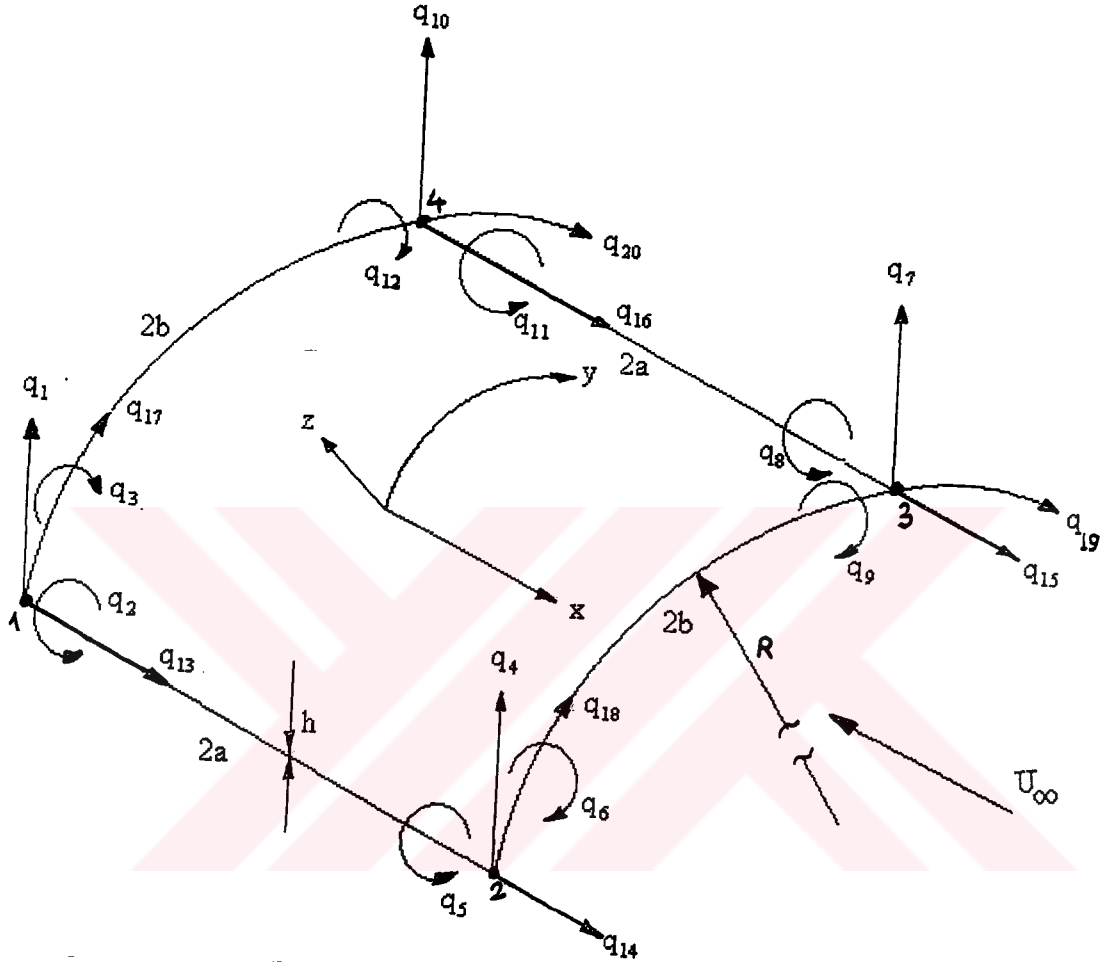
3) Tüm probleme ait denklemi elde etmek için eleman denklemleri birleştirilir.

a) Düğüm noktası üzerindeki serbestlik derecelerine göre global matris oluşturulur.

- b) Sınır koşulları uygulanır

4) Çözüm yapılır.

4.2.1 Şekil (Yaklaşım) Fonksiyonlarının Tayini



Şekil 4.1 Silindirik kabuk eleman ve düğüm noktası yer değiştirmeleri

Sonlu elemanlar prosedürünün 2-c adımı şekil fonksiyonlarının tayinidir. Şekil fonksiyonlarının sayısı ve mertebesi ise eleman üzerindeki düğüm noktalarının sayısına ve düğüm noktalarındaki serbestlik derecesi sayısına bağlıdır. Bu çalışmada düğüm noktası uygunluk koşulları her kenar üzerinde seçilen 2 düğüm noktasında sağlanmaktadır. Düğüm noktaları köşelerde seçilmiştir. Böylece Şekil 4.1 de gösterilen kabuk eleman dört düğümlü ve her düğüm noktasına atanan toplam beş adet yer değiştirme ve dönme serbestlikleri dolayısıyla toplam 20 serbestlik dereceli bir elemandır. Bu yer değiştirme ve dönmelere düğüm noktası yer değiştirmeleri denir.

Düğüm noktası yer değiştirmeleri her düğümde üç yer değiştirme ve iki dönmedir. Yer değiştirmeler x , y ve z yönünde olan u , v ve w yer değiştirmelerdir. Dönmeler ise w yer değiştirmesi nedeniyle oluşan; kesitlerin orjinal halleriyle , deformasyon sonrasında aralarında oluşan açılardır.

Kabuklarda hareketi belirleyen deplasmanlar u , v ve w yer değiştirmeleridir. Kabukların tüm davranışları bu yer değiştirmenin bilinmesi halinde belirlenebilir. Dolayısıyla seçilecek yaklaşım fonksiyon aileleri üç gruptur. Bu yaklaşım fonksiyonlarından w , her köşede iki dönme ve bir yer değiştirme dolayısıyla 12 adet düğüm noktası yer değiştirmesi uygunluk koşulunu sağlamak durumundadır. u ve v ise 4 köşede birer düğüm noktası yer değiştirmesi dolayısıyla dörder koşulu sağlayacaklardır. Bu yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$w(x,y,t)=W(x,y). q(t)$$

olarak kabul edilirse $w(x,y,t)$ yaklaşım fonksiyonları 12 adet şartı sağlamak zorunda olduğundan $w(x,y,t)$ için 12 katsayıyı içeren bir polinom ele alınır. Polinom ailelerinin seçiminde mertebesi küçük olandan büyük olana doğru gidilir.

$$w(x, y, t) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3$$

(4.6)

Burada $c_i = c_i(t)$ dir. Bu polinomun sağlaması gereken düğüm noktası uygunluk şartlarından yer değiştirmelerle ilgili olanlar;

$$w(-a,-b,t) = q_1(t)$$

$$w(a,-b,t) = q_4(t)$$

$$w(a,b,t) = q_7(t)$$

$$w(-a,b,t) = q_{10}(t)$$

şeklinde ve dönmelerle ilgili olanlar;

$$\frac{\partial w(-a, -b, t)}{\partial y} = q_2$$

$$\frac{\partial w(a, -b, t)}{\partial y} = q_5$$

$$\frac{\partial w(a, b, t)}{\partial y} = q_8$$

$$\frac{\partial w(-a, b, t)}{\partial y} = q_{11}$$

$$\frac{\partial w(-a, -b, t)}{\partial x} = -q_3$$

$$\frac{\partial w(a, -b, t)}{\partial x} = -q_6$$

$$\frac{\partial w(a, b, t)}{\partial x} = -q_9$$

$$\frac{\partial w(-a, b, t)}{\partial x} = -q_{12}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler çözülüp $q(t)$ çarpanları altında düzenlenirse düğüm noktası uygunluk koşullarını sağlayan şekil (yaklaşım) fonksiyonları şu şekilde elde edilir;

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{12} \psi_m(x, y) \cdot q_m(t)$$

Burada

$$\psi_1(x, y) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{8} b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2$$

$$\psi_3(x, y) = -\frac{1}{8} a \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(2 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\psi_5(x, y) &= \frac{1}{8}b(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{y}{b})^2 \\
\psi_6(x, y) &= \frac{1}{8}a(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{x}{a})^2 \\
\psi_7(x, y) &= \frac{1}{8}(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(2 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) \\
\psi_8(x, y) &= -\frac{1}{8}b(1 + \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b})^2 \\
\psi_9(x, y) &= \frac{1}{8}a(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(1 + \frac{x}{a})^2 \\
\psi_{10}(x, y) &= \frac{1}{8}(1 - \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(2 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) \\
\psi_{11}(x, y) &= -\frac{1}{8}b(1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b})^2 \\
\psi_{12}(x, y) &= -\frac{1}{8}a(1 + \frac{x}{a})(1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{x}{a})^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde dir. Ancak daha sonra matematiksel gösterimde kolaylık sağlaması için aşağıdaki yaklaşım fonksiyonlarını da göz önüne alınsın,

$$\begin{aligned}
\psi_{13}(x, y) &= \psi_{14}(x, y) = \psi_{15}(x, y) = \psi_{16}(x, y) = \psi_{17}(x, y) = \psi_{18}(x, y) = \psi_{19}(x, y) = \\
\psi_{20}(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

Dolayısıyla yaklaşım fonksiyonu şöyle ifade edilebilir:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{20} \psi_m(x, y) \cdot q_m(t) \tag{4.8}$$

$u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ için benzer şekilde işlemler yapılırsa;

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{20} \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \quad , \quad v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{20} \phi_m(x, y) \cdot q_m(t) \tag{4.9}$$

olmak üzere düğüm noktası uygunluk koşullarını sağlayan şekil fonksiyonları için şu değerler elde edilir:

$$\begin{aligned}\phi_{13}(x, y) &= \phi_{17}(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \phi_{14}(x, y) &= \phi_{18}(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \phi_{15}(x, y) &= \phi_{19}(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \phi_{16}(x, y) &= \phi_{20}(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Benzer şekilde yukarıda verilmeyen şekil fonksiyonlarının değeri sıfırdır.

4.3 KİNETİK ENERJİ, POTANSİYEL ENERJİ VE AERODİNAMİK YÜK

Daha önce de bahsedildiği gibi sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesi esnasında Ritz metodu kullanılacaktır. Ritz metodunun kullanılabilmesi için ele alınan probleme tekabül eden bir varyasyonel ifadeye ihtiyaç vardır. Bir varyasyonel ifade her zaman bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilmesine rağmen tersi doğru değildir. Ancak klasik katı cisim mekaniği problemleri için bir varyasyonel ifade her zaman mevcuttur ve bu da Hamilton ilkesidir. Bu prensip

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta\bar{W}] dt = 0 \quad (4.11)$$

olarak verilir.[17] Burada T kinetik enerji, V potansiyel enerji ve $\delta\bar{W}$ ise dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iştir. δ varyasyon almayı gösterir. Dolayısıyla Ritz metodunun uygulanmasında kullanılacak varyasyonel ifade (4.11) denklemdir.

Şimdi Hamilton ilkesi uyarınca basık kabuğa ait enerji ve yük ifadeleri elde edilmek durumundadır. h kalınlığına sahip ince basık dairesel bir silindirik kabuğa ait potansiyel enerji ifadesi: için gerilme ve uzama oranlarının z' ye bağlı olmadığını hatırlanarak

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}] dx dy dz \quad (4.12)$$

ifadesi yazılabilir. (4.12) denklemindeki gerilme terimleri yerine (2.21) ve (2.22) yazılır ve daha sonra uzama oranları terimleri yerine ise (2.10), (2.11) ve (2.12) eşitlikleri koyulur ve integral kalınlık boyunca alınır

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ C \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{w}{R} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \right. \\ \left. + D \left[\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] \right\} dx dy \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada C ve D daha önce sırasıyla (2.30) ve (2.31) ile verilen uzama ve eğilme rijitlikleridir.

Kinetik enerji ifadesi ise:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_A (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. Aerodinamik yük için piston teorisini dikkate alarak bir yüzü akıma maruz yüzeyler için (3.85) sesüstü hızlar elde edilen basınç ifadesi alan üzerinde integre edilirse aerodinamik dış kuvvet için

$$Q = \iint_A \frac{2q}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (4.15)$$

ifadesi ve iki yüzü akıma maruz yüzeyler için (3.86) ile

$$Q = \iint_A \frac{4q}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (4.16)$$

eşitlikleri elde edilir.

4.4 SONLU ELEMENLAR FORMÜLASYONUNUN ELDE EDİLMESİ

Sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesi sırasında, Hamilton prensibini uygulamak için şekil fonksiyonlarında yapılan değişkenlerine ayırma yaklaşımı nedeniyle varyasyon alma işleminde varyasyon almaya eşdeğer olan Lagrange denklemi kullanılacaktır. Global sistem sonlu elemanlara bölündüğünden, serbest düğüm noktasındaki serbestlik derecelerinin sayısı kadar Lagrange denklemi toplanarak yazılır. Ancak bu yapılırsa elde edilen matris sistemin tümüne ait global matris olur. Ancak aranan bir tane sonlu elemana ait katılık, kütle ve aerodinamik matrisi olduğundan, toplam şeklinde yazılan Lagrange denkleminde, toplamı oluşturan bir sonlu elemana ait Lagrange denklemini yazılmalıdır. Dolayısıyla bu şekilde bir elemana ait karakteristik matrisler elde edilir. Tüm sisteme ait varyasyonel ifade

$$L=T-V \quad (4.17)$$

olmak üzere (4.11) Hamilton prensibi

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta L + \delta \bar{W}] dt = 0 \quad (4.18)$$

şeklinde yazılabilir. Sistem sonlu elemanlara bölündüğünden enerjiler ve virtüel işler bölünen elemanların enerjileri ve virtüel işlerinin toplamıdır. Daha açık ifade edilirse

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta L + \delta \bar{W}] = \sum \left(\int_{t_1}^{t_2} [\delta L_e + \delta \bar{W}_e] dt \right) \quad (4.19)$$

yazılabilir. Burada

$$L_e = T_e - U_e$$

şeklindedir. T_e bir elemanın kinetik enerjisi, U_e potansiyel enerjisi, $\delta \bar{W}_e$ ise aerodinamik hava yükünün bu eleman üzerinde yaptığı virtüel iştir. (4.19) eşitliğinin uygulanması global matrisin elde edilmesi anlamın taşımaktadır. Ancak tek bir elemana ait karakteristik matrisler gerekli olduğundan (4.19) toplam işareti altındaki tek bir ifadeyle ilgilenilmelidir. Dolayısıyla bir sonlu elemana ait karakteristik matrisler

$$J_e = \int_{t_1}^{t_2} [\delta L_e + \delta \bar{W}_e] dt \quad (4.20)$$

ifadesinde, eleman üzerindeki (4.8) ve (4.9) denklemleriyle tanımlı yer değiştirme fonksiyonlarının kullanılmasıyla elde edilebilir. Toplamı oluşturan (4.20) denkleminin varyasyonu sıfır olmayacağından bu ifade sifıra eşitlenmedi. Varyasyon almak için Euler-Lagrange formülasyonu kullanılırsa

$$J_e = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L_e}{\partial q_n} + Q_n^e \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada Q_n^e bir eleman üzerinde seçilen düğüm noktası yer değiştirmeleri (genelleştirilmiş koordinatlar,[17]) üzerinde virtüel işi gerçekleyen aerodinamik kuvvettir (genelleştirilmiş kuvvetler,[17]). Buradan Q_n^e şu şekilde elde edilebilir, bir yüzeyi akıma maruz iki boyutlu sistemler için (4.15)'den faydalananarak

$$Q_n(\delta_n w) = \iint_A \frac{2q}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta_n w) \cdot dx dy$$

yazılabilir. Burada $\delta_n w$ virtüel yer değiştirmedir, n indisi virtüel için hesaplandığı düğüm noktası yer değiştirmesini (genelleştirilmiş koordinatı) gösterir , dolayısıyla

$$\delta_n w = \delta_n \left(\sum_{m=1}^{20} \psi_m(x, y) q_m \right) = \psi_n(x, y) \delta q_n$$

olduğundan

$$Q_n^e = \iint_A \frac{2q}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial x} \psi_n(x, y) dx dy \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. (4.8) şekil fonksiyonu bu denklemde yerine koyulursa;

$$Q_n^e = \iint_A \frac{2q}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\sum_{m=1}^{20} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} q_m \right) \psi_n(x, y) dx dy$$

elde edilir. İki yüzü akıma maruz sistemler için ise

$$Q_n^e = \iint_A \frac{4q}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\sum_{m=1}^{20} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} q_m \right) \psi_n(x, y) dx dy \quad (4.23)$$

bulunur. Burada

$$\beta_1 = \frac{2.q}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad \text{veya} \quad \beta_2 = \frac{4.q}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

olmak üzere akımın belirtilen şekline göre

$$Q_n^e = \iint_A \beta_i \left(\sum_{m=1}^{20} \frac{\partial \psi_m}{\partial x} q_m \right) \psi_n(x, y) dx dy \quad (4.24)$$

İfadesi kullanılacaktır.

Şimdi daha önce elde edilen yaklaşım fonksiyonlarını enerji ve aerodinamik yük ifadelerinde yerine koyarak bir elemana ait kinetik enerji ifadesi için:

$$T_e = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left[\left(\sum_m \dot{q}_m \cdot \phi_m \right)^2 + \left(\sum_m \dot{q}_m \cdot \psi_m \right)^2 + \left(\sum_m \dot{q}_m \cdot \psi_m \right)^2 \right] dx dy \quad (4.25)$$

yazılabilir.

U_e iç enerji ifadesi ise:

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{1}{2} \iint_A \left\{ C \left[\left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\psi_m}{R} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \right. \right. \right. \\ & + \left. \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\psi_m}{R} \right) - \frac{1}{4} \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right)^2 \right] + D \left[\left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \right. \right. \\ & + \left. \sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \right) \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right) - \left(\sum_{m=1}^{20} q_m \cdot \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \right) \right] \right] \Big\} dx dy \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılabilir.

Aerodinamik kuvvet, yaklaşım fonksiyonları cinsinden daha önce (4.24)'de elde edilmişti Dolayısıyla kabuğa ait enerji ve hava yükü ifadeleri (4.8) ve (4.9) ile verilen şekil fonksiyonları cinsinden bulunmuş oldu.

Şimdi (4.25) kinetik enerji ifadesindeki zamana bağlı q_m ifadesi incelensin. Aeroelastik analizde yapının davranışı sabit genlikli harmonik hareket şeklinde olmayabilir. Bu yüzden serbest titreşim analizlerinde olduğu gibi $\sin(\omega t)$ gibi kabuller yapılamaz. Bunun yerine hareketin

$$q_m = e^{-i\omega \cdot t} \cdot \bar{q}_m \quad (4.27)$$

şeklinde olduğu kabul edilir. Genel halde ω 'nın iki bileşeni vardır.

$$\omega = \omega_R + i\omega_i \quad (4.28)$$

Burada ω_R sabit genlikli, kararlı hareketi gösteren reel kökü; ω_i ise kararlı olmayan duruma; flater durumuna işaret eden sanal köktür. Dolayısıyla özdeğer probleminin çözümü sonucunda sanal kökün bulunması flater durumunu gösterir.(4.28) eşitliği (4.27) de yerine koyulursa;

$$q_m = e^{-i(\omega_R + i\omega_i)t} \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) ifadesi Euler denkleminde faydalanarak şu şekilde de yazılabilir:

$$q_m = e^{\omega_i t} [i \sin(\omega_R t) + \cos(\omega_R t)] \quad (4.30)$$

(4.30) eşitliğinden de görüldüğü gibi köşeli parantez içindeki ifade kararlı ve harmonik bir hareketi işaret ederken, sanal kökün bulunması sistemin ıraksak bir davranışına neden olur. Dolayısıyla sanal kökün sıfır olarak bulunması durumunda sistem kararlıdır. Şimdi (4.27) eşitliğinden

$$\ddot{q}_m = \omega^2 q_m \quad (4.31)$$

yazılabilir. Bu ifade daha sonra kinetik enerji ifadesinde yerine koyulacak. Şimdi (4.24),(4.25) ve (4.26) denklemlerini (4.21)'de yerine koyarak

$$J_e = \iint_A \left\{ \sum_{m=1}^{20} (q_m [\rho h \omega^2 (\phi_m \phi_n + \phi_m \phi_n + \psi_m \psi_n) + C \left[\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} + \frac{\psi_n}{R} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (1 - \nu) \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\psi_n}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right) \right] \right] \right\}$$

$$+ D \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \right] + \beta_i \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \psi_n \right] dx dy \quad (4.32)$$

elde edilir. (4.32) ifadesinde integral ile toplam işareti yer değiştirebileceğinden, bu ifadede bir sonlu elemana ait karakteristik matrislerin elemanları bulunmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi bu matrisler kütle, katılık ve aerodinamik matrisler olarak adlandırılır.

(4.32) ifadesinden $[M^e]$ 'nin terimlerinin

$$M_{n,m}^e = \iint_A \rho h (\phi_m \phi_n + \psi_m \psi_n) dx dy \quad (4.33)$$

şeklinde olduğu görülebilir. Rijitlik matrisi $[K^e]$ 'nin terimlerinin

$$\begin{aligned} K_{n,m}^e = \iint_A \left\{ C \left[\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} + \frac{\psi_n}{R} \right) - (1-\nu) \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_n}{\partial y} + \frac{\psi_m}{R} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\psi_n}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right) \right] \right] \right. \\ \left. + D \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \right] \right] \right\} dx dy \quad (4.34) \end{aligned}$$

şeklinde bulunabileceği ve aerodinamik matris $[A^e]$ 'nin terimlerinin

$$A_{n,m}^e = \iint_A \beta_i \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \psi_n dx dy \quad (4.35)$$

olarak elde edilebileceği görülebilir. Yukarıdaki formülasyon bir elemana ait karakteristik matrislerin elemanlarını verir. Burada n indisi satırı ve m indisi sütunu gösterir.

Dolayısıyla bir elemana ait karakteristik matrislerin (4.33), (4.34) ve (4.35) ile elde edilebileceği görülmektedir. Global matris (4.19) denkleminin işaret ettiği gibi (4.33), (4.34) ve (4.35) ifadelerinin tüm elemanlarda hesaplanarak birleştirilmesiyle elde edilir. Dolayısıyla global kütle, katılık, ve aerodinamik matrisleri sırasıyla $[M]$, $[K]$, $[A]$ olmak üzere

$$[M] \leftarrow \sum_{e=1}^E [M^e]$$

$$[K] \leftarrow \sum_{e=1}^E [K^e]$$

$$[A] \leftarrow \sum_{e=1}^E [A^e]$$

ile elde edilir. Burada e üst indisli terimler (4.33), (4.34) ve (4.35) ile elde edilecek olan eleman matrisleridir. Toplam işaretinin sınırı E ise bölünen eleman sayısı kadardır.

Dolayısıyla flater analizi için

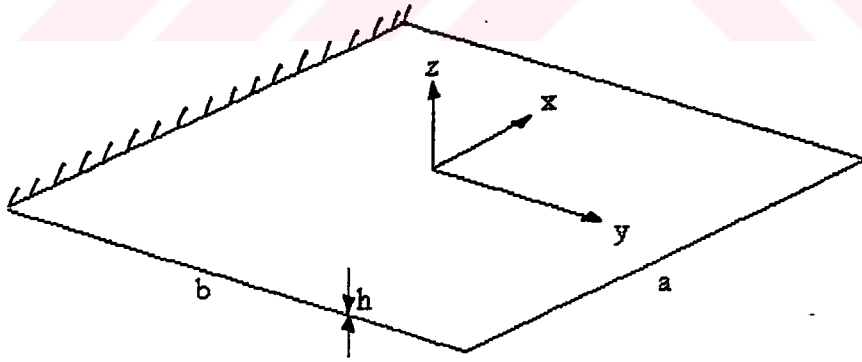
$$[K][q] + \omega^2 [M][q] + [A]q = 0$$

özdeğer problemi elde edilmiş olur. Bu denklemin sonucunda elde edilecek köklerin tümü reel ise sistem kararlı bir harmonik hareket yapar. Sonuçlarda sanal kökün görülmesi ise flater durumuna işaret edecektir.

BÖLÜM 5 UYGULAMA

Bu bölümde daha önce elde edilen sonlu elemanlara ve Ritz metoduna ait formülasyonların uygulamaları gösterilecektir. Elde edilen formülasyonlar FORTRAN ve MATLAB dillerinde yazılan programlarla otomatik olarak çalışmaktadır. Fortran dilinde yazılan sonlu elemanlar programı plak ve kabuklar için istenilen sınır koşullarını ve bölüm sayısını otomatik olarak gerçekleştirme serbest titreşim ve aeroelastik çözüm yapmaktadır. MATLAB'da Ritz metodu için yazılan program ise bir ucu ankastre mesnetli plaklar için otomatik olarak istenen sayına yaklaşım fonksiyonu olarak serbest titreşim ve aeroelastik çözüm yapmaktadır.

5.1 RİTZ METODUYLA BİR UCUNDAN ANKASTRE MESNETLİ PLAKLARIN FLATER SINIRININ BELİRLENMESİ



Şekil 5.1 Bir ucu ankastre mesnetli plak

Bölüm 4.1' de açıklandığı gibi Ritz metoduyla çözüm için geometrik sınır koşullarını sağlayan **yaklaşım fonksiyonları** seçilmelidir. Ancak daha önce bölüm 4.4'de sonlu elemanlar formülasyonunun elde edilmesi esnasında toplam simgesi altında olan ve geometrik sınır koşullarını sağladığı düşünülen simgesel fonksiyonlar kullanılmış ve bir formülasyon elde edilmişti. Dolayısıyla şimdi de geometrik sınır koşullarını sağlayan

fonksiyonların seçilmesi halinde Bölüm 4.4 de bulunan (4.33), (4.34) ve (4.35) formülasyonları kullanılabilir. Ayrıca Ritz metodu global çözüm yöntemi olduğundan bunların toplamını oluşturan (4.32) ifadesi şimdi sıfıra eşittir. Bu bölümde elde edilen formülasyon basık dairesel kabuklara ait olduğundan plak çözümü için yarıçap büyük bir değer alınır.

Bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş silindirik kabuklar için geometrik sınır koşulları (2.8) bölümündeki (b) halidir. Koordinat eksenini Şekil 5.1 deki gibi koyulursa bu sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları için

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_m \phi_m(x, y) \cdot q_m \\ v(x, y, t) &= \sum_m \phi_m(x, y) \cdot q_m \\ w(x, y, t) &= \sum_m \psi_m(x, y) \cdot q_m \end{aligned} \quad (5.1)$$

olmak üzere yaklaşım fonksiyonu aileleri için

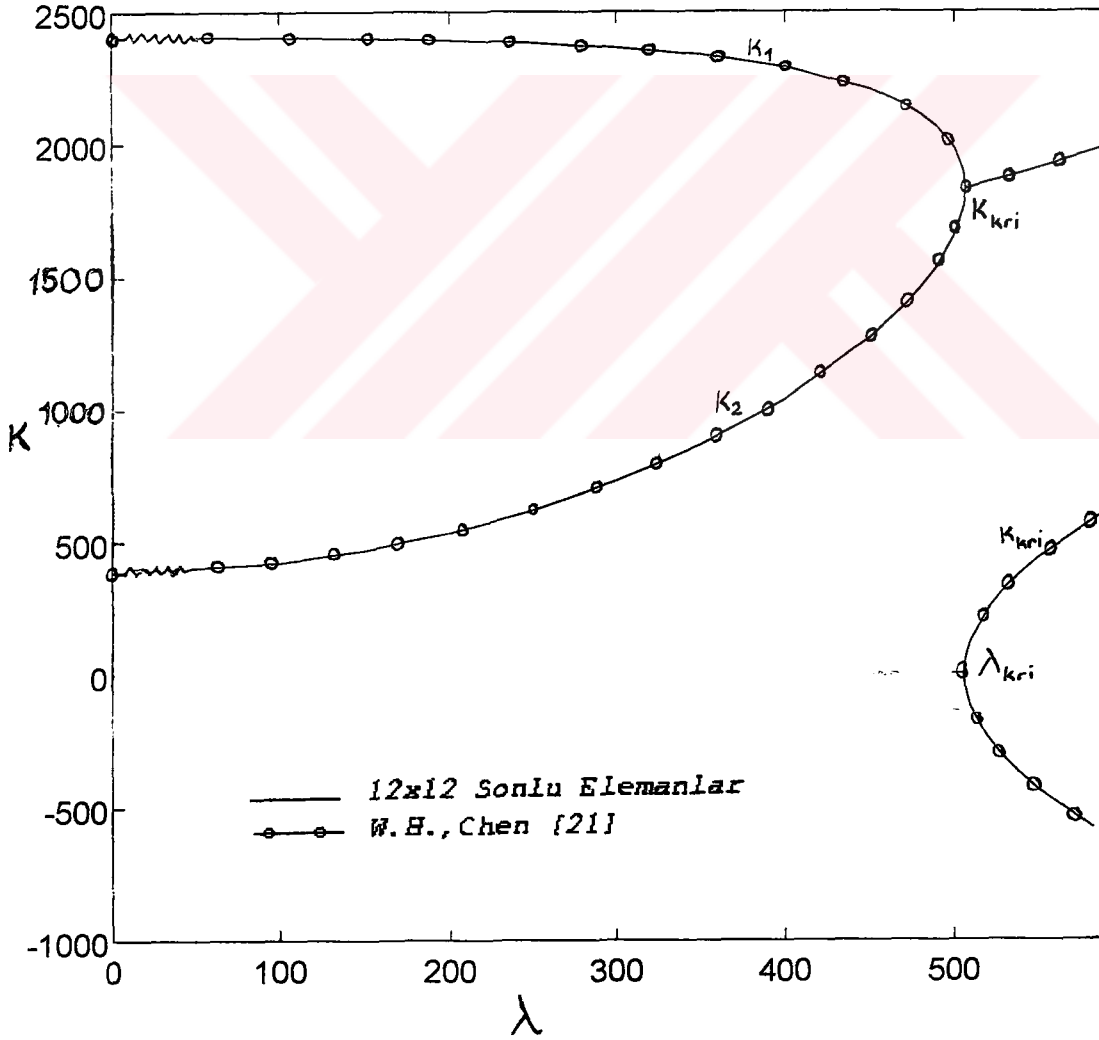
$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \left(\frac{y}{b}\right)^P \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^R & P=1,2,\dots,P & ; & R=0,1,\dots,R \\ \phi(x, y) &= \left(\frac{y}{b}\right)^S \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^T & S=1,2,\dots,S & ; & T=0,1,\dots,T \\ \psi(x, y) &= \left(\frac{y}{b}\right)^M \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^N & M=2,3,\dots,M & ; & N=0,1,\dots,N \end{aligned} \quad (5.2)$$

olarak alınabilir. (5.2) toplamına oluşturan polinomların tümü geometrik sınır koşullarını sağlarlar.

Ritz ile yapılan çözümde (5.2) polinomlarını istenen sayıda ve sıralı olarak seçen ve (4.34) ifadesinde yerine koyup ortaya çıkan özdeğer problemini çözen bir bilgisayar programı MATLAB dilinde yazılmıştır. Program bir ucu ankastre bağlı dikdörtgen plaklar için özdeğerlerin Mach sayısı ile değişimini çizilebilmekte ve istenen herhangi dinamik basınçta plağın titreşim frekanslarını vermektedir.

5.2 SONLU ELEMANLAR ÇÖZÜMÜ

Sonlu elemanlar çözümü için (4.33), (4.34) ve (4.35) matrisleri DERİVE adlı bir paket program yardımıyla hesaplanmıştır. Daha sonra çeşitli sınır koşullarını inceleyebilen bir program FORTRAN dilinde yazılmıştır. Program sistemi istenilen sayıda parçaya bölmekte, sınır koşullarını uygulamakta, global matrisi oluşturmakta ve elde edilen özdeğer problemini çözmektedir.



Şekil 5.2 Tüm kenarları basit mesnetli bir kare plağın flater davranışı

Şekil 5.2’de tüm kenarları basit mesnetli ve bir yüzü akıma maruz bir kare plak için boyutsuz dinamik basınç ve boyutsuz özdeğerlerin değişimi görülmektedir. Burada

$$\lambda = \frac{a^3}{D} \frac{2q_{\infty}}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

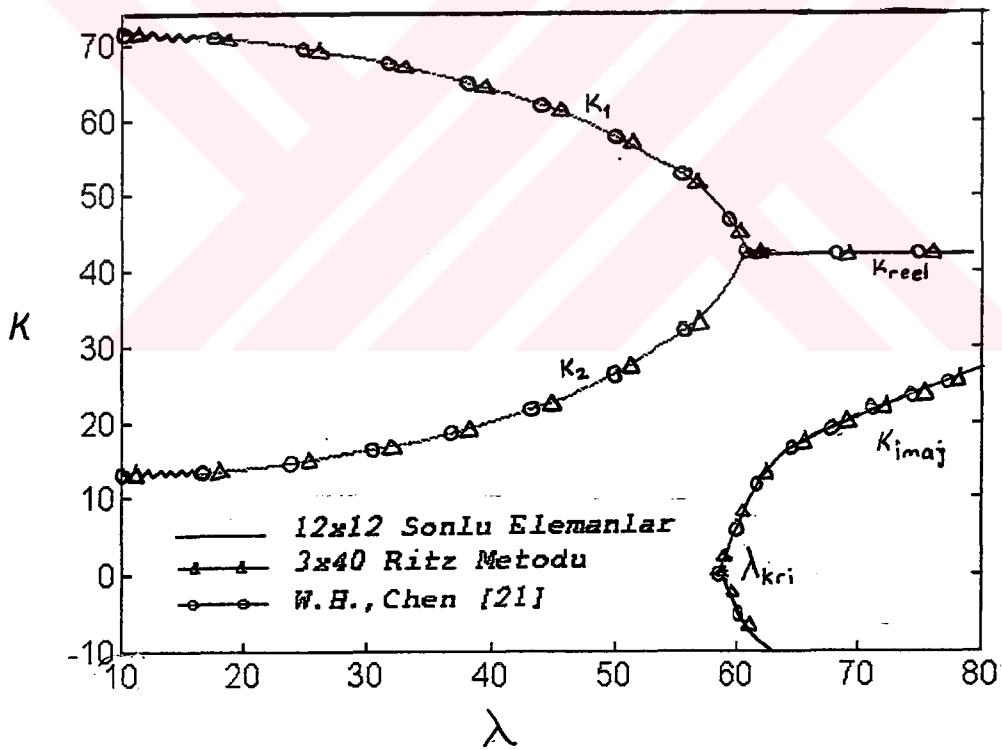
ve

$$\kappa = \omega^2 \frac{\rho h a^4}{D}$$

ile elde edilir. Bu örnekte olduğu gibi bir yüzü akıma maruz sistemlere panel adı verilir ve literatürde bu tip çözümler panel flater olarak adlandırılır. Çözümler sonlu elemanlar metodu ile elde edilmiştir. Sistem 12x12 (özdeş) parçaya bölünmüştür. Bu bölüm sayısındaki yakınsama serbest titreşim çözümleriyle oldukça iyi uyuştuğundan flater analizi de bu bölüm sayısında yapılmış ve elde edilen sonuçlar Chen [12] tarafından elde edilen sonuçlarla mükemmel bir uyum göstermiştir. Flater analizlerinde iyi bir çözüm için serbest titreşim çözümlerine mümkün olduğu kadar yaklaşmak gerekmektedir.

Şekil 5.2 bir taşıyıcı veya kontrol yüzeyinin tipik flater davranışdır. Boyutsuz dinamik basıncın sıfır olduğu durumda titreşim frekansı sistemin doğal frekansıdır. Dinamik basınç arttıkça iki kök birbirine yaklaşmaya başlar. Diğer köklerde ise değişim ihmal edilebilecek kadar küçük olmaktadır. Ancak flater sınırından sonra bu köklerdeki değişim biraz daha belli olmaktadır. Çözümlerden gözlemlendiği kadarıyla bu kökler ilk iki köktür. Dinamik basınç arttıkça ilk kökün değeri artmaya, ikinci kökün değeri ise azalmaya başlar. Bu olay şöyle açıklanabilir: Bir yapının flater davranışı aerodinamik kuvvetlere bağlıdır. Aerodinamik kuvvet ve momentler ise cismin hücum açısına bağlıdır. Bir yüzeyin hücum açısı ise onun burulma davranışı ile ilgilidir. Burulma rijitliğinin yüksek olması, hücum açısı yaratacak şekil değişimlerinin küçük olmasını, dolayısıyla aerodinamik kuvvet ve momentlerin küçük olmasını sağlar. Bu yüzden burulma rijitliği büyük yüzeylerde flater daha güç meydana gelir. Akım hızı

arttıkça aerodinamik kuvvetler, (örneğin belli bir hücum açısında) burulma kuvvetlerine yaklaşmaya başlar. Bu iki kuvvet ters yönlü olduklarından hava akımının artması burulma titreşimine neden olan elastik kuvvetlerin etkisini zayıflatır. Bunun sonucu olarak titreşim frekansı dinamik basınca bağlı olarak düşer. Dolayısıyla sistem bir bakıma zorlanmış titreşim altındadır. Eğilme ve burulma titreşimleri birbirlerine bağlı olduklarından eğilme titreşimleri de (bir bakıma zorlanmış titreşim frekanslarına) burulma titreşim frekansına yaklaşmaya başlar. Kritik dinamik basınçta aerodinamik kuvvet ve momentler elastik burulma kuvvetlerinden daha büyük olmaya başlamıştır. Serbest titreşim frekansını belirleyen elastik kuvvetler karşısında, elastik kuvvetlere ters yönlü ve daha büyük olan aerodinamik kuvvetler sistemi serbest titreşimden karakterinden uzaklaştırır ve sistem ıraksak bir davranışa girer. ıraksak davranışı belirleyen imajiner kökler görülmeye başlar (Şekil 5.2).



Şekil 5.3 Bir yüzü akıma maruz ve bir ucu ankastre mesnetli bir kare plağın flater davranışı

Şekil 5.3 Bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş bir yüzü akıma maruz bir kare plağın flater davranışdır. Ritz ve sonlu elemanlarla yapılan çözümler birbirlerine ve referans [21]'de elde edilen sonuçlarla mükemmel biçimde uyuşmaktadır. Sonlu elemanlar

çözümü sistemi 12x12 bölümle yapılmıştır. Ritz çözümünde ise her yer değiştirme fonksiyonu için 40 adet yaklaşım fonksiyonu alınmıştır. Polinom ailelerinin seçiminde en küçük mertebeden büyüğe doğru gidilmesine dikkat edilmiştir. Bu örnekte de görüldüğü gibi flater karakteri Şekil 5.2’de olduğu gibidir.

Şekil 5.4 İki yüzü akıma maruz bir taşıyıcı veya kontrol yüzeyinin flater davranışının Mach sayısı ile değişimini göstermektedir. Sisteme ait özellikler:

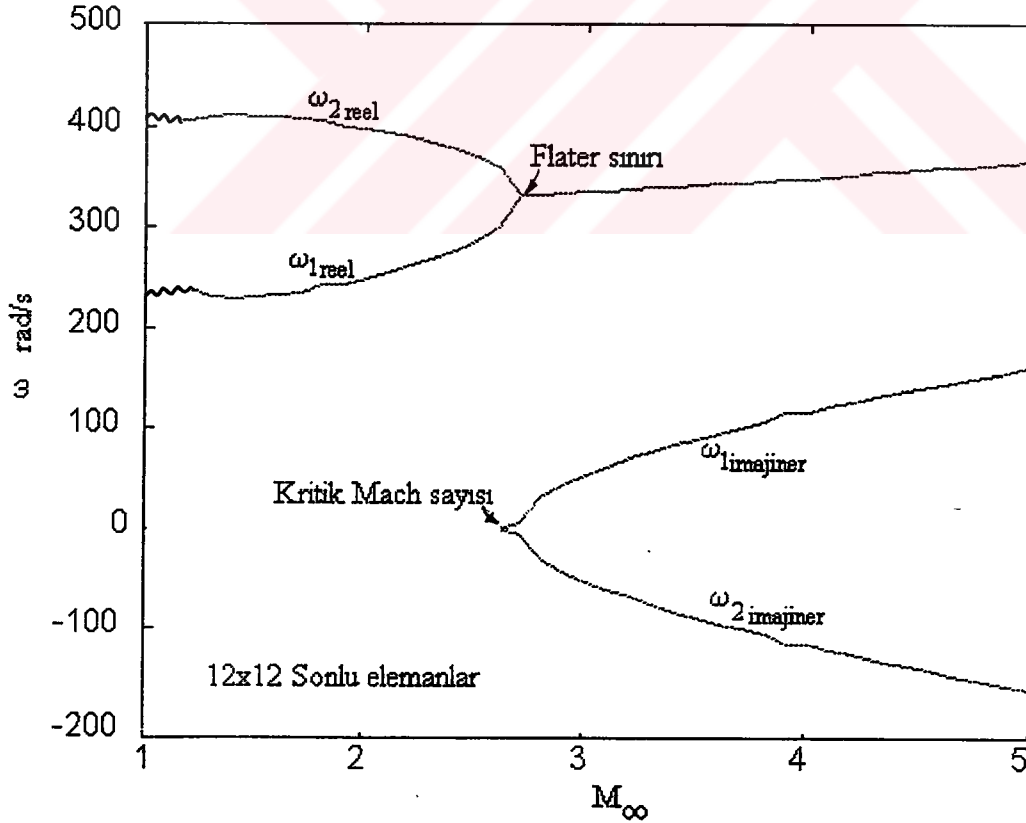
$$E=2,1.10^{11} \text{ N / m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$a=b=0,3 \text{ m}$$

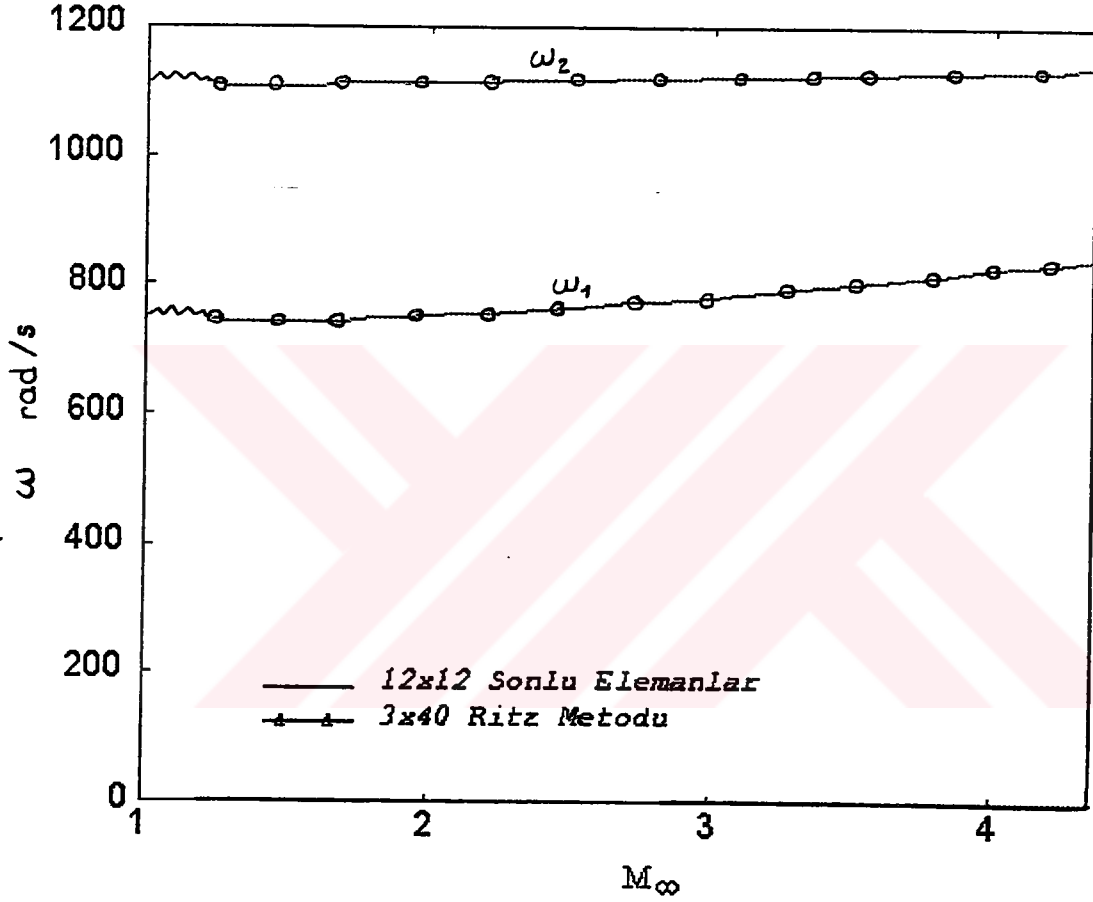
$$h=0,003 \text{ m}$$

olarak girilmiştir.



Şekil 5.4 İki yüzü akıma maruz ve bir ucu ankastre mesnetli bir plağın flater davranışı

Bu değerler için flater 3,5 Mach'da oluşmaktadır. İki yüzü akıma maruz sistemler tahmin edilebileceği gibi bir yüzü akıma maruz sistemlere göre daha çabuk flatere yakalanır. Bunun sebebi aerodinamik kuvvetlerin aynı dinamik basınçta iki katına çıkması dolayısıyla elastik kuvvetleri daha çabuk etkileyebilmesidir.



Şekil 5.5 $a/b=2$ olan alüminyum plak için flater karakteri

Şekil 5.5 özellikleri

$a=0,3$ m

$b=0,15$ m

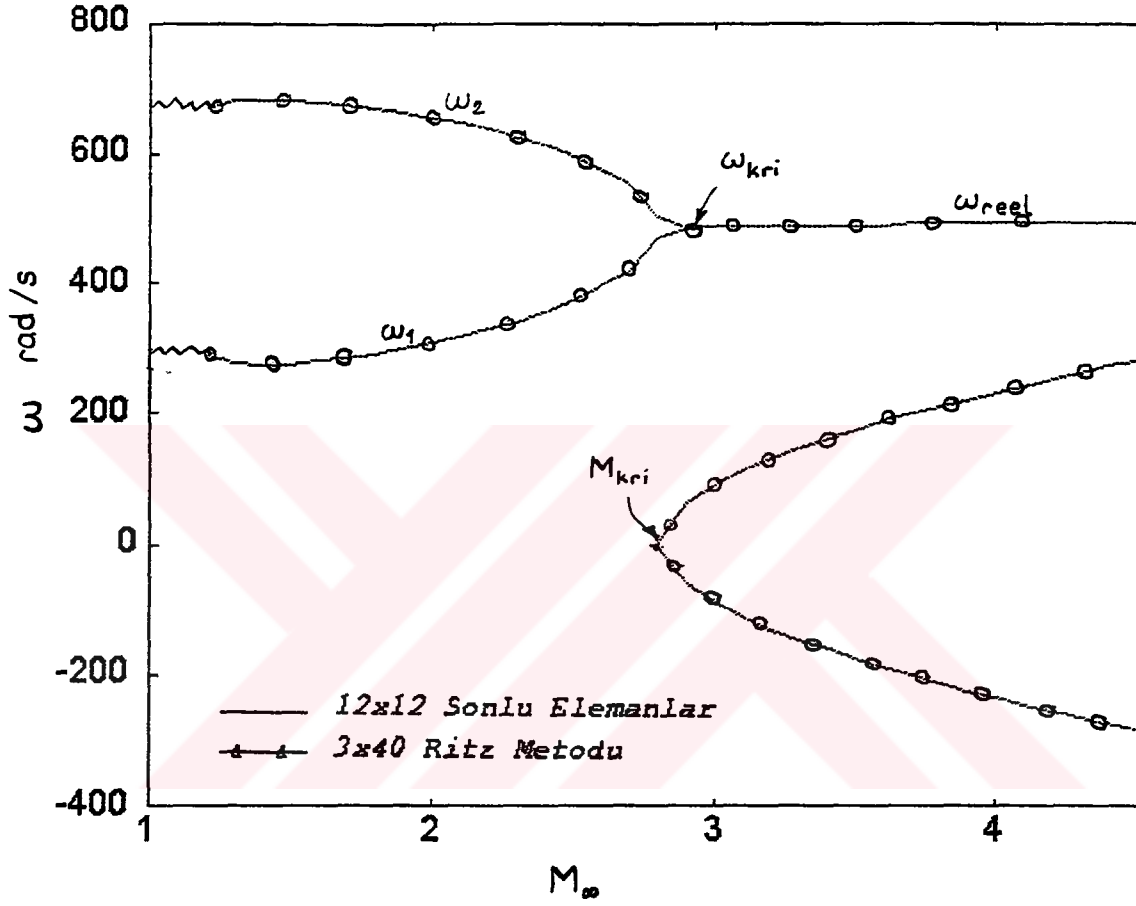
$h=0,003$ m

$E=7,0 \cdot 10^{10}$ N/m²

$\omega_1 = 718,5$ rad / s

$\omega_2 = 1101,4$ rad / s

olan bir plağın flater davranışdır. Burada ω_1 ve ω_2 plağın en küçük ilk iki doğal frekansdır. İki yüzü akıma maruz bu yüzey düşük açıklık oranına sahip bir yüzeydir.



Şekil 5.6 $a/b=0,5$ olan alüminyum plak için flater karakteri

Şekil 5.6 ise

$a=0,15$ m

$b=0,3$ m

$h=0,003$ m

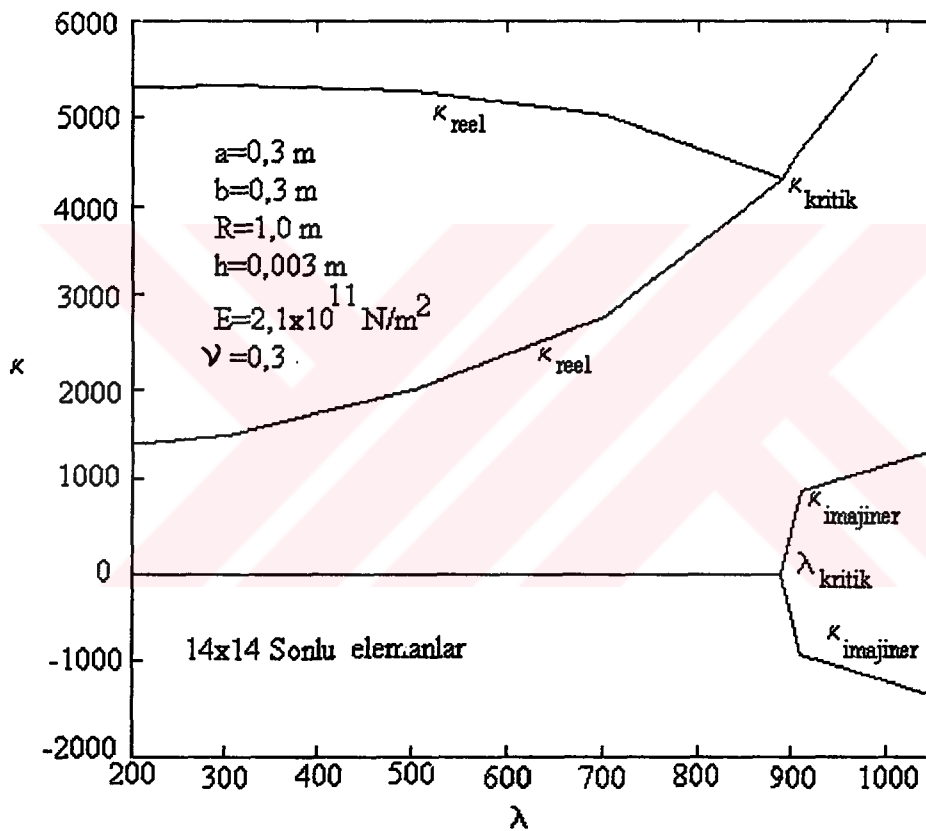
$E=7,0 \cdot 10^{10}$ N/m²

$\omega_1 = 177,3$ rad/s

$\omega_2 = 762,6$ rad/s

olan bir plağın flater davranışdır. Görüldüğü gibi düşük açıklık oranına sahip (dolayısıyla yüksek burulma rijitliğine sahip) plaklarda flater $M=5,0$ 'da dahi görülmezken, yüksek açıklık oranlı plak $M=2,75$ 'de flater oluşmuştur.

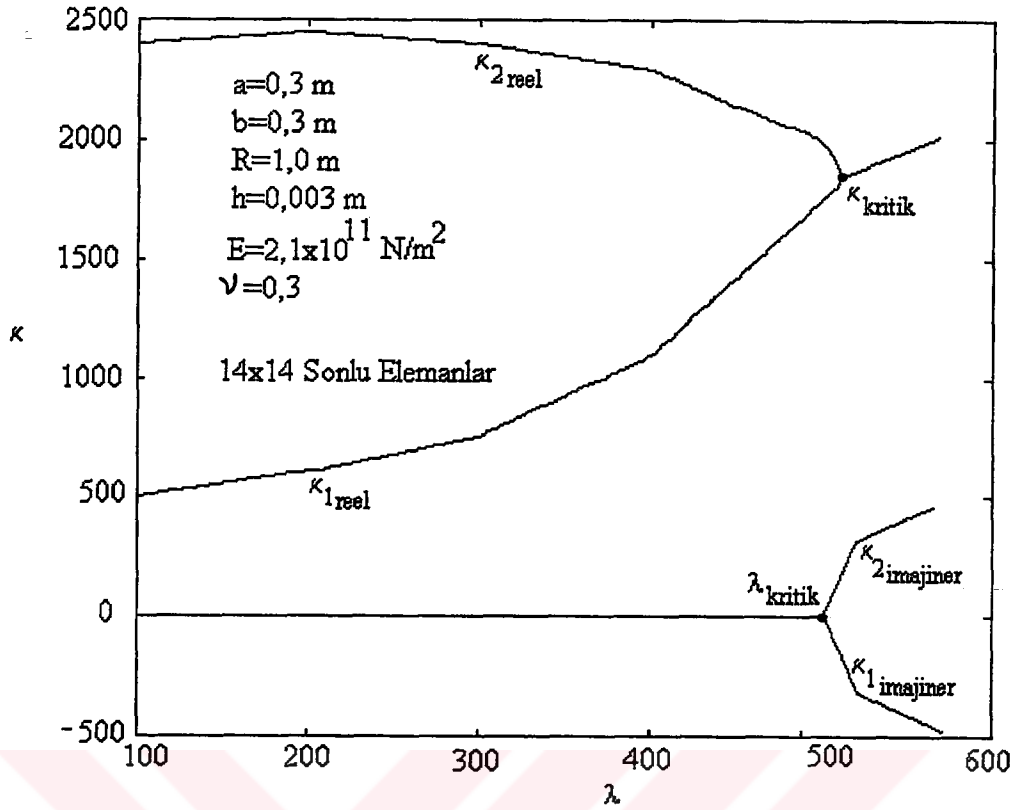
Basık kabukların aeroelastik analizi için seçilen kabukların sınır şartları tüm kenarları ankastre ve tüm kenarları basit mesnetli sistemlerdir. Şekil 5.7 tüm kenarları ankastre mesnetli basık dairesel silindirik kabuk için flater karakteridir. Çözümler sonlu elemanlarla ve 14×14 bölümle elde edilmiştir.



Şekil 5.7 Tüm kenarları ankastre mesnetli basık dairesel silindirik kabuğun flater karakteri

Şekil 5.8' de ise tüm kenarları basit mesnetli basık dairesel silindirik kabuğun flater karakteri görülmektedir.

Aynı boyutlara sahip kabukların, plaklardan daha geç flatere girdiği gözlemlenebilir.



Şekil 5.8 Tüm kenarları basit mesnetli basık dairesel silindirik kabuk için flater karakteri

Kabuklara ait çözümlerde hem Ritz metodunda hem de sonlu elemanlar metodunda bir takım sorunlarla karşılaşmıştır.

Ritz metoduyla yapılan kabuk çözümlerinde özdeğer matrisinde yakınsama ve stabilite problemleri ortaya çıkmıştır. Elde edilen sonuçlar kabuk çözümlerine bazı frekanslara oldukça iyi yaklaşmakta (örneğin birinci, üçüncü frekanslara %1 yakınsama), fakat bazı ara frekanslara kötü yaklaşmaktadır (örneğin en kötü ikinci frekansa %15 yakınsama, sekizinci frekansa %4 yakınsama). Alınan yaklaşım fonksiyonlarındaki artış özdeğer matrisinin stabilitesini daha da bozduğundan serbest titreşim analizlerinde dahi imajiner kökler görülmektedir. Bu stabilite sorunları bazı yöntemlerle giderilebilir (Singular value decomposition). Ancak bu çalışmada bu tip matematiksel yöntemlere gidilememiştir.

Sonlu eleman çözümleri büyük yarıçaplı kabuklarda oldukça sonuçlar vermektedir. Ancak yarı çap küçüldükçe yakınsama problemleri ortaya çıkmaktadır. Daha çok elemana bölümden küçük yarıçaplar için de bir yakınsama gözlemlenmekle birlikte yüksek bölüm sayıları bilgisayar kapasitesini zorlamaktadır. Bu problemin

düğüm noktası sayısı yüksek dolayısıyla daha güçlü kabuk elemanlarla çözülebileceği düşünülmektedir.



BÖLÜM 6 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çeşitli sınır şartlarına sahip plak ve basık dairesel silindirik kabukların flater sınırlarının belirlendiği bu çalışmada katı cisim modeli Donnel-Mushtari ince kabuk teorisiyle, aerodinamik model ise lineerleştirilmiş ses üstü akım teorisiyle yapılmıştır.

Çözüm yöntemi sonlu elemanlar ve Ritz metodu kullanılmıştır. Flater analizlerinde kullanılan nümerik çözümlerin sağlıklı olabilmesi için serbest titreşim çözümlerine mümkün olduğu kadar yaklaşmak gerekmektedir. Plak çözümleri için somnlu elemanlarda 12x12 bölüm, Ritz metodunda ise 3x40 adet yaklaşım fonksiyonu serbest titreşim için çok iyi sonuç verdiğiinden flater analizleri de bu yaklaşımla yapılmıştır. Kabuk çözümlerinde ise 14x14 bölüm serbest titreşim çözümleri için oldukça iyi sonuçlar verdiğiinden flater analizleri de bu bölüm miktarıyla yapılmıştır.

Flater olayı, aerodinamik kuvvetlerdeki hücum açısına bağlı artışın, elastik kuvvetlerdeki hücum açısına bağlı artıştan daha büyük olmasının bir sonucudur. Esasen belli bir hücum açısında elastik burulma kuvvetlerinin değeri sabittir. Ancak aerodinamik kuvvetler ise bu hücum açısında dinamik basıncın artmasıyla artarlar. Dolayısıyla serbest titreşim karakterini belirleyen elastik kuvvetler kendilerine ters yönlü olan ve dinamik basınca bağlı olarak giderek büyüyen aerodinamik kuvvetlerle etkileşim halindedir. Atalet terimleri ise bu iki kuvvetten baskın olanın bir sonucu olarak ortaya çıkar. Flater öncesinde tüm hücum açılarında elastik kuvvetler daha büyük değerdendirler, bu yüzden bu bölgede hareket stabil harmonik harekettir. Ancak flater noktasından sonra aerodinamik kuvvetler elastik kuvvetlerden daha büyük bir değer alır. Dolayısıyla bu noktadan sonra harmonik hareketi belirleyen elastik kuvvetler aerodinamik kuvvetler tarafından bastırılır ve sistemin karakteri stabil olmaktan çıkar.

Flater analizleri bir dizayn parametresi olarak ele alınırsa, boyutlandırma için açıklık oranının diğer tüm parametrelerden önemli olduğu, elde edilen sonuçlardan görülmektedir. Düşük açıklık oranına sahip bir yüzeyin flater yüzeyi burulma

elastikiyetinin büyük olması nedeniyle yüksek açıklık oranına sahip bir yüzeye göre çok daha yüksektir. Dolayısıyla düşük açıklık oranlı yüzeyler veya burulma rijitliğini artırıcı yönde yapılan kompozit yüzeyler, sistemi flatere karşı daha emniyetli bir hale getirir. Ayrıca elde edilen sonuçlardan, bir plakla aynı boyutlara ve malzemeye sahip kabuk için flaterin daha geç meydana geldiği de görülmektedir.

Bu çalışmada yapılan modellemeler esnasında hesaplara alınmayan sıcaklık etkileri, ön gerilmeli sistemler, kompozit takviyeli sistemler, nem etkileri daha sonra ele alınması anlamlı problemlerdir.



KAYNAKLAR

- [1] **Ashley, H. and Zartarian, G.** Piston Theory- A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.23, Dec. 1956, pp. 1109-1118.
- [2] **Dowell, E.H. and Voss, H.M.**, Theoretical and Experimental Panel Flutter Studies in the Mach Number Range 1.0 to 5.0, AIAA Journal, Vol.3, ec. 1965, pp. 1267-1275.
- [3] **Bisplinghoff, R.L., and Ashley, H.**, Principles of Aeroelasticity, Dover Publications, Inc., N.Y., 1975.
- [4] **Dowell, E.H.**, Aeroelasticity of Plates and Shells, Noordhoff International Publishing, Netherlands, 1975.
- [5] **Han, A.D and Yang, T.Y.**, Nonlinear Panel Flutter Using High-Order triangular Finite Elements, AIAA, Vol.11, No.10, October 1983.
- [6] **Voss, H.M.**, The effect of an External Supersonic Flow on the Vibration Characteristics of thin Cylindrical Shells, Journal of the Aerospace Science, Vol.28, No.12, pp.945-956. 1961.
- [7] **Dowell, E.H.**, Panel Flutter: A review of the Aeroelastic Stability of Plates and Shells, AIAA, Vol.8, No:3, pp.385,399, 1970.
- [8] **Voss, H.M. and Dowell, E.H.**, Effect of Aerodynamic Damping on Flutter of Thin Panels, AIAA Journal, Vol.2, 1964, pp. 119-120.
- [9] **Bismarck-Nasr, M.N.**, Analysis of Aeroelasticity of Plates and Shells, Applied Mechanics Reviews Vol.45, No:12, pt..1992. pp.461-482
- [10] **Girkman, K.**, Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, Cilt II, İTÜ Baskısı, 1965, sayfa .449.
- [11] **Mecitoğlu, Z., Durak B.**, Düşük Açıklık Oranına Sahip Eğrilikli Plakların Lineer Aeroelastik Analizi, TÜBİTAK-Sage I. Rapor, 1996, sayfa 2
- [12] **Lee, J.K., Leissa, A.W., Wang, A.J.**, Vibrations of Cantilevered Circular Cylinder Shells: Shallow Versus Deep Shell Theory, Int. J. Mech. Sci., Vol.25., No:5, pp. 361-383, 1983.

- [13] **John, D. Anderson, J.** Fundamentals of Aerodynamic, publishing McGraw-Hill, New York, 1985
- [14] **Yuan, S.W.**, Foundation of Fluid Mechanics, published by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970
- [15] **Reddy, J.N.** ,An Introduction To The Finite Element Method, publishing McGraw-Hill, New York, 1993
- [16] **Gérardin, M. and Rixen, D.** ,Mechanical Vibrations, published in the series Physique Fondamentale et Appliquée, France, 1994
- [17] **Pasin, F.** Mekanik sistemler Dinamiği, İTÜ basımı, 1994
- [18] **Reddy, J.N.**, Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, publishing McHraw-Hill, New York, 1984
- [19] **Weaver, W. and Johnston, P.**, Finite Element For Structral Analysis, publishing Prentice-Hall, 1984
- [20] **Chandrupatla, T. and Belegundu, A.**, Introduction To Finite Elements in Engineering, publishing Prentice-Hall, 1991

EKLER



EK-A FLATER ANALİZİ İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMI

Aşağıdaki bilgisayar programı bir ucu ankastre mesnetli plaklar için Ritz metoduyla serbest titreşim ve flater analizi yapmaktadır. Program Matlab dilinde yazılmıştır.

```
%*****  
% ****Uçak Müh. Burak DURAK****  
%*****  
% Sisteme ait büyüklükler giriliyor  
format long e  
  
Ms=0;  
rh=1.24;  
ao=385;  
  
ak=0.1;  
bk=0.1;  
R=9.0e+32;  
ro=2700;  
E=7.0e+10;  
ho=0.003;  
  
U=Ms*ao;  
beta=4*((1/2)*rh*U^2)/((Ms^2-1)^0.5);  
nabla=beta*a^3/D;  
  
a=ak;  
b=asin(bk/(2*R))*2*R;  
Mo=ro*ho;  
v=0.3;  
C=E*ho/(1-v^2);  
D=E*ho^3/(12*(1-v^2));  
  
% Fonksiyonlar simgeselleştiriliyor  
for j=1:6;  
for i=1:6;  
f(i)=j;  
f(i+6*j)=j;  
e(i)=0;  
e(i+6*j)=i;  
end  
end
```

```

for i=43:126;
e(i)=3;
f(i)=3;
%c1(i)=0;
end

```

```

for i=1:42
%c1(i)=1;
%c2(i)=0;
%c3(i)=0;
g(i)=3;
h(i)=3;
p(i)=3;
k(i)=3;
end

```

```

for i=43:84
g(i)=e(i-42);
h(i)=f(i-42);
%c2(i)=1;
%c3(i)=0;
p(i)=3;
k(i)=3;
end

```

```

for i=85:126
g(i)=3;
h(i)=3;
p(i)=e(i-84);
k(i)=f(i-84)+1;
%c2(i)=0;
%c3(i)=1;
end

```

% Boyutsuzlaştırma yapılıyor

```

for i=43:126;
c1(i)=0;
end

```

```

for i=1:42
c1(i)=1/(a^e(i)*b^f(i));
c2(i)=0;
c3(i)=0;
end

```

```

for i=43:84
c2(i)=1/(a^g(i)*b^h(i));

```

```
c3(i)=0;
end
```

```
for i=85:126
c2(i)=0;
c3(i)=1/(a^p(i)*b^k(i));
end
```

% Kütle ve rijitlik matrisleri oluşturuluyor

```
for n=1 : 115
for m=1 : 115
```

```
M(n,m)=Mo*(c1(m)*c1(n)*a^(e(m)+e(n)+1)*b^(f(m)+f(n)+1)/((e(m)+e(n)+1)*(f(m)+f(n)+1))+c2(m)*c2(n)*a^(g(m)+g(n)+1)*b^(h(m)+h(n)+1)/((g(m)+g(n)+1)*(h(m)+h(n)+1))+c3(m)*c3(n)*a^(p(m)+p(n)+1)*b^(k(m)+k(n)+1)/((p(m)+p(n)+1)*(k(m)+k(n)+1)));
```

```
if n==1 | m==1 | n==2 | m==2 | n==3 | m==3 | n==4 | m==4 | n==5 | m==5 | n==6 | m==6
```

```
K1(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K1(n,m)=c1(m)*c1(n)*e(m)*e(n)*a^(e(m)+e(n)-1)*b^(f(m)+f(n)+1)/((e(m)+e(n)-1)*(f(m)+f(n)+1));
```

```
end
```

```
if m==1 | m==2 | m==3 | m==4 | m==5 | m==6
```

```
K2(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K2(n,m)=c1(m)*c2(n)*e(m)*h(n)*a^(e(m)+g(n))*b^(f(m)+h(n))/((e(m)+g(n))*(f(m)+h(n)));
```

```
end
```

```
if m==1 | m==2 | m==3 | m==4 | m==5 | m==6
```

```
K3(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K3(n,m)=c1(m)*c3(n)*e(m)*a^(e(m)+p(n))*b^(f(m)+k(n)+1)/(R*(e(m)+p(n))*(f(m)+k(n)+1));
```

```
end
```

```
if n==1 | n==2 | n==3 | n==4 | n==5 | n==6
```

```
K4(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K4(n,m)=c2(m)*c1(n)*h(m)*e(n)*a^(g(m)+e(n))*b^(h(m)+f(n))/((g(m)+e(n))*(h(m)+f(n)));
```

end

$$K5(n,m)=c2(m)*c2(n)*h(m)*h(n)*a^{(g(m)+g(n)+1)}*b^{(h(m)+h(n)-1)/((g(m)+g(n)+1)*(h(m)+h(n)-1))};$$

$$K6(n,m)=c2(m)*c3(n)*h(m)*a^{(g(m)+p(n)+1)}*b^{(h(m)+k(n))/(R*(g(m)+p(n)+1)*(h(m)+k(n)))};$$

if n==1 | n==2 | n==3 | n==4 | n==5 | n==6

$$K7(n,m)=1e-20;$$

else

$$K7(n,m)=c3(m)*c1(n)*e(n)*a^{(p(m)+e(n))}*b^{(k(m)+f(n)+1)/(R*(p(m)+e(n))*(k(m)+f(n)+1))};$$

end

$$K8(n,m)=c3(m)*c2(n)*h(n)*a^{(p(m)+g(n)+1)}*b^{(k(m)+h(n))/(R*(p(m)+g(n)+1)*(k(m)+h(n)))};$$

$$K9(n,m)=c3(m)*c3(n)*a^{(p(m)+p(n)+1)}*b^{(k(m)+k(n)+1)/(R^2*(p(m)+p(n)+1)*(k(m)+k(n)+1))};$$

if n==1 | n==2 | n==3 | n==4 | n==5 | n==6

$$K10(n,m)=1e-20;$$

else

$$K10(n,m)=c2(m)*c1(n)*h(m)*e(n)*a^{(g(m)+e(n))}*b^{(h(m)+f(n))/((g(m)+e(n))*(h(m)+f(n)))};$$

end

if m==1 | m==2 | m==3 | m==4 | m==5 | m==6

$$K11(n,m)=1e-20;$$

else

$$K11(n,m)=c1(m)*c2(n)*e(m)*h(n)*a^{(e(m)+g(n))}*b^{(f(m)+h(n))/((e(m)+g(n))*(f(m)+h(n)))};$$

end

if n==1 | n==2 | n==3 | n==4 | n==5 | n==6

$$K12(n,m)=1e-20;$$

else

$$K12(n,m)=c3(m)*c1(n)*e(n)*a^{(p(m)+e(n))}*b^{(k(m)+f(n)+1)/(R*(p(m)+e(n))*(k(m)+f(n)+1))};$$

end

if m==1 | m==2 | m==3 | m==4 | m==5 | m==6

$$K13(n,m)=1e-20;$$

else

$$K13(n,m)=c1(m)*c3(n)*e(m)*a^{(e(m)+p(n))}*b^{(f(m)+k(n)+1)/(R*(e(m)+p(n))*(f(m)+k(n)+1))};$$

end

```
K14(n,m)=c1(m)*c1(n)*f(m)*f(n)*a^(e(m)+e(n)+1)*b^(f(m)+f(n))/((e(m)+e(n)+1)*(f(m)+f(n)));
```

```
if n==43 | n==44 | n==45 | n==46 | n==47 | n==48
```

```
K15(n,m)=0;
```

```
else
```

```
K15(n,m)=c1(m)*c2(n)*f(m)*g(n)*a^(e(m)+g(n))*b^(f(m)+h(n))/((e(m)+g(n))*(f(m)+h(n)));
```

```
end
```

```
if m==43 | m==44 | m==45 | m==46 | m==47 | m==48
```

```
K16(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K16(n,m)=c2(m)*c1(n)*g(m)*f(n)*a^(g(m)+e(n))*b^(h(m)+f(n))/((g(m)+e(n))*(h(m)+f(n)));
```

```
end
```

```
if m==43 | m==44 | m==45 | m==46 | m==47 | m==48 | n==43 | n==44 | n==45 | n==46 | n==47 | n==48
```

```
K17(n,m)=1e-20;
```

```
%A(n,m)=0;
```

```
else
```

```
K17(n,m)=c2(m)*c2(n)*g(m)*g(n)*a^(g(m)+g(n)-1)*b^(h(m)+h(n)+1)/((g(m)+g(n)-1)*(h(m)+h(n)+1));
```

```
end
```

```
if m==85 | m==86 | m==87 | m==88 | m==89 | m==90 | n==85 | n==86 | n==87 | n==88 | n==89 | n==90 | n==91 | n==97 | n==103 | n==109 | n==115 | n==121 | m==91 | m==97 | m==103 | m==109 | m==115 | m==121
```

```
K18(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K18(n,m)=c3(m)*c3(n)*p(m)*p(n)*(p(m)-1)*(p(n)-1)*a^(p(m)+p(n)-3)*b^(k(m)+k(n)+1)/((p(m)+p(n)-3)*(k(m)+k(n)+1));
```

```
end
```

```
if m==85 | m==86 | m==87 | m==88 | m==89 | m==90 | m==91 | m==97 | m==103 | m==109 | m==115 | m==121
```

```
K19(n,m)=1e-20;
```

```
else
```

```
K19(n,m)=c3(m)*c3(n)*p(m)*h(n)*(p(m)-1)*a^(p(m)+g(n)-1)*b^(k(m)+h(n))/(R*(p(m)+g(n)-1)*(k(m)+h(n)));
```

```
end
```

```
if m==85 | m==86 | m==87 | m==88 | m==89 | m==90 | m==91 | m==97 | m==103 | m==109 | m==115 | m==121
```

K20(n,m)=1e-20;

else

$K20(n,m)=c3(m)*c3(n)*p(m)*k(n)*(p(m)-1)*(k(n)-1)*a^{(p(m)+p(n)-1)*b^{(k(m)+k(n)-1)/((p(m)+p(n)-1)*(k(m)+k(n)-1))}};$

end

if n==85 | n==86 | n==87 | n==88 | n==89 | n==90 | n==91 | n==97 | n==103 |
n==109 | n==115 | n==121

K21(n,m)=1e-20;

else

$K21(n,m)=c2(m)*c3(n)*h(m)*p(n)*(p(n)-1)*a^{(g(m)+p(n)-1)*b^{(h(m)+k(n))/(R*(g(m)+p(n)-1)*(h(m)+k(n)))}};$

end

$K22(n,m)=c2(m)*c2(n)*h(m)*h(n)*a^{(g(m)+g(n)+1)*b^{(h(m)+h(n)-1)/(R^2*(g(m)+g(n)+1)*(h(m)+h(n)-1))}};$

$K23(n,m)=c2(m)*c3(n)*h(m)*k(n)*(k(n)-1)*a^{(g(m)+p(n)+1)*b^{(h(m)+k(n)-1)/(R*(g(m)+p(n)+1)*(h(m)+k(n)-2))}};$

if n==91 | n==97 | n==103 | n==109 | n==115 | n==121 | n==85 | n==86 | n==87 |
n==88 | n==89 | n==90

K24(n,m)=1e-20;

else

$K24(n,m)=c3(m)*c3(n)*k(m)*p(n)*(k(m)-1)*(p(n)-1)*a^{(p(m)+p(n)-1)*b^{(k(m)+k(n)-1)/((p(m)+p(n)-1)*(k(m)+k(n)-1))}};$

end

$K25(n,m)=c3(m)*c2(n)*k(m)*h(n)*(k(m)-1)*a^{(p(m)+g(n)+1)*b^{(k(m)+h(n)-2)/(R*(p(m)+g(n)+1)*(k(m)+h(n)-2))}};$

$K26(n,m)=c3(m)*c3(n)*k(m)*k(n)*(k(m)-1)*(k(n)-1)*a^{(p(m)+p(n)+1)*b^{(k(m)+k(n)-3)/((p(m)+p(n)+1)*(k(m)+k(n)-3))}};$

if n==85 | n==86 | n==87 | n==88 | n==89 | n==90 | n==91 | n==97 | n==103 |
n==109 | n==115 | n==121

K27(n,m)=1e-20;

else

$K27(n,m)=c3(n)*c2(m)*p(n)*h(m)*(p(n)-1)*a^{(p(n)+g(m)-1)*b^{(k(n)+h(m))/(R*(p(n)+g(m)-1)*(k(n)+h(m)))}};$

end

if m==85 | m==86 | m==87 | m==88 | m==89 | m==90 | m==91 | m==97 | m==103 |
| m==109 | m==115 | m==121

K28(n,m)=1e-20;

else

$K28(n,m)=c3(m)*c2(n)*p(m)*h(n)*(p(m)-1)*a^{(p(m)+g(n)-1)*b^{(k(m)+h(n))/(R*(p(m)+g(n)-1)*(k(m)+h(n)))}};$

end

if $n=85 \mid n=86 \mid n=87 \mid n=88 \mid n=89 \mid n=90 \mid n=91 \mid n=97 \mid n=103 \mid$
 $n=109 \mid n=115 \mid n=121$

$K_{29}(n,m)=1e-20;$

else

$K_{29}(n,m)=c_3(n)*c_3(m)*k(m)*p(n)*(k(m)-1)*(p(n)-1)*a^{(p(n)+p(m)-1)}$
 $*b^{(k(n)+k(m)-1)/((p(n)+p(m)-1)*(k(n)+k(m)-1))};$

end

if $m=85 \mid m=86 \mid m=87 \mid m=88 \mid m=89 \mid m=90 \mid m=91 \mid m=97 \mid m=103$
 $\mid m=109 \mid m=115 \mid m=121$

$K_{30}(n,m)=1e-20;$

else

$K_{30}(n,m)=c_3(m)*c_3(n)*p(m)*k(n)*(p(m)-1)*(k(n)-1)*a^{(p(m)+p(n)-1)}$
 $*b^{(k(m)+k(n)-1)/((p(m)+p(n)-1)*(k(m)+k(n)-1))};$

end

if $n=43 \mid n=44 \mid n=45 \mid n=46 \mid n=47 \mid n=48 \mid m=43 \mid m=44 \mid m=45 \mid$
 $m=46 \mid m=47 \mid m=48$

$K_{31}(n,m)=1e-32;$

else

$K_{31}(n,m)=c_2(m)*c_2(n)*g(m)*g(n)*a^{(g(m)+g(n)-1)}$
 $*b^{(h(m)+h(n)+1)/(R^2*(g(m)+g(n)-1)*(h(m)+h(n)+1))};$

end

if $m=43 \mid m=44 \mid m=45 \mid m=46 \mid m=47 \mid m=48 \mid n=85 \mid n=86 \mid n=87 \mid$
 $n=88 \mid n=89 \mid n=90$

$K_{32}(n,m)=1e-20;$

else

$K_{32}(n,m)=c_2(m)*c_3(n)*g(m)*p(n)*k(n)*a^{(g(m)+p(n)-1)}$
 $*b^{(h(m)+k(n))/(R*(g(m)+p(n)-1)*(h(m)+k(n)))};$

end

if $n=43 \mid n=44 \mid n=45 \mid n=46 \mid n=46 \mid n=47 \mid n=48 \mid m=85 \mid m=86 \mid$
 $m=87 \mid m=88 \mid m=89 \mid m=90$

$K_{33}(n,m)=1e-20;$

else

$K_{33}(n,m)=c_3(m)*c_3(n)*p(m)*k(m)*g(n)*a^{(p(m)+g(n)-1)}$
 $*b^{(k(m)+h(n))/(R*(p(m)+g(n)-1)*(k(m)+h(n)))};$

end

if $n=85 \mid n=86 \mid n=87 \mid n=88 \mid n=89 \mid n=90 \mid m=85 \mid m=86 \mid m=87 \mid$
 $m=88 \mid m=89 \mid m=90$

$K_{34}(n,m)=1e-20;$

else

$K_{34}(n,m)=c_3(m)*c_3(n)*p(m)*k(m)*p(n)*k(n)*a^{(p(m)+p(n)-1)}$
 $*b^{(k(m)+k(n)-1)/((p(m)+p(n)-1)*(k(m)+k(n)-1))};$

end

if m==85 | m==86 | m==87 | m==88 | m==89 | m==90

A(n,m)=0;

else

A(n,m)=beta*c3(m)*c3(n)*p(m)*a^(p(m)+p(n))*b^(k(m)+k(n)+1)/((p(m)+p(n))*(k(m)+k(n)+1));

end

K(n,m)=C*(K1(n,m)+K2(n,m)+K3(n,m)+K4(n,m)+K5(n,m)+K6(n,m)+K7(n,m)+K8(n,m)+K9(n,m)-(1-v)*(K10(n,m)+K11(n,m)+K12(n,m)+K13(n,m)-(1/2)*(K14(n,m)+K15(n,m)+K16(n,m)+K17(n,m))))+D*(K18(n,m)-K19(n,m)+K20(n,m)-K21(n,m)+K22(n,m)-K23(n,m)+K24(n,m)-K25(n,m)+K26(n,m)-(1-v)*(-K27(n,m)-K28(n,m)+K29(n,m)+K30(n,m)-2*(K31(n,m)-K32(n,m)-K33(n,m)+K34(n,m))));

end

end

% Yaklaşım fonksiyonları grup grup hesaba sokuluyor

i(1)=85;

i(2)=86;

i(3)=91;

i(4)=92;

i(5)=1;

i(6)=2;

i(7)=7;

i(8)=8;

i(9)=43;

i(10)=44;

i(11)=49;

i(12)=50;

i(13)=87;

i(14)=3;

i(15)=45;

i(16)=88;

i(17)=4;

i(18)=46;

i(19)=93;

i(20)=9;

i(21)=51;

i(22)=94;

i(23)=10;
i(24)=52;

i(25)=95;
i(26)=11;
i(27)=53;

i(28)=96;
i(29)=12;
i(30)=54;

i(31)=97;
i(32)=13;
i(33)=55;

i(34)=98;
i(35)=14;
i(36)=56;

i(37)=99;
i(38)=15;
i(39)=57;

i(40)=100;
i(41)=16;
i(42)=58;

i(43)=101;
i(44)=17;
i(45)=59;

i(46)=102;
i(47)=18;
i(48)=60;

i(49)=103;
i(50)=19;
i(51)=61;

i(52)=104;
i(53)=20;
i(54)=62;

i(55)=105;
i(56)=21;
i(57)=63;

i(58)=106;

i(59)=22;
i(60)=64;

i(61)=107;
i(62)=23;
i(63)=65;

%i(64)=108;
%i(65)=24;
%i(66)=66;

i(64)=109;
i(65)=25;
i(66)=67;

i(67)=110;
i(68)=26;
i(69)=68;

i(70)=111;
i(71)=27;
i(72)=69;

i(73)=112;
i(74)=28;
i(75)=70;

i(76)=113;
i(77)=29;
i(78)=71;

i(79)=114;
i(80)=30;
i(81)=72;

i(82)=115;
i(83)=31;
i(84)=73;

i(85)=116;
i(86)=32;
i(87)=74;

i(88)=117;
i(89)=33;
i(90)=75;

Q.0. 7. 13. 19. 25. 31. 37. 43. 49. 55. 61. 67. 73. 79. 85. 91. 97. 103. 109. 115. 121. 127. 133. 139. 145. 151. 157. 163. 169. 175. 181. 187. 193. 199. 205. 211. 217. 223. 229. 235. 241. 247. 253. 259. 265. 271. 277. 283. 289. 295. 301. 307. 313. 319. 325. 331. 337. 343. 349. 355. 361. 367. 373. 379. 385. 391. 397. 403. 409. 415. 421. 427. 433. 439. 445. 451. 457. 463. 469. 475. 481. 487. 493. 499. 505. 511. 517. 523. 529. 535. 541. 547. 553. 559. 565. 571. 577. 583. 589. 595. 601. 607. 613. 619. 625. 631. 637. 643. 649. 655. 661. 667. 673. 679. 685. 691. 697. 703. 709. 715. 721. 727. 733. 739. 745. 751. 757. 763. 769. 775. 781. 787. 793. 799. 805. 811. 817. 823. 829. 835. 841. 847. 853. 859. 865. 871. 877. 883. 889. 895. 901. 907. 913. 919. 925. 931. 937. 943. 949. 955. 961. 967. 973. 979. 985. 991. 997. 1003. 1009. 1015. 1021. 1027. 1033. 1039. 1045. 1051. 1057. 1063. 1069. 1075. 1081. 1087. 1093. 1099. 1105. 1111. 1117. 1123. 1129. 1135. 1141. 1147. 1153. 1159. 1165. 1171. 1177. 1183. 1189. 1195. 1201. 1207. 1213. 1219. 1225. 1231. 1237. 1243. 1249. 1255. 1261. 1267. 1273. 1279. 1285. 1291. 1297. 1303. 1309. 1315. 1321. 1327. 1333. 1339. 1345. 1351. 1357. 1363. 1369. 1375. 1381. 1387. 1393. 1399. 1405. 1411. 1417. 1423. 1429. 1435. 1441. 1447. 1453. 1459. 1465. 1471. 1477. 1483. 1489. 1495. 1501. 1507. 1513. 1519. 1525. 1531. 1537. 1543. 1549. 1555. 1561. 1567. 1573. 1579. 1585. 1591. 1597. 1603. 1609. 1615. 1621. 1627. 1633. 1639. 1645. 1651. 1657. 1663. 1669. 1675. 1681. 1687. 1693. 1699. 1705. 1711. 1717. 1723. 1729. 1735. 1741. 1747. 1753. 1759. 1765. 1771. 1777. 1783. 1789. 1795. 1801. 1807. 1813. 1819. 1825. 1831. 1837. 1843. 1849. 1855. 1861. 1867. 1873. 1879. 1885. 1891. 1897. 1903. 1909. 1915. 1921. 1927. 1933. 1939. 1945. 1951. 1957. 1963. 1969. 1975. 1981. 1987. 1993. 1999. 2005. 2011. 2017. 2023. 2029. 2035. 2041. 2047. 2053. 2059. 2065. 2071. 2077. 2083. 2089. 2095. 2101. 2107. 2113. 2119. 2125. 2131. 2137. 2143. 2149. 2155. 2161. 2167. 2173. 2179. 2185. 2191. 2197. 2203. 2209. 2215. 2221. 2227. 2233. 2239. 2245. 2251. 2257. 2263. 2269. 2275. 2281. 2287. 2293. 2299. 2305. 2311. 2317. 2323. 2329. 2335. 2341. 2347. 2353. 2359. 2365. 2371. 2377. 2383. 2389. 2395. 2401. 2407. 2413. 2419. 2425. 2431. 2437. 2443. 2449. 2455. 2461. 2467. 2473. 2479. 2485. 2491. 2497. 2503. 2509. 2515. 2521. 2527. 2533. 2539. 2545. 2551. 2557. 2563. 2569. 2575. 2581. 2587. 2593. 2599. 2605. 2611. 2617. 2623. 2629. 2635. 2641. 2647. 2653. 2659. 2665. 2671. 2677. 2683. 2689. 2695. 2701. 2707. 2713. 2719. 2725. 2731. 2737. 2743. 2749. 2755. 2761. 2767. 2773. 2779. 2785. 2791. 2797. 2803. 2809. 2815. 2821. 2827. 2833. 2839. 2845. 2851. 2857. 2863. 2869. 2875. 2881. 2887. 2893. 2899. 2905. 2911. 2917. 2923. 2929. 2935. 2941. 2947. 2953. 2959. 2965. 2971. 2977. 2983. 2989. 2995. 3001. 3007. 3013. 3019. 3025. 3031. 3037. 3043. 3049. 3055. 3061. 3067. 3073. 3079. 3085. 3091. 3097. 3103. 3109. 3115. 3121. 3127. 3133. 3139. 3145. 3151. 3157. 3163. 3169. 3175. 3181. 3187. 3193. 3199. 3205. 3211. 3217. 3223. 3229. 3235. 3241. 3247. 3253. 3259. 3265. 3271. 3277. 3283. 3289. 3295. 3301. 3307. 3313. 3319. 3325. 3331. 3337. 3343. 3349. 3355. 3361. 3367. 3373. 3379. 3385. 3391. 3397. 3403. 3409. 3415. 3421. 3427. 3433. 3439. 3445. 3451. 3457. 3463. 3469. 3475. 3481. 3487. 3493. 3499. 3505. 3511. 3517. 3523. 3529. 3535. 3541. 3547. 3553. 3559. 3565. 3571. 3577. 3583. 3589. 3595. 3601. 3607. 3613. 3619. 3625. 3631. 3637. 3643. 3649. 3655. 3661. 3667. 3673. 3679. 3685. 3691. 3697. 3703. 3709. 3715. 3721. 3727. 3733. 3739. 3745. 3751. 3757. 3763. 3769. 3775. 3781. 3787. 3793. 3799. 3805. 3811. 3817. 3823. 3829. 3835. 3841. 3847. 3853. 3859. 3865. 3871. 3877. 3883. 3889. 3895. 3901. 3907. 3913. 3919. 3925. 3931. 3937. 3943. 3949. 3955. 3961. 3967. 3973. 3979. 3985. 3991. 3997. 4003. 4009. 4015. 4021. 4027. 4033. 4039. 4045. 4051. 4057. 4063. 4069. 4075. 4081. 4087. 4093. 4099. 4105. 4111. 4117. 4123. 4129. 4135. 4141. 4147. 4153. 4159. 4165. 4171. 4177. 4183. 4189. 4195. 4201. 4207. 4213. 4219. 4225. 4231. 4237. 4243. 4249. 4255. 4261. 4267. 4273. 4279. 4285. 4291. 4297. 4303. 4309. 4315. 4321. 4327. 4333. 4339. 4345. 4351. 4357. 4363. 4369. 4375. 4381. 4387. 4393. 4399. 4405. 4411. 4417. 4423. 4429. 4435. 4441. 4447. 4453. 4459. 4465. 4471. 4477. 4483. 4489. 4495. 4501. 4507. 4513. 4519. 4525. 4531. 4537. 4543. 4549. 4555. 4561. 4567. 4573. 4579. 4585. 4591. 4597. 4603. 4609. 4615. 4621. 4627. 4633. 4639. 4645. 4651. 4657. 4663. 4669. 4675. 4681. 4687. 4693. 4699. 4705. 4711. 4717. 4723. 4729. 4735. 4741. 4747. 4753. 4759. 4765. 4771. 4777. 4783. 4789. 4795. 4801. 4807. 4813. 4819. 4825. 4831. 4837. 4843. 4849. 4855. 4861. 4867. 4873. 4879. 4885. 4891. 4897. 4903. 4909. 4915. 4921. 4927. 4933. 4939. 4945. 4951. 4957. 4963. 4969. 4975. 4981. 4987. 4993. 4999. 5005. 5011. 5017. 5023. 5029. 5035. 5041. 5047. 5053. 5059. 5065. 5071. 5077. 5083. 5089. 5095. 5101. 5107. 5113. 5119. 5125. 5131. 5137. 5143. 5149. 5155. 5161. 5167. 5173. 5179. 5185. 5191. 5197. 5203. 5209. 5215. 5221. 5227. 5233. 5239. 5245. 5251. 5257. 5263. 5269. 5275. 5281. 5287. 5293. 5299. 5305. 5311. 5317. 5323. 5329. 5335. 5341. 5347. 5353. 5359. 5365. 5371. 5377. 5383. 5389. 5395. 5401. 5407. 5413. 5419. 5425. 5431. 5437. 5443. 5449. 5455. 5461. 5467. 5473. 5479. 5485. 5491. 5497. 5503. 5509. 5515. 5521. 5527. 5533. 5539. 5545. 5551. 5557. 5563. 5569. 5575. 5581. 5587. 5593. 5599. 5605. 5611. 5617. 5623. 5629. 5635. 5641. 5647. 5653. 5659. 5665. 5671. 5677. 5683. 5689. 5695. 5701. 5707. 5713. 5719. 5725. 5731. 5737. 5743. 5749. 5755. 5761. 5767. 5773. 5779. 5785. 5791. 5797. 5803. 5809. 5815. 5821. 5827. 5833. 5839. 5845. 5851. 5857. 5863. 5869. 5875. 5881. 5887. 5893. 5899. 5905. 5911. 5917. 5923. 5929. 5935. 5941. 5947. 5953. 5959. 5965. 5971. 5977. 5983. 5989. 5995. 6001. 6007. 6013. 6019. 6025. 6031. 6037. 6043. 6049. 6055. 6061. 6067. 6073. 6079. 6085. 6091. 6097. 6103. 6109. 6115. 6121. 6127. 6133. 6139. 6145. 6151. 6157. 6163. 6169. 6175. 6181. 6187. 6193. 6199. 6205. 6211. 6217. 6223. 6229. 6235. 6241. 6247. 6253. 6259. 6265. 6271. 6277. 6283. 6289. 6295. 6301. 6307. 6313. 6319. 6325. 6331. 6337. 6343. 6349. 6355. 6361. 6367. 6373. 6379. 6385. 6391. 6397. 6403. 6409. 6415. 6421. 6427. 6433. 6439. 6445. 6451. 6457. 6463. 6469. 6475. 6481. 6487. 6493. 6499. 6505. 6511. 6517. 6523. 6529. 6535. 6541. 6547. 6553. 6559. 6565. 6571. 6577. 6583. 6589. 6595. 6601. 6607. 6613. 6619. 6625. 6631. 6637. 6643. 6649. 6655. 6661. 6667. 6673. 6679. 6685. 6691. 6697. 6703. 6709. 6715. 6721. 6727. 6733. 6739. 6745. 6751. 6757. 6763. 6769. 6775. 6781. 6787. 6793. 6799. 6805. 6811. 6817. 6823. 6829. 6835. 6841. 6847. 6853. 6859. 6865. 6871. 6877. 6883. 6889. 6895. 6901. 6907. 6913. 6919. 6925. 6931. 6937. 6943. 6949. 6955. 6961. 6967. 6973. 6979. 6985. 6991. 6997. 7003. 7009. 7015. 7021. 7027. 7033. 7039. 7045. 7051. 7057. 7063. 7069. 7075. 7081. 7087. 7093. 7099. 7105. 7111. 7117. 7123. 7129. 7135. 7141. 7147. 7153. 7159. 7165. 7171. 7177. 7183. 7189. 7195. 7201. 7207. 7213. 7219. 7225. 7231. 7237. 7243. 7249. 7255. 7261. 7267. 7273. 7279. 7285. 7291. 7297. 7303. 7309. 7315. 7321. 7327. 7333. 7339. 7345. 7351. 7357. 7363. 7369. 7375. 7381. 7387. 7393. 7399. 7405. 7411. 7417. 7423. 7429. 7435. 7441. 7447. 7453. 7459. 7465. 7471. 7477. 7483. 7489. 7495. 7501. 7507. 7513. 7519. 7525. 7531. 7537. 7543. 7549. 7555. 7561. 7567. 7573. 7579. 7585. 7591. 7597. 7603. 7609. 7615. 7621. 7627. 7633. 7639. 7645. 7651. 7657. 7663. 7669. 7675. 7681. 7687. 7693. 7699. 7705. 7711. 7717. 7723. 7729. 7735. 7741. 7747. 7753. 7759. 7765. 7771. 7777. 7783. 7789. 7795. 7801. 7807. 7813. 7819. 7825. 7831. 7837. 7843. 7849. 7855. 7861. 7867. 7873. 7879. 7885. 7891. 7897. 7903. 7909. 7915. 7921. 7927. 7933. 7939. 7945. 7951. 7957. 7963. 7969. 7975. 7981. 7987. 7993. 7999. 8005. 8011. 8017. 8023. 8029. 8035. 8041. 8047. 8053. 8059. 8065. 8071. 8077. 8083. 8089. 8095. 8101. 8107. 8113. 8119. 8125. 8131. 8137. 8143. 8149. 8155. 8161. 8167. 8173. 8179. 8185. 8191. 8197. 8203. 8209. 8215. 8221. 8227. 8233. 8239. 8245. 8251. 8257. 8263. 8269. 8275. 8281. 8287. 8293. 8299. 8305. 8311. 8317. 8323. 8329. 8335. 8341. 8347. 8353. 8359. 8365. 8371. 8377. 8383. 8389. 8395. 8401. 8407. 8413. 8419. 8425. 8431. 8437. 8443. 8449. 8455. 8461. 8467. 8473. 8479. 8485. 8491. 8497. 8503. 8509. 8515. 8521. 8527. 8533. 8539. 8545. 8551. 8557. 8563. 8569. 8575. 8581. 8587. 8593. 8599. 8605. 8611. 8617. 8623. 8629. 8635. 8641. 8647. 8653. 8659. 8665. 8671. 8677. 8683. 8689. 8695. 8701. 8707. 8713. 8719. 8725. 8731. 8737. 8743. 8749. 8755. 8761. 8767. 8773. 8779. 8785. 8791. 8797. 8803. 8809. 8815. 8821. 8827. 8833. 8839. 8845. 8851. 8857. 8863. 8869. 8875. 8881. 8887. 8893. 8899. 8905. 8911. 8917. 8923. 8929. 8935. 8941. 8947. 8953. 8959. 8965. 8971. 8977. 8983. 8989. 8995. 9001. 9007. 9013. 9019. 9025. 9031. 9037. 9043. 9049. 9055. 9061. 9067. 9073. 9079. 9085. 9091. 9097. 9103. 9109. 9115. 9121. 9127. 9133. 9139. 9145. 9151. 9157. 9163. 9169. 9175. 9181. 9187. 9193. 9199. 9205. 9211. 9217. 9223. 9229. 9235. 9241. 9247. 9253. 9259. 9265. 9271. 9277. 9283. 9289. 9295. 9301. 9307. 9313. 9319. 9325. 9331. 9337. 9343. 9349. 9355. 9361. 9367. 9373. 9379. 9385. 9391. 9397. 9403. 9409. 9415. 9421. 9427. 9433. 9439. 9445. 9451. 9457. 9463. 9469. 9475. 9481. 9487. 9493. 9499. 9505. 9511. 9517. 9523. 9529. 9535. 9541. 9547. 9553. 9559. 9565. 9571. 9577. 9583. 9589. 9595. 9601. 9607. 9613. 9619. 9625. 9631. 9637. 9643. 9649. 9655. 9661. 9667. 9673. 9679. 9685. 9691. 9697. 9703. 9709. 9715. 9721. 9727. 9733. 9739. 9745. 9751. 9757. 9763. 9769. 9775. 9781. 9787. 9793. 9799. 9805. 9811. 9817. 9823. 9829. 9835. 9841. 9847. 9853. 9859. 9865. 9871. 9877. 9883. 9889. 9895. 9901. 9907. 9913. 9919. 9925. 9931. 9937. 9943. 9949. 9955. 9961. 9967. 9973. 9979. 9985. 9991. 9997. 10003. 10009. 10015. 10021. 10027. 10033. 10039. 10045. 10051. 10057. 10063. 10069. 10075. 10081. 10087. 10093. 10099. 10105. 10111. 10117. 10123. 10129. 10135. 10141. 10147. 10153. 10159. 10165. 10171. 10177. 10183. 10189. 10195. 10201. 10207. 10213. 10219. 10225. 10231. 10237. 10243. 10249. 10255. 10261. 10267. 10273. 10279. 10285. 10291. 10297. 10303. 10309. 10315. 10321. 10327. 10333. 10339. 10345. 10351. 10357. 10363. 10369. 10375. 10381. 10387. 10393. 10399. 10405. 10411. 10417. 10423. 10429. 10435. 10441. 10447. 10453. 10459. 10465. 10471. 10477. 10483. 10489. 10495. 10501. 10507. 10513. 10519. 10525. 10531. 10537. 10543. 10549. 10555. 10561. 10567. 10573. 10579. 10585. 10591. 10597. 10603. 10609. 10615. 10621. 10627. 10633. 10639. 10645. 10651. 10657. 10663. 10669. 10675. 10681. 10687. 10693. 10699. 10705. 10711. 10717. 10723. 10729. 10735. 10741. 10747. 10753. 10759. 10765. 10771. 10777. 10783. 10789. 10795. 10801. 10807. 10813. 10819. 10825. 10831. 10837. 10843. 10849. 10855. 10861. 10867. 10873. 10879. 10885. 10891. 10897. 10903. 10909. 10915. 10921. 10927. 10933. 10939. 10945. 10951. 10957. 10963. 10969. 10975. 10981. 10987. 10993. 10999. 11005. 11011. 11017. 11023. 11029. 11035. 11041. 11047. 11053. 11059. 11065. 11071. 11077. 11083. 11089. 11095. 11101. 11107. 11113. 11119. 11125. 11131. 11137. 11143. 11149. 11155. 11161. 11167. 11173. 11179. 11185. 11191. 11197. 11203. 11209. 11215. 11221. 11227. 11233. 11239. 11245. 11251. 11257. 11263. 11269. 11275. 11281. 11287. 11293. 11299. 11305. 11311. 11317. 11323. 11329. 11335. 11341. 11347. 11353. 11359. 11365. 11371. 11377. 11383. 11389. 11395. 11401. 11407. 11413. 11419. 11425. 11431. 11437. 11443. 11449. 11455. 11461. 11467. 11473. 11479. 11485. 11491. 11497. 11503. 11509. 11515. 11521. 11527. 11533. 115

```

% Çözüm yapılıyor
for n=1 : 84
for m=1 : 84
x=i(n);
y=i(m);
KD(n,m)=K(x,y);
MD(n,m)=M(x,y);
AD(n,m)=A(x,y);
end
end
w2=eig(inv(MD)*(KD+AD))
%w2=eig(pinv(MD)*KD);
w=sqrt(w2);
ws=sort(w);

for i=1 : 12
wss(i)=ws(i);
end

Ms
beta
nabla
wss

```

ÖZGEÇMİŞ

1972 Yılında İstanbul'da doğdu. Liseyi İstanbul'da Deniz Astsb. Hzl. Okulunda okudu. 1990 yılında askeri okuldan ayrıldı ve aynı yıl girdiği üniversite sınavlarında İTÜ Uçak Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1994 yılında mezun oldu ve aynı yıl yüksek lisans sınavlarına girip İTÜ Uçak Mühendisliği Anabilim dalında yüksek lisans yapma hakkını kazandı. Bir sene özel sektörde proje mühendisi olarak çalıştıktan sonra 1996 yılında Pamukkale Üniversitesi Makine Bölümü Mekanik Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1997 yılında yüksek lisans tezi TÜBİTAK-SAGE tarafından desteklendi. Halen Pamukkale Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. İngilizce bilir, bekardır.



Dr. C. YILMAZ ÖZGÜR
DOLU MEHMETOĞLU