

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON
SİSTEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ**

**DOKTORA TEZİ
İrma HACINLIYAN**

Anabilim Dalı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

**GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON SİSTEMİ
İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ**

**DOKTORA TEZİ
İrma HACINLIYAN
(509012001)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Şubat 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Saadet ERBAY
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Faruk GÜNGÖR (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Alp EDEN (B.Ü.)
Doç.Dr. Emanullah HİZEL (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Hilmi DEMİRAY (IŞIK Ü.)**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmamın her aşamasında beni yönlendiren, destekleyen ve çalışma azmi veren tez danışmanım Prof. Dr. Saadet Erbay'a, tez çalışmamla yakından ilgilenen, engin bilgisi ve tecrübesiye çalışmamı zenginleştiren Prof. Dr. Alp Eden'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, her zaman ve her konuda yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Haziran 2008

İrma Hacınlıyan

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	vi
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. İNTEGRAL GÖSTERİMLER	9
2.1. Tek Lineer Dalga Denkleminin Çözümünün İntegral Gösterimi	9
2.2. Kuple Lineer Dalga Sisteminin Çözümünün İntegral Gösterimi	11
2.3. İntegral Gösterimin Uygulaması: Lokalize Çözümler	25
3. ÖNKESTİRİMLER	30
3.1. Davey-Stewartson Sistemi için Önkestirimler	30
3.2. Genelleştirilmiş Davey-Stewartson Sistemi için Önkestirimler	31
3.2.1. Enerji korunumu	31
3.2.2. Önkestirimler	34
4. DÜZGÜNLEŞTİRİLMİŞ DENKLEM	44
4.1. Giriş	44
4.2. Varlık ve Teklik	50
5. LİMİTE GEÇİŞ	56
5.1. Yerel Terimlerde Limite Geçiş	56
5.2. Yerel Olmayan Terimlerde Limite Geçiş	60
6. SONUÇLAR	70
KAYNAKLAR	72
EK 1	76
EK 2	78
EK 3	81
ÖZGEÇMİŞ	83

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel doğru
$\mathbb{R}_+$	$= \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel Öklit uzayı
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\text{Re}(z)$	z karmaşık sayısının reel kısmı
$\delta(\cdot)$	Dirac-Delta dağılımı
$H(\cdot)$	Heaviside fonksiyonu
Δ	$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$
∇u	$= (u_{x_1}, u_{x_2})$
$\hat{u}$	Fourier dönüşümü, $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) dx$
$\check{v}$	Ters Fourier dönüşümü, $\check{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} v(x) dx$
$L^p(\mathbb{R}^2)$	$(\int_{\mathbb{R}^2} u ^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$ koşulunu sağlayan $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı ($1 \leq p < \infty$)
$\ u\ _p$	$= (\int_{\mathbb{R}^2} u ^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ için norm
$L^\infty(\mathbb{R}^2)$	Hemen hemen her yerde $\ u\ _\infty < \infty$ koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$\ u\ _\infty$	$= \inf\{C \in \mathbb{R}_+ : \text{hemen hemen her yerde } u(x) \leq C\}$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ için norm
D^α	$\frac{\partial^{ \alpha }}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $ \alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
$H^m(\mathbb{R}^2)$	$= \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^2), \forall \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}\}$
$\ u\ _{H^m}$	$= \left(\sum_{ \alpha \leq m} \ D^\alpha u\ _2^2 \right)^{1/2}$, $u \in H^m(\mathbb{R}^2)$ için norm
$H^1(\mathbb{R}^2)$	$= \{f : f \in L^2(\mathbb{R}^2), f_{x_i} \in L^2(\mathbb{R}^2), (i = 1, 2)\}$
$\ u\ _{H^1}$	$= (\ u\ _2^2 + \ u_{x_1}\ _2^2 + \ u_{x_2}\ _2^2)^{1/2}$, $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için norm
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sonsuz diferansiyellenebilen kompakt destekli fonksiyonların uzayı
$H_w^1(\mathbb{R}^2)$	Zayıf topolojili $H^1(\mathbb{R}^2)$ uzayı
$H^{-1}(\mathbb{R}^2)$	$H^1(\mathbb{R}^2)$ uzayının duali
$\langle f, u \rangle$	$H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ arasındaki dual eşleme
$H_0^1(\mathbb{R}^2)$	$H^1(\mathbb{R}^2)$ uzayının kapanışı
$\ f\ _{H^{-1}}$	$= \sup\{\langle f, u \rangle : u \in H_0^1(\mathbb{R}^2), \ u\ _{H^1} \leq 1\}$
$\langle x, y \rangle_{X^*, X}$	X Banach uzayı ve duali X^* arasındaki dual eşleme

$\mathcal{C}([0, T]; X)$	$\max_{0 \leq t \leq T} \ u(t)\ _X < \infty$ koşulunu sağlayan $u : [0, T] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonlar uzayı ($X, \ \cdot\ _X$ normlu bir Banach uzayı)
$L^p([0, T]; X)$	$(\int_0^T \ u(t)\ _X^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$ koşulunu sağlayan $u : [0, T] \rightarrow X$ ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^\infty([0, T]; X)$	$\sup_{0 \leq t \leq T} \ u(t)\ _X < \infty$ koşulunu sağlayan $u : [0, T] \rightarrow X$ ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$X \subset\subset Y$	X kümesi, Y kümesinin kompakt alt kümesidir.
$X \hookrightarrow Y$	Her $u \in X$ için $\ u\ _Y \leq K\ u\ _X$ olacak şekilde bir K gömme sabiti vardır
$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$	X Banach uzayı Y Banach uzayında kompakt gömmedir
$L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$	$\{v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} v \in L^p(V) \text{ her } V \subset\subset \mathbb{R}^2 \text{ için} \}$
$\ u\ _{p,V}$	$= (\int_V u ^p dx)^{\frac{1}{p}}, u \in L^p(V) \text{ için}$
$L_{loc}^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$	$\{u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} v \in L^p(V) \text{ her } V \subset\subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \text{ için} \}$
$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$	$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ sınırlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$\rightarrow$	Kuvvetli yakınsama
$\rightharpoonup$	Zayıf yakınsama
$\rightharpoonup^*$	Zayıf yıldız yakınsama
$\text{supp} f(x)$	$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışı

GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON SİSTEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi ele alınacaktır. Bu sistem, sonsuz elastik bir ortamda yayılan uzun dalgalara ait iki lineer dalga denklemi ve bir kısa dalganın karmaşık genliğinin hareketini karakterize eden bir Nonlinear Schrödinger (NLS) tipi denklemden oluşur. Eliptik-hiperbolik-hiperbolik (EHH) durumundaki GDS sistemi boyutsuz formda

$$\begin{aligned} iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} &= \chi |u|^2 u + b(\alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y})u, \\ \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta \phi_{2,xy} &= \alpha(|u|^2)_x, \\ \phi_{2,xx} - \lambda \phi_{2,yy} - \beta \phi_{1,xy} &= (|u|^2)_y \end{aligned}$$

ile verilecektir. Burada x ve y uzay koordinatları ve t zamanı; u kısa dalga modunun karmaşık genliğini ve ϕ_1 ve ϕ_2 sırasıyla uzun boyuna ve uzun enine dalga modlarını gösterir. Kuplu dalga sisteminin hiperbolik karakteri nedeniyle, ϕ_1 ve ϕ_2 için karakteristik koordinatlar boyunca homojen radyasyon sınır koşulları varsayılacaktır. EHH halindeki GDS sisteminin küçük başlangıç kütleli çözümlerinin global zamandaki varlığı ile ilgileneceğiz. Eliptik-hiperbolik durumundaki Davey-Stewartson (DS) sistemi için başlangıç değer probleminin incelenmesinde kullanılan yöntemin bir benzeri burada uygulanacaktır.

GDS sistemi için başlangıç değer problemi dört aşamada incelenir. İlk ve en önemli aşama, kuplu dalga denklem çözümlerinin integral gösterimi kullanılarak GDS sisteminin yerel olmayan bir NLS denklemine indirgenmesidir. İkinci aşama, GDS sisteminin çözümlerinin normlarının bazı önkestirimlerinin hesaplanmasıdır. Üçüncü aşama, yerel olmayan NLS denklemi için yazılan düzgünleştirilmiş denklemin global çözümlerinin varlıklarının incelenmesidir. Son aşama; $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçmek ve düzgün olmayan denklem, diğer bir deyişle GDS sisteminin yerel olmayan formu için çözümleri bulmaktır.

Tez çalışması altı ana bölümden oluşmaktadır:

İlk bölümde, DS sistemi ve GDS sistemi kısaca tanıtılacaktır. Ayrıca, bu bölümde GDS sistemi sınıflandırılacaktır.

İkinci bölümde; simetrik olmayan, kuplu, lineer ve homojen olmayan iki dalga denklem sisteminin çözümlerinin integral gösterimi elde edilecektir. Sistem dört karakteristik değişken yardımıyla birinci mertebe diferansiyel denklem sistemine indirgenecek ve doğrudan çözülecektir. Karakteristik değişkenlere göre integral alınarak elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 bilinmeyen fonksiyonlarını bulmak için bu değişkenler boyunca verilen radyasyon sınır koşulları kullanılacaktır. Dört karakteristik değişken arasındaki karmaşık etkileşimin, çözümlerin gösterimindeki integrallerin

sınırlarında ortaya çıkacağı beklenmektedir. Bu gösterim kullanılarak, GDS sistemi yerel olmayan bir NLS denklemine indirgenecektir. Çözümlerin integral gösteriminin bir uygulaması olarak, bazı özel parametre değerleri için yerel olmayan NLS denkleminin (veya GDS sisteminin) bazı lokalize çözümleri verilecektir.

Üçüncü bölümde, integral gösterimler kullanılarak ϕ_1 ve ϕ_2 çözümlerinin $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ normları ve Hamiltonyenin ϕ_1 ve ϕ_2 terimlerini içeren kısmı için üst sınırlar hesaplanacaktır. Ayrıca, düzgün olmayan GDS sistemi için enerji korunumu durumu tartışılacaktır.

Dördüncü bölümde, klasik sabit nokta yaklaşımı kullanılarak epsilonlu düzgünleştirilmiş problemin varlık ve tekliği ele alınacaktır. Yerel olmayan terimler dışındaki bütün terimler için sabit nokta yaklaşımı standart olduğundan klasik terimler kısaca ele alınacak ve yerel olmayan terimler üzerinde durulacaktır. Simetrik olmayan kuple hiperbolik sistemden dolayı yerel olmayan terimler karmaşık olmasına rağmen, düzgünleştirilmiş denklem kullanılarak bu ifadelerin içinde bulunan çeşitli terimlerin kontrol edilmesi mümkün olabilecektir. Klasik sabit nokta yaklaşımından yararlanılarak, düzgünleştirilmiş denklemin $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayındaki çözümlerinin zamanda global varlığı gösterilecektir. Düzgünleştirilmiş problem çözümlerinin $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayında olması, çözümlerin integral gösterimlerin kullanılabilir hale getirecektir. Ayrıca, düzgünleştirilmiş problemin enerjisinin korunduğu gösterilecek ve kütlemin küçük olduğu varsayımı, çözümlerin $H^1(\mathbb{R}^2)$ normunun ε ve t 'den bağımsız sınırlı olduğunun ispatında kullanılacaktır. Bu sonuç başlangıç datasının küçük olduğu varsayımından elde edilecektir.

Beşinci bölümde, yeteri kadar küçük başlangıç datası için düzgünleştirilmiş denklem çözümlerinin, düzgün olmayan denklem çözümüne yakınsadığı gösterilecektir. Bu sonuç, çözümlerin ε 'dan bağımsız değişik normlarını kontrol etmemize izin veren düzgünleştirilmiş denklemin enerji korunumundan elde edilecektir. Bazı standart kompaktlık argümanlarıyla birlikte bu önkestirimler ε 'a göre limite geçilmesine izin verecektir. Daha sonra, bu limitin düzgün olmayan (orijinal) problemi sağladığı gösterilecektir. Böylece, küçük başlangıç değerleri için GDS sisteminin başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ispatlanmış olacaktır.

Son bölümde, çalışmanın sonuçları kısaca değerlendirilecektir.

INITIAL VALUE PROBLEM FOR A GENERALIZED DAVEY-STEWARTSON SYSTEM

SUMMARY

In this thesis, a generalized Davey-Stewartson (GDS) system will be considered. This system consists of one nonlinear Schrödinger (NLS) type equation for the complex amplitude of a short wave and two linear wave equations for long waves propagating in an infinite elastic medium. The GDS system in the elliptic-hyperbolic-hyperbolic (EHH) case will be written in dimensionless form as

$$\begin{aligned} iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} &= \chi |u|^2 u + b(\alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y})u, \\ \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta \phi_{2,xy} &= \alpha(|u|^2)_x, \\ \phi_{2,xx} - \lambda \phi_{2,yy} - \beta \phi_{1,xy} &= (|u|^2)_y, \end{aligned}$$

where x and y are spatial coordinates and t is time; u is the complex amplitude of the short transverse wave mode, and ϕ_1 and ϕ_2 are the long longitudinal and long transverse wave modes, respectively. Because of the hyperbolic nature of the coupled wave system, the radiation type homogeneous boundary conditions on ϕ_1 and ϕ_2 along the characteristic lines will be assumed. We are interested in the global time existence of the solutions to the GDS system in the EHH case for solutions with small initial mass. Our argument is based on a modification of the initial value problem to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson (DS) system.

The initial value problem of the GDS system is investigated in four main steps. First and the most critical one is that the GDS system is reduced to a non-local NLS equation by using the representation of solution to the coupled wave equations. Second one is to find some a priori norm estimates of the solutions to the GDS system. Third one is to investigate the existence of the global solution to the regularized equation for the non-local NLS equation. Last step is to pass to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ and to seek solutions for the unregularized equation, i.e. non-local form of the GDS system.

The thesis contains six main sections:

In the first section, the DS system and the GDS system are briefly discussed. The classifications of the GDS system is also presented in this section.

In the second section, we obtain integral representation of solution to the system of two asymmetrically coupled linear wave equations with nonhomogeneous terms. The system is transformed to a system of first order equations with respect to the four characteristics and can be solved directly. We perform integrations along characteristics and make use of the radiation boundary values along the characteristics to determine the unknown functions ϕ_1 and ϕ_2 . We are able to

see the complex interactions among the four characteristics in the limits of the integrals appearing in the representation of solutions. Using this representation, the GDS system is reduced to a non-local NLS equation. As an application of the representation of solutions, we also present some localized solutions to the non-local NLS equation, or equivalently the GDS system, for some special choices of the parameters.

In the third section, we find upper bounds on the $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ norms of solutions ϕ_1 and ϕ_2 and an upper bound on a part of the Hamiltonian involving ϕ_1 and ϕ_2 by using the integral representation. We also discuss the status of the Energy conservation for the GDS system without the regularization.

In the fourth section, we are interested in existence and uniqueness result for the epsilon regularized problem via a standard fixed point argument. Since the arguments are standard for all terms except the non-local terms, we only indicate how to deal with the standard terms and focus on the non-local terms. Although the non-local term is quite complex because of the asymmetrically coupled hyperbolic system, it is still possible to control various terms that appear in it, by using the regularized equation. We show that the regularized equation has global in time solutions in $H^2(\mathbb{R}^2)$ by a standard fixed point argument. The solutions of the regularized problem live in $H^2(\mathbb{R}^2)$ and this allows us to utilize the representation of solutions. We also show that the energy of the regularized problem is conserved and the smallness assumption on the mass can be utilized to deduce a bound on $H^1(\mathbb{R}^2)$ norms of solutions independent of ε and t . This latter fact follows from the smallness assumption on the initial data.

In the fifth section, we show that the solutions of the regularized equation for sufficiently small initial data converge to the solution of the unregularized equation. This follows from the conservation of energy for the regularized problem which allows us to control various norms of solutions independent of ε . These a priori estimates combined with some standard compactness arguments allow us to pass to the limit in ε . The limit then is shown to satisfy the unregularized (original) problem. Thus we prove existence of solutions with small initial data, to the initial value problem for the GDS system.

In the last section, conclusions of the study are given briefly.

1. GİRİŞ

Elastik, optik ve akışkan gibi farklı sürekli ortamlarda dalga yayılımı doğrusal olmayan dalga denklemleri ile modellenmektedir. Bu nedenle, dalga hareketlerinin modellenmesi, elde edilen denklemlerin özelliklerinin analitik ve sayısal incelenmesi çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmektedir [1-3]. Lineer olmayan dalga denklemlerin en bilinenleri Korteweg-de Vries, Burgers, Kadomtsev-Petviashvili, Nonlinear Schrödinger (NLS) ve Davey-Stewartson (DS) denklemleridir. Bu denklemlerden Korteweg-de Vries denklemi zayıf dispersif ve zayıf nonlinear bir sürekli ortamda yayılan uzun dalgaların hareketini tanımlarken, NLS denklemi aynı sürekli ortamda yayılan kısa dalgaların kompleks genliğini yöneten denklem olarak elde edilir. Daha karmaşık fiziksel etkilerin göz önüne alınmasıyla Korteweg-de Vries ve NLS denklemlerinin genelleştirilmiş formları bulunur. Örneğin, uzun dalga yayılımı problemlerinde ikinci uzaysal boyutun etkisinin eklenmesi ile Korteweg-de Vries denkleminin iki boyutlu genelleştirilmiş hali olan Kadomtsev-Petviashvili denklemi elde edilir. Benzer şekilde, kısa dalga ile uzun dalga etkileşimi DS sistemiyle karakterize edilir. Bu nedenle, çok farklı fiziksel olayları modelleyen bu evrim denklemlerinin çözümlerinin niteliksel ve sayısal özelliklerinin incelenmesi matematikçilerin ve fizikçilerin yoğun ilgisini çekmiştir. Özellikle bu evrim denklemlerinin; uygun başlangıç koşulları için Cauchy probleminin varlığının incelenmesi, bu çözümlerin global iyi tanımlılığı veya sonlu bir zaman aralığında patlayarak tekilliğe sahip olup olmadığı; uzayda lokalize olmuş ve sabit hızla şeklini koruyarak yayılan yalnız dalga çözümlerinin bulunması ilgi çeken araştırma konularındandır [4-7].

Bu doktora tez çalışmasındaki amaç, elastik bir ortamda yayılan $(2+1)$ boyutlu dalga hareketini tanımlayan denklemler olarak elde edilen ve DS denklemlerinin bir genelleştirilmesi olan genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi olarak adlandırılan denklemlerin başlangıç değer problemini incelemektir.

Bilindiği gibi zayıf nonlinear ve zayıf dispersif ortamlarda iki boyutlu dalga yayılımı problemlerinde, bir kısa ve bir uzun dalganın etkileşiminin mümkün olduğu durumlarda dalga hareketi

$$\begin{aligned} iu_t + pu_{xx} + u_{yy} &= q|u|^2u + bu\phi_x, \\ \phi_{xx} + m\phi_{yy} &= (|u|^2)_x \end{aligned} \quad (1.1)$$

şeklindeki kuple iki denklem ile tanımlanır. Burada t zaman, x ve y uzay değişkenleri olmak üzere u kısa dalganın karmaşık genliğini, ϕ ise uzun dalganın reel genliğini gösterir. (1.1) denklemleri ilk olarak Davey ve Stewartson tarafından su yüzeyindeki dalga hareketini tanımlayan denklemler olarak elde edilmiştir ve literatürde Davey-Stewartson sistemi olarak bilinir [8]. Daha sonra yüzey geriliminin hesaba katıldığı durumda yüzey dalga hareketinin de aynı formda bir sistem ile gösterilebildiği Djordjevic ve Redekopp tarafından bulunmuştur [9]. (1.1) sistemi (p, m) işaretinin $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ veya $(-, -)$ olmasına göre, sırası ile eliptik-eliptik (EE), eliptik-hiperbolik (EH), hiperbolik-eliptik (HE) veya hiperbolik-hiperbolik (HH) olarak sınıflandırılır [10]. EH ve HE durumdaki DS sisteminin bazı özel çözümleri ters saçılma yöntemi kullanılarak bulunmuştur [11, 12]. Ancak DS sisteminin başlangıç değer probleminin varlık ve tekliğinin incelenmesi için fonksiyonel analitik yöntemlere gerek vardır.

Ghidaglia ve Saut, $L^2(\mathbb{R}^2)$, $H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzaylarında EE ve HE durumdaki DS sisteminin başlangıç değer probleminin yerel ve global çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı sonuçlar ispatlamışlardır [13]. Aynı çalışmada, küçük değerli başlangıç koşulları için EH durumdaki DS sisteminin zayıf çözümlerinin global varlığı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonra Tsutsumi, EH durumdaki DS sisteminin zayıf çözümlerinin asimptotik davranışları üzerinde çalışmıştır [14]. Linares ve Ponce ise ağırlıklı Sobolev uzaylarında, küçük başlangıç koşulları için başlangıç değer probleminin yerel çözümlerinin varlığını göstermişlerdir [15]. Aynı problem $H^{5/2}(\mathbb{R}^2)$ uzayında [16] ve düşük dereceli Sobolev uzaylarında da [17] çalışılmıştır. EH durumdaki DS sisteminin küçük değerli olmayan başlangıç koşulu için çözümlerin zamanda yerel varlığı Hayashi tarafından gösterilmiştir [18]. Ayrıca ağırlıklı Sobolev uzaylarında global çözümün varlığı da incelenmiştir [19].

Babaoğlu ve Erbay'ın yapmış olduğu çalışmada, dalga çözümlerinin çok ölçekli bir açılımı kullanılarak, yüksek mertebe yerdeğiştirme gradyanlarını içeren elastik bir ortamda dalga yayılımı modellenmiş ve üç lineer olmayan denklem dalga hareketini yöneten denklemler olarak elde edilmiştir [20]. Bir NLS denklemi ve iki kuple lineer dalga denklemlerinden oluşan bu sistem

$$\begin{aligned} iu_\tau + pu_{\xi\xi} + ru_{\eta\eta} &= q|u|^2u + \frac{k^2}{2\omega}(\gamma_3\phi_{1,\xi} + \gamma_1\phi_{2,\eta})u, \\ (c_g^2 - c_1^2)\phi_{1,\xi\xi} - c_2^2\phi_{1,\eta\eta} - (c_1^2 - c_2^2)\phi_{2,\xi\eta} &= \gamma_3k^2(|u|^2)_\xi, \\ (c_g^2 - c_2^2)\phi_{2,\xi\xi} - c_1^2\phi_{2,\eta\eta} - (c_1^2 - c_2^2)\phi_{1,\xi\eta} &= \gamma_1k^2(|u|^2)_\eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

ile verilmiştir. Burada τ zaman, ξ ve η uzay değişkenleri olmak üzere u karmaşık fonksiyonu enine kısa dalga, ϕ_1 ve ϕ_2 reel fonksiyonları sırası ile boyuna ve enine uzun dalgaların genliklerini gösterir. Ayrıca (1.2) denklemindeki katsayılar, $c_g = c_2^2(k + 8m^2k^3)/\omega$, $\omega = c_2k(1 + 4m^2k^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $D_1(k, \omega) = \omega^2 - c_1^2k^2 - (1 + \nu)mk^4$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \\ \gamma_1 &= c_1^2 - 2c_2^2 + \frac{\mathcal{B}}{\rho_0}, \quad \gamma_3 = c_1^2 + \frac{\mathcal{A} + 2\mathcal{B}}{2\rho_0}, \\ p &= -\frac{1}{2\omega}(c_g^2 - c_2^2 - 24m^2c_2^2k^2), \quad r = \frac{c_2^2}{2\omega}(1 + 8m^2k^2), \quad q = \frac{k^6\gamma_3^2}{\omega D_1(2k, 2\omega)} \end{aligned}$$

şeklinde. Yukarıdaki katsayı ifadelerinde; k dalga sayısını, ω frekansı, m , λ , μ , $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ malzeme sabitlerini, c_g enine dalgaların grup hızını, c_1 ve c_2 sırası ile boyuna ve enine dalgaların faz hızını göstermektedir. $\gamma_1 = \gamma_3$ özel durumunda, (1.2) sisteminde

$$Q_\xi = \phi_{1,\xi} + \phi_{2,\eta} + \frac{\gamma_1k^2}{c_1^2}|u|^2$$

bağımlı değişken dönüşümü uygulanır ise üç bileşenli sistem iki bileşenli DS sistemine indirgenir:

$$\begin{aligned} iu_\tau + pu_{\xi\xi} + ru_{\eta\eta} &= \bar{q}|u|^2u + \sigma Q_\xi u, \\ (c_g^2 - c_1^2)Q_{\xi\xi} - c_1^2Q_{\eta\eta} &= \gamma(|u|^2)_\xi. \end{aligned}$$

Buradaki katsayılar ise

$$\bar{q} = q - \frac{\gamma_1^2k^4}{2\omega c_1^2}, \quad \sigma = \frac{\gamma_1k^2}{2\omega}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1k^2c_g^2}{c_1^2}$$

şeklinde tanımlanır. (1.2) sistemi, $\gamma_1 = \gamma_3$ durumunda, lineer olmayan bir dönüşümle DS sistemine indirgenebildiği için genelleştirilmiş Davey-Stewartson sistemi olarak adlandırılır. Sistem parametrelerinin işaretlerine bağlı olarak (1.2) GDS sistemi, eliptik-hiperbolik-hiperbolik (EHH), hiperbolik-eliptik-eliptik (HEE), eliptik-eliptik-eliptik (EEE) ve eliptik-eliptik-hiperbolik (EEH) olarak sınıflandırılmıştır [21]. Aynı çalışmada, EEE durumdaki GDS denkleminin başlangıç değer probleminin çözümleri global varlık ve sonlu zamanda patlama açısından incelenmiştir. Daha sonraki bir çalışmada ise EEE halindeki GDS sistemi için çözümlerin başlangıç koşulu iyileştirilmiştir [22]. Ayrıca, EEE ve HEE halindeki GDS sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığı incelenmiş [23]; EEE durumdaki GDS sisteminin duran dalgalarının varlığı gösterilmiş [24]; EEE durumdaki GDS sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenmiş ve HEE durumdaki GDS sistemi için pseudo-konformal dönüşüm yardımıyla bir analitik patlama çözümü bulunmuştur [25]. Aynı sistem, grup teorik yaklaşımla da incelenmiş, GDS sisteminin Lie simetri cebirleri elde edilmiş ve sistem parametrelerinin özel değerleri için GDS'nin DS sistemine izomorfik olduğu gösterilmiştir [26]. Bu çalışmada ise, EHH halindeki GDS sisteminin başlangıç değer probleminin çözümlerinin global varlığı küçük değerli başlangıç koşulları için incelenecektir.

GDS sistemini boyutsuz halde ifade etmek için boyutsuz değişkenler ve bu değişkenlere bağlı fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \tau &= k^4 t, \quad \xi = \frac{k^2}{c_2} \sqrt{r(c_g^2 - c_1^2)} x, \quad \eta = k^2 \sqrt{r} y, \\ u &= \frac{c_2}{\gamma_1 k^2} \sqrt{\frac{c_g^2 - c_2^2}{c_g^2 - c_1^2}} \bar{u}, \quad \phi_1 = \sqrt{\frac{r(c_g^2 - c_2^2)}{\gamma_1^2(c_g^2 - c_1^2)}} \bar{\phi}_1, \quad \phi_2 = \sqrt{\frac{r}{\gamma_1^2}} \bar{\phi}_2. \end{aligned}$$

Yeni boyutsuz değişkenler cinsinden (1.2) sistemi

$$\begin{aligned} iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} &= \chi |u|^2 u + b(\alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y})u, \\ \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta \phi_{2,xy} &= \alpha(|u|^2)_x, \\ \phi_{2,xx} - \lambda \phi_{2,yy} - \beta \phi_{1,xy} &= (|u|^2)_y \end{aligned} \tag{1.3}$$

olarak yazılır (gösterim kolaylığından dolayı bağımlı değişkenlerin üzerindeki

çizgiler yazılmamıştır). (1.3) sisteminin boyutsuz katsayıları ise

$$\gamma = \frac{p}{r} \left(\frac{c_2^2}{c_g^2 - c_1^2} \right), \quad \chi = \frac{qc_2^2(c_g^2 - c_2^2)}{\gamma_1^2(c_g^2 - c_1^2)}, \quad b = \frac{k^4}{2\omega}$$

$$\alpha = \frac{\gamma_3 c_2 \sqrt{c_g^2 - c_2^2}}{\gamma_1(c_g^2 - c_1^2)}, \quad \beta = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2 \sqrt{c_g^2 - c_2^2}}, \quad \lambda = \frac{c_1^2(c_g^2 - c_1^2)}{c_2^2(c_g^2 - c_2^2)}$$

olarak tanımlanır. $c_g^2 - c_2^2 = 4m^2 c_2^4 k^4 (3 + 16m^2 k^2) / \omega^2$ ifadesi her zaman pozitif olmasına rağmen, $c_g^2 - c_1^2$ ifadesinin işareti $k_c^2 = [c_1^2 - 4c_2^2 + c_1(c_1^2 + 8c_2^2)^{\frac{1}{2}}] / (32c_2^2 m^2)$ kritik dalga sayısına göre değişir. Diğer bir deyişle, $k > k_c$ için $c_g^2 - c_1^2 > 0$ ve $k < k_c$ için $c_g^2 - c_1^2 < 0$ olur. Burada $k = k_c$ kritik dalga sayısı için, c_1 boyuna dalga faz hızı ile c_g enine dalgaların grup hızı eşit olacağından uzun ve kısa dalgalar arasında bir rezonans durumu oluştuğuna dikkat edilmelidir. Kısa dalga-uzun dalga rezonans etkileşimi bu çalışmanın kapsamında olmadığından $k = k_c$ durumu gözönüne alınmayacaktır. Bu durumda, k dalga sayısına göre GDS sisteminin lineer terimlerinin γ ve λ boyutsuz katsayılarının işareti belirlenebilir ($\beta > 0$). Özetle, (γ, λ) parametrelerinin işaretleri $k > k_c$ için $(+, +)$ ve $k < k_c$ için $(-, -)$ dir. O zaman (1.3) GDS sistemi $k > k_c$ için EHH, $k < k_c$ için HEE olarak sınıflandırılır. (1.3)₁ denkleminin eliptik olması için $\gamma > 0$ olmalı, diğer bir deyişle $k > k_c$ seçilmelidir. Bu seçimin, GDS sisteminin ikili lineer dalga denklemlerinin hiperbolik-hiperbolik durumu ile çelişmediğini görmek için (1.3)₂ ve (1.3)₃ denklemlerinden oluşan sistemin homojen formu k dalga sayısına göre sınıflandırılmalıdır:

$$\begin{aligned} \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta \phi_{2,xy} &= 0, \\ \phi_{2,xx} - \lambda \phi_{2,yy} - \beta \phi_{1,xy} &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Bu sınıflandırma, (1.4) denklem sistemini oluşturan operatörün özdeğerlerinin reel veya karmaşık olmasına bağlı olarak yapılacaktır. Bunun için de ikinci mertebe iki denklemden oluşan (1.4) sistemi birinci mertebe dört denklemden oluşan lineer bir sistem

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_x + \mathbf{B} \mathbf{v}_y = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

olarak ifade edilir. (1.5) denkleminde, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$

katsayı matrisleri

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bilinmeyen $\mathbf{v}$ vektörünün bileşenleri ise $v_1 = \phi_{1,x}$, $v_2 = \phi_{1,y}$, $v_3 = \phi_{2,x}$ ve $v_4 = \phi_{2,y}$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda (1.4) sistemini oluşturan operatörün özdeğerleri

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

formundaki $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matrisinin özdeğerleridir:

$$\Gamma_{1,2} = \pm r_1 = \pm \frac{c_1}{c_2}, \quad \Gamma_{3,4} = \pm r_2 = \pm \sqrt{\frac{c_g^2 - c_1^2}{c_g^2 - c_2^2}}.$$

(1.5) sisteminin Γ_1 ve Γ_2 özdeğerleri her zaman reel sayılardır. Sistemin diğer iki özdeğeri ise $c_g^2 - c_1^2 > 0$ için reel sayı ve $c_g^2 - c_1^2 < 0$ için karmaşık sayıdır. Dolayısıyla (1.4) sistemi $k > k_c$ dalga sayıları için HH ve $k < k_c$ dalga sayıları için EH olur. Daha önce (1.3)₁ denkleminin eliptik olabilmesi için $k > k_c$ kabul edildiğinden, (1.4) sistemi HH olur. Bu sonuç, (1.3) sisteminin EHH karakterde olduğunu gösterir. Ayrıca bu sonuç, hiperbolik denklemleri sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları için; $\xi_1 = \Gamma_1 x + y$, $\xi_2 = \Gamma_2 x + y$, $\eta_1 = \Gamma_3 x + y$ ve $\eta_2 = \Gamma_4 x + y$ hiperbolik sistemin karakteristik değişkenleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \phi_1(t, x, y) &= \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \phi_1(t, x, y) = 0, \\ \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \phi_2(t, x, y) &= \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \phi_2(t, x, y) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

şeklinde radyasyon koşullarının yazılmasına yol açar. Karakteristik değişkenler arasında

$$\eta_1 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2, \quad \eta_2 = \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2$$

şeklinde ilişkiler vardır.

Bu tez çalışmasında, EH durumdaki DS sisteminin başlangıç değer probleminin incelenmesinde izlenen yolun genelleştirilmiş bir hali kullanılarak, EHH durumdaki GDS sisteminin başlangıç değer problemi incelenecektir [13]. Adı geçen makalede, önce dalga denkleminin çözümünün integral gösterimi bulunarak DS sistemi yerel olmayan bir NLS denklemine indirgenmiş ve bazı önkestirimler yapılmıştır. Daha sonra, indirgenmiş sistemin global çözümü düzgünleştirilmiş denklemin çözümlerinin limiti olarak elde edilmiştir. Buna göre, GDS sisteminin başlangıç değer probleminin incelenmesi dört farklı aşamadan oluşur: İlk aşamada, (1.3) sistemindeki ikinci mertebe ve iki bilinmeyenli

$$\begin{aligned}\phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\phi_{2,xy} &= \alpha(|u|^2)_x, \\ \phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\phi_{1,xy} &= (|u|^2)_y\end{aligned}\tag{1.7}$$

homojen olmayan dalga sistemi çözülmelidir. Ayrıca, (1.7) sisteminin çözümünün integral gösterimi kullanılarak GDS sistemi yerel olmayan bir NLS denklemine indirgenmelidir. İkinci aşamada, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları ve enerji fonksiyonelinin bu fonksiyonları içeren terimleri için bir üst sınır hesaplanmalıdır. Üçüncü aşamada, indirgenmiş NLS denklemleri için yazılacak düzgünleştirilmiş denklemin global çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmelidir. Son aşamada ise global varlıkları gösterilmiş olan düzgünleştirilmiş denklemlerin çözümlerinin, indirgenmiş NLS denkleminin çözümlerine yakınsadığı ispatlanmalıdır.

Tez çalışmasının diğer bölümlerinin içerikleri aşağıdaki gibidir. Bölüm 2’de, GDS sisteminin HH kısmını oluşturan kuple lineer dalga denklemlerinin çözümünün integral gösterimi hesaplanacaktır. Karşılaştırma amacı ile, önce homojen olmayan tek bileşenli lineer dalga denklemleri için çözümün integral gösterimi birinci alt bölümde verilecektir. İkinci alt bölümde, kuple sistemin çözümünün integral gösterimi bulunarak GDS sistemi, yerel olmayan tek NLS denklemleri olarak ifade edilecektir. Üçüncü alt bölümde; integral gösterimin bir uygulaması olarak, bazı özel parametre değerleri için GDS sisteminin lokalize çözümleri verilecektir.

Bölüm 3’de, GDS sisteminin başlangıç değer probleminin incelenmesinde gerekli olacak bazı önkestirimler yapılacaktır. Birinci alt bölümde, karşılaştırma amacı ile, DS sistemi için önkestirimler verilecektir. İkinci alt bölümde; önkestirim

hesabı için gerekli olan enerji fonksiyoneli, EHH halindeki GDS sisteminde enerji korunumu olmamasına rağmen, Noether teoremi yardımıyla formel olarak bulunacaktır. Son olarak da, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları ve enerji fonksiyonelinin bu fonksiyonları içeren terimleri için üst sınırlar hesaplanacaktır.

Bölüm 4’de, GDS sistemi için yazılan düzgünleştirilmiş denklemin global çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenecektir. Bu yüzden, ilk alt bölümde, $\varepsilon > 0$ için yazılacak düzgünleştirilmiş denklem tanıtılarak kütle ve enerji korunumu gösterilecektir. Sonraki alt bölümde ise çözümlerin zamandaki varlık ve tekliği iki aşamada incelenerek bir önerme ile ifade edilecektir. İlk aşamada, klasik sabit nokta yaklaşımından yararlanılarak, ε –düzgünleştirilmiş denklemin $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayındaki çözümlerinin zamanda global varlığı ve tekliği gösterilecektir. Bu kısımda, yerel terimler için sabit nokta yaklaşımı standart olduğundan yerel olmayan terimler üzerinde özellikle durulacaktır. İkinci aşamada ise enerji korunumu ve kütlenin küçük olduğu varsayımı ile çözümlerin $H^1(\mathbb{R}^2)$ normunun düzgün sınırlı olduğu ispat edilecektir. Ayrıca, yapılan bazı hesapların detayları EK 1’de verilecektir.

Bölüm 5’de, ε –düzgünleştirilmiş denklemin zayıf çözümlerinin indirgenmiş denklemin zayıf çözümüne yakınsadığı ispat edilecektir. Düzgünleştirilmiş denklem çözümleri düzgün sınırlı olduğundan, $\varepsilon \rightarrow 0$ için denklemin limiti alınabilir. Bu denklemdeki kuple dalga sisteminin çözümlerinin bulunduğu (yerel olmayan) terimler yapı olarak diğer terimlerden farklıdır. Bu yüzden, ilk alt bölümde yerel terimler ve ikinci alt bölümde ise yerel olmayan terimler üzerinde durularak ε –düzgünleştirilmiş denklemin limitinin, indirgenmiş NLS denkleminin eşit olduğu gösterilecektir. Böylece, küçük değerli başlangıç koşulu için EHH durumundaki GDS sisteminin zayıf çözümlerinin varlığı ispatlanmış olacaktır. Yapılan bazı hesapların detayları EK 2’de verilecektir.

Bölüm 6’da, başlangıç değer probleminin çözümlerinin global varlığı ile ilgili bulunan sonuç bir teorem ile ifade edilecektir. Bulunan sonucun genel bir değerlendirmesi ve gelecekte çalışılması düşünülen konular sunulacaktır.

Son olarak, bu çalışmada kullanılan temel teoremlerin ifadesi EK 3’de verilecektir.

2. İNTEGRAL GÖSTERİMLER

Bu bölümde, tek lineer dalga denkleminin çözümünün integral gösterimi kısaca tartışılacak ve kuple lineer dalga sisteminin çözümünün integral gösterimi bulunacaktır. Ayrıca, bu integral gösterimin bir uygulaması olarak, bazı özel parametre değerleri için GDS sisteminin lokalize çözümleri sunulacaktır [27].

2.1. Tek Lineer Dalga Denkleminin Çözümünün İntegral Gösterimi

DS sistemi bir NLS denklemi ile bir dalga denkleminden oluşur. Eliptik-hiperbolik durumdaki (1.1) DS sistemi

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + u_{yy} &= \chi|u|^2u + bu\phi_x, \\ \phi_{xx} - c^2\phi_{yy} &= (|u|^2)_x, \end{aligned} \quad (2.1)$$

formunda yazılabilir. (2.1)₂ dalga denkleminin çözümünün integral gösterimini bulmak için öncelikle denklem, $f = (|u|^2)_x \in L^1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$\phi_{xx} - c^2\phi_{yy} = f(x, y) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. (2.2) denklemi hiperbolik olduğundan Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak denklemi çözmek mümkün değildir. Bu nedenle (2.2) dalga denklemi karakteristik koordinatlarda ifade edilecek ve uygun sınır koşulları altında çözülecektir. ϕ fonksiyonunun $\zeta_1 = -cx + y$ ve $\zeta_2 = cx + y$ karakteristik değişkenleri boyunca

$$\lim_{\zeta_1 \rightarrow \infty} \phi(t, x, y) = 0, \quad \lim_{\zeta_2 \rightarrow \infty} \phi(t, x, y) = 0 \quad (2.3)$$

ile verilen radyasyon koşullarını sağladığı varsayılmıştır. Ayrıca $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ ve $\zeta_2 \rightarrow -\infty$ için herhangi bir sınır koşulu tanımlanmamıştır [10]. Dalga denklemi ζ_1 ve ζ_2 karakteristik değişkenler cinsinden yazılırsa

$$-4c^2\tilde{\phi}_{\zeta_1\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) = \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (2.4)$$

bulunur. (2.4) denklemi önce ζ_1 değişkenine göre integrale edilirse

$$\tilde{\phi}_{\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{4c^2} \int_{\zeta_1}^{\infty} \tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2) d\zeta'_1 + \lim_{\zeta_1 \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_{\zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (2.5)$$

elde edilir. Daha sonra (2.5) denklemi ζ_2 değişkenine göre integrale edilirse, ϕ

$$\tilde{\phi}(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\zeta_2}^{\infty} \int_{\zeta_1}^{\infty} \tilde{f}(\zeta'_1, \zeta'_2) d\zeta'_1 d\zeta'_2 + \psi(\zeta_1)$$

olarak hesaplanır. $\psi(\zeta_1) = \lim_{\zeta_2 \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(\zeta_1, \zeta_2) + \int_{\zeta_2}^{\infty} \lim_{\zeta_1 \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_{\zeta'_2}(\zeta_1, \zeta'_2) d\zeta'_2$ olarak tanımlanan $\psi(\zeta_1)$ fonksiyonu (2.3) radyasyon koşulundan dolayı sıfırdır. Böylece karakteristik değişkenler cinsinden ϕ fonksiyonunun integral gösterimi

$$\tilde{\phi}(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\zeta_1}^{\infty} \int_{\zeta_2}^{\infty} \tilde{f}(\zeta'_1, \zeta'_2) d\zeta'_2 d\zeta'_1 \quad (2.6)$$

elde edilir. H Heaviside fonksiyonu yardımı ile (2.6) denklemi

$$\tilde{\phi}(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\mathbb{R}^2} H(\zeta'_1 - \zeta_1) H(\zeta'_2 - \zeta_2) \tilde{f}(\zeta'_1, \zeta'_2) d\zeta'_2 d\zeta'_1 \quad (2.7)$$

olarak da yazılır. ϕ fonksiyonunun (x, y) kartezyen koordinatlarındaki integral gösterimini elde etmek için $\zeta_1 = -cx + y$, $\zeta_2 = cx + y$ değişken dönüşümü (2.7) integraline uygulanır ise $\phi(x, y)$ fonksiyonu

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\mathbb{R}^2} H(c(x' - x) + y' - y) H(c(x - x') + y' - y) f(x', y') |J| dx' dy'$$

bulunur. Burada J dönüşümün Jakobiyenidir:

$$|J| = \left| \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(x, y)} \right| = 2c.$$

Böylece tek dalga denkleminin çözümünün integral gösterimi

$$\phi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, x', y') f(x', y') dx' dy' \quad (2.8)$$

ile verilir [13, 28]. Burada $K(x, y, x', y')$ çekirdeği

$$K(x, y, x', y') = -\frac{1}{2c} H(c(x' - x) + y' - y) H(c(x - x') + y' - y)$$

şeklinededir. Bu sonuç, diğer bir deyişle ϕ fonksiyonunun integral gösterimi, iki denklemden oluşan DS sisteminin yerel olmayan terim içeren bir NLS denklemi olarak yazılmasını sağlar:

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} = \chi |u|^2 u + bu \left(\mathcal{K}(|u|^2)_x \right)_x. \quad (2.9)$$

Burada, $\mathcal{K}$ operatörü tek dalga denkleminin çözüm operatörü olarak tanımlanmıştır ($\phi = \mathcal{K}(f)$) [13].

Sonuç olarak, tek lineer dalga denkleminin çözümünün integral gösterimi kullanılarak (2.1) DS sistemi, (2.9) NLS denklemine indirgenmiştir. Sonraki alt bölümün amacı ise üçlü denklemden oluşan (1.3) GDS sistemini tek bir NLS denklemine indirmektir.

2.2. Kuple Lineer Dalga Sisteminin Çözümünün İntegral Gösterimi

Bu alt bölümde, DS sistemini tek NLS denklemi formunda yazabilmek için uygulanan yöntemin benzeri GDS sistemine uygulanacaktır. NLS denklemini ve iki kuple lineer dalga denklemlerinden oluşan GDS sistemini tek denkleme indirmek için HH durumdaki iki lineer dalga sisteminin çözümünün integral gösterimi hesaplanmalıdır. İlk olarak, (1.7) dalga sistemi, $f = \alpha(|u|^2)_x \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ve $g = (|u|^2)_y \in L^1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\phi_{2,xy} &= f, \\ \phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\phi_{1,xy} &= g\end{aligned}\tag{2.10}$$

formunda yazılır. Burada f ve g fonksiyonları $f_y = \alpha g_x$ özelliğini sağlar. Daha sonra ikinci mertebe iki bilinmeyen içeren (2.10) lineer sistemi birinci mertebe dört bilinmeyen içeren bir lineer sisteme indirgenecektir. Bu amaçla; $\phi_{1,xy} = \phi_{1,yx}$, $\phi_{2,xy} = \phi_{2,yx}$ uygunluk koşulları ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ tanımı kullanılarak, (2.10) sistemi

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_x + \mathbf{B}\mathbf{v}_y = \mathbf{c}\tag{2.11}$$

şeklindeki birinci mertebe lineer denklem sistemine indirgenir. (2.11) denklemindeki katsayı matrisleri

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ g \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. $\mathbf{v}$ vektörünün bileşenleri ise $v_1 = \phi_{1,x}$, $v_2 = \phi_{1,y}$, $v_3 = \phi_{2,x}$, $v_4 = \phi_{2,y}$ fonksiyonlarından oluşur. Bu durumda, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarını

bulmak için öncelikle $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ ($i = 1, 2$) türevleri hesaplanmalıdır, diğer bir deyişle (2.11) ile verilen birinci mertebe lineer denklem sistemi köşegenleştirilerek çözülmelidir. Bu amaçla $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matrisin özdeğer ve özvektörleri bulunmalıdır.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matrisi simetrik olmadığından (2.10)'un kuvvetli kuple bir sistem olduğu görülür. Bu matrisin özdeğerleri $\pm r_1$, $\pm r_2$, $a_1 = \sqrt{c_g^2 - c_1^2}$ ve $a_2 = \sqrt{c_g^2 - c_2^2}$ olmak üzere,

$$r_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad r_2 = \frac{a_1}{a_2}$$

olarak hesaplanır. Burada $c_1 > c_2$ olduğundan özdeğerlerin $r_1 > 1$ ve $0 < r_2 < 1$ eşitsizliklerini sağladığı görülür. Özdeğerlerin reel ve ayrık olması (2.10) sisteminin hiperbolik olduğunu göstermektedir. Ayrıca $\pm r_1$ ve $\pm r_2$ özdeğerlerine karşı gelen özvektörler ise

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)} &= \left(\frac{c_1 r_1}{a_2}, \frac{c_1}{a_2}, r_1, 1 \right)^T \\ \Theta^{(2)} &= \left(\frac{c_1 r_1}{a_2}, -\frac{c_1}{a_2}, -r_1, 1 \right)^T \\ \Theta^{(3)} &= \left(-\frac{a_1 r_2}{c_2}, -\frac{a_1}{c_2}, r_2, 1 \right)^T \\ \Theta^{(4)} &= \left(-\frac{a_1 r_2}{c_2}, \frac{a_1}{c_2}, -r_2, 1 \right)^T \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.10) sistemini köşegenleştirmek için gerekli olan $\mathbf{S}$ matrisi

$$\mathbf{S} = (\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \Theta^{(3)}, \Theta^{(4)}) = \begin{pmatrix} \frac{c_1 r_1}{a_2} & \frac{c_1 r_1}{a_2} & -\frac{a_1 r_2}{c_2} & -\frac{a_1 r_2}{c_2} \\ \frac{a_2}{c_1} & \frac{a_2}{c_1} & \frac{c_2}{a_1} & \frac{c_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{c_1} & -\frac{a_2}{c_1} & -\frac{c_2}{a_1} & \frac{c_2}{a_1} \\ r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır ve $\mathbf{S}^{-1}$ matrisi

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_2 c_2}{2c_g^2} & \frac{a_2 c_2}{2c_g^2 r_1} & \frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} & \frac{a_1^2}{2c_g^2} \\ \frac{a_2 c_2}{2c_g^2} & -\frac{a_2 c_2}{2c_g^2 r_1} & -\frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} & \frac{a_1^2}{2c_g^2} \\ -\frac{a_2 c_2}{2c_g^2} & -\frac{a_2 c_2}{2c_g^2 r_2} & \frac{c_2^2}{2c_g^2 r_2} & \frac{c_1^2}{2c_g^2} \\ -\frac{a_2 c_2}{2c_g^2} & \frac{a_2 c_2}{2c_g^2 r_2} & -\frac{c_2^2}{2c_g^2 r_2} & \frac{c_1^2}{2c_g^2} \end{pmatrix}$$

ile verilir. $\mathbf{w} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}$ koşulunu sağlayacak şekilde tanımlanan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ matrisi (2.11) sistemine uygulanırsa

$$\mathbf{w}_x + \mathbf{Q}\mathbf{w}_y = \mathbf{h} \quad (2.12)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{Q}$ özdeğerlerden oluşan köşegen bir matris ve bileşenleri

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{a_2}{2c_g^2 r_1}(c_1 f + a_2 g), & h_2 &= \frac{a_2}{2c_g^2 r_1}(c_1 f - a_2 g), \\ h_3 &= \frac{c_2}{2c_g^2 r_2}(-a_1 f + c_2 g), & h_4 &= -\frac{c_2}{2c_g^2 r_2}(a_1 f + c_2 g) \end{aligned} \quad (2.13)$$

olan $\mathbf{h} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ sütun bir vektördür. (2.12) lineer sisteminin bileşenleri,

$$\begin{aligned} w_{1,x} - r_1 w_{1,y} &= h_1, \\ w_{2,x} + r_1 w_{2,y} &= h_2, \\ w_{3,x} - r_2 w_{3,y} &= h_3, \\ w_{4,x} + r_2 w_{4,y} &= h_4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde birbirinden bağımsız dört tane birinci mertebe lineer dalga denkleminde oluşur. Bu dalga denklem sisteminin dört farklı karakteristiği

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -r_1 x + y, & \xi_2 &= r_1 x + y, \\ \eta_1 &= -r_2 x + y, & \eta_2 &= r_2 x + y \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (2.14)₁ ve (2.14)₂ denklemleri (ξ_1, ξ_2) , (2.14)₃ ve (2.14)₄ denklemleri (η_1, η_2) karakteristik değişkenleri ile ifade edilirse

$$\begin{aligned} -2r_1 \tilde{w}_{1,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) &= \tilde{h}_1(\xi_1, \xi_2), \\ 2r_1 \tilde{w}_{2,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \tilde{h}_2(\xi_1, \xi_2), \\ -2r_2 \bar{w}_{3,\eta_1}(\eta_1, \eta_2) &= \bar{h}_3(\eta_1, \eta_2), \\ 2r_2 \bar{w}_{4,\eta_2}(\eta_1, \eta_2) &= \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

sonucu elde edilir. (2.15) denklemlerindeki w_j ve h_j ($j = 1, \dots, 4$) fonksiyonları (ξ_1, ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ise sırasıyla $\tilde{w}_j$ ve $\tilde{h}_j$; (η_1, η_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ise sırasıyla $\bar{w}_j$ ve $\bar{h}_j$ notasyonu ile gösterilmiştir (ileride bu notasyon diğer fonksiyonlar için de kullanılacaktır). Daha sonra, (2.15)₁ denklemi ξ_1 , (2.15)₂ denklemi ξ_2 , (2.15)₃ denklemi η_1 , ve (2.15)₄ denklemi η_2 değişkenlerine göre integre edilirse (2.14) sisteminin karakteristik değişkenlerine bağlı w_j çözümleri elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \psi_1(\xi_2), \\ \tilde{w}_2(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2r_1} \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 + \psi_2(\xi_1), \\ \bar{w}_3(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{2r_2} \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta'_1, \eta_2) d\eta'_1 + \psi_3(\eta_2), \\ \bar{w}_4(\eta_1, \eta_2) &= -\frac{1}{2r_2} \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta'_2) d\eta'_2 + \psi_4(\eta_1).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Burada $\psi_1 = \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \tilde{w}_1$, $\psi_2 = \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \tilde{w}_2$, $\psi_3 = \lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \bar{w}_3$ ve $\psi_4 = \lim_{\eta_2 \rightarrow \infty} \bar{w}_4$ dır. (2.16) denklemlerinde, (1.6) koşulları göz önüne alınırsa $\psi_j = 0$ olduğu görülür. Böylece (2.16) denklemlerinde bulunan ψ_j fonksiyonları düşer.

Bu aşamada amaç, ϕ fonksiyonlarının integral formlarını bulmak olduğundan $\mathbf{v} = (\phi_{1,x}, \phi_{1,y}, \phi_{2,x}, \phi_{2,y})^T$ vektörünün hesaplanması gereklidir. O zaman, $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{w}$ kullanılarak $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ türevleri

$$\begin{aligned}\phi_{1,x} &= \frac{c_1}{2a_2} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 - \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \right) \\ &\quad - \frac{a_1}{2c_2} \left(\int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta'_1, \eta_2) d\eta'_1 - \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta'_2) d\eta'_2 \right), \\ \phi_{1,y} &= \frac{c_2}{2a_2} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \right) \\ &\quad - \frac{a_2}{2c_2} \left(\int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta'_1, \eta_2) d\eta'_1 + \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta'_2) d\eta'_2 \right), \\ \phi_{2,x} &= \frac{1}{2} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta'_1, \eta_2) d\eta'_1 + \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta'_2) d\eta'_2 \right), \\ \phi_{2,y} &= \frac{1}{2r_1} \left(\int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 - \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2r_2} \left(\int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta'_1, \eta_2) d\eta'_1 - \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta'_2) d\eta'_2 \right)\end{aligned}\quad (2.17)$$

hesaplanır. (2.17) denklemlerindeki $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ fonksiyonları ξ_i ve η_i karakteristik değişkenlerine bağlıdır. x ve y bağımsız değişkenleri yerine sistemin bağımsız dört değişken cinsinden yazılması, hesaplarda yanlışlıklara yol açacaktır. Bu yanlışlığı ortadan kaldırmak amacı ile (ξ_1, ξ_2) değişkenlerinin (η_1, η_2) değişkenlerine (veya (η_1, η_2) değişkenlerinin (ξ_1, ξ_2) değişkenlerine) bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu ise $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ fonksiyonlarının (ξ_1, ξ_2) (veya (η_1, η_2)) değişkenlerine bağlı olduğunu gösterir. Bu durumda η_i değişkenleri ξ_i değişkenlerine aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$\eta_1 = \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2, \quad \eta_2 = \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2. \quad (2.18)$$

ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının açık formlarını elde etmek için (x, y) değişkenlerine göre türev ifadelerinin yerine (ξ_1, ξ_2) karakteristik değişkenlerine göre türev ifadelerine gerek vardır. Bunun için

$$\phi_{i,\xi_1} = -\frac{1}{2r_1} \phi_{i,x} + \frac{1}{2} \phi_{i,y}, \quad \phi_{i,\xi_2} = \frac{1}{2r_1} \phi_{i,x} + \frac{1}{2} \phi_{i,y} \quad (i = 1, 2)$$

eşitliklerinde (2.17) sonuçları kullanılırsa (ξ_1, ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ϕ_{i,ξ_1} ve ϕ_{i,ξ_2} türevleri

$$\begin{aligned} \phi_{1,\xi_1} &= \frac{c_2}{2a_2} \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi_2') d\xi_2' - \frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta_1', \eta_2) d\eta_1' \\ &\quad - \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2') d\eta_2', \\ \phi_{1,\xi_2} &= \frac{c_2}{2a_2} \int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi_1', \xi_2) d\xi_1' - \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta_1', \eta_2) d\eta_1' \\ &\quad - \frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2') d\eta_2', \\ \phi_{2,\xi_1} &= -\frac{1}{2r_1} \int_{\xi_2}^{\infty} \tilde{h}_2(\xi_1, \xi_2') d\xi_2' + \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta_1', \eta_2) d\eta_1' \\ &\quad - \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2') d\eta_2', \\ \phi_{2,\xi_2} &= \frac{1}{2r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} \tilde{h}_1(\xi_1', \xi_2) d\xi_1' + \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} \int_{\eta_1}^{\infty} \bar{h}_3(\eta_1', \eta_2) d\eta_1' \\ &\quad - \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} \int_{\eta_2}^{\infty} \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2') d\eta_2' \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19)'da η_i karakteristik değişkenlerin ξ_i karakteristik değişkenlerine bağıllığı denklemlere yansıtılmamıştır. O zaman (2.19) ifadelerinde (2.18) dönüşümleri yerine yazılır ve H Heaviside fonksiyonu yardımı ile ϕ_{i,ξ_1} ve ϕ_{i,ξ_2}

fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{1,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{c_2}{2a_2} \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \\
&\quad - \frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_3(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) d\eta'_1 \\
&\quad - \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_4(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2, \eta'_2) d\eta'_2, \\
\tilde{\phi}_{1,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{c_2}{2a_2} \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 \\
&\quad - \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_3(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) d\eta'_1 \\
&\quad - \frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_4(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2, \eta'_2) d\eta'_2, \\
\tilde{\phi}_{2,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2r_1} \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2 \\
&\quad + \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_3(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) d\eta'_1 \\
&\quad - \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_4(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2, \eta'_2) d\eta'_2, \\
\tilde{\phi}_{2,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_1(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 \\
&\quad + \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_3(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) d\eta'_1 \\
&\quad - \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2) \bar{h}_4(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2, \eta'_2) d\eta'_2. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. (2.20) denklemlerinde η_i değişkenleri yerine ξ_i değişkenlerine bağlı ifadelerin yazılması ile sistemdeki dört farklı karakteristik değişken arasındaki karmaşık etkileşimin Heaviside fonksiyonlarının argümanlarında ortaya çıktığına dikkat edilmelidir. Ayrıca (2.20)₁ ve (2.20)₂ denklemleri, ϕ_1 fonksiyonunun sağladığı birinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklem sistemini oluşturmaktadır. Benzer şekilde, (2.20)₃ ve (2.20)₄ denklemleri ise ϕ_2 fonksiyonunun sağladığı birinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklem sistemidir. Bu iki sistem çözülürse ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerine göre integral gösterimi bulunacaktır. Bunun için, (2.20)₁ ve (2.20)₃

denklemlerinin iki tarafı da ξ_1 'e göre integre edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{c_2}{2a_2} I_1 + \frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} I_2 + \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} I_3 + \psi_5(\xi_2), \\ \tilde{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} I_1 - \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} I_2 + \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} I_3 + \psi_6(\xi_2).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Burada $\psi_5(\xi_2)$ ve $\psi_6(\xi_2)$ fonksiyonları, birinci merteye lineer kısmi diferansiyel denklem sistem çözümünde ortaya çıkan keyfi fonksiyonlardır. I_l ($l = 1, 2, 3$) ise

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H\left(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_2\right) \\ &\quad \bar{h}_3\left(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_2\right) d\eta'_1 d\xi'_1, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H\left(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_2\right) \\ &\quad \bar{h}_4\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_2, \eta'_2\right) d\eta'_2 d\xi'_1\end{aligned}\quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. (2.22) integrallerini tek integral işareti altında yazabilmek için, I_2 integralinde ($r_1 \neq r_2$ için)

$$\begin{aligned}\eta'_1 &= \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_2, \\ \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_2 &= \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_2\end{aligned}$$

değişken dönüşümü ve I_3 integralinde

$$\begin{aligned}\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi'_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi'_2 &= \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi''_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi''_2, \\ \eta'_2 &= \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi''_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi''_2\end{aligned}$$

değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi''_2) |J_1| d\xi''_1 d\xi''_2, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi''_2) |J_2| d\xi''_1 d\xi''_2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada J_1 ve J_2

$$|J_1| = \left| \frac{\partial(\xi'_1, \eta'_1)}{\partial(\xi''_1, \xi''_2)} \right| = \frac{2r_2}{r_1 - r_2}, \quad |J_2| = \left| \frac{\partial(\xi'_1, \eta'_2)}{\partial(\xi''_1, \xi''_2)} \right| = \frac{2r_2}{r_1 + r_2}$$

ilgili dönüşümün Jakobi determinantını göstermektedir. Bu dönüşümler ile h_3 ve h_4 fonksiyonlarının karmaşık argümanları ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerine dönüşür:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi''_2) &= \bar{h}_3\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi''_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi''_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi''_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi''_2\right), \\ \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi''_2) &= \bar{h}_4\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi''_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi''_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi''_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi''_2\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bu durumda, $r_1 \neq r_2$ için (ξ_1, ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{c_2}{2a_2} I_1 + \frac{a_1}{2c_1} I_4 + \frac{a_1}{2c_1} I_5 + \psi_5(\xi_2), \\ \tilde{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} I_1 - \frac{1}{2r_1} I_4 + \frac{1}{2r_1} I_5 + \psi_6(\xi_2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. (2.24) denklemlerindeki I_m ($m = 1, 4, 5$) integralleri ise

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1, \\ I_4 &= \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2, \\ I_5 &= \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bilinmeyen $\psi_5(\xi_2)$ ve $\psi_6(\xi_2)$ fonksiyonlarının hesaplanması için, (2.24) denklemleri ξ_2 değişkenine göre türetilerek, (2.20)₂ ve (2.20)₄ denklemlerindeki ϕ_{1,ξ_2} ve ϕ_{2,ξ_2} denklemleriyle karşılaştırılmalıdır. Bunun için önce (2.24) denklemleri ξ_2 değişkenine göre türetilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{1,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{c_2}{2a_2} I_{1,\xi_2} + \frac{a_2}{2c_1} I_{4,\xi_2} + \frac{a_1}{2c_1} I_{5,\xi_2} + \psi'_5(\xi_2), \\ \tilde{\phi}_{2,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} I_{1,\xi_2} - \frac{1}{2r_1} I_{4,\xi_2} + \frac{1}{2r_1} I_{5,\xi_2} + \psi'_6(\xi_2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) denklemindeki I_{m,ξ_2} integralleri

$$\begin{aligned}
I_{1,\xi_2} &= - \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) \delta(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1, \\
I_{4,\xi_2} &= - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2 \\
&\quad + \frac{2r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \delta\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2, \\
I_{5,\xi_2} &= - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2 \\
&\quad - \frac{2r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi''_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \delta\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi''_2) d\xi''_1 d\xi''_2 \tag{2.27}
\end{aligned}$$

ile verilir. (2.27) ifadelerindeki δ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(ax - b) f(x) dx = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.28}$$

özelliğini sağlayan Dirac-Delta dağılımını gösterir. (2.27) denklemlerinde bulunan iki katlı integralleri tek katlı integrale indirgemek için (2.28) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I_{1,\xi_2} &= - \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1, \\
I_{4,\xi_2} &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi''_1 - \xi_1) \tilde{h}_3(\xi''_1, \xi_2) d\xi''_1 \\
&\quad - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}} H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3\left(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2, \\
I_{5,\xi_2} &= - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4\left(\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2 \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} H(\xi''_1 - \xi_1) \tilde{h}_4(\xi''_1, \xi_2) d\xi''_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu hesap sonucunda (2.26) denklemlerindeki ϕ_{1,ξ_2} ve ϕ_{2,ξ_2} türevleri, (2.13) denklemleri de kullanılarak, tek katlı integrallerin toplamı olarak ifade

edilebilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{1,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{c_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} [c_1 \tilde{f} - a_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \psi'_5(\xi_2) \\
&+ \frac{a_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} [-a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \frac{a_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} [a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 \\
&- \frac{a_1(r_1 + r_2)}{2c_1(r_1 - r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3\left(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2 \\
&- \frac{a_1(r_1 - r_2)}{2c_1(r_1 + r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4\left(\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2, \\
\tilde{\phi}_{2,\xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2} \int_{\xi_1}^{\infty} [c_1 \tilde{f} - a_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \psi'_6(\xi_2) \\
&+ \frac{c_2}{4c_g^2 r_1 r_2} \int_{\xi_1}^{\infty} [a_1 \tilde{f} - c_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 + \frac{c_2}{4c_g^2 r_1 r_2} \int_{\xi_1}^{\infty} [a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}](\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1 \\
&+ \frac{r_1 + r_2}{2r_1(r_1 - r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3\left(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2 \\
&- \frac{r_1 - r_2}{2r_1(r_1 + r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4\left(\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2), \xi''_2\right) d\xi''_2.
\end{aligned}$$

Burada, parantez içindeki değişkenlerin köşeli parantez içinde yer alan fonksiyonların ortak argümanı olduğuna dikkat edilmelidir. Elde edilen ϕ_{1,ξ_2} ve ϕ_{2,ξ_2} ifadeleri, sırasıyla, (2.20)₂ ve (2.20)₄ denklemlerinde yerine yazılırsa $\psi'_5(\xi_2)$ ve $\psi'_6(\xi_2)$ fonksiyonlarının sağladığı denklemler elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan ve (2.23) denklemi kullanıldıktan sonra $\psi'_5(\xi_2)$ ve $\psi'_6(\xi_2)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\psi'_5(\xi_2) &= \frac{a_1(r_1 + r_2)}{2c_1(r_1 - r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \bar{h}_3\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{(r_1 + r_2)^2}{2r_1(r_1 - r_2)}\xi_2 - \frac{2r_2}{r_1 - r_2}\xi''_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2\right) d\xi''_2 \\
&+ \frac{a_1(r_1 - r_2)}{2c_1(r_1 + r_2)} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi''_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \bar{h}_4\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2r_1(r_1 + r_2)}\xi_2 + \frac{2r_2}{r_1 + r_2}\xi''_2\right) d\xi''_2 \\
&- \frac{a_2(r_1 + r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H\left(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_2\right) \\
&\quad \bar{h}_3\left(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1}\xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1}\xi_2\right) d\eta'_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_2(r_1 - r_2)}{4c_1} \int_{\mathbb{R}} H \left(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2 \right) \\
& \bar{h}_4 \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2, \eta'_2 \right) d\eta'_2, \tag{2.29} \\
\psi'_6(\xi_2) = & -\frac{r_1 + r_2}{2r_1(r_1 - r_2)} \int_{\mathbb{R}} H \left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2} (\xi''_2 - \xi_2) \right) \\
& \bar{h}_3 \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{(r_1 + r_2)^2}{2r_1(r_1 - r_2)} \xi_2 - \frac{2r_2}{r_1 - r_2} \xi''_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2 \right) d\xi''_2 \\
& + \frac{r_1 - r_2}{2r_1(r_1 + r_2)} \int_{\mathbb{R}} H \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} (\xi''_2 - \xi_2) \right) \\
& \bar{h}_4 \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2, \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2r_1(r_1 + r_2)} \xi_2 + \frac{2r_2}{r_1 + r_2} \xi''_2 \right) d\xi''_2 \\
& + \frac{r_1 + r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H \left(\eta'_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2 \right) \\
& \bar{h}_3 \left(\eta'_1, \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2 \right) d\eta'_1 \\
& - \frac{r_1 - r_2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}} H \left(\eta'_2 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_2 \right) \\
& \bar{h}_4 \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_2, \eta'_2 \right) d\eta'_2 \tag{2.30}
\end{aligned}$$

bulunur. (2.29) ve (2.30) ifadelerindeki son iki integralde sırası ile

$$\begin{aligned}
\eta'_1 &= \frac{r_1 + r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{(r_1 + r_2)^2}{2r_1(r_1 - r_2)} \xi_2 - \frac{2r_2}{r_1 - r_2} \xi''_2, \\
\eta'_2 &= \frac{r_1 - r_2}{2r_1} \xi_1 + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2r_1(r_1 + r_2)} \xi_2 + \frac{2r_2}{r_1 + r_2} \xi''_2
\end{aligned}$$

dönüşümleri uygulanırsa, $\psi'_5(\xi_2) = 0$ ve $\psi'_6(\xi_2) = 0$ elde edilir. (1.6) radyasyon koşulları kullanılırsa $\psi_5(\xi_2) = 0$ ve $\psi_6(\xi_2) = 0$ olduğu görülür. Böylece (2.13) ile tanımlanan h_j fonksiyonları (2.24) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = & -\frac{c_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \left[c_1 \tilde{f} - a_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1 \\
& + \frac{a_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\mathbb{R}^2} H \left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} (\xi'_2 - \xi_2) \right) H \left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2} (\xi'_2 - \xi_2) \right) \\
& \left[-a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \\
& - \frac{a_2}{4c_g^2 r_1} \int_{\mathbb{R}^2} H \left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} (\xi'_2 - \xi_2) \right) H \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} (\xi'_2 - \xi_2) \right) \\
& \left[a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \left[c_1 \tilde{f} - a_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1 \\
&\quad - \frac{c_2}{4c_g^2 r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \quad \quad \left[-a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \\
&\quad - \frac{c_2}{4c_g^2 r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\
&\quad \quad \quad \left[a_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g} \right] (\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2
\end{aligned}$$

bulunur. (ξ_1, ξ_2) koordinatlarından (x, y) kartezyen koordinatlarına dönüşümün Jakobi determinantının

$$|J_3| = \left| \frac{\partial(\xi'_1, \xi'_2)}{\partial(x', y')} \right| = 2r_1$$

olduğu kullanılırsa, (x, y) değişkenlerine göre ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{-c_1 c_2}{2c_g^2} H(-r_1(x' - x) + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \right. \\
&\quad - \frac{a_1 a_2}{2c_g^2} \left[H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2}[r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right. \\
&\quad \quad \left. + H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}[-r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right] \Big\} \\
&\quad \quad \quad f(x', y') dx' dy' \\
&\quad + \frac{a_2 c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ H(-r_1(x' - x) + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \right. \\
&\quad + H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2}[r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \\
&\quad \quad \left. - H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}[-r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right\} \\
&\quad \quad \quad g(x', y') dx' dy', \\
\phi_2(x, y) &= \frac{a_2 c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ H(-r_1(x' - x) + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \right. \\
&\quad + H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2}[r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \\
&\quad \quad \left. - H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2}[-r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}[r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right\} \\
&\quad \quad \quad f(x', y') dx' dy'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} H(-r_1(x' - x) + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) + \frac{c_2^2}{2c_g^2 r_2} \right. \\
& \left[H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2} [r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right. \\
& \left. \left. + H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} [-r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right] \right\} \\
& g(x', y') dx' dy'
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç ile aşağıdaki önerme ispatlanmıştır:

Önerme 2.1. $r_1 \neq r_2$ için $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ve $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ise (2.10) kuple lineer dalga sisteminin çözümünün integral gösterimi

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} [K_1(x', y', x, y) f(x', y') + K_2(x', y', x, y) g(x', y')] dx' dy', \\
\phi_2(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} [K_2(x', y', x, y) f(x', y') + K_3(x', y', x, y) g(x', y')] dx' dy' \quad (2.31)
\end{aligned}$$

ile verilir. Burada $K_l(x', y', x, y)$ ($l = 1, 2, 3$) çekirdek fonksiyonları ise

$$\begin{aligned}
K_1(x', y', x, y) &= -\frac{c_1 c_2}{2c_g^2} H(r_1(x - x') + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \\
& - \frac{a_1 a_2}{2c_g^2} H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2} [r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \\
& - \frac{a_1 a_2}{2c_g^2} H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} [r_2(x - x') + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right), \\
K_2(x', y', x, y) &= \frac{a_2 c_2}{2c_g^2} \left\{ H(r_1(x - x') + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \right. \\
& + H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2} [r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \\
& \left. - H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} [r_2(x - x') + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \right\}, \\
K_3(x', y', x, y) &= -\frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} H(r_1(x - x') + y' - y) H(r_1(x' - x) + y' - y) \\
& - \frac{c_2^2}{2c_g^2 r_2} H\left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2} [r_2(x' - x) + y' - y]\right) H\left(\frac{-2r_2}{r_1 - r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right) \\
& - \frac{c_2^2}{2c_g^2 r_2} H\left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} [r_2(x - x') + y' - y]\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} [r_1(x' - x) + y' - y]\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak, $r_1 = r_2$ kabul edilirse $r_1 = r_2 = 1$ olduğu görülür. Bu durumda,

(2.10) dalga denklemlerinde bulunan karışık türevli ifadeler düşer ($\beta = 0$):

$$\begin{aligned}\phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} &= f, \\ \phi_{2,xx} - \phi_{2,yy} &= g.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Böylece (1.3) sistemi için dejenere bir durum oluşur. Bu denklem sistemi, su dalgalarındaki iç dalgaların yayılımını karakterize eden denklemler olarak Grimshaw tarafından türetilmiştir [29]. (2.32) ile verilen dejenere sistemin, $\xi_1 = -x + y$ ve $\xi_2 = x + y$ karakteristik koordinatlardaki ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri,

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_2 d\xi'_1, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1) H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_4(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\tilde{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{-c_1}{2a_1} I_1 + \frac{a_1}{2c_1} I_3, \quad \tilde{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_3 \tag{2.33}$$

şeklindedir. ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri (x, y) koordinatlarında

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= \frac{-1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} H(-(x' - x) + y' - y) H(x' - x + y' - y) f(x', y') dx' dy', \\ \phi_2(x, y) &= \frac{-1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} H(-(x' - x) + y' - y) H(x' - x + y' - y) g(x', y') dx' dy'\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu çözümler, [13] ve [28] çalışmalarındaki sonuçlarla uyumludur.

Son olarak, GDS sistemini yerel olmayan bir NLS denklemine indirgemek için (2.31) denklemlerindeki integraller $\mathcal{K}_i$ integral operatörleri ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(f, g)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} [K_1(x', y', x, y) f(x', y') + K_2(x', y', x, y) g(x', y')] dx' dy', \\ \mathcal{K}_2(f, g)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} [K_2(x', y', x, y) f(x', y') + K_3(x', y', x, y) g(x', y')] dx' dy'.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Daha sonra, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları $\mathcal{K}_i$ integral operatörleri yardımı ile

$$\phi_1 = \mathcal{K}_1(f, g), \quad \phi_2 = \mathcal{K}_2(f, g)$$

şeklinde ifade edilir ve (1.3) sistemindeki NLS denkleminde yerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned}iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} &= \chi |u|^2 u \\ &+ bu \left\{ \alpha [\mathcal{K}_1(\alpha(|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_x + [\mathcal{K}_2(\alpha(|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_y \right\}\end{aligned}\tag{2.35}$$

bulunur. Böylece $r_1 \neq r_2$ için EHH durumdaki GDS sistemi, yerel olmayan terimleri de içeren bir eliptik NLS denklemine indirgenmiş olur. Sonraki alt bölümün amacı ise, integral gösterimin bir uygulaması olarak, EHH durumdaki GDS sisteminin lokalize çözümlerini incelemektir.

2.3. İntegral Gösterimin Uygulaması: Lokalize Çözümler

EH durumdaki DS sisteminin lokalize çözümleri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [30, 31, 32]. Bu çalışmalarda, (2.1) DS sistemi yerine, tek dalga denklem çözümünün integral gösterimi kullanılarak elde edilen (2.9) yerel olmayan tek NLS denklemi (indirgenmiş DS denklemi) için lokalize çözümler bulunmuştur. Bu sonuca ulaşmak için öncelikle (2.6) ϕ tek dalga çözümü (ζ_1, ζ_2) karakteristik koordinatlarda yazılmıştır ($c = 1$ alınmıştır):

$$\begin{aligned}\phi(\zeta_1, \zeta_2) &= -\frac{1}{4} \int_{\zeta_1}^{\infty} \int_{\zeta_2}^{\infty} [(|u(\zeta'_1, \zeta'_2)|^2)_{\zeta'_2} - (|u(\zeta'_1, \zeta'_2)|^2)_{\zeta'_1}] d\zeta'_2 d\zeta'_1 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\zeta_1}^{\infty} |u(\zeta'_1, \zeta_2)|^2 d\zeta'_1 - \frac{1}{4} \int_{\zeta_2}^{\infty} |u(\zeta_1, \zeta'_2)|^2 d\zeta'_2.\end{aligned}\quad (2.36)$$

(2.36) çözümü, (2.9) denkleminde yazıldığında

$$iu_t + 2(u_{\zeta_1 \zeta_1} + u_{\zeta_2 \zeta_2}) + \frac{1}{2} \left[\int_{\zeta_1}^{\infty} (|u(\zeta'_1, \zeta_2)|^2)_{\zeta_2} d\zeta'_1 + \int_{\zeta_2}^{\infty} (|u(\zeta_1, \zeta'_2)|^2)_{\zeta_1} d\zeta'_2 \right] u = 0 \quad (2.37)$$

veya

$$\begin{aligned}iu_t + 2(u_{\zeta_1 \zeta_1} + u_{\zeta_2 \zeta_2}) - \frac{1}{2}u(\Phi_{1, \zeta_1} + \Phi_{2, \zeta_2}) &= 0, \\ \Phi_{1, \zeta_2} = \Phi_{2, \zeta_1} &= |u|^2\end{aligned}\quad (2.38)$$

bulunmuştur. NLS denkleminin genelleştirilmiş bir formu olan (2.38) denklemi, ters saçılma (inverse scattering) ve uzatma yapıları (prolongation structure) kullanılarak sırası ile Ablowitz ve Haberman [33] ve Morris [34] tarafından türetilmiştir. Daha sonra Cornille [30], (2.38) denkleminin lokalize çözümlerini bulmuştur. Daha genel sınır koşulları için DS denkleminin lokalize çözümleri ise Fokas ve Santini [31] tarafından verilmiştir.

GDS ve dejenere GDS sistemlerinin lokalize olmayan gezen dalga çözümleri değişik analitik yöntemler kullanılarak bulunmuştur [20, 35]. Bu alt bölümde ise, ϕ_1 ve ϕ_2 çözümlerinin integral gösteriminin bir uygulaması olarak, EHH

durumdaki GDS sisteminin lokalize olmuş bazı çözümleri Cornille'in bulduğu sonuçlar kullanılarak sunulacaktır [30]. Bu sonucu elde etmek için, (2.35) yerel olmayan NLS denklemi $\xi_1 = -r_1x + y$, $\xi_2 = r_1x + y$ karakteristik ve koordinatlar cinsinden yazılmalıdır. O zaman $\gamma = 1/r_1^2$ ve $\bar{t} = 2t$ zaman dönüşümü olmak üzere, $u(\xi_1, \xi_2)$ fonksiyonunun sağladığı denklem ($\bar{t}$ değişkeni t olarak değiştirildikten sonra)

$$iu_t + u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} = \frac{\chi}{2}|u|^2u + \frac{b}{2}[r_1\alpha(\phi_{1,\xi_2} - \phi_{1,\xi_1}) + \phi_{2,\xi_1} + \phi_{2,\xi_2}]u \quad (2.39)$$

şeklindedir. (2.39) denklemindeki ϕ_{1,ξ_i} ve ϕ_{2,ξ_i} ($i = 1, 2$) fonksiyonları (2.24) kullanılarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} \phi_{1,\xi_i} &= -\frac{c_2}{2a_2} I_{1,\xi_i} + \frac{a_2}{2c_1} I_{4,\xi_i} + \frac{a_1}{2c_1} I_{5,\xi_i}, \\ \phi_{2,\xi_i} &= \frac{1}{2r_1} I_{1,\xi_i} - \frac{1}{2r_1} I_{4,\xi_i} + \frac{1}{2r_1} I_{5,\xi_i}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.25) ile verilen I_m ifadelerinde, $f = \alpha r_1[(|u|^2)_{\xi_2} - (|u|^2)_{\xi_1}]$ ve $g = (|u|^2)_{\xi_2} + \alpha(|u|^2)_{\xi_1}$ olmak üzere, (2.13) h_j fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{2c_g^2r_1} \int_{\xi_2}^{\infty} |u(\xi_1, \xi'_2)|^2 d\xi'_2 - \frac{a_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{2c_g^2r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} |u(\xi'_1, \xi_2)|^2 d\xi'_1, \\ I_4 &= \frac{c_2}{2c_g^2r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\ &\quad [(a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2, \\ I_5 &= \frac{c_2}{2c_g^2r_2} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\ &\quad [(a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

bulunur ve (2.41) denklemlerinin ξ_1 ve ξ_2 'ye göre türevleri alınır

$$\begin{aligned} I_{1,\xi_1} &= \frac{a_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{2c_g^2r_1} \int_{\xi_2}^{\infty} (|u(\xi_1, \xi'_2)|^2)_{\xi_1} d\xi'_2 + \frac{a_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{2c_g^2r_1} |u|^2, \\ I_{1,\xi_2} &= -\frac{a_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{2c_g^2r_1} |u|^2 - \frac{a_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{2c_g^2r_1} \int_{\xi_1}^{\infty} (|u(\xi'_1, \xi_2)|^2)_{\xi_2} d\xi'_1, \\ I_{4,\xi_1} &= -\frac{c_2}{2c_g^2r_2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\ &\quad [(a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4,\xi_2} &= -\frac{c_2(r_1+r_2)}{2c_g^2r_2(r_1-r_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(-\frac{2r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2 \\
&+ \frac{c_2}{c_g^2(r_1-r_2)} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \delta(-\frac{2r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2, \\
I_{5,\xi_1} &= \frac{c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(-a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} + (a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2, \\
I_{5,\xi_2} &= \frac{c_2(r_1-r_2)}{2c_g^2r_2(r_1+r_2)} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(-a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} + (a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2 \\
&- \frac{c_2}{c_g^2(r_1+r_2)} \int_{\mathbb{R}^2} H(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \delta(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(a_1r_1\alpha - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1r_1\alpha + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2 \quad (2.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (2.42) ifadeleri (2.40) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{1,\xi_1} &= -\frac{c_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{4c_g^2r_1}|u|^2 - \frac{c_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{4c_g^2r_1}U_2 - \frac{a_2}{4c_g^2r_1}(U_3 - U_4), \\
\phi_{1,\xi_2} &= \frac{c_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{4c_g^2r_1}|u|^2 + \frac{c_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{4c_g^2r_1}U_1 \\
&\quad - \frac{a_2}{4c_g^2r_1} \left(\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}U_3 - \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}U_4 \right), \\
\phi_{2,\xi_1} &= \frac{a_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{4c_g^2r_1^2}|u|^2 + \frac{a_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{4c_g^2r_1^2}U_2 + \frac{c_2}{4c_g^2r_1r_2}(U_3 + U_4), \\
\phi_{2,\xi_2} &= \frac{a_2(c_1r_1\alpha - a_2)}{4c_g^2r_1^2}|u|^2 + \frac{a_2(c_1r_1\alpha + a_2)}{4c_g^2r_1^2}U_1 \\
&\quad + \frac{c_2}{4c_g^2r_1r_2} \left(\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}U_3 + \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}U_4 \right) \quad (2.43)
\end{aligned}$$

hesaplanır. (2.43) denklemlerindeki U_j ifadeleri

$$\begin{aligned}
U_1 &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1)(|u(\xi'_1, \xi_2)|^2)_{\xi_2} d\xi'_1, \quad U_2 = \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2)(|u(\xi_1, \xi'_2)|^2)_{\xi_1} d\xi'_2, \\
U_3 &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(\frac{-2r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(a_1\alpha r_1 + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} - (a_1\alpha r_1 - c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2, \\
U_4 &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) H(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)) \\
&\quad [(-a_1\alpha r_1 + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_1} + (a_1\alpha r_1 + c_2)(|u(\xi'_1, \xi'_2)|^2)_{\xi'_2}] d\xi'_1 d\xi'_2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Son olarak, (2.43) ifadelerinin (2.39) denklemlerinde yerine yazılması ile karakteristik değişkenler cinsinden indirgenmiş GDS denklemi elde edilir:

$$iu_t + u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} = \frac{1}{2} \left[\chi + \frac{b(c_1^2 r_1^2 \alpha^2 - a_2^2)}{2c_g^2 r_1^2} \right] |u|^2 u + \frac{b}{4c_g^2} \left[\frac{(c_1 r_1 \alpha + a_2)^2}{2r_1^2} (U_1 + U_2) + \frac{c_2 - a_1 r_2 \alpha}{r_2(r_1 - r_2)} U_3 + \frac{c_2 - a_1 r_2 \alpha}{r_2(r_1 + r_2)} U_4 \right] u. \quad (2.44)$$

(2.44) denkleminde $\chi = b(a_2^2 - c_1^2 \alpha^2 r_1^2)/(2c_g^2 r_1^2)$ olduğu kabul edilirse lineer olmayan kübik terim düşer. Bu durumda (2.44) denklemi form olarak (2.37) denkleminde indirgenmesine rağmen, dört karakteristik koordinat arasındaki karmaşık etkileşimin görüldüğü U_3 ve U_4 terimlerinden dolayı, denklem daha genel bir yapıya sahiptir. O zaman $\alpha = c_2/(a_1 r_2)$ seçilirse, $\tilde{b} = -bc_g^2/(8a_1^2 r_1^2 r_2^2)$ olmak üzere, denklem Cornille'in çalışmasında verilen forma indirgenir [30]:

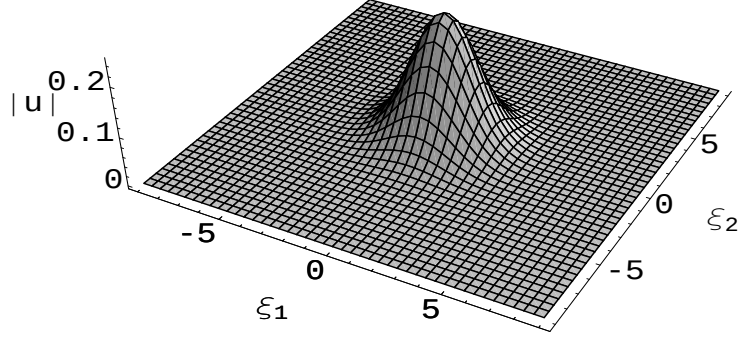
$$iu_t + u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} + \tilde{b} \left[\int_{\xi_2}^{\infty} (|u(\xi_1, \xi_2')|^2)_{\xi_1} d\xi_2' + \int_{\xi_1}^{\infty} (|u(\xi_1', \xi_2)|^2)_{\xi_2} d\xi_1' \right] u = 0. \quad (2.45)$$

Sonuç olarak, $\gamma = 1/r_1^2$, $\alpha = c_2/(a_1 r_2)$ ve $\chi = b(a_1^2 - c_1^2)/(2a_1^2 r_1^2 r_2^2)$ kısıtları altında (2.45) denklemi, (1.3) GDS denkleminin indirgenmiş formuna karşı gelir. Dolayısıyla EHH durumundaki GDS sisteminin (ξ_1, ξ_2) düzlemindeki lokalize çözümleri, $\mu = -4 - 4it$ ve $\theta_i = \xi_i/(2\sqrt{1+t^2})$, ($i = 1, 2$) olmak üzere,

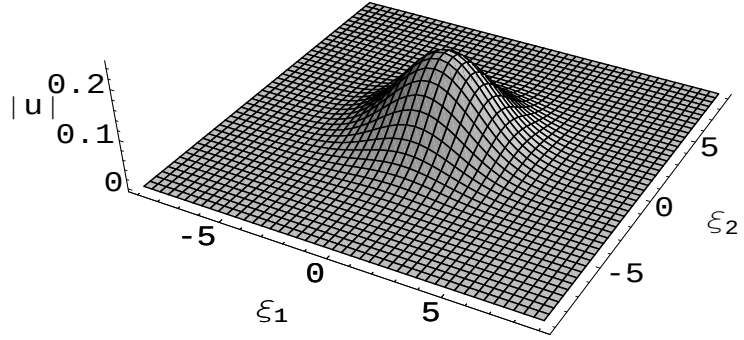
$$u(t, \xi_1, \xi_2) = \frac{\mu^{-1} \exp[(\xi_1^2 + \xi_2^2)/\mu]}{1 - \tilde{b}/8 \int_{\theta_1}^{\infty} \int_{\theta_2}^{\infty} \exp[-2(x_1^2 + x_2^2)] dx_1 dx_2}$$

şeklinde [30]. Şekil 1'de, u çözümünün mutlak değeri $t = 0, 1$ ve 2 zamanları için çizilmiştir. Artan zaman içinde tek çan şeklindeki lokalize çözümün azalan davranışı, global çözümlerin varlığını gösteren bir işaret olabilir. Bu gözlemin matematiksel olarak ispatı, başlangıç değer probleminin incelenmesi tamamlandıktan sonra mümkün olacaktır.

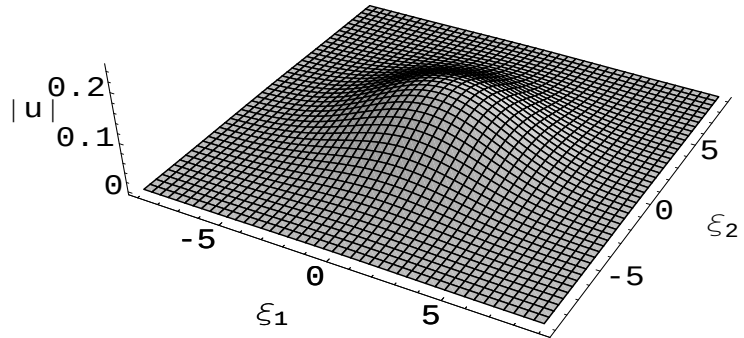
t=0



t=1



t=2



Şekil 1: $\tilde{b} = -847\sqrt{22}/194400$, $c_1 = 3\sqrt{3}$, $c_2 = \sqrt{11}$ ve $c_g = 3\sqrt{11}/2$ parametreleri için $|u|$.

3. ÖNKESTİRİMLER

Bu bölümde, GDS sisteminin çözümleri için bazı önkestirimler hesaplanacaktır. İlk olarak, sonuçları karşılaştırma amacıyla, DS sisteminin çözümlerine ait bazı önkestirimler kısaca özetlenecektir.

3.1. Davey-Stewartson Sistemi için Önkestirimler

Önerme 3.1. $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ve $((\phi_x)^2 - c^2(\phi_y)^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ olan ϕ fonksiyonu

$$\phi_{xx} - c^2\phi_{yy} = f(x, y)$$

dalga denklemini ve $\zeta_1 = -cx + y$, $\zeta_2 = cx + y$ karakteristik değişkenler olmak üzere

$$\lim_{\zeta_1 \rightarrow \infty} \phi(t, x, y) = 0, \quad \lim_{\zeta_2 \rightarrow \infty} \phi(t, x, y) = 0$$

koşullarını sağlıyor ise

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\phi(x, y)| \leq \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} |f| \, dxdy \quad (3.1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\phi_x)^2 - c^2(\phi_y)^2| \, dxdy \leq \frac{1}{2c} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f| \, dxdy \right)^2 \quad (3.2)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [13].

İspat: (3.1) eşitsizliğini göstermek için (2.8) ifadesinin mutlak değeri alınır:

$$|\phi(x, y)| \leq \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} H(c(x' - x) + y' - y) H(c(x - x') + y' - y) |f(x', y')| \, dx'dy'. \quad (3.3)$$

(3.3) eşitsizliğinde H Heaviside fonksiyonunun maksimum değerinin 1 olduğu kullanılır

$$|\phi(x, y)| \leq \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', y')| \, dx'dy'$$

ve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ üzerinde supremum alınırsa (3.1) eşitsizliği ispatlanır.

(3.2) eşitsizliğini göstermek için de eşitsizliğin sol tarafındaki integrant ζ_1 ve ζ_2 karakteristik değişkenleri cinsinden yazılır:

$$|(\phi_x)^2 - c^2(\phi_y)^2| = 4c^2 |\tilde{\phi}_{\zeta_1} \tilde{\phi}_{\zeta_2}|. \quad (3.4)$$

Daha sonra (2.6) denklemi ζ_1 ve ζ_2 değişkenlerine göre türetilirse

$$\tilde{\phi}_{\zeta_1} \tilde{\phi}_{\zeta_2} = \frac{1}{16c^4} \left(\int_{\zeta_1}^{\infty} \tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2) d\zeta'_1 \right) \left(\int_{\zeta_2}^{\infty} \tilde{f}(\zeta_1, \zeta'_2) d\zeta'_2 \right) \quad (3.5)$$

bulunur. (3.2) eşitsizliğinde $\zeta_1 = -cx + y$ ve $\zeta_2 = cx + y$ dönüşümü uygulanır ve (3.4) ve (3.5) sonuçları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |(\phi_x)^2 - c^2(\phi_y)^2| dx dy &= \frac{1}{8c^3} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\zeta_1}^{\infty} |\tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2)| d\zeta'_1 \right) \left(\int_{\zeta_2}^{\infty} |\tilde{f}(\zeta_1, \zeta'_2)| d\zeta'_2 \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \frac{1}{8c^3} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\zeta_1}^{\infty} |\tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2)| d\zeta'_1 \right) \left(\int_{\zeta_2}^{\infty} |\tilde{f}(\zeta_1, \zeta'_2)| d\zeta'_2 \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &\leq \frac{1}{8c^3} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2)| d\zeta'_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(\zeta_1, \zeta'_2)| d\zeta'_2 \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &\leq \frac{1}{8c^3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\zeta'_1, \zeta_2)| d\zeta'_1 d\zeta_2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\zeta_1, \zeta'_2)| d\zeta'_2 d\zeta_1 \right) \\ &= \frac{1}{2c} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.2) eşitsizliği gösterilir. $\square$

Sonraki bölümde ise iki bileşenli DS sisteminin üç bileşenli bir genişlemesi olan GDS sisteminin başlangıç değer probleminin incelenmesinde gerekli olan önkestirimler hesaplanacaktır. Bu sonuca ulaşmak için GDS sisteminin enerji korunumu incelenecek ve ilgili önermeler ifade edilecektir.

3.2. Genelleştirilmiş Davey-Stewartson Sistemi için Önkestirimler

3.2.1 Enerji Korunumu

EHH durumdaki GDS sistemi için korunan enerji büyüklüğü yoktur. Ancak, önkestirim hesabı için gerekli olan kütle, momentum ve enerji korunumları formel olarak Noether teoremi kullanılarak hesaplanacaktır.

Lagrange yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{i}{2}(u^*u_t - uu_t^*) - \frac{\chi}{2}|u|^4 - \gamma|u_x|^2 - |u_y|^2 - b(\alpha\phi_{1,x} + \phi_{2,y})|u|^2 \\ & + \frac{b}{2}[(\phi_{1,x})^2 - (\phi_{1,y})^2 + (\phi_{2,x})^2 - \lambda(\phi_{2,y})^2 - \beta(\phi_{1,y}\phi_{2,x} + \phi_{1,x}\phi_{2,y})]\end{aligned}\quad (3.6)$$

olarak tanımlanırsa, GDS sistemi

$$S\{u, \phi_1, \phi_2\} = \int \mathcal{L}(u, u^*, u_t, u_t^*, u_x, u_x^*, u_y, u_y^*, \phi_{1,x}, \phi_{1,y}, \phi_{2,x}, \phi_{2,y}) \, dx dy dt$$

fonksiyoneline karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri olarak elde edilir. Bu durumda Noether teoremine göre, $S\{u, \phi_1, \phi_2\}$ fonksiyoneli

$$\begin{aligned}x'_j &= x_j + \delta x_j(t, x, y, u, u^* \dots) \quad (x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y) \\ \Psi'_i &= \Psi_i + \delta \Psi_i(t, x, y, u, u^* \dots) \quad (\Psi_1 = u, \quad \Psi_2 = u^*, \quad \Psi_3 = \phi_1, \quad \Psi_4 = \phi_2)\end{aligned}$$

sonsuz küçük dönüşümler altında değişmez ise,

$$I_j = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{i,x_j}} \left(\sum_{k=0}^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \delta x_k - \delta \Psi_i \right) - \mathcal{L} \delta x_j$$

olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^2 \frac{\partial I_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.7)$$

olur [4, 36, 37]. O zaman, (3.7) denklemi kullanılarak sistemin her bir değişmezine karşı gelen kütle, momentum ve enerji korunan büyüklükleri (formel olarak) hesaplanabilir.

Faz dönüşümü değişmezliği: (3.6) Lagrange yoğunluk fonksiyonu $u' = e^{i\epsilon}u \simeq u + i\epsilon u$ dönüşümü altında değişmezdir. O zaman, (3.7) denkleminde $\delta t = \delta x = \delta y = \delta \phi_1 = \delta \phi_2 = 0$ ve $\delta u = i\epsilon u$ dönüşümü kullanılırsa

$$(|u|^2)_t + i[\gamma(uu_x^* - u^*u_x)_x + (uu_y^* - u^*u_y)_y] = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilirse korunan kütle büyüklüğü

$$M = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx dy$$

bulunur.

Uzay dönüşümü değişmezliği: (3.6) Lagrange yoğunluk fonksiyonu $x' = x + \delta x$ dönüşümü altında değişmezdir. O zaman (3.7) denklemine $\delta t = \delta y = \delta u = \delta \phi_1 = \delta \phi_2 = 0$ ve $\delta u = i\epsilon u$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & i(u^*u_x - uu_x^*)_t + \{-2\gamma|u_x|^2 + 2|u_y|^2 + \chi|u|^4 - i(u^*u_t - uu_t^*) \\ & + b[(\phi_{1,x})^2 + (\phi_{2,x})^2 + (\phi_{1,y})^2 + \lambda(\phi_{2,y})^2 + 2\phi_{2,y}|u|^2]\}_x \\ & - 2\{u_xu_y^* + u_xu_y^* + b\phi_{1,x}(\phi_{1,y} + \beta\phi_{2,x}) + b\phi_{2,x}(|u|^2 + \lambda\phi_{2,y})\}_y = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $y' = y + \delta y$ dönüşümünden

$$\begin{aligned} & i(u^*u_y - uu_y^*)_t - 2\{\gamma(u_xu_y^* + u_xu_y^*) + b\phi_{1,y}(\alpha|u|^2 - \phi_{1,x}) \\ & + b\phi_{2,y}(\beta\phi_{1,y} - \phi_{2,x})\}_x + \{2\gamma|u_x|^2 - 2|u_y|^2 + \chi|u|^4 - i(u^*u_t - uu_t^*) \\ & - b[(\phi_{1,x})^2 + (\phi_{2,x})^2 + (\phi_{1,y})^2 + \lambda(\phi_{2,y})^2 + 2\alpha\phi_{1,x}|u|^2]\}_y = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) denklemleri $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilirse formel olarak korunan momentum büyüklükleri

$$\begin{aligned} J_x &= i \int_{\mathbb{R}^2} (u^*u_x - uu_x^*) dx dy \\ J_y &= i \int_{\mathbb{R}^2} (u^*u_y - uu_y^*) dx dy \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarını ve türevlerini içeren terimlerin karakteristik koordinatlarda integre edilebilir olduğuna dikkat edilmelidir.

Zaman dönüşümü değişmezliği: (3.6) Lagrange yoğunluk fonksiyonu $t' = t + \delta t$ dönüşümü altında değişmezdir. O zaman, (3.7) denklemine $\delta x = \delta y = \delta u = \delta \phi_1 = \delta \phi_2 = 0$ ve $\delta u = i\epsilon u$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma|u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\chi}{2}|u|^4 + b(\alpha\phi_{1,x} + \phi_{2,y})|u|^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{b}{2} [(\phi_{1,x})^2 - (\phi_{1,y})^2 + (\phi_{2,x})^2 - \lambda(\phi_{2,y})^2 - \beta(\phi_{1,y}\phi_{2,x} + \phi_{1,x}\phi_{2,y})] \right\}_t \\ & + \left\{ -\gamma(u_x^*u_t + u_xu_t^*) + b\phi_{1,t}(\alpha|u|^2 + \phi_{1,x} - \frac{\beta}{2}\phi_{2,y}) + b\phi_{2,t}(\phi_{2,x} - \frac{\beta}{2}\phi_{1,y}) \right\}_x \\ & - \left\{ (u_y^*u_t + u_yu_t^*) + b\phi_{1,t}(\phi_{1,y} + \frac{\beta}{2}\phi_{2,x}) + b\phi_{2,t}(|u|^2 + \lambda\phi_{2,y} + \frac{\beta}{2}\phi_{1,x}) \right\}_y = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.11) denklemi $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilirse formel

olarak korunan enerji büyüklüğü, diğer bir deyişle Hamiltonyen

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H} \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \gamma |u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\chi}{2} |u|^4 + b(\alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y}) |u|^2 - \frac{b}{2} [(\phi_{1,x})^2 - (\phi_{1,y})^2 + (\phi_{2,x})^2 - \lambda(\phi_{2,y})^2 - \beta(\phi_{1,y}\phi_{2,x} + \phi_{1,x}\phi_{2,y})] \right\} dxdy$$

olarak bulunur. Burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarını ve türevlerini içeren terimlerin karakteristik koordinatlarda integre edilebilir olduğuna dikkat edilmelidir. Hamiltonyen, (1.3)₂ ve (1.3)₃ dalga denklemleri kullanılarak birçok kısmi integrasyondan sonra aşağıdaki formda da yazılabilir:

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{H}_u + \frac{b}{2} \mathcal{H}_\phi) dxdy. \quad (3.12)$$

(3.12) denklemindeki $\mathcal{H}_u$ ve $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u &= \gamma |u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\chi}{2} |u|^4, \\ \mathcal{H}_\phi &= (\phi_{1,x})^2 - (\phi_{1,y})^2 + (\phi_{2,x})^2 - \lambda(\phi_{2,y})^2 - \beta(\phi_{1,y}\phi_{2,x} + \phi_{1,x}\phi_{2,y}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır.

Bundan sonraki alt bölümde, (2.10) dalga denklem sistemini sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları için bazı önkestirimler hesaplanacaktır.

3.2.2 Önkestirimler

GDS sisteminin EHH halindeki başlangıç değer probleminin incelenmesi için gerekli olan önkestirimler, kuple lineer dalga denklemlerini sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri kullanılarak hesaplanacaktır.

ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının L^∞ normları için üst sınır: Önerme 2.1 ile tanımlanan $K_l(x', y', x, y)$ ($l = 1, 2, 3$) çekirdek fonksiyonlarının üst sınırları $0 < c_2 < c_1 < c_g$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq \frac{c_1 c_2}{2c_g^2} + \frac{a_1 a_2}{c_g^2}, \\ |K_2| &\leq \frac{3a_2 c_2}{2c_g^2}, \\ |K_3| &\leq \frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} + \frac{c_2^2}{c_g^2 r_2} \end{aligned}$$

hesaplanır. Daha sonra (2.31) ifadelerinin mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa ϕ_1 ve ϕ_2 için

$$\begin{aligned} |\phi_1(x, y)| &\leq \left(\frac{c_1 c_2}{2c_g^2} + \frac{a_1 a_2}{c_g^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', y')| dx' dy' + \frac{3a_2 c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |g(x', y')| dx' dy', \\ |\phi_2(x, y)| &\leq \frac{3a_2 c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x', y')| dx' dy' + \left(\frac{a_2^2}{2c_g^2 r_1} + \frac{c_2^2}{c_g^2 r_2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |g(x', y')| dx' dy' \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.13) eşitsizliğinde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ üzerinde supremum alınırsa ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları için bir üst sınır hesaplanır. Bu sonucun önerme olarak ifadesi aşağıdadır:

Önerme 3.2. $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ve $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonları $r_1 \neq r_2$ için (2.10) kuple lineer dalga denklem sisteminin çözümleri ise

$$\begin{aligned} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_1(x, y)| &\leq \frac{2a_1 a_2 + c_1 c_2}{2c_g^2} \|f\|_1 + \frac{3a_2 c_2}{2c_g^2} \|g\|_1, \\ \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_2(x, y)| &\leq \frac{3a_2 c_2}{2c_g^2} \|f\|_1 + \frac{a_1 a_2 + 2c_1 c_2}{2c_g^2 r_1 r_2} \|g\|_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

olur.

$r_1 = r_2$ özel durumunda, (2.10) sistemi (2.32) dejenere sistemine indirgenmişti. Bu dejenere durumda ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları için üst sınır, (2.34) denklemleri kullanılarak, $\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_1(x, y)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_1$ ve $\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_2(x, y)| \leq \frac{1}{2} \|g\|_1$ olarak elde edilir. Bu sonuçlar, (3.1) eşitsizliği ile uyumludur.

Enerji için üst sınır: (3.12) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarını içeren terimlerin bir üst sınırı hesaplanacaktır. Üst sınırı hesaplanmak istenen terimler, $\mathcal{H}_\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$H_\phi = \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{H}_\phi(x, y)| dx dy \quad (3.15)$$

şeklindedir. (3.15) denklemi, (ξ_1, ξ_2) koordinatlarında yazılırsa

$$H_\phi \leq \frac{1}{2r_1} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mathcal{H}}_\phi(\xi'_1, \xi'_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) ifadesindeki $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_\phi &= (-r_1 \phi_{1, \xi_1} + r_1 \phi_{1, \xi_2})^2 - (\phi_{1, \xi_1} + \phi_{1, \xi_2})^2 + (-r_1 \phi_{2, \xi_1} + r_1 \phi_{2, \xi_2})^2 \\ &- \lambda(\phi_{2, \xi_1} + \phi_{2, \xi_2})^2 - \beta(\phi_{1, \xi_1} + \phi_{1, \xi_2})(-r_1 \phi_{2, \xi_1} + r_1 \phi_{2, \xi_2}) \\ &- \beta(-r_1 \phi_{1, \xi_1} + r_1 \phi_{1, \xi_2})(\phi_{2, \xi_1} + \phi_{2, \xi_2}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_\phi &= (r_1^2 - 1)(\phi_{1,\xi_1})^2 - 2(r_1^2 + 1)\phi_{1,\xi_1}\phi_{1,\xi_2} + (r_1^2 - 1)(\phi_{1,\xi_2})^2 + (r_1^2 - \lambda)(\phi_{2,\xi_1})^2 \\ &- 2(r_1^2 + \lambda)\phi_{2,\xi_1}\phi_{2,\xi_2} + (r_1^2 - \lambda)(\phi_{2,\xi_2})^2 + 2\beta r_1(\phi_{1,\xi_1}\phi_{2,\xi_1} - \phi_{1,\xi_2}\phi_{2,\xi_2})\end{aligned}\quad (3.17)$$

olarak bulunur. Bu aşamada, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının ξ_1 ve ξ_2 değişkenlerine göre türevleri hesaplanmalıdır.

ϕ_{1,ξ_i} ve ϕ_{2,ξ_i} ($i = 1, 2$) türevlerini hesaplayabilmek için (2.24) denklemi ξ_i değişkenlerine göre türetilir:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{1,\xi_i}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{c_2}{2a_2} I_{1,\xi_i} + \frac{a_1}{2c_1} I_{4,\xi_i} + \frac{a_1}{2c_1} I_{5,\xi_i}, \\ \tilde{\phi}_{2,\xi_i}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2r_1} I_{1,\xi_i} - \frac{1}{2r_1} I_{4,\xi_i} + \frac{1}{2r_1} I_{5,\xi_i}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Benzer şekilde, I_{m,ξ_i} ($m = 1, 4, 5$) türevleri (2.25) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}I_{1,\xi_1} &= -\int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2, \\ I_{1,\xi_2} &= -\int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_2(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1, \\ I_{4,\xi_1} &= -\int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_3(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2, \\ I_{4,\xi_2} &= -\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_3(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_3(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1, \\ I_{5,\xi_1} &= -\int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_4(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2, \\ I_{5,\xi_2} &= -\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \\ &\quad \tilde{h}_4(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1\end{aligned}\quad (3.19)$$

hesaplanır. İlerideki hesaplamalarda kolaylık sağlamak amacı ile (3.19) türevleri,

(2.13) h_j ($j = 1..4$) fonksiyonları da dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} I_{1,\xi_1} &= -\frac{a_2}{2c_g^2 r_1} (c_1 f_2 - a_2 g_2), & I_{1,\xi_2} &= -\frac{a_2}{2c_g^2 r_1} (c_1 f_1 - a_2 g_1), \\ I_{4,\xi_1} &= -A_1, & I_{4,\xi_2} &= -\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} A_1 + \frac{c_2}{2c_g^2 r_2} (-a_1 f_1 + c_2 g_1), \\ I_{5,\xi_1} &= -A_2, & I_{5,\xi_2} &= -\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} A_2 + \frac{c_2}{2c_g^2 r_2} (a_1 f_1 + c_2 g_1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

formunda tanımlanır. (3.20) denklemlerindeki f_1, f_2, g_1, g_2, A_1 ve A_2 sembolleri

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{f}(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1, & f_2 &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{f}(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2, \\ g_1 &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_1 - \xi_1) \tilde{g}(\xi'_1, \xi_2) d\xi'_1, & g_2 &= \int_{\mathbb{R}} H(\xi'_2 - \xi_2) \tilde{g}(\xi_1, \xi'_2) d\xi'_2, \\ A_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2, \\ A_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta\left(\xi'_1 - \xi_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4(\xi'_1, \xi'_2) d\xi'_1 d\xi'_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklindeki integralleri tanımlamaktadır. Burada, f_1 ve g_1 notasyonu sırası ile f ve g fonksiyonlarının ξ_1 değişkenine göre integralini; f_2 ve g_2 notasyonu ise sırası ile f ve g fonksiyonlarının ξ_2 değişkenine göre integralini simgelemektedir. Aynı durum, A_1 ve A_2 notasyonu için geçerli değildir. Çünkü A_1 ve A_2 integrallerinde bulunan δ dağılımından dolayı, integral değişkeni ξ_1 veya ξ_2 olarak seçilebilir. O zaman, A_1 ve A_2 integralleri iki katlı integral olarak tanımlanmasına rağmen tek katlı integrallerdir. Diğer bir deyişle (3.21) denklemlerindeki A_1 ve A_2 integrallerine (2.28) özelliği uygulanırsa, A_1 iki katlı integrali için

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) \tilde{h}_3\left(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) d\xi'_1 \\ A_{12} &= \int_{\mathbb{R}} H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_3\left(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2\right) d\xi'_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve A_2 iki katlı integrali için

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \int_{\mathbb{R}} H\left(-\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) \tilde{h}_4\left(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) d\xi'_1 \\ A_{22} &= \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) \tilde{h}_4\left(\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2\right) d\xi'_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

sonucu bulunur. A_{ik} ($i, k = 1, 2$) notasyonu ile A_i iki katlı integralin, ξ_k değişkenine göre tek katlı integralini gösteriyoruz. Böylece A_1 (veya A_2) iki katlı integrali, A_{11} ve A_{12} (veya A_{21} ve A_{22}) tek katlı integrallerine dönüşür.

(3.20) ifadeleri (3.18) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{1,\xi_1} &= \frac{c_2}{4c_g^2 r_1} (c_1 f_2 - a_2 g_2) - \frac{a_1}{2c_1} A_1 - \frac{a_1}{2c_1} A_2, \\ \tilde{\phi}_{1,\xi_2} &= \frac{c_2}{4c_g^2 r_1} (c_1 f_1 + a_2 g_1) - \frac{a_1(r_1 + r_2)}{2c_1(r_1 - r_2)} A_1 - \frac{a_1(r_1 - r_2)}{2c_1(r_1 + r_2)} A_2, \\ \tilde{\phi}_{2,\xi_1} &= -\frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2} (c_1 f_2 - a_2 g_2) + \frac{1}{2r_1} A_1 - \frac{1}{2r_1} A_2, \\ \tilde{\phi}_{2,\xi_2} &= \frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2} (c_1 f_1 + a_2 g_1) + \frac{r_1 + r_2}{2r_1(r_1 - r_2)} A_1 - \frac{r_1 - r_2}{2r_1(r_1 + r_2)} A_2 \quad (3.24)\end{aligned}$$

bulunur. (3.24) türevleri (3.17) denklemleriyle verilen $\mathcal{H}_\phi$ ifadesinde yerleştirilirse, uzun ama basit cebirsel toplamalardan sonra,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_\phi &= \frac{c_1^2 - a_2^2}{4c_g^4 r_1^2} (-c_1^2 f_1 f_2 + a_2^2 g_1 g_2) + \frac{a_2 c_2 (c_1^2 - a_2^2)}{4c_g^4 r_1} (f_1 g_2 - f_2 g_1) \\ &+ \frac{4a_1^2 (c_1^2 - a_2^2)}{c_g^2 (c_1^2 - c_2^2)} A_1 A_2 + d_1 (c_1 f_1 + a_2 g_1) A_1 + d_2 (c_1 f_1 + a_2 g_1) A_2 \\ &+ \frac{d_2 (a_2 c_1 + a_1 c_2)}{a_2 c_1 - a_1 c_2} (c_1 f_2 - a_2 g_2) A_1 - \frac{d_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_2 c_1 + a_1 c_2} (c_1 f_2 - a_2 g_2) A_2 \quad (3.25)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada d_1 ve d_2 sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$d_1 = \frac{a_1 a_2 (c_1^2 + c_2^2) - c_1 c_2 (a_1^2 + a_2^2)}{4a_2 c_g^2 c_1^2}, \quad d_2 = \frac{a_1 a_2 (c_1^2 + c_2^2) + c_1 c_2 (a_1^2 + a_2^2)}{4a_2 c_g^2 c_1^2}.$$

Böylece $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonu iki tane tek katlı integralin çarpımının bir toplamından oluşur. (3.25) eşitliğinin (3.16) denkleminde yazılması ile ortaya çıkan karmaşık ve uzun H_ϕ ifadesinin üst sınırı hesabında her integral çarpımı için aşağıdaki yaklaşım kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\xi_2}^{\infty} |v(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 \right) \left(\int_{\xi_1}^{\infty} |u(\xi'_1, \xi_2)| d\xi'_1 \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_2}^{\infty} \int_{\xi_1}^{\infty} |v(\xi_1, \xi'_2)| |u(\xi'_1, \xi_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 d\xi_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(\xi'_1, \xi_2)| d\xi'_1 d\xi_2 \right) \\ &\leq 4r_1^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(x, y)| dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v(x, y)| dx dy \right) \\ &= 4r_1^2 \|u\|_1 \|v\|_1. \quad (3.26)\end{aligned}$$

Dolayısıyla (3.25) denklemindeki integral çarpımlarında değişkenlerden biri ξ_1 (veya ξ_2) ise diğeri ξ_2 (veya ξ_1) olmalıdır. Buna göre $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonunda A_1 ve A_2 integralleri, (3.22) ve (3.23) eşitlikleri dikkate alınarak seçilmelidir:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_\phi &= \frac{c_1^2 - a_2^2}{4c_g^4 r_1^2} (-c_1^2 f_1 f_2 + a_2^2 g_1 g_2) + \frac{a_2 c_2 (c_1^2 - a_2^2)}{4c_g^4 r_1} (f_1 g_2 - f_2 g_1) \\ &+ \frac{4a_1^2 (c_1^2 - a_2^2)}{c_g^2 (c_1^2 - c_2^2)} A_{12} A_{21} + d_1 (c_1 f_1 + a_2 g_1) A_{12} + d_2 (c_1 f_1 + a_2 g_1) A_{22} \\ &+ \frac{d_2 (a_2 c_1 + a_1 c_2)}{a_2 c_1 - a_1 c_2} (c_1 f_2 - a_2 g_2) A_{11} - \frac{d_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_2 c_1 + a_1 c_2} (c_1 f_2 - a_2 g_2) A_{21}. \quad (3.27)\end{aligned}$$

(3.27) sonucu, (3.16) H_ϕ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}2r_1 H_\phi &\leq \frac{c_1^2 |c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_1}^\infty \int_{\xi_2}^\infty |\tilde{f}(\xi'_1, \xi_2)| |\tilde{f}(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \frac{a_2^2 |c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_1}^\infty \int_{\xi_2}^\infty |\tilde{g}(\xi'_1, \xi_2)| |\tilde{g}(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \frac{a_2 c_2 |c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_1}^\infty \int_{\xi_2}^\infty |\tilde{f}(\xi'_1, \xi_2)| |\tilde{g}(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \frac{a_2 c_2 |c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\xi_1}^\infty \int_{\xi_2}^\infty |\tilde{g}(\xi'_1, \xi_2)| |\tilde{f}(\xi_1, \xi'_2)| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ \frac{4a_1^2 (r_1 + r_2) |c_1^2 - a_2^2|}{c_g^2 (c_1^2 - c_2^2) (r_1 - r_2)} \int_{\mathbb{R}^4} H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) \\ &\quad |\tilde{h}_3(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| |\tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ c_1 |d_1| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_1}^\infty H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) |\tilde{f}(\xi'_1, \xi_2)| \\ &\quad |\tilde{h}_3(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ a_2 |d_1| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_1}^\infty H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) |\tilde{g}(\xi'_1, \xi_2)| \\ &\quad |\tilde{h}_3(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &+ c_1 d_2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_2}^\infty H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) |\tilde{f}(\xi_1, \xi'_2)| \\ &\quad |\tilde{h}_3(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_2 d_2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_2}^{\infty} H\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) |\tilde{g}(\xi_1, \xi'_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_3(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\
& +c_1 d_2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_1}^{\infty} H\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) |\tilde{f}(\xi'_1, \xi_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_4(\xi_1 - \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
& +a_2 d_2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_1}^{\infty} H\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) |\tilde{g}(\xi'_1, \xi_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_4(\xi_1 - \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
& +c_1 |d_1| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_2}^{\infty} H\left(-\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) |\tilde{f}(\xi_1, \xi'_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \\
& +a_2 |d_1| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\xi_2}^{\infty} H\left(-\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) |\tilde{g}(\xi_1, \xi'_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_2 d\xi'_1 d\xi_1 d\xi_2 \tag{3.28}
\end{aligned}$$

elde edilir. H_ϕ büyüklüğünün bir üst sınırını bulmak için (3.28) denklemindeki tüm integral çarpımlarına ayrı ayrı (3.26) eşitsizliği uygulanmalıdır. Fakat bazı integrantların argümanları (ξ_1, ξ_2) formunda değildir. Bu yüzden (3.28) denkleminde argümanları uygun olmayan integrallere değişken dönüşümleri uygulanmalıdır. Aşağıda değişken dönüşümü uygulanan integraller $u = |f|$ veya $u = |g|$ olmak üzere listelenmektedir:

i) Değişken dönüşümü

$$\xi_1 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2) = \bar{\xi}_1, \quad \xi'_2 = \bar{\xi}_2, \quad \xi'_1 = \bar{\bar{\xi}}_1, \quad \xi_2 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1) = \bar{\bar{\xi}}_2$$

ve dönüşümün Jakobi determinantı $\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)}{\partial(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)} \right| = \frac{(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^4} H\left(-\frac{2r_2}{r_1-r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) H\left(-\frac{2r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) |\tilde{h}_3(\xi_1 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1), \xi'_2)| \\
& \quad |\tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}^4} H\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_1}(\bar{\xi}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1) + \frac{r_1 - r_2}{2r_1}(\bar{\xi}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)\right) \\
&H\left(-\frac{r_1 - r_2}{2r_1}(\bar{\xi}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1) - \frac{r_1 + r_2}{2r_1}(\bar{\xi}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)\right) |\tilde{h}_3(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)| |\tilde{h}_4(\bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)| d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\bar{\xi}}_1 d\bar{\bar{\xi}}_2;
\end{aligned} \tag{3.29}$$

ii) Değişken dönüşümü

$$\xi'_1 = \bar{\xi}_1, \quad \xi_2 = \bar{\xi}_2, \quad \xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2) = \bar{\bar{\xi}}_1, \quad \xi'_2 = \bar{\bar{\xi}}_2$$

ve dönüşümün Jakobi determinanı $\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)}{\partial(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)} \right| = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} H(\xi'_1 - \xi_1) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) u(\xi'_1, \xi_2) |\tilde{h}_3(\xi_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| \\
&\quad d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} H(\bar{\xi}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\bar{\xi}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)) H\left(\frac{2r_2}{r_1 - r_2}(\bar{\xi}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2)\right) u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) |\tilde{h}_3(\bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)| \\
&\quad d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\bar{\xi}}_1 d\bar{\bar{\xi}}_2;
\end{aligned} \tag{3.30}$$

iii) Değişken dönüşümü

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1, \quad \xi'_2 = \bar{\xi}_2, \quad \xi'_1 = \bar{\bar{\xi}}_1, \quad \xi_2 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1) = \bar{\bar{\xi}}_2$$

ve dönüşümün Jakobi determinanı $\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)}{\partial(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)} \right| = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} H(\xi'_2 - \xi_2) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) u(\xi_1, \xi'_2) |\tilde{h}_3(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| \\
&\quad d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} H(\bar{\xi}_2 - \bar{\bar{\xi}}_2 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\bar{\xi}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\bar{\xi}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1)\right) u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) |\tilde{h}_3(\bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)| \\
&\quad d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\bar{\xi}}_1 d\bar{\bar{\xi}}_2;
\end{aligned} \tag{3.31}$$

iv) Değişken dönüşümü

$$\xi'_1 = \bar{\xi}_1, \quad \xi_2 = \bar{\xi}_2, \quad \xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1) = \bar{\bar{\xi}}_1, \quad \xi'_2 = \bar{\bar{\xi}}_2$$

ve dönüşümün Jakobi determinantı $\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)}{\partial(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)} \right| = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^4} H(\xi'_1 - \xi_1) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2)\right) u(\xi'_1, \xi_2) |\tilde{h}_4(\xi_1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_2 - \xi_2), \xi'_2)| \\
& \quad d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
& = \int_{\mathbb{R}^4} H(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1 + \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2)) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2)\right) u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) |\tilde{h}_4(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)| \\
& \quad d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2; \tag{3.32}
\end{aligned}$$

v) Değişken dönüşümü

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1, \quad \xi'_2 = \bar{\xi}_2, \quad \xi'_1 = \bar{\xi}_1, \quad \xi_2 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_1 - \xi_1) = \bar{\xi}_2$$

ve dönüşümün Jakobi determinantı $\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)}{\partial(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)} \right| = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^4} H(\xi'_2 - \xi_2) H\left(-\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\xi'_1 - \xi_1)\right) u(\xi_1, \xi'_2) |\tilde{h}_4(\xi'_1, \xi_2 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\xi'_1 - \xi_1))| \\
& \quad d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi_1 d\xi_2 \\
& = \int_{\mathbb{R}^4} H(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2 - \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1)) H\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1)\right) u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) |\tilde{h}_4(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)| \\
& \quad d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.28) denkleminde (3.29-3.33) integralleri yerine yazılarak (3.26) eşitsizliği uygulanırsa H_ϕ büyüklüğünün bir üst sınırı bulunur:

$$\begin{aligned}
\frac{H_\phi}{2r_1} & \leq \frac{|c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1^2} (c_1^2 \|f\|_1^2 + a_2^2 \|g\|_1^2 + 2a_2 c_1 \|f\|_1 \|g\|_1) \\
& + \frac{a_1^2(r_1^2 - r_2^2)|c_1^2 - a_2^2|}{c_g^2 r_1 r_2 (c_1^2 - c_2^2)} \|h_3\|_1 \|h_4\|_1 + c_1 |d_1| \|f\|_1 \|h_3\|_1 + a_2 |d_1| \|g\|_1 \|h_3\|_1 \\
& + c_1 d_2 \|f\|_1 \|h_3\|_1 + a_2 d_2 \|g\|_1 \|h_3\|_1 + c_1 d_2 \|f\|_1 \|h_4\|_1 + a_2 d_2 \|g\|_1 \|h_4\|_1 \\
& + c_1 |d_1| \|f\|_1 \|h_4\|_1 + a_2 |d_1| \|g\|_1 \|h_4\|_1 \\
& = \frac{|c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4 r_1^2} (c_1 \|f\|_1 + a_2 \|g\|_1)^2 + \frac{r_2 |c_1^2 - a_2^2|}{c_1 c_2} \|h_3\|_1 \|h_4\|_1 \\
& + (|d_1| + d_2) (c_1 \|f\|_1 + a_2 \|g\|_1) (\|h_3\|_1 + \|h_4\|_1). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

(3.34) üst sınırında $\|h_n\|_1 \leq (c_2/2c_g^2r_2)(a_1\|f\|_1 + c_2\|g\|_1)$ ($n = 3, 4$) eşitsizlikleri kullanılırsa H_ϕ için üst sınır

$$\begin{aligned} \frac{H_\phi}{2r_1} &\leq \frac{|c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^4r_1^2} (c_1\|f\|_1 + a_2\|g\|_1)^2 + \frac{|c_1^2 - a_2^2|}{4c_g^2r_1r_2} (a_1\|f\|_1 + c_2\|g\|_1)^2 \\ &+ \frac{c_2(|d_1| + d_2)}{c_g^2r_2} (c_1\|f\|_1 + a_2\|g\|_1) (a_1\|f\|_1 + c_2\|g\|_1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç aşağıdaki önerme ile ifade edilir:

Önerme 3.3. ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları, (2.10) kuple lineer dalga denklem sisteminin $r_1 \neq r_2$ ve $\mathcal{H}_\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ için çözümleri ise

$$H_\phi \leq b_1\|f\|_1^2 + \frac{b_1}{r_1r_2}\|g\|_1^2 + b_2\|f\|_1\|g\|_1 \quad (3.35)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki katsayılar

$$\begin{aligned} b_1 &= (a_1a_2 + c_1c_2) \frac{|c_1^2 - a_2^2|}{2c_g^4} + \frac{2a_2c_1^2}{c_g^2}(|d_1| + d_2), \\ b_2 &= \frac{2a_2c_2}{c_g^4}|c_1^2 - a_2^2| + \frac{2c_1}{c_g^2r_2}(a_1a_2 + c_1c_2)(|d_1| + d_2) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak; $r_1 = r_2$ kabul edildiğinde (2.32) dejenere sistemi için $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonu

$$\tilde{\mathcal{H}}_\phi = -4(\phi_{1,\xi_1}\phi_{1,\xi_2} + \phi_{2,\xi_1}\phi_{2,\xi_2}) \quad (3.36)$$

olur. (3.36) denkleminde (2.13) ifadeleri dikkate alınarak (2.33) çözümleri kullanılırsa, $\mathcal{H}_\phi$ için

$$\tilde{\mathcal{H}}_\phi = -\frac{1}{4}(f_1f_2 + g_1g_2)$$

elde edilir. Bu durumda, H_ϕ ifadesinin üst sınırı

$$H_\phi \leq \frac{1}{2}(\|f\|_1^2 + \|g\|_1^2)$$

olarak hesaplanır. Bu sonuç, (3.2) eşitsizliği ile çıkarılır.

Bu bölümde hesaplanan (3.14) ve (3.35) ile verilen üst sınırların, karmaşık argümanlı Heaviside fonksiyonları yüzünden, iyi üst sınırlar olmadığı söylenebilir.

Bu ise, ϕ_i ve H_ϕ ifadeleri için daha küçük üst sınırların bulunabileceğini gösterir.

4. DÜZGÜNLEŞTİRİLMİŞ DENKLEM

4.1. Giriş

Bu tez çalışmasında, (1.3) GDS sisteminin başlangıç değer problemi yerine, (2.35) denklemi olarak yazılan yerel olmayan NLS sisteminin çözümlerinin global varlığı $\gamma = 1$ durumunda incelenecektir:

$$\begin{aligned} iu_t + \Delta u &= \chi |u|^2 u \\ &+ bu \left\{ \alpha [\mathcal{K}_1 (\alpha(|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_x + [\mathcal{K}_2 ((\alpha|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_y \right\}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Eliptik karakterdeki (4.1) denkleminin enerji korunumu olsa bile çözüm fonksiyonu u tekilliğe sahip olabilir, dolayısıyla başlangıç değer probleminin çözümlerinin global varlığından söz edilemez. Bu yüzden, u fonksiyonunun hem $H^1(\mathbb{R}^2)$ hem de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ uzaylarının elemanı olduğu gösterilmelidir. Bunun yerine, Sobolev Lemma'sına göre $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzay normu, $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ uzay normunu kapsadığı için $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. Ayrıca kuple dalga sistemlerini çözen $\mathcal{K}_i$ ($i = 1, 2$) operatörlerinin düzgünleştirici etkilerinin olmaması nedeni ile semi-linear NLS denkleminin uygulanan teknikler [7] burada geçerli değildir. Bu nedenlerden dolayı, (4.1) denkleminin düzgünleştirilmiş bir formunun çözümlerinin limiti, (4.1) denkleminin çözümleri olarak düşünülecektir. Bu sonuca ulaşmak için, verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} iu_t^\varepsilon + i\varepsilon \Delta^2 u_t^\varepsilon + \Delta u^\varepsilon &= \chi |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon \\ &+ bu^\varepsilon \left\{ \alpha [\mathcal{K}_1 (\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_x + [\mathcal{K}_2 ((\alpha|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_y \right\}, \\ u^\varepsilon(0, x, y) &= u_0^\varepsilon(x, y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan ε -düzgünleştirilmiş denklemin başlangıç değer problemi incelenecektir.

İlk olarak, (4.2) denkleminin korunan kütle ve enerji büyüklükleri hesaplanmalıdır. Gösterim kolaylığı sağlamak amacıyla, (4.2) düzgünleştirilmiş

denkleminde $\phi_1^\varepsilon = \mathcal{K}_1 (\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)$ ve $\phi_2^\varepsilon = \mathcal{K}_2 (\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)$ tanımları kullanılır:

$$\begin{aligned} i(I + \varepsilon \Delta^2)u_t^\varepsilon + \Delta u^\varepsilon &= \chi |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + bu^\varepsilon [\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y], \\ u^\varepsilon(x, y, 0) &= u_0^\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bilindiği üzere, ϕ_1^ε ve ϕ_2^ε fonksiyonları (1.3) sistemindeki kuple lineer dalga denklemlerinin çözümleridir. Kütle korunum denklemini hesaplayabilmek için, (4.3) düzgünleştirilmiş denklemi u^* ile çarpılıp elde edilen denklem karmaşık eşleniğinden çıkarılırsa

$$i(|u^\varepsilon|^2)_t + i\varepsilon(u^{\varepsilon*} \Delta^2 u_t^\varepsilon + u^\varepsilon \Delta^2 u_t^{\varepsilon*}) + (u^{\varepsilon*} \Delta u^\varepsilon - u^\varepsilon \Delta u^{\varepsilon*}) = 0$$

bulunur. Burada $*$ ilgili fonksiyonun karmaşık eşleniğini göstermektedir. Daha sonra, $\mathbb{R}^2$ üzerinde integral alınır ve kısmi integrasyon uygulanır ise

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2) dx dy + i\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u^{\varepsilon*} \Delta u_t^\varepsilon + \Delta u^\varepsilon \Delta u_t^{\varepsilon*}) dx dy \\ + \int_{\mathbb{R}^2} [(u^{\varepsilon*} u_x^\varepsilon - u^\varepsilon u_x^{\varepsilon*})_x + (u^{\varepsilon*} u_y^\varepsilon - u^\varepsilon u_y^{\varepsilon*})_y] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denkleminde u^ε fonksiyonunun sınırlarda sıfır değerini aldığı dikkate alınırsa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon|^2) dx dy = 0$$

bulunur. Böylece kütle korunum denklemi hesaplanmış olur:

$$M_\varepsilon(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon(t)|^2) dx dy = M_\varepsilon(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.5)$$

(4.5) kütle korunum denklemindeki ε terimi, (4.2) denkleminin düzgünleştirici teriminin katkısını göstermektedir.

Enerji korunum denklemini hesaplamak için (4.3) düzgünleştirilmiş denklemi $u_t^{\varepsilon*}$ ile çarpılıp elde edilen denklem karmaşık eşleniğiyle toplanır:

$$\begin{aligned} i\varepsilon(u_t^{\varepsilon*} \Delta^2 u_t^\varepsilon - u_t^\varepsilon \Delta^2 u_t^{\varepsilon*}) + (u_t^{\varepsilon*} \Delta u^\varepsilon + u_t^\varepsilon \Delta u^{\varepsilon*}) \\ = \chi |u^\varepsilon|^2 (|u^\varepsilon|^2)_t + b(|u^\varepsilon|^2)_t (\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y). \end{aligned}$$

Daha sonra, $\mathbb{R}^2$ üzerinde integral alınır ve kısmi integrasyon uygulanır ise

$$\begin{aligned} & i\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u_t^{\varepsilon*} \Delta u_t^\varepsilon - \Delta u_t^\varepsilon \Delta u_t^{\varepsilon*}) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (|u_x^\varepsilon|^2)_t dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (|u_y^\varepsilon|^2)_t dx dy \\ &= \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^4)_t dx dy - b\alpha \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2)_{tx} \phi_1^\varepsilon dx dy - b \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2)_{ty} \phi_2^\varepsilon dx dy \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(|u^\varepsilon|^2)_x$ ve $(|u^\varepsilon|^2)_y$ terimleri yerine (1.3)₂ ve (1.3)₃ denklemlerindeki eşitleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (|u_x^\varepsilon|^2 + |u_y^\varepsilon|^2 + \frac{\chi}{2}|u^\varepsilon|^4)_t dx dy - b \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_{1,xx}^\varepsilon - \phi_{1,yy}^\varepsilon - \beta\phi_{2,xy}^\varepsilon)_t \phi_1^\varepsilon dx dy \\ & - b \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_{2,xx}^\varepsilon - \lambda\phi_{2,yy}^\varepsilon - \beta\phi_{1,xy}^\varepsilon)_t \phi_2^\varepsilon dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) denkleminde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} [|u_x^\varepsilon|^2 + |u_y^\varepsilon|^2 + \frac{\chi}{2}|u^\varepsilon|^4 \\ & + \frac{b}{2} ((\phi_{1,x}^\varepsilon)^2 - (\phi_{1,y}^\varepsilon)^2 + (\phi_{2,x}^\varepsilon)^2 - \lambda(\phi_{2,y}^\varepsilon)^2 - \beta\phi_{1,y}^\varepsilon\phi_{2,x}^\varepsilon - \beta\phi_{1,x}^\varepsilon\phi_{2,y}^\varepsilon)] dx dy = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece enerji korunumu denklemi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} [|u_x^\varepsilon|^2 + |u_y^\varepsilon|^2 + \frac{\chi}{2}|u^\varepsilon|^4 + \frac{b}{2} ((\phi_{1,x}^\varepsilon)^2 - (\phi_{1,y}^\varepsilon)^2 + (\phi_{2,x}^\varepsilon)^2 \\ & - \lambda(\phi_{2,y}^\varepsilon)^2 - \beta\phi_{1,y}^\varepsilon\phi_{2,x}^\varepsilon - \beta\phi_{1,x}^\varepsilon\phi_{2,y}^\varepsilon)] dx dy = E_\varepsilon(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.7) enerji denkleminin $\mathcal{K}_i$ operatörleri kullanılarak yazılmış formu ise

$$E_\varepsilon(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{H}_u(t, x, y) + \frac{b}{2} \mathcal{H}_\phi(t, x, y)) dx dy = E_\varepsilon(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.8)$$

şeklindeir. Burada $\mathcal{H}_u$ ve $\mathcal{H}_\phi$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u &= |u_x^\varepsilon|^2 + |u_y^\varepsilon|^2 + \frac{\chi}{2}|u^\varepsilon|^4, \\ \mathcal{H}_\phi &= \left([\mathcal{K}_1(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_x \right)^2 - \left([\mathcal{K}_1(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_y \right)^2 \\ &+ \left([\mathcal{K}_2(\alpha(|u^\varepsilon|^2), (|u^\varepsilon|^2)_y)]_x \right)^2 - \lambda \left([\mathcal{K}_2(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)] \right)^2 \\ &- \beta [\mathcal{K}_1(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_y [\mathcal{K}_2(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_x \\ &- \beta [\mathcal{K}_1(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_x [\mathcal{K}_2(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)]_y \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak tanımlanmaktadır.

İkinci olarak, ε -düzgünleştirilmiş denklem için, Önerme 3.2 ve Önerme 3.3 kullanılarak, aşağıdaki önerme yazılabilir:

Önerme 4.1. ϕ_1^ε ve ϕ_2^ε fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \|\phi_1^\varepsilon\|_\infty = \|\mathcal{K}_1(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)\|_\infty \\
& \leq \frac{1}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|u^\varepsilon\|_{H^1}^2, \\
& \|\phi_2^\varepsilon\|_\infty = \|\mathcal{K}_2(\alpha(|u^\varepsilon|^2)_x, (|u^\varepsilon|^2)_y)\|_\infty \\
& \leq \frac{1}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|u^\varepsilon\|_{H^1}^2. \\
\text{(ii)} \quad & \|\mathcal{K}_1(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y) - \mathcal{K}_1(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)\|_\infty \\
& \leq \frac{R}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|v_1 - v_2\|_{H^1}, \\
& \|\mathcal{K}_2(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y) - \mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)\|_\infty \\
& \leq \frac{R}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|v_1 - v_2\|_{H^1}. \\
& \text{Burada } \|v_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{H^2} \leq R \text{ olarak alınmıştır.} \\
\text{(iii)} \quad & \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{H}_\phi| dx dy \leq \frac{4}{r_1 r_2} [b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|] \|\nabla u^\varepsilon\|_2^2 \|u^\varepsilon\|_2^2.
\end{aligned}$$

İspat (i): $x_1 = x$ ve $x_2 = y$ olmak üzere

$$\|(|u^\varepsilon|^2)_{x_i}\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |(|u^\varepsilon|^2)_{x_i}| dx_1 dx_2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon| |u_{x_j}^\varepsilon| dx_1 dx_2$$

yazılabilir. Daha sonra, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |(|u^\varepsilon|^2)_{x_i}| dx_1 dx_2 & \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_{x_i}^\varepsilon|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\
& = 2 \|u^\varepsilon\|_2 \|u_{x_i}^\varepsilon\|_2 \leq 2 \|u^\varepsilon\|_{H^1}^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Bu sonuç, (3.14) eşitsizliklerinde uygulanırsa Önerme 4.1 (i) ispatlanır.

İspat (ii): (2.34) denklemlerindeki $\mathcal{K}_i$ operatör tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \|\mathcal{K}_1(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y) - \mathcal{K}_1(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)\|_\infty \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| |\alpha K_1(x', y', x, y)(|v_1(x', y')|^2)_{x'} + K_2(x', y', x, y)(|v_1(x', y')|^2)_{y'}| \right. \\
&\quad \left. - |\alpha K_1(x', y', x, y)(|v_2(x', y')|^2)_{x'} + K_2(x', y', x, y)(|v_2(x', y')|^2)_{y'}| \right| dx' dy', \\
I_2 &= \|\mathcal{K}_2(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y) - \mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)\|_\infty \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| |\alpha K_2(x', y', x, y)(|v_1(x', y')|^2)_{x'} + K_3(x', y', x, y)(|v_1(x', y')|^2)_{y'}| \right. \\
&\quad \left. - |\alpha K_2(x', y', x, y)(|v_2(x', y')|^2)_{x'} + K_3(x', y', x, y)(|v_2(x', y')|^2)_{y'}| \right| dx' dy'
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $K_i(x', y', x, y)$ çekirdeklerinin maksimum değerleri $|a - b| \geq ||a| - |b||$ eşitsizliği dikkate alınarak yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{|\alpha|}{2c_g^2} (2a_1a_2 + c_1c_2) \int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1(x', y')|^2 - |v_2(x', y')|^2)_{x'}| dx' dy' \\ &\quad + \frac{3a_2c_2}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1(x', y')|^2 - |v_2(x', y')|^2)_{y'}| dx' dy', \\ I_2 &\leq \frac{3a_2c_2|\alpha|}{2c_g^2} \int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1(x', y')|^2 - |v_2(x', y')|^2)_{x'}| dx' dy' \\ &\quad + \frac{a_1a_2 + 2c_1c_2}{2c_g^2 r_1 r_2} \int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1(x', y')|^2 - |v_2(x', y')|^2)_{y'}| dx' dy' \end{aligned}$$

elde edilir. EK 1a'daki eşitsizlik uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{|\alpha|R}{c_g^2} (2a_1a_2 + c_1c_2) \|v_1 - v_2\|_{H^1} + \frac{3a_2c_2R}{c_g^2} \|v_1 - v_2\|_{H^1}, \\ I_2 &\leq \frac{3a_2c_2R|\alpha|}{c_g^2} \|v_1 - v_2\|_{H^1} + \frac{R(a_1a_2 + 2c_1c_2)}{c_g^2 r_1 r_2} \|v_1 - v_2\|_{H^1} \end{aligned}$$

bulunur.

İspat (iii): Önerme 3.3'de enerji denkleminin ϕ_1^ε ve ϕ_2^ε terimlerini içeren kısmının bir üst sınırı hesaplanmıştı:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{H}_\phi| dx dy &\leq b_1 \alpha^2 \|(|u^\varepsilon|^2)_x\|_1^2 + \frac{b_1}{r_1 r_2} \|(|u^\varepsilon|^2)_y\|_1^2 + b_2 |\alpha| \|(|u^\varepsilon|^2)_x\|_1 \|(|u^\varepsilon|^2)_y\|_1 \\ &\leq b_1 \alpha^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_x^\varepsilon u^{\varepsilon*} + u^\varepsilon u_x^{\varepsilon*}| dx dy \right)^2 + \frac{b_1}{r_1 r_2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_y^\varepsilon u^{\varepsilon*} + u^\varepsilon u_y^{\varepsilon*}| dx dy \right)^2 \\ &\quad + b_2 |\alpha| \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_x^\varepsilon u^{\varepsilon*} + u^\varepsilon u_x^{\varepsilon*}| dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_y^\varepsilon u^{\varepsilon*} + u^\varepsilon u_y^{\varepsilon*}| dx dy \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

(4.11) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{H}_\phi| dx dy &\leq b_1 \alpha^2 [2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_x^\varepsilon|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^2 dx dy \right)^{1/2}]^2 \\ &\quad + \frac{b_1}{r_1 r_2} [2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_y^\varepsilon|^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^2 dx dy \right)^{1/2}]^2 \\ &\quad + 4b_2 |\alpha| \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_x^\varepsilon|^2 dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^2 dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_y^\varepsilon|^2 dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^2 dx dy \right) \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{4}{r_1 r_2} [b_1 (1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|] \|\nabla u^\varepsilon\|_2^2 \|u^\varepsilon\|_2^2 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Üçüncü olarak, (4.2) sisteminin çözümünün varlığını ve tekliğini gösterebilmek için çözümlerin ε parametresinden bağımsız bazı önkestirimlerinin hesaplanması gereklidir. (4.5) kütle ve (4.7) enerji korunumu denklemlerinden dolayı başlangıç değeri $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ olmalıdır. O zaman

$$u_0^\varepsilon = (I - \varepsilon^s \Delta)^{-1} u_0 \quad (4.12)$$

seçilebilir. Burada $s > 0$ reel bir sayıdır.

Lemma 4.1. u_0^ε başlangıç fonksiyonu $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayının bir elemanıdır.

İspat: $u_0^\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^2)$ olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} \|u_0^\varepsilon\|_2 &\leq \|u_0\|_2, \\ \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2 &\leq \|\nabla u_0\|_2, \\ \varepsilon^{2s} \|\Delta u_0^\varepsilon\|_2^2 &\leq \|u_0\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

eşitsizlikleri ispatlanmalıdır: $u_0^\varepsilon = (I - \varepsilon^s \Delta)^{-1} u_0$ eşitliği ve Plancherel teoreminden

$$\begin{aligned} \|u_0\|_2^2 &= \|\widehat{u_0}\|_2^2 = \|(I - \varepsilon^s \Delta) u_0^\varepsilon\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \varepsilon^s |\xi|^2)^2 |\widehat{u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{u_0^\varepsilon}\|_2^2 = \|u_0^\varepsilon\|_2^2, \\ \|\nabla u_0\|_2^2 &= \|\widehat{\nabla u_0}\|_2^2 = \|(I - \varepsilon^s \Delta) \nabla u_0^\varepsilon\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \varepsilon^s |\xi|^2)^2 |\widehat{\nabla u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\nabla u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{\nabla u_0^\varepsilon}\|_2^2 = \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2^2, \\ \|u_0\|_2^2 &= \|\widehat{u_0}\|_2^2 = \|(I - \varepsilon^s \Delta) u_0^\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \varepsilon^s |\xi|^2)^2 |\widehat{u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} (\varepsilon^s |\xi|^2)^2 |\widehat{u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \varepsilon^{2s} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\widehat{u_0^\varepsilon}(\xi)|^2 d\xi = \varepsilon^{2s} \|\widehat{\Delta u_0^\varepsilon}\|_2^2 \\ &= \varepsilon^{2s} \|\Delta u_0^\varepsilon\|_2^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. □

4.2. Varlık ve Teklik

Önerme 4.2. (i) Her $u_0^\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^2)$ için (4.2) denkleminin $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^2))$ olacak şekilde bir tek çözümü vardır.

(ii) $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için sadece χ, b, b_1, b_2, b_3 ve $\|u_0\|_2^2$ 'ye bağlı ε_0 vardır öyle ki $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ olduğunda (4.12)'de verilen u_0^ε ile (4.2) denkleminin u^ε çözümü $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında düzgün sınırlıdır, diğer bir deyişle her $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq C_0 \quad (4.14)$$

olacak şekilde $C_0 = C_0(\chi, b, b_1, b_2, b_3, \|u_0\|_2^2)$ sabiti mevcuttur.

İspat (i): İlk olarak, (4.2) sisteminin zamanda yerel varlığı ile ilgili bir sonuç verilmelidir. Öncelikle, lineer düzgünleştirilmiş denklemi

$$iv_t + i\varepsilon\Delta^2 v_t + \Delta v = 0, \quad v(0) = v_0$$

çözen lineer $\Sigma_\varepsilon(t)$ grubunu tanımlayalım. Buna göre $v(t) = \Sigma_\varepsilon(t)v_0$ dır. Daha sonra

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(v) = & (I + \varepsilon\Delta^2)^{-1} \left(\chi|v|^2 v + bv \left\{ \alpha \left[\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y \right) \right]_x \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[\mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y \right) \right]_y \right\} \right) \end{aligned}$$

tanımlanabilir. Böylece incelenen integral denklem

$$u^\varepsilon(t) = \Sigma_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon - i \int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s)G_\varepsilon(u^\varepsilon(s)) ds. \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayında verilen $u_0^\varepsilon, v \in \mathcal{C}([0, T]; H^2(\mathbb{R}^2))$ için bir $\mathcal{T}$ tasviri tanımlanabilir:

$$\mathcal{T} : \mathcal{T}v(t) = \Sigma_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon - i \int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s)G_\varepsilon(v(s)) ds.$$

Dolayısıyla, incelenen (4.15) integral denklemi $\mathcal{T}$ tasviri için klasik sabit nokta problemine dönüşür.

$G_\varepsilon(v)$ tasvirinin yerel Lipschitz sürekli olması durumunda, (4.15) integral denkleminin $u_0^\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^2)$ koşulu için tek $u^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T^\varepsilon]; H^2(\mathbb{R}^2))$ maksimal çözümünün olduğu ve bu çözümün ya

$$T^\varepsilon = +\infty$$

ya da

$$0 < T^\varepsilon < \infty \quad \text{ve} \quad \limsup_{t \rightarrow T^\varepsilon} \|u^\varepsilon(t)\|_{H^2}^2 = \infty \quad (4.16)$$

koşullarından birini sağladığı Segal'ın yaptığı çalışmada verilmiştir [38]. Ancak $u^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T^\varepsilon]; H^2(\mathbb{R}^2))$ olduğundan (4.5) kütle korunumu ve (4.7) enerji korunumu geçerlidir. O zaman (4.16) koşulunun oluşmayacağı görülür, diğer bir deyişle, çözüm hiçbir zaman tekilliğe sahip olmaz. Bu durumda, (4.15) denkleminin tek $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^2))$ global çözümü bulunur. O halde, (4.15) integral denklemi ile (4.2) denkleminin eşdeğer olmaları nedeniyle önermenin ilk bölümünün ispatı için aşağıdaki lemmanın ispatlanması yeterli olacaktır:

Lemma 4.2. G_ε tasviri, $H^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde yerel Lipschitz süreklidir.

İspat: $\|v_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{H^2} \leq R$ koşulunu sağlayan $v_1, v_2 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} \\ & \left\{ \alpha v_1 [\mathcal{K}_1(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y)]_x - \alpha v_2 [\mathcal{K}_1(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)]_x \right. \\ & \left. + v_1 [\mathcal{K}_2(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y)]_y - v_2 [\mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)]_y \right\} \|_{H^2} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\|G_\varepsilon(v_1) - G_\varepsilon(v_2)\|_{H^2} \leq |\chi| \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1}(|v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2)\|_{H^2} + |b| \mathcal{A} \quad (4.17)$$

yazılabilir. Burada $|v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ olduğu dikkate alınarak EK 1b'deki eşitsizlik uygulanırsa

$$\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1}(|v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2)\|_{H^2} \leq \|v_1 |v_1|^2 - v_2 |v_2|^2\|_{H^2} \quad (4.18)$$

bulunur. Ayrıca $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayı bir Banach Cebri olduğundan ([39], sayfa 80) $v \rightarrow |v|^2 v$ tasviri yerel Lipschitz süreklidir (EK 1c) ve

$$\| |v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2 \|_{H^2} \leq R^2 \|v_1 - v_2\|_{H^2} \quad (4.19)$$

olur. Böylece (4.18) ve (4.19) eşitsizliklerinden

$$\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1}(|v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2)\|_{H^2} \leq R^2 \|v_1 - v_2\|_{H^2} \quad (4.20)$$

elde edilir. Öte yandan, $\mathcal{A}$ için EK 2d'de gösterilen eşitsizlik kullanılır ise

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leq & C_\varepsilon \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} \\ & \left\{ \alpha v_1 [\mathcal{K}_1(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y)]_x - \alpha v_2 [\mathcal{K}_1(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)]_x \right. \\ & \left. + v_1 [\mathcal{K}_2(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y)]_y - v_2 [\mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)]_y \right\} \|_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. (4.21) eşitsizliğinde, $ab_x - cd_x = (ab - cd)_x + c_xd - a_xb$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leq & C_\varepsilon \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} \\ & \left\{ \alpha \left[v_1 \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - v_2 \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \right]_x \right. \\ & + \alpha \left[v_{2,x} \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - v_{1,x} \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \right] \\ & + \left[v_1 \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - v_2 \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \right]_y \\ & \left. + v_{2,y} \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - v_{1,y} \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \right\} \|_2 \quad (4.22) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.22) eşitsizliğinde ise EK 1e ve EK 1f'deki eşitsizlikler uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leq & C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon |\alpha| \|v_1 \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - v_2 \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right)\|_2 \\ & + C_\varepsilon |\alpha| \|v_{2,x} \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - v_{1,x} \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right)\|_2 \\ & + C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon \|v_1 \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - v_2 \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right)\|_2 \\ & + C_\varepsilon \|v_{2,y} \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - v_{1,y} \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right)\|_2 \quad (4.23) \end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 4.1'de verilen sonucu kullanabilmek için (4.23) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \leq & C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon |\alpha| \|(v_1 - v_2) \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \\ & + v_2 \left[\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \right]\|_2 \\ & + C_\varepsilon |\alpha| \|(v_2 - v_1)_x \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \\ & + v_{1,x} \left[\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \right]\|_2 \\ & + C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon \|(v_1 - v_2) \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \\ & + v_2 \left[\mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \right]\|_2 \\ & + C_\varepsilon \|(v_2 - v_1)_y \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) \\ & + v_{1,y} \left[\mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) \right]\|_2 \\ \leq & C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon |\alpha| \|v_1 - v_2\|_2 \|\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right)\|_\infty \\ & + C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon |\alpha| \|v_2\|_2 \|\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right)\|_\infty \\ & + C_\varepsilon |\alpha| \|v_2 - v_1\|_{H^1} \|\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right)\|_\infty \\ & + C_\varepsilon |\alpha| \|v_1\|_{H^1} \|\mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right) - \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right)\|_\infty \\ & + C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon \|v_1 - v_2\|_2 \|\mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right)\|_\infty \\ & + C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon \|v_2\|_2 \|\mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y \right) - \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y \right)\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_\varepsilon \|v_2 - v_1\|_{H^1} \|\mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y)\|_\infty \\
& + C_\varepsilon \|v_1\|_{H^1} \|\mathcal{K}_2(\alpha(|v_2|^2)_x, (|v_2|^2)_y) - \mathcal{K}_2(\alpha(|v_1|^2)_x, (|v_1|^2)_y)\|_\infty
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Daha sonra, Önerme 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} & \leq \frac{C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon |\alpha|}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|v_1 - v_2\|_2 \|v_1\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon R |\alpha|}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|v_2\|_2 \|v_1 - v_2\|_{H^1} \\
& + \frac{C_\varepsilon |\alpha|}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|v_2 - v_1\|_{H^1} \|v_2\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C_\varepsilon R |\alpha|}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|v_1\|_{H^1} \|v_1 - v_2\|_{H^1} \\
& + \frac{C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon}{c_g^2 r_1 r_2} [3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2] \|v_1 - v_2\|_2 \|v_1\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C_\varepsilon \overline{C}_\varepsilon R}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|v_2\|_2 \|v_1 - v_2\|_{H^1} \\
& + \frac{C_\varepsilon}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|v_2 - v_1\|_{H^1} \|v_2\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C_\varepsilon R}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|v_1\|_{H^1} \|v_1 - v_2\|_{H^1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Özetle,

$$B = \frac{2C_\varepsilon(1 + \overline{C}_\varepsilon)}{c_g^2 r_1 r_2} [r_1 r_2 \alpha^2 (c_1 c_2 + 2a_1 a_2) + 6|\alpha| a_1 c_1 + a_1 a_2 + 2c_1 c_2]$$

olmak üzere,

$$\mathcal{A} \leq BR^2 \|v_1 - v_2\|_{H^1} \quad (4.24)$$

olur. (4.17) eşitsizliğinde (4.20) ve (4.24) eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$\|G_\varepsilon(v_1) - G_\varepsilon(v_2)\|_{H^2} \leq (|\chi| + B|b|)R^2 \|v_1 - v_2\|_{H^2}$$

bulunur. Böylece $(|\chi| + B|b|)R^2$ Lipschitz katsayısı olmak üzere G_ε tasvirinin $H^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde Lipschitz sürekli olduğu gösterilir.

İspat (ii): Bu kısımda, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ başlangıç fonksiyonu için ε parametresinden bağımsız olarak $u^\varepsilon(t)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında düzgün sınırlı olduğu ispatlanacaktır. Bunun için de ε -düzgünleştirilmiş denklemin (4.5) kütle ve (4.8) enerji korunum özelliklerinden yararlanılacaktır. İlk olarak, (4.5) kütle korunum denklemi kullanılarak $u^\varepsilon(t)$ fonksiyonunun $L^2(\mathbb{R}^2)$ uzayında

düzgün sınırlı olduğu gösterilecektir. O zaman, (4.5) kütle korunumu ve (4.13) eşitsizliklerinden

$$M_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}^2} (|u_0^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u_0^\varepsilon|^2) dx dy \leq \|u_0\|_2^2 + \varepsilon^{1-2s} \|u_0\|_2^2 = (1 + \varepsilon^{1-2s}) \|u_0\|_2^2 \quad (4.25)$$

yazılabilir. Burada $1 - 2s > 0$ olmalıdır. Daha önce s pozitif bir sayı olarak tanımlandığından $0 < s < 1/2$ bulunur. $\mu > 0$ ölçekleme parametresi olmak üzere, (4.25) eşitsizliği ve (4.5) denkleminde

$$\mu \|u^\varepsilon(t)\|_2^2 \leq \mu M_\varepsilon(t) = \mu M_\varepsilon(0) \leq (1 + \varepsilon^{1-2s}) \mu \|u_0\|_2^2$$

elde edilir. Daha sonra $\mu \|u_0\|_2^2 = k < 1$ ve $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ için

$$\mu \|u^\varepsilon(t)\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon_0^{1-2s}) k = \frac{1+k}{2} < 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad (4.26)$$

yazılabilir. Böylece $\varepsilon_0 = [(1-k)/(2k)]^{1/(1-2s)}$ olarak bulunur.

İkinci olarak, $\nabla u^\varepsilon(t)$ fonksiyonunun $L^2(\mathbb{R}^2)$ uzayında düzgün sınırlı olduğunu göstermek için (4.8) enerji korunumu kullanılmalıdır. (4.8) denkleminde Önerme 4.1 (iii) eşitsizliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(0) &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_0^\varepsilon|^2 + \frac{\chi}{2} |u_0^\varepsilon|^4 + \frac{b}{2} H_{\phi_0}) dx dy \\ &\leq \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2^2 + \frac{\chi}{2} \|u_0^\varepsilon\|_4^4 + 2|b| \left[\frac{b_1}{r_1 r_2} (1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 |\alpha| \right] \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2^2 \|u_0^\varepsilon\|_2^2 \end{aligned}$$

ve Ladyzenskaya eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(0) &\leq \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2^2 \left(1 + 2 \max\{\chi, 0\} \|u_0^\varepsilon\|_2^2 + 2|b| \left[\frac{b_1}{r_1 r_2} (1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 |\alpha| \right] \|u_0^\varepsilon\|_2^2 \right) \\ &\leq \|\nabla u_0^\varepsilon\|_2^2 \left(1 + 2(\max\{\chi, 0\} + |b| \left[\frac{b_1}{r_1 r_2} (1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 |\alpha| \right]) \|u_0^\varepsilon\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. $E_\varepsilon(0)$ ifadesinin ε parametresinden bağımsız bir üst sınırını bulmak için son olarak, (4.13) eşitsizliği uygulanır:

$$E_\varepsilon(0) \leq \|\nabla u_0\|_2^2 \left(1 + 2(\max\{\chi, 0\} + |b| \left[\frac{b_1}{r_1 r_2} (1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 |\alpha| \right]) \|u_0\|_2^2 \right). \quad (4.27)$$

Şimdi

$$\|\nabla u^\varepsilon(t)\|_2^2 = -\frac{\chi}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_4^4 - \frac{b}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_\phi(t) dx dy + E_\varepsilon(0)$$

şeklinde düzenlenen (4.8) denkleminde, Önerme 4.1 (iii) sonucu ve Ladyzenskaya eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_2^2 &\leq 2(\max\{-\chi, 0\} + \frac{|b|}{r_1 r_2} [b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]) \|u^\varepsilon(t)\|_2^2 \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_2^2 \\ &\quad + E_\varepsilon(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mu = 2(\max\{-\chi, 0\} + |b|[b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]/(r_1 r_2))$ seçilerek ve (4.26) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1-k}{2} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_2^2 \leq E_\varepsilon(0) \quad (4.28)$$

bulunur. (4.27) ve (4.28) eşitsizliklerinden ise

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_2^2 &\leq 2(1-k)^{-1} \left(1 + 2(\max(\chi, 0) + |b|[\frac{b_1}{r_1 r_2}(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 |\alpha|]) \|u_0\|_2^2 \right) \\ &\quad \|\nabla u_0\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

sonucu elde edilir. Böylece u^ε fonksiyonunun $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında düzgün sınırlı olduğu (4.26) ve (4.29) eşitsizliklerinden görülür. Bu sonuç, ε -düzgünleştirilmiş probleminin u^ε global çözümlerinin, orijinal problemin u çözümüne yakınsamasının ispatında kullanılacaktır. $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ koşulu altında, (4.5) denkleminde u^ε ve Δu^ε fonksiyonlarının $L^2(\mathbb{R}^2)$ normlarının sabit ve (4.14) eşitsizliğinden $\{u^\varepsilon\}$, $\{u_x^\varepsilon\}$ ve $\{u_y^\varepsilon\}$ fonksiyon dizilerinin $L^2(\mathbb{R}^2)$ uzayında düzgün sınırlı olduğu sonucu çıkar. Böylece, bu önemli iki sonuç ve Alaoğlu teoreminden, $\{u^\varepsilon\}$ dizisinin zayıf yıldız topolojisinde $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonuna yakınsayan bir alt dizisi, benzer şekilde $\{u_x^\varepsilon\}$ ve $\{u_y^\varepsilon\}$ dizilerinin zayıf yıldız topolojisinde sırası ile $u_x \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))$ ve $u_y \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonlarına yakınsayan alt dizilerinin mevcut olduğu bulunur, diğer bir deyişle

$$u^\varepsilon \xrightarrow{*} u, \quad u_x^\varepsilon \xrightarrow{*} u_x, \quad u_y^\varepsilon \xrightarrow{*} u_y \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \text{ uzayında}$$

olacak şekilde u, u_x ve u_y vardır. Burada, alt diziler de u^ε , u_x^ε ve u_y^ε ile gösterilmiştir. Bundan sonraki bölümde, u fonksiyonunun (4.1) indirgenmiş GDS sistemini sağladığı gösterilecektir.

5. LİMİTE GEÇİŞ

Bu bölümde, ε -düzgünleştirilmiş denklemin u^ε çözümlerinin indirgenmiş GDS sisteminin u çözümüne yakınsadığı gösterilecektir. Bunun için (4.2) denkleminde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limit alınmalıdır. Bu limite geçiş (4.2) denklemindeki yerel ve yerel olmayan terimler için iki ayrı alt bölümde ele alınacaktır.

5.1. Yerel Terimlerde Limite Geçiş

Bu alt bölümde, öncelikle $\{u^\varepsilon\}$ fonksiyon dizisinin uygun topolojilerde yakınsadığı bir v fonksiyonunun varlığı gösterilmelidir. Bunun için $2(\max\{-\chi, 0\} + |b|[b_1(1 + r_1r_2\alpha^2) + b_2r_1r_2|\alpha|]/(r_1r_2))\|u_0\|_2^2 < 1$ koşulunu sağlayan $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ seçilir. Önerme 4.2 (ii)'den dolayı u^ε fonksiyonları $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için ε 'dan bağımsız üstten sınırlıdır, diğer bir deyişle ε -düzgünleştirilmiş denklemlerin çözümleri her $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))} \leq C_0 \quad (5.1)$$

şartını sağlar. Bu fonksiyonlar ailesinin uygun bir alt dizisinin orijinal denklemlerin dağılımsal anlamda zayıf bir çözümüne yakınsadığı gösterilecektir. Yazılımı kolaylaştırmak amacı ile bu ailenin keyfi alt dizileri $\{u^{\varepsilon_n}\}$ şeklinde gösterilecektir. Argüman boyunca alt dizilerin de alt dizileri alınacak ama notasyon değişmeyecektir.

Burada söz edilen dağılımsal anlamdaki zayıf çözüm şöyle tanımlanır: Her $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ için

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} u_t \zeta dx dy dt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u \zeta dx dy dt \\ = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \zeta [\chi |u|^2 u + b\{\alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y}\} u] dx dy dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

eşitliği geçerlidir. ζ 'ya bağlı olarak öyle bir $T > 0$ ve $R > 0$ bulunabilir ki $\text{supp } \zeta \subseteq [0, T] \times [-R, R] \times [-R, R] = [0, T] \times [-R, R]^2$ olur. Bu durumda (5.2)

denklemini, kısmi integrasyonlardan sonra,

$$\begin{aligned} -i \int_0^T \int_{[-R,R]^2} u \zeta_t dx dy dt &+ \int_0^T \int_{[-R,R]^2} u \Delta \zeta dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_{[-R,R]^2} \zeta [\chi |u|^2 u + b \{ \alpha \phi_{1,x} + \phi_{2,y} \} u] dx dy dt \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

Önerme 4.2 (i)'de ε -düzgünleştirilmiş denklemlerin çözümlerinin $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\mathbb{R}^2))$ uzayında varlığı ve tekliği gösterildiği için onların dağılımsal anlamda zayıf çözümlerinin de olduğu açıktır. Bir başka deyişle, $V = [-R, R]^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} -i \int_0^T \int_V u^\varepsilon \zeta_t dx dy dt - i \varepsilon \int_0^T \int_V u^\varepsilon \Delta^2 \zeta_t dx dy dt + \int_0^T \int_V u^\varepsilon \Delta \zeta dx dy dt \\ = \int_0^T \int_V \zeta [\chi |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon + b \{ \alpha \phi_{1,x}^\varepsilon + \phi_{2,y}^\varepsilon \} u^\varepsilon] dx dy dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda, uygun bir $\{u^{\varepsilon_n}\}$ alt dizisi bulunarak (5.3) denkleminde $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ için limite geçilirse (5.2) denkleminde ulaşılabileceği gösterilmelidir. Bu alt dizinin, T 'ye ve R 'ye bağlı olmaması gerekmektedir. Bunun için ε -düzgünleştirilmiş denklemini kullanarak ε 'dan bağımsız kestirim elde edilmelidir:

Önerme 5.1. $u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonu, (4.3) ε -düzgünleştirilmiş denklemin çözümü ise u^ε fonksiyonu $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında ve u_t^ε fonksiyonu $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ uzayında ε 'de bağımsız sınırlıdır, diğer bir deyişle

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))} + \|u_t^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2))} \leq C'_0 \quad (5.4)$$

olacak şekilde ε 'den bağımsız bir C'_0 sabiti vardır.

İspat: (5.4) eşitsizliğini ispatlamak için, u_t^ε fonksiyonunun $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ uzayında ε 'den bağımsız sınırlı olduğunun gösterilmesi yeterlidir. u_t^ε fonksiyonunun üst sınırı, EK 2a'daki $\|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|(I + \varepsilon \Delta^2)u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}}$ eşitsizlik ve (4.3) denklemini kullanılarak bulunabilir. O zaman

$$\|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|\Delta u^\varepsilon\|_{H^{-1}} + |\chi| \| |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon \|_{H^{-1}} + |b| \|u^\varepsilon \{ \alpha (\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y \} \|_{H^{-1}}$$

yazılır. EK 2b, EK 2c ve EK 2d'de verilen eşitsizliklerden

$$\|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq 2\|u^\varepsilon\|_{H^1} + C|\chi| \|u^\varepsilon\|_{H^1}^3 + 2A|b| \|u^\varepsilon\|_{H^1}^3$$

sonucu elde edilir. Son olarak, (5.1) eşitsizliği ile u^ε fonksiyonlarının $H^1(\mathbb{R}^2)$ uzayında ε 'dan bağımsız sınırlı olduğu kullanılır ise

$$\|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq 2C_0 + C|\chi|C_0^3 + 2A|b|C_0^3 = C_0''$$

elde edilir. Böylece her $t \geq 0$ ve $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1} + \|u_t^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}} \leq C_0' \quad (5.5)$$

bulunur. (5.5) eşitsizliğinden (5.4) sonucu elde edilir. $\square$

$L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) = L^1(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))^*$ ve $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2)) = L^1(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2))^*$ olduğundan bu uzaylarda zayıf yıldız topolojileri vardır. Burada $H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ uzaylarının dualleri kendileri ile özdeş kullanılmıştır. Alaoğlu teoremi ve Önerme 5.1'e göre $\{u^\varepsilon\}$ fonksiyon dizisinden, zayıf yıldız topolojisinde $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonuna yakınsayan bir $\{u^{\varepsilon_n}\}$ alt dizisi seçilebilir:

$$u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} v \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \text{ uzayında.} \quad (5.6)$$

Benzer şekilde, $\{u_t^{\varepsilon_n}\}$ fonksiyon dizisinden zayıf yıldız topolojisinde $w \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ fonksiyonuna yakınsayan bir $\{u_t^{\varepsilon_n}\}$ alt dizisi de mevcuttur:

$$u_t^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} w \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2)) \text{ uzayında.}$$

Özetle, $\varphi(t) \in C_0^1[0, T]$ ve $\psi(x, y) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_t^{\varepsilon_n} \varphi \psi dx dy dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} w \varphi \psi dx dy dt$$

yazılır. Benzer şekilde, u^{ε_n} için

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u^{\varepsilon_n} \varphi_t \psi dx dy dt \rightarrow -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \varphi_t \psi dx dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_t \varphi \psi dx dy dt$$

geçerlidir. Bu sonuç ise

$$w = v_t$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H_w^1(\mathbb{R}^2))$ olur ve

$$u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} v \quad \text{ve} \quad u_t^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} v_t$$

bulunur.

$H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H_w^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ olduğundan, Aubin-Lions kompaktlık teoremi yardımı ile

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow v \quad L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)) \text{ uzayında}$$

yakınsaması her $2 \leq p < \infty$ için geçerlidir. Bu sonuç ise

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow v \quad L^p((0, T); L^p(V)) \text{ uzayında} \quad (5.7)$$

yakınsaması olduğunu gösterir. Bu alt diziyi T 'den ve R 'den dolayısı ile V 'den bağımsız seçmek için ise köşegen argümanı kullanılır. Buna göre; T ve R için bulunan alt dizinin, $L^p((0, 2T); L^p([-2R, 2R]^2))$ uzayında yakınsayan bir alt dizisi bulunarak tümevarımla her m için $L^p((0, mT); L^p([-mR, mR]^2))$ uzayında da yakınsayan alt dizileri oluşturulur. Bu alt dizilerin köşegen alt dizisi yine u^{ε_n} ile gösterilirse, her $T > 0$ ve $R > 0$ için

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow v \quad L^p((0, T); L^p(V)) \text{ uzayında} \quad (5.8)$$

yakınsaması gerçekleşir.

Bu aşamada, v fonksiyonunun (4.1) başlangıç değer probleminin zayıf çözümü olduğu gösterilmelidir. $0 < s < 1/2$ için başlangıç fonksiyonu (4.12)'de $u_0^\varepsilon = (I - \varepsilon^s \Delta)^{-1} u_0$ olarak tanımlandığından $H^1(\mathbb{R}^2)$ uzayında $u^\varepsilon(0) \rightarrow u_0$ dır. Böylece ilk olarak v_0 limit fonksiyonunun başlangıç koşulunu sağladığı bulunur ($u(0, x, y) = v_0$). İkinci olarak, (4.3) denkleminin zayıf çözümlerinin, (4.1)'nin zayıf çözümüne yakınsadığı gösterilmelidir. Zayıf yıldız yakınsaması lineer operatörler altında korunduğundan (5.3) denkleminin sol tarafı $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ için

$$-i \int_0^T \int_V v \zeta_t dx dy dt + \int_0^T \int_V v \Delta \zeta dx dy dt$$

ifadesine eşit olur. Bu ise (5.2) denkleminin sol tarafına eşittir.

Zayıf topolojilerde yakınsayan diziler lineer olmayan fonksiyonlar altında iyi davranmazlar. Bu nedenle, lineer olmayan terimlerde limite geçebilmek için kuvvetli yakınsamaya gerek vardır. Zayıf ve kuvvetli yakınsayan dizilerin çarpımlarının yakınsaması ile ilgili önerme aşağıdadır:

Önerme 5.2. X refleksif bir Banach uzayı olsun. $x_n \xrightarrow{*} x$ 'e X^* uzayında zayıf yıldız ve $y_n \rightarrow y$ 'ye X uzayında kuvvetli yakınsar ise

$$\langle x_n, y_n \rangle_{X^*, X} \rightarrow \langle x, y \rangle_{X^*, X}$$

olur ([40] sayfa 258).

(5.3) denklemindeki lineer olmayan $|u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon$ ile $\phi_{1,x}^\varepsilon u^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon u^\varepsilon$ terimleri birbirinden farklı yapıdadır. Bu alt bölümde, yalnızca ilk yerel terimin yakınsaması gösterilecektir. (5.8) ile $\{u^{\varepsilon_n}\}$ fonksiyon dizisinin $L^4((0, T) \times V)$ uzayında sınırlı olduğu bulunmuştu. O zaman $\{|u^{\varepsilon_n}|^2\}$ dizisi $L^2((0, T) \times V)$ uzayında sınırlıdır ve zayıf yakınsayan bir alt dizisi vardır. Burada da (5.8) da kullanılan köşegen argümanı ile her $T > 0$ ve $R > 0$ için

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow v \quad L^2((0, T) \times V) \text{ uzayında}$$

ve

$$|u^{\varepsilon_n}|^2 \rightharpoonup w \quad L^2((0, T) \times V) \text{ uzayında}$$

yakınsamalarını sağlayan $\{u^{\varepsilon_n}\}$ alt dizisi bulunur. Diğer bir deyişle, $\varphi(t) \in C_0^1[0, T]$ ve $\psi(x, y) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için

$$\int_0^T \int_V |u^{\varepsilon_n}|^2 \varphi_t \psi dx dy dt \rightarrow \int_0^T \int_V w \varphi_t \psi dx dy dt$$

yazılır. Öte yandan

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_V (u_t^{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n*} + u^{\varepsilon_n} u_t^{\varepsilon_n*}) \varphi \psi dx dy dt &\rightarrow - \int_0^T \int_V (v_t v^* + v v_t^*) \varphi \psi dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_V |v|^2 \varphi_t \psi dx dy dt \end{aligned}$$

geçerlidir. Böylece $w = |v|^2$ olduğu gösterilir ve Önerme 5.2'den dolayı

$$|u^{\varepsilon_n}|^2 u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup |v|^2 v \quad L^2((0, T) \times V) \text{ uzayında}$$

sonucu elde edilir.

5.2. Yerel Olmayan Terimlerde Limite Geçiş

Bu alt bölümde ise, $\phi_{1,x}^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon$ yerel olmayan terimlerde $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alma işlemi iki adımda gerçekleştirilecektir:

I. İlk aşamada, $1 \leq q < 2$ olmak üzere, her $T > 0$ ve $R > 0$ için

$$\alpha\phi_{1,x}^{\varepsilon_n} + \phi_{2,y}^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \alpha\Psi_{1,x} + \Psi_{2,y} \quad L^q((0, T); L^q(V)) \text{ uzayında}$$

yakınsamasını gerçekleyen bir alt dizinin varlığı gösterilecektir.

II. İkinci aşamada, v fonksiyonu ile Ψ_1 ve Ψ_2 fonksiyonları arasında

$$\Psi_1 = \mathcal{K}_1 \left(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y \right) \text{ ve } \Psi_2 = \mathcal{K}_2 \left(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y \right)$$

bağıntılarının geçerli olduğu gösterilecektir.

Bu sonuçları elde etmek için, ilk olarak $L_{loc}^q(\mathbb{R}^2)$ uzayının yapısı anlaşılmalıdır:

Her $R > 0$ için

$$P_R(f) = \left[\int_{[-R, R]^2} |f|^q dx dy \right]^{1/q}$$

bir yarı-normdur. Çünkü $P_R(f) = 0$, $V = [-R, R]^2$ kümesinde hemen hemen her yerde $f = 0$ sonucunu verir ve bu küme dışında f hakkında bir bilgi vermez.

$L_{loc}^q(\mathbb{R}^2)$ uzayı

$$d_{loc}(f, g) = \sum_{R=1}^{\infty} \frac{P_R(f - g)}{2^R [1 + P_R(f - g)]}$$

metriği ile tam bir uzay oluşturur. Bu metriğe göre yakınsama yarı-normlar cinsinden ifade edilebilir:

$f_n \rightarrow f$ ($L_{loc}^q(\mathbb{R}^2), d_{loc}$) uzayında ancak ve ancak her $R > 0$ için $P_R(f_n - f) \rightarrow 0$.

Bu nedenle, bu bölümdeki hesaplar $V = [-R, R]^2$ uzayında yapılmaktadır. Aslında elde edilen alt dizi, $L_{loc}^q(\mathbb{R}^2)$ uzayında zayıf olarak yakınsamaktadır. Tezde somut bir yaklaşım benimsenerek bu uzaydan açıkça söz etmemek tercih edilmiştir.

(5.8) sonucundan dolayı $\{u^{\varepsilon_n}\}$ dizisi $L^p((0, T) \times V)$ uzayında kuvvetli yakınsamaya sahip olduğundan, **I.** adımda $\{\phi_1^{\varepsilon}\}$ ve $\{\phi_2^{\varepsilon}\}$ dizileri için $L^{p'}((0, T) \times V)$ uzayında zayıf yakınsayan birer alt dizi bulunması gerekmektedir. ϕ_1^{ε} ve ϕ_2^{ε} çözüm ifadelerindeki tüm integraller $\mathbb{R}^2$ üzerinde alındığından sadece $L^2((0, T) \times V)$ üzerindeki kuvvetli yakınsama yeterli olmayacaktır. O zaman, yerel olmayan ϕ_1^{ε} ve ϕ_2^{ε} terimlerinin yakınsaması için, ilk olarak aşağıdaki önerme verilecektir:

Önerme 5.3. $\{\phi_1^{\varepsilon}\}$ ve $\{\phi_2^{\varepsilon}\}$ fonksiyon dizilerinin zayıf yıldız topolojisinde, sırasıyla $\Psi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ ve $\Psi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ fonksiyonlarına yakınsayan

$\{\phi_1^{\varepsilon_n}\}$ ve $\{\phi_2^{\varepsilon_n}\}$ alt dizileri vardır:

$$\phi_1^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} \Psi_1 \text{ ve } \phi_2^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} \Psi_2 \quad L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \text{ uzayında.}$$

İspat: Önerme 4.1 (i)'deki eşitsizliklerde, ϕ_1^ε ve ϕ_2^ε fonksiyonlarının $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ uzayında ε 'dan bağımsız sınırlı olduğu gösterilmişti:

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_1^\varepsilon(t, x, y)| &\leq \frac{1}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{1}{c_g^2} [|\alpha|(c_1c_2 + 2a_1a_2) + 3a_2c_2] C_0^2, \\ \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\phi_2^\varepsilon(t, x, y)| &\leq \frac{1}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{1}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) C_0^2. \end{aligned}$$

Böylece Alaoğlu teoremine göre $\{\phi_1^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_2^\varepsilon\}$ fonksiyon dizilerinin zayıf yıldız topolojisinde, sırasıyla $\Psi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ ve $\Psi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ fonksiyonlarına yakınsayan alt dizileri seçilebilir. Sonuç olarak, Önerme 5.3 ispatlanmış olur. $\square$

İkinci olarak, $\{\phi_{1,x}^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_{2,y}^\varepsilon\}$ fonksiyon dizilerinin uygun bir uzayda ε 'dan bağımsız sınırlı olduğu gösterilecektir. $u^{\varepsilon_n} \in L^p(\mathbb{R}_+ \times V)$ olduğu dikkate alınarak $\phi_{1,x}^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon$ fonksiyonlarının her $q \in [1, 2)$ için $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^q(V))$ uzayında olması gerektiği görülür ve aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Önerme 5.4. $\phi_{1,x}^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon$ fonksiyonları $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^q(V))$ uzayında ε 'dan bağımsız sınırlıdır.

İspat: Öncelikle, (2.13) denklemlerinde tanımlanan h_1 ve h_2 fonksiyonları (ξ_1, ξ_2) karakteristik koordinatlarında; h_3 ve h_4 fonksiyonları (η_1, η_2) karakteristik koordinatlarında yazılmalıdır:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{a_2}{2c_g^2 r_1} [(-\alpha c_1 r_1 + a_2)(|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2)_{\xi_1} + (\alpha c_1 r_1 + a_2)(|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2)_{\xi_2}], \\ \tilde{h}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{a_2}{2c_g^2 r_1} [-(\alpha c_1 r_1 + a_2)(|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2)_{\xi_1} + (\alpha c_1 r_1 - a_2)(|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2)_{\xi_2}], \\ \bar{h}_3(\eta_1, \eta_2) &= \frac{c_2}{2c_g^2 r_2} [(\alpha a_1 r_2 + c_2)(|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2)_{\eta_1} + (-\alpha a_1 r_2 + c_2)(|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2)_{\eta_2}], \\ \bar{h}_4(\eta_1, \eta_2) &= \frac{-c_2}{2c_g^2 r_2} [(-\alpha a_1 r_2 + c_2)(|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2)_{\eta_1} + (\alpha a_1 r_2 + c_2)(|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2)_{\eta_2}]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

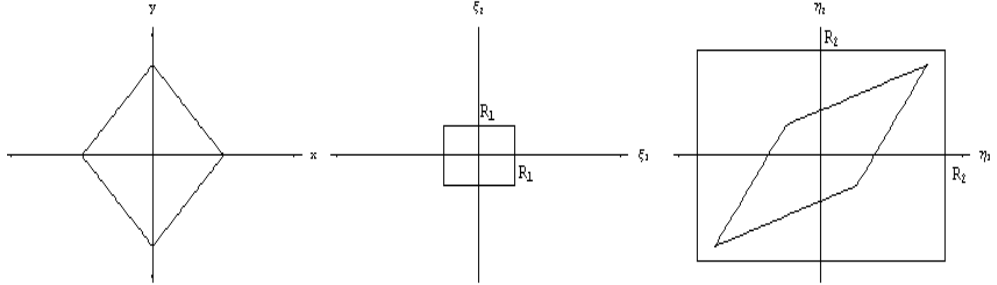
Daha sonra (2.17) denklemlerindeki $\phi_{1,x}^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon$ fonksiyonlarında, (5.9) integralleri yerine yazılarak gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{1,x}^\varepsilon &= -\frac{c_2}{2c_g^2}(-\alpha c_1 r_1 + a_2)|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2 + \frac{a_2}{2c_g^2}(\alpha a_1 r_2 + c_2)|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2 \\
&+ \frac{c_2}{4c_g^2}(\alpha c_1 r_1 + a_2)(J_1 + J_2) - \frac{a_2}{4c_g^2}(-\alpha a_1 r_2 + c_2)(J_3 + J_4), \\
\phi_{2,y}^\varepsilon &= -\frac{a_2}{2c_g^2 r_1^2}(-\alpha c_1 r_1 + a_2)|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi_2)|^2 - \frac{c_2}{2c_g^2 r_2^2}(\alpha a_1 r_2 + c_2)|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta_2)|^2 \\
&+ \frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2}(\alpha c_1 r_1 + a_2)(J_1 + J_2) + \frac{c_2}{4c_g^2 r_2^2}(-\alpha a_1 r_2 + c_2)(J_3 + J_4) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.10) denklemlerindeki J_1, J_2, J_3 ve J_4 ifadeleri

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\xi_1}^{\infty} (|\tilde{u}^\varepsilon(\xi'_1, \xi_2)|^2)_{\xi_2} d\xi'_1, & J_2 &= \int_{\xi_2}^{\infty} (|\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi'_2)|^2)_{\xi_1} d\xi'_2, \\
J_3 &= \int_{\eta_1}^{\infty} (|\bar{u}^\varepsilon(\eta'_1, \eta_2)|^2)_{\eta_2} d\eta'_1, & J_4 &= \int_{\eta_2}^{\infty} (|\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta'_2)|^2)_{\eta_1} d\eta'_2 \quad (5.11)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.



Şekil 2: V sınırlı bölgesinin sırasıyla (x, y) , (ξ_1, ξ_2) ve (η_1, η_2) koordinatlarındaki şekli.

Bu aşamada, hem (ξ_1, ξ_2) ve hem de (η_1, η_2) koordinatlarında çalışıldığından V kompakt kümesi, keyfi R_1 için $V = \{(\xi_1, \xi_2) : -R_1 \leq \xi_i \leq R_1, (i = 1, 2)\}$ olarak belirlenir. V kümesinin diğer koordinatlardaki hali şematik olarak Şekil 2’de verilmiştir (Karakteristik değişkenlerle işlem yapılmadığında ise $R_1 = R$ olarak alınacaktır). O zaman $\phi_{1,x}^\varepsilon$ ve $\phi_{2,y}^\varepsilon$ fonksiyonlarının $L^q(V)$ normları için

ε 'dan bağımsız önkestirimler yapılacaktır:

$$\begin{aligned}
\|\phi_{1,x}^\varepsilon\|_{q,V} &\leq \frac{c_2}{2c_g^2} |-\alpha c_1 r_1 + a_2| \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{2q,V}^2 + \frac{a_2}{2c_g^2} |\alpha a_1 r_2 + c_2| \|\bar{u}^\varepsilon\|_{2q,V}^2 \\
&+ \frac{c_2}{4c_g^2} |\alpha c_1 r_1 + a_2| (\|J_1\|_{q,V} + \|J_2\|_{q,V}) \\
&+ \frac{a_2}{4c_g^2} |-\alpha a_1 r_2 + c_2| (\|J_3\|_{q,V} + \|J_4\|_{q,V}), \\
\|\phi_{2,y}^\varepsilon\|_{q,V} &\leq \frac{a_2}{2c_g^2 r_1^2} |-\alpha c_1 r_1 + a_2| \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{2q,V}^2 + \frac{c_2}{2c_g^2 r_2^2} |\alpha a_1 r_2 + c_2| \|\bar{u}^\varepsilon\|_{2q,V}^2 \\
&+ \frac{a_2}{4c_g^2 r_1^2} |\alpha c_1 r_1 + a_2| (\|J_1\|_{q,V} + \|J_2\|_{q,V}) \\
&+ \frac{c_2}{4c_g^2 r_2^2} |-\alpha a_1 r_2 + c_2| (\|J_3\|_{q,V} + \|J_4\|_{q,V}). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Burada $\|u^\varepsilon\|_q^2 = \|u^\varepsilon\|_{2q}^2$ (EK 2e) sonucu kullanılmıştır. Sobolev gömme teoremine göre $1 \leq q < 2$ için $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{2q}(V)$ olduğundan $\|u^\varepsilon\|_{2q,V}$ 'nin ε 'dan bağımsız üst sınırı vardır. O zaman J_j ($j = 1, \dots, 4$) terimlerinin $L^q(V)$ uzayında sınırlı olduğu gösterilmelidir. J_1 teriminin sınırlı olduğu aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{q,V}^q &= \frac{1}{2r_1} \int_V \left| \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{\xi_1}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon(\xi'_1, \xi_2)|^2 d\xi'_1 \right|^q d\xi_1 d\xi_2 \\
&\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \int_{-R_1}^{R_1} \left| \int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon| |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_2}| d\xi'_1 \right|^q d\xi_2 \\
&\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_2}|^2 d\xi'_1 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_1 \right)^{\frac{q}{2}} d\xi_2 \\
&\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \left(\int_{-R_1}^{R_1} \int_{-\infty}^\infty |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_2}|^2 d\xi'_1 d\xi_2 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_1 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\xi_2 \right)^{\frac{2-q}{2}} \\
&\leq \frac{2^q R_1 (2r_1)^{\frac{q}{2}}}{r_1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_1 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\xi_2 \right)^{\frac{2-q}{2}}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Diğer J_j terimleri için benzer hesaplar EK 2f'de verilmiştir. (5.13) eşitsizliklerinde EK 2g'deki iz yaklaşımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{q,V}^q &\leq \frac{4^q (2R_1)^{\frac{2-q}{2}} R_1 r_1^{\frac{q}{2}}}{r_1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi_2 d\xi'_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_2}|^2 d\xi_2 d\xi'_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{3q+2}{2}} R_1^{\frac{4-q}{2}} r_1^{\frac{q}{2}-1} (2r_1)^{\frac{q}{2}} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \\
&= 2^{2q+1} R_1^{\frac{4-q}{2}} r_1^{q-1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^{2q}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, diğer J_j terimleri için iz yaklaşımı EK 2h'da kullanılmış ve ε 'dan bağımsız üst sınırlar elde edilmiştir. Buradaki tüm üst sınırlar t 'den de bağımsızdır. $\square$

Üçüncü olarak, $\{\phi_{1,x}^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_{2,y}^\varepsilon\}$ fonksiyon dizilerinin, $L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayında zayıf yıldız yakınsak alt dizileri olduğu gösterilmelidir:

Önerme 5.5. Her $T > 0$ ve her $R > 0$ için $V = [-R, R]^2$ olmak üzere, $\{\phi_{1,x}^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_{2,y}^\varepsilon\}$ fonksiyon dizilerinin $L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayının yıldız topolojisinde $\Psi_{1,x}$ ve $\Psi_{2,y}$ fonksiyonlarına yakınsadığı alt diziler vardır.

İspat: Öncelikle $\{\phi_{1,x}^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_{2,y}^\varepsilon\}$ dizilerinin $L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayında zayıf yıldız yakınsadığı birer alt dizilerinin olduğu gösterilmelidir. Önerme 5.4'den dolayı, $\{\phi_{1,x}^\varepsilon\}$ ve $\{\phi_{2,y}^\varepsilon\}$ dizilerinin keyfi $R > 0$ ve $T > 0$ için zayıf yıldız topolojisinde, sırasıyla, $f_R \in L^\infty((0, T); L^q([-R, R]^2))$ ve $g_R \in L^\infty((0, T); L^q([-R, R]^2))$ fonksiyonlarına yakınsadığı alt diziler vardır:

$$\alpha\phi_{1,x}^{\varepsilon_n} + \phi_{2,y}^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} \alpha f_R + g_R \quad L^\infty((0, T); L^q([-R, R]^2)) \text{ uzayında.}$$

T 'yi $2T$ 'ye ve R 'yi $2R$ 'ye büyüterek elde edilen yeni uzayda da aynı işlem tekrarlanırsa alt dizinin $L^\infty((0, 2T); L^q([-2R, 2R]^2))$ uzayında da zayıf yakınsayan alt dizileri bulunabilir. Bu argüman tekrarlanarak tümevarımla her m için $L^\infty((0, mT); L^q([-mR, mR]^2))$ uzayında da yakınsayan alt dizileri oluşturulur. Bu alt dizilerin köşegen alt dizileri yine $\{\phi_{1,x}^{\varepsilon_n}\}$ ve $\{\phi_{2,y}^{\varepsilon_n}\}$ ile gösterilirse,

$$\alpha\phi_{1,x}^{\varepsilon_n} + \phi_{2,y}^{\varepsilon_n} \xrightarrow{*} \alpha f + g \quad L^\infty((0, T); L^q(V)) \text{ uzayında}$$

olacak şekilde f ve g vardır. Bu durumda, $f = \Psi_{1,x}$ ve $g = \Psi_{2,y}$ olduğu gösterilebilir. $\text{supp } \zeta \subseteq [0, T] \times V$ olmak üzere $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ için

$$\int_0^T \int_V (\alpha\phi_{1,x}^{\varepsilon_n} + \phi_{2,y}^{\varepsilon_n}) \zeta dx dy dt \rightarrow \int_0^T \int_V (\alpha f + g) \zeta dx dy dt$$

yazılır. Diğer yandan, Önerme 5.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_V (\alpha\phi_{1,x}^{\varepsilon_n} \zeta_x + \phi_{2,y}^{\varepsilon_n} \zeta_y) dx dy dt &\rightarrow - \int_0^T \int_V (\alpha\Psi_{1,x} \zeta_x + \Psi_{2,y} \zeta_y) dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_V (\alpha\Psi_{1,x} + \Psi_{2,y}) \zeta dx dy dt \end{aligned}$$

geçerlidir. Böylece $f = \Psi_{1,x}$ ve $g = \Psi_{2,y}$ olduğu bulunur. $\square$

$L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayında sınırlı olduğu gösterilen $\{\alpha\phi_{1,x}^\varepsilon + \phi_{2,y}^\varepsilon\}$ dizisi, $L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayı $L^q((0, T) \times V)$ uzayına sürekli olarak gömülü olduğundan,

aynı zamanda $L^q((0, T) \times V)$ uzayında da sınırlıdır. Ayrıca, $L^q((0, T) \times V)$ uzayı refleksif bir Banach uzayı olup zayıf ve zayıf yıldız topolojiler birbiriyle çıkarır. Bu ise $\{\alpha\phi_{1,x}^\varepsilon + \phi_{2,y}^\varepsilon\}$ dizisinin $L^q((0, T) \times V)$ uzayında da zayıf yakınsayan bir alt dizisi olduğunu gösterir. Sonuç olarak, I. aşamada, $\{\alpha\phi_{1,x}^\varepsilon + \phi_{2,y}^\varepsilon\}$ dizisinin $L^\infty((0, T); L^q(V))$ uzayının zayıf yıldız topolojisinde ve $L^q((0, T) \times V)$ uzayının zayıf topolojisinde yakınsayan bir alt dizisinin var olduğu gösterilmiştir.

Bu aşamada, (5.3) denkleminde zayıf yakınsamalar da dikkate alınarak, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limite geçilirse

$$\begin{aligned} & -i \int_0^T \int_V v \zeta_t dt dx dy + \int_0^T \int_V v \Delta \zeta dt dx dy \\ & = \int_0^T \int_V \zeta [\chi |v|^2 v + b \{\alpha \Psi_{1,x} + \Psi_{2,y}\} v] dt dx dy \end{aligned}$$

bulunur. O zaman dağılımsal anlamda

$$iv_t + \Delta v = \chi |v|^2 v + b \{\alpha \Psi_{1,x} + \Psi_{2,y}\} v \quad (5.14)$$

yazılabilir.

II. adımda ise $\Psi_1 = \mathcal{K}_1(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y)$ ve $\Psi_2 = \mathcal{K}_2(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için öncelikle $\text{supp } \zeta \subseteq [0, T] \times V$ olmak üzere $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ reel değerli fonksiyonu için (2.34) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_V \phi_1^{\varepsilon_n}(t, x, y) \zeta(t, x, y) dx dy dt \\ & = \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha K_1(x', y', x, y) (|u^{\varepsilon_n}(t, x', y')|^2)_x \\ & \quad + K_2(x', y', x, y) (|u^{\varepsilon_n}(t, x', y')|^2)_y] \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \\ & = \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha K_1(x', y', x, y) (u_x^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\ & \quad + u^{\varepsilon_n}(t, x', y') u_x^{\varepsilon_n*}(t, x', y')) + K_2(x', y', x, y) (u_y^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\ & \quad + u^{\varepsilon_n}(t, x', y') u_y^{\varepsilon_n*}(t, x', y'))] \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \\ & = 2 \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\alpha K_1(x', y', x, y) u_x^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\ & \quad + K_2(x', y', x, y) u_y^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y')) \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_V \phi_2^{\varepsilon_n}(t, x, y) \zeta(t, x, y) dx dy dt \\
&= \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha K_2(x', y', x, y) (|u^{\varepsilon_n}(t, x', y')|^2)_x \\
&\quad + K_3(x', y', x, y) (|u^{\varepsilon_n}(t, x', y')|^2)_y] \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \\
&= \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha K_2(x', y', x, y) (u_x^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\
&\quad + u^{\varepsilon_n}(t, x', y') u_x^{\varepsilon_n*}(t, x', y')) + K_3(x', y', x, y) (u_y^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\
&\quad + u^{\varepsilon_n}(t, x', y') u_y^{\varepsilon_n*}(t, x', y'))] \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \\
&= 2 \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\alpha K_2(x', y', x, y) u_x^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y') \\
&\quad + K_3(x', y', x, y) u_y^{\varepsilon_n}(t, x', y') u^{\varepsilon_n*}(t, x', y')) \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \quad (5.15)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (5.15) eşitliğinde limite geçmek için, (5.6) ile verilen, $\{u^{\varepsilon_n}\}$ fonksiyon dizisinin $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında zayıf yıldız yakınsaması yeterli değildir. Bu yüzden aşağıdaki önermede $\{u^{\varepsilon_n}\}$ fonksiyon dizisinin $L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ uzayında kuvvetli yakınsadığı ispatlanacaktır:

Önerme 5.6. Her $T > 0$ için $\{u^{\varepsilon_n}\}$ fonksiyon dizisi $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ uzayında v fonksiyonuna kuvvetli yakınsar.

İspat: İlk olarak, (5.14) denkleminin zayıf anlamda kütle korunum denklemi hesaplanmalıdır. (5.14) denkleminde

$$\|v_t\|_{H^{-1}} \leq \|\Delta v\|_{H^{-1}} + |\chi| \| |v|^2 v \|_{H^{-1}} + |b| \|v[\alpha \Psi_{1,x} + \Psi_{2,y}]\|_{H^{-1}}$$

yazılabilir. Burada EK 2b, EK 2c ve (EK 2.1) ile verilen eşitsizlikler dikkate alınır

$$\|v_t\|_{H^{-1}} \leq 2\|v\|_{H^1} + C|\chi| \|v\|_{H^1}^3 + |b| [\|\nabla v\|_2 + \|v\|_2] [\alpha \|\Psi_1\|_\infty + \|\Psi_2\|_\infty]$$

bulunur. Böylece $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ ve $\Psi_1, \Psi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$ olduğundan $v_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ dir. Bu durumda $\int_{\mathbb{R}^2} |v(t, x, y)|^2 dx dy$ integralinde, t

değişkenine göre zayıf türev alınabilir. $\varphi(t) \in C_0^1[0, T]$ için

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx dy \right) \varphi_t dt &= - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (v v_t^* + v^* v_t) dx dy \right) \varphi dt \\ &= - \int_0^T (\langle v, v_t \rangle + \langle v, v_t \rangle^*) \varphi dt \\ &= - \int_0^T (2 \operatorname{Re} \langle v, v_t \rangle) \varphi dt \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer bir deyişle, zayıf anlamda

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx dy = 2 \operatorname{Re} \langle v, v_t \rangle$$

yazılabilir. (5.14) denklemi ile Ψ_1 ve Ψ_2 'nin reel değerli fonksiyonlar olduğu kullanılırsa $\operatorname{Re} \langle v, v_t \rangle = 0$ sonucu elde edilir. Böylece her $t \geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v(t, x, y)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} |v(0, x, y)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} |v_0(x, y)|^2 dx dy \quad (5.16)$$

bulunur.

Diğer taraftan, (4.5) denklemi ve (4.13) eşitsizliklerinden

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon|^2) dx dy = \|u_0^\varepsilon\|_2^2 + \varepsilon \|\Delta u_0^\varepsilon\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 + \varepsilon^{1-2s} \|u_0\|_2^2 \quad (5.17)$$

elde edilir. $T > 0$ için (5.17) denklemi t değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon|^2) dx dy dt - T \int_{\mathbb{R}^2} |u_0|^2 dx dy \right| \\ &\leq |T[\|u_0\|_2^2 + \varepsilon^{1-2s} \|u_0\|_2^2] - T \|u_0\|_2^2| = T \varepsilon^{1-2s} \|u_0\|_2^2, \end{aligned}$$

$1 - 2s > 0$ olduğundan dolayı,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon|^2) dx dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |u_0|^2 dx dy dt \quad (5.18)$$

sonucu bulunur.

(5.18) denkleminde (5.16) sonucu kullanılırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (|u^\varepsilon|^2 + \varepsilon |\Delta u^\varepsilon|^2) dx dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx dy dt, \quad (5.19)$$

yazılabilir. $(u^{\varepsilon_n}, \sqrt{\varepsilon_n} \Delta u^{\varepsilon_n})$ fonksiyon dizisi $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ uzayında $(v, 0)$ fonksiyonlarına zayıf yakınsadığından ve (5.19) sonucundan dolayı $(u^{\varepsilon_n}, \sqrt{\varepsilon_n} \Delta u^{\varepsilon_n})$ dizileri $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ uzayında $(v, 0)$ fonksiyonlarına kuvvetli yakınsaktır. Bu yakınsamanın $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ uzayında da geçerli olduğu gösterilmelidir. (5.16) denklemi, $u \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ fonksiyonu için $\|u(T)\|_2 = \|u_0\|_2$ sonucunu verir. $[0, T]$ aralığında geçerli olan bu sonuç, $[T, 2T]$ aralığı için tekrarlanarak yakınsamanın $L^2([0, 2T] \times \mathbb{R}^2)$ uzayına devamı gerçekleştirilir. Aynı işlemler, arka arkaya tekrarlanarak yakınsamanın tüm $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ uzayında geçerli olduğu görülür. $\square$

Önerme 5.6'den dolayı (5.15) eşitliğinde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_V \Psi_1(t, x, y) \zeta(t, x, y) dx dy dt \\
&= 2 \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\alpha K_1(x', y', x, y) v_x(t, x', y') v^*(t, x', y')) \\
&\quad + K_2(x', y', x, y) v_y(t, x', y') v^*(t, x', y')) \zeta(t, x, y) dx' dy' dx dy dt \\
&= \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \zeta(t, x, y) [\alpha K_1(x', y', x, y) (|v(t, x', y')|^2)_x \\
&\quad + K_2(x', y', x, y) (|v(t, x', y')|^2)_y] dx' dy' dx dy dt, \\
& \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_2(t, x, y) \zeta(t, x, y) dx dy dt \\
&= 2 \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \zeta(t, x, y) \operatorname{Re}(\alpha K_2(x', y', x, y) v_x(t, x', y') v^*(t, x', y')) \\
&\quad + K_3(x', y', x, y) v_y(t, x', y') v^*(t, x', y')) dx' dy' dx dy dt \\
&= \int_0^T \int_V \int_{\mathbb{R}^2} \zeta(t, x, y) [\alpha K_2(x', y', x, y) (|v(t, x', y')|^2)_x \\
&\quad + K_3(x', y', x, y) (|v(t, x', y')|^2)_y] dx' dy' dx dy dt \tag{5.20}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki yakınsamaların Önerme 5.5 ve Önerme 5.6'den dolayı T ve R 'den bağımsızdır. Böylece $\Psi_1 = \mathcal{K}_1(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y)$ ve $\Psi_2 = \mathcal{K}_2(\alpha(|v|^2)_x, (|v|^2)_y)$ olduğu gösterilir.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, EHH halindeki GDS sisteminin Cauchy probleminin çözümlerinin küçük değerli başlangıç koşulları için global varlığı incelenerek varlık ile ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 6.1. $r_1 \neq r_2$ ve $1 \leq q < 2$ iken

$$2(\max\{-\chi, 0\} + \frac{|b|}{r_1 r_2} [b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]) \|u_0\|_2^2 < 1$$

koşulunu sağlayan tüm $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için (1.3) başlangıç değer probleminin

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H_w^1(\mathbb{R}^2)) ,$$

$$\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)), \quad \nabla \phi_1, \nabla \phi_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L_{loc}^q(\mathbb{R}^2))$$

zayıf anlamda çözümü mevcuttur.

Özel olarak, $r_1 = r_2$ dejenere durumu için $2(\max\{-\chi, 0\} + |b|[b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]/(r_1 r_2)) \|u_0\|_2^2 < 1$ koşulu geçerli değildir. GDS sistemi için Önerme 4.1 (iii)'de elde edilmiş $4[b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]/(r_1 r_2)$ ifadesi dejenere durumda $2(1 + \alpha^2)$ ifadesiyle yer değiştirecektir. Bu sonuç DS sistemi için verilen koşulla uyudur.

Teorem 6.1'in ispatında, kuple dalga sistemi yüzünden semi lineer denklemler için kullanılan yöntemler kullanılamamıştır. Bu nedenle, öncelikle kuple sistemin çözümlerinin integral gösterimi bulunarak GDS sistemi yerel olmayan bir NLS denklemine indirgenmiştir. Daha sonra, bu NLS denklemi yerine düzgünleştirici etki yapacak bir terim eklenmiş hali ele alınmıştır. Bu düzgünleştirilmiş denklemin çözümlerinin, yerel olmayan NLS denkleminin çözümüne yakınsadığı gösterilmiştir. Dalga sisteminin dört karakteristik değişkeni olmasından dolayı oluşan karmaşık yapı işlemleri zorlaştırmıştır. Özellikle, karakteristik koordinatları gruplamak ve karakteristik değişkenler ile kartezyen değişkenler arasındaki bağıntıların uygun olanlarını belirlemede güçlük

yaşanmıştır. Ayrıca, bu karmaşık yapı yukarıda verilen başlangıç koşulunun sağladığı eşitsizliğin iyileştirilmesini de zorlaştırmaktadır. Çünkü karakteristik değişkenlerin yarattığı karmaşa, integral gösterimdeki integral sınırlarına, veya K_i çekirdek fonksiyonlarına yansımıştır. Dolayısıyla K_i fonksiyonlarının maksimumu alınarak yapılan üst sınır hesabında daha büyük üst sınır bulunmasına yol açmıştır. Hesaplarda yaşanan bu zorluğun esas nedeni dalga sisteminin simetrik olmamasıdır. Eğer sistem simetrik olsaydı, kuple dalga sistemi ayrıklaştırılabilir ve dejenere durum olarak adlandırılan (2.32) denklemlerinin bir benzeri için incelemeler kolaylıkla yapılabilirdi.

Düzgünleştirilmiş denklemin çözümlerinin varlığı ve yerel olmayan NLS denkleminin çözümlerine yakınsamasının gösterilmesinde de, ağırlıklı olarak kuple dalga denkleminin çözümlerinden gelen yerel olmayan terimler üzerinde durulmak zorunda kalınmıştır. Ancak, karakteristik değişkenler arasında dönüşüm yapılmadığından, bunlar arasındaki karmaşık etkileşim hesaplarda zorluk yaratmamıştır.

(2.10) dalga sisteminin çözümlerinin integral gösterimi, her ne kadar başlangıç değer probleminin incelenmesi için bulunmuşsa da, (1.3) GDS denkleminin bazı lokalize çözümlerinin elde edilmesine vesile olmuştur. Karakteristik koordinatlar arasındaki karmaşık etkileşim, bu çözümlerin bulunmasındaki işlemleri güçleştirmiştir. Ancak GDS sisteminin lineer olmayan bir dönüşümle DS sistemine dönüştüğü $\gamma_1 = \gamma_3$ özel hali için, bu sistemin bazı çözümleri yazılabilmektedir. Bu çözümlerin grafikleri çizilirken seçilen parametreler de, çözümlerin global varlığı için gerekli olan $2(\max\{-\chi, 0\} + \frac{|b|}{r_1 r_2} [b_1(1 + r_1 r_2 \alpha^2) + b_2 r_1 r_2 |\alpha|]) \|u_0\|_2^2 < 1$ koşulunu sağlamaktadır. Diğer yandan, GDS sisteminin lokalize çözümlerinin elde edilmesinde $\gamma_1 = \gamma_3$ koşulunun ortaya çıkması, $\gamma_1 \neq \gamma_3$ için sistemin integre edilemez olabileceği sorusunu akla getirir.

Bundan sonraki çalışmalarda; başlangıç koşulunun kısıtlanmadığı durum için Cauchy probleminin yerel varlığı, çözümlerin asimptotik davranışları, varolan çözümlerin patlaması ve $\gamma_1 \neq \gamma_3$ durumunda lokalize çözümlerin elde edilmesi problemleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Ablowitz, M.J. and Segur, H., 1981. *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia.
- [2] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. and Morris, H.C., 1982. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London.
- [3] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1992. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Sulem, C. and Sulem, P.L., 1999. *The Nonlinear Schrödinger Equation, Self-Focusing and Wave Collapse*, Springer, New York.
- [5] Struwe, M., 2000. *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer, New York.
- [6] Zhidkov, P.E., 2001. *Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory*, Springer, New York.
- [7] Cazenave, T., 2003. *Semilinear Schrödinger Equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [8] Davey, A. and Stewartson, K., 1974. On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. Roy. Soc. London*, **A338**, 101-110.
- [9] Djordjevic, V. D. and Redekopp, L. G., 1977. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, *J. Fluid. Mech.*, **79**, 703-714.
- [10] Ablowitz, M.J. and Segur, H., 1979. On the evolution of packets of water waves, *J. Fluid Mech.*, **92**, 691-715.
- [11] Boiti, M., Leon, J.J. -P., Martina, L. and Pempinelli, F., 1988. Scattering of localized solitons in the plane, *Phys. Lett.*, **A132**, 432-439.
- [12] Arkadiev, V.A., Pogrebkov, A.K. and Polivanov, M.C., 1989. Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey-Stewartson II equation, *Physica*, **D36**, 189-197.
- [13] Ghidaglia, J.M. and Saut, J.C., 1990. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Nonlinearity*, **3**, 475-506.
- [14] Tsutsumi, M., 1994. Decay of weak solutions to the Davey-Stewartson systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **182**, 680-704.

- [15] **Linares, F. and Ponce, G.**, 1993. On the Davey-Stewartson systems, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. nonlinéaire*, **10**, 523-548.
- [16] **Hayashi, N. and Hirata, H.**, 1997. Local existance in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system in the usual Sobolev space, *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, **40**, 563-581.
- [17] **Hayashi, N.**, 1996. Local existence in time of small solutions to the Davey-Stewartson systems, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **65**, 313-366.
- [18] **Hayashi, N.**, 1997. Local existence in time of solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system without smallness condition on the data, *Journal D'Analyse Mathématique*, **73**, 133-164.
- [19] **Hayashi, N. and Hirata, H.**, 1996. Global existence and asymptotic behaviour in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system, *Nonlinearty*, **9**, 1387-1409.
- [20] **Babaoglu, C. and Erbay, S.**, 2004. Two-dimensional wave packets in an elastic solid with couple stresses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **39**, 941-949.
- [21] **Babaoglu, C., Eden, A. and Erbay, S.**, 2004. Global existence and nonexistence results for a generalized Davey-Stewartson system, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, 11531-11546.
- [22] **Eden, A., Erbay, H.A. and Muslu, G.M.**, 2008. Closing the gap in the purely elliptic generalized Davey-Stewartson system, *Nonlinear Analysis TMA* (baskıda).
- [23] **Eden, A. and Erbay, S.**, 2005. On travelling wave solutions of a generalized Davey-Stewartson system, *IMA J. Applied Math.*, **70**, 15-24.
- [24] **Eden, A. and Erbay, S.**, 2006. Standing waves for a generalized Davey-Stewartson system, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 13435-13444.
- [25] **Eden, A., Erbay, H.A. and Muslu, G.M.**, 2006. Two remarks on a generalized Davey-Stewartson system, *Nonlinear Analysis TMA*, **64**, 979-986.
- [26] **Gungor, F. and Aykanat, O.**, 2006. The generalized Davey-Stewartson equations, its Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra and relation to Davey-Stewartson equations, *J. Math. Phys.*, **47**, 013510.
- [27] **Eden, A., Erbay, S. and Hacinliyan, I.**, 2008. Reducing a generalized Davey-Stewartson system to a non-local nonlinear Schrödinger equation, *Chaos, Soliton & Fractals* (baskıda).

- [28] **Treves, F.**, 1975. *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- [29] **Grimshaw, R.**, 1976. The modulation and stability of an internal gravity wave, *Mem. Soc. Roy. des Sciences de Liege, 6 Series*, **10**, 299-314.
- [30] **Cornille, H.**, 1979. Solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation in two spatial dimensions, *J. Math. Phys.*, **20**, 199-209.
- [31] **Fokas, A.S. and Santini P.M.**, 1990. Dromions and a boundary value problem for the Davey-Stewartson I equation, *Physica D*, **44**, 99-130.
- [32] **Radha, R. and Lakshmanan, M.**, 1997. Localized coherent structures and integrability in a generalized (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **8**, 17-25.
- [33] **Ablowitz, M.J. and Haberman, R.**, 1975. Nonlinear evolution equations-two and three dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1185-1188.
- [34] **Morris, H.C.**, 1976. Prolongation structures and nonlinear evolution equations in two spatial dimensions, *J. Math. Phys.*, **17**, 1870-1872.
- [35] **Babaoglu, C.**, 2006. Some special solutions of a generalized Davey-Stewartson system, *Chaos, Soliton & Fractals*, **30**, 781-790.
- [36] **Gelfand, I.M. and Fomin, S.F.**, 1963. *Calculus of Variations*, Printice-Hall, New York.
- [37] **Bluman, G.W. and Kumei, S.**, 1989. *Symmetries and Differential Equations*, Springer, New York.
- [38] **Segal, I.**, 1963. Non-linear semi-groups, *Ann. of Math.*, **78**, 339-364.
- [39] **Kesavan, S.**, 1989. *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- [40] **Zeidler, E.**, 1990. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A: Linear Monotone Operotors*, Springer, New York.
- [41] **Evans, L. C.**, 1998. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [42] **Conway, J.B.**, 1990. *A Course in Functional Analysis*, Springer, New York.
- [43] **Kolmogorov, A.N.**, 1970. *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York.
- [44] **Lions, J.L.**, 1961. *Equations Differentielles Operationnelles et Problemes aux Limites*, Springer, Berlin.

- [45] **Folland, G.B.**, 1995. *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, New Jersey.
- [46] **Shatah, J. and Struwe, M.**, 2000. *Geometric Wave Equations. In: Courant Lecture Notes in Mathematics*, American Mathematical Society, New York.
- [47] **Adams, R.A. and Fournier, J.J.F.**, 2003. *Sobolev Spaces*, Academic Press, Oxford.

EK 1

a) Her $v_1, v_2 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için $\int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1|^2 - |v_2|^2)_{x_i}| dx_1 dx_2 \leq 2R \|v_1 - v_2\|_{H^1}$ olur.

$$\begin{aligned}
 \text{İspat: } & \int_{\mathbb{R}^2} |(|v_1|^2 - |v_2|^2)_{x_i}| dx_1 dx_2 \\
 & \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} [|v_1| |(v_1 - v_2)_{x_i}| + |v_1 - v_2| |v_{2,x_i}|] dx_1 dx_2 \\
 & \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v_1|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(v_1 - v_2)_{x_i}|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\
 & \quad + 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v_1 - v_2|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v_{2,x_i}|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\
 & \leq 2 \|v_1\|_2 \|v_1 - v_2\|_{H^1} + 2 \|v_2\|_{H^1} \|v_1 - v_2\|_2 \\
 & \leq 2R \|v_1 - v_2\|_{H^1}
 \end{aligned}$$

b) Her $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$ için $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} v\|_{H^2} \leq \|v\|_{H^2}$ olur.

$$\begin{aligned}
 \text{İspat: } & \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} v\|_{H^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |[(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} v(\xi)]^\wedge|^2 d\xi \\
 & = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |(1 + \varepsilon |\xi|^4)^{-1} \widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = \|v\|_{H^2}^2
 \end{aligned}$$

c) Her $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$ için $v \rightarrow |v|^2 v$ tasviri yerel Lipschitz süreklidir.

İspat: $v_1, v_2 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ için $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayının Banach Cebri ve $|v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2 = v_1^2(v_1^* - v_2^*) + v_2^*(v_1^2 - v_2^2)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
 \| |v_1|^2 v_1 - |v_2|^2 v_2 \|_{H^2} & \leq \|v_1^2\|_{H^2} \|v_1^* - v_2^*\|_{H^2} + \|v_2^*\|_{H^2} \|v_1 - v_2\|_{H^2} \|v_1 + v_2\|_{H^2} \\
 & \leq \|v_1 - v_2\|_{H^2} [\|v_1\|_{H^2} \|v_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{H^2} (\|v_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{H^2})] \\
 & = \|v_1 - v_2\|_{H^2} [\|v_1\|_{H^2}^2 + \|v_2\|_{H^2}^2 + \|v_1\|_{H^2} \|v_2\|_{H^2}] \\
 & \leq \|v_1 - v_2\|_{H^2} (\|v_1\|_{H^2} + \|v_2\|_{H^2})^2 \\
 & \leq R^2 \|v_1 - v_2\|_{H^2}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. O zaman $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$ için $v \rightarrow |v|^2 v$ tasviri Lipschitz süreklidir.

d) Her $w = v[\mathcal{K}_i(\alpha(|v|^2)_{x_1}, (|v|^2)_{x_2})]_{x_j}$ için $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} w\|_{H^2} \leq C_\varepsilon \|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w\|_2$ olacak şekilde $C_\varepsilon \geq 0$ vardır.

İspat: $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1} w\|_{H^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |(1 + \varepsilon |\xi|^4)^{-1} \widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1 + |\xi|^2)^2}{1 + \varepsilon |\xi|^4} |(1 + \varepsilon |\xi|^4)^{-1/2} \widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} |[(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w(\xi)]^\wedge|^2 d\xi$$

$$= C_\varepsilon^2 \| [(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w]^\wedge \|_2^2$$

$$= C_\varepsilon^2 \| (I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w \|_2^2$$

yazılabilir. Burada $C_\varepsilon^2 = \max \left(\frac{(1 + |\xi|^2)^2}{1 + \varepsilon |\xi|^4} \right) = 1 + 1/\varepsilon$ dur.

e) Her $w = v_1 \mathcal{K}_i(\alpha(|v_1|^2)_{x_1}, (|v_1|^2)_{x_2}) - v_2 \mathcal{K}_i(\alpha(|v_2|^2)_{x_1}, (|v_2|^2)_{x_2})$ için $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w_{x_j}\|_2 \leq \overline{C}_\varepsilon \|w\|_2$ olacak şekilde $\overline{C}_\varepsilon \geq 0$ vardır.

İspat: $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w_{x_j}\|_2^2 = \| [(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w_{x_j}]^\wedge \|_2^2$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |(1 + \varepsilon |\xi|^4)^{-1/2} \widehat{w}_\xi(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^2}{1 + \varepsilon |\xi|^4} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \overline{C}_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \overline{C}_\varepsilon^2 \|\widehat{w}\|_2^2 = \overline{C}_\varepsilon^2 \|w\|_2^2$$

yazılabilir. Burada $\overline{C}_\varepsilon^2 = \max \left(\frac{|\xi|^2}{1 + \varepsilon |\xi|^4} \right) = 1/(2\sqrt{\varepsilon})$ dur.

f) Her $w = v_{1,x_j} \mathcal{K}_i(\alpha(|v_1|^2)_{x_1}, (|v_1|^2)_{x_2}) - v_{2,x_j} \mathcal{K}_i(\alpha(|v_2|^2)_{x_1}, (|v_2|^2)_{x_2})$ için $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w\|_2 \leq \|w\|_2$ olur.

İspat: $\|(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w\|_2^2 = \| [(I + \varepsilon \Delta^2)^{-1/2} w]^\wedge \|_2^2$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |(1 + \varepsilon |\xi|^4)^{-1/2} \widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \|\widehat{w}\|_2^2 = \|w\|_2^2$$

EK 2

a) Her $u_t^\varepsilon \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ için $\|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq \|(I + \varepsilon\Delta^2)u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}}$ olur.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_t^\varepsilon \varphi dx dy \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_t^\varepsilon + \varepsilon\Delta^2 u_t^\varepsilon) \varphi dx dy \right| + \varepsilon \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta^2 u_t^\varepsilon) \varphi dx dy \right| \right) \\ &= \|(I + \varepsilon\Delta^2)u_t^\varepsilon\|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

b) Her $u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $u_t^\varepsilon \in H^{-1}$ için $\|\Delta u^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq 2\|u^\varepsilon\|_{H^1}$ olur.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|\Delta u^\varepsilon\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_{xx}^\varepsilon + u_{yy}^\varepsilon) \varphi dx dy \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^2} u_{xx}^\varepsilon \varphi dx dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_{yy}^\varepsilon \varphi dx dy \right| \right) \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} (\|u\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} + \|u\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}) \leq 2\|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

c) Her $u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için $\|u^\varepsilon |u^\varepsilon|^2\|_{H^{-1}} \leq C\|u^\varepsilon\|_{H^1}^3$ olur.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|u^\varepsilon |u^\varepsilon|^2\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} u^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 \varphi dx dy \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^6 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^2 dx dy \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \|u^\varepsilon\|_6^3 \leq C\|u^\varepsilon\|_{H^1}^3 \end{aligned}$$

Burada Sobolev gömme teoremi kullanılmıştır.

d) Her $u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için $\|u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\}\|_{H^{-1}} \leq 2A\|u^\varepsilon\|_{H^1}^3$ olur. Burada

$$A = \frac{1}{c_g^2 r_1 r_2} [\alpha^2 r_1 r_2 (2a_1 a_2 + c_1 c_2) + 6a_1 c_1 |\alpha| + a_1 a_2 + 2c_1 c_2]$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \|u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\}\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\} \varphi dx dy \right| \\ &\leq |\alpha| \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_x^\varepsilon \phi_1^\varepsilon \varphi + u^\varepsilon \phi_1^\varepsilon \varphi_x) dx dy \right| + \sup_{\|\varphi\|_{H^1} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_y^\varepsilon \phi_2^\varepsilon \varphi + u^\varepsilon \phi_2^\varepsilon \varphi_y) dx dy \right| \end{aligned}$$

$u_x^\varepsilon, u_y^\varepsilon, \varphi, \varphi_x, \varphi_y \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ve $\phi_1^\varepsilon, \phi_2^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ olduğu dikkata alınır

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\}\|_{H^{-1}} &\leq |\alpha| (\|u_x^\varepsilon\|_2 \|\phi_1^\varepsilon\|_\infty \|\varphi\|_2 + \|u^\varepsilon\|_2 \|\phi_1^\varepsilon\|_\infty \|\varphi\|_{H^1}) \\ &+ \|u_y^\varepsilon\|_2 \|\phi_2^\varepsilon\|_\infty \|\varphi\|_2 + \|u^\varepsilon\|_2 \|\phi_2^\varepsilon\|_\infty \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\|\varphi\|_{H^1} \leq 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\}\|_{H^{-1}} \leq (\|\nabla u^\varepsilon\|_2 + \|u^\varepsilon\|_2) (|\alpha| \|\phi_1^\varepsilon\|_\infty + \|\phi_2^\varepsilon\|_\infty) \quad (\text{EK 2.1})$$

bulunur. (EK 2.1) eşitsizliğinde, Önerme 4.1 (i)'e uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon \{\alpha(\phi_1^\varepsilon)_x + (\phi_2^\varepsilon)_y\}\|_{H^{-1}} &\leq 2\|u^\varepsilon\|_{H^1}^3 \left\{ \frac{|\alpha|}{c_g^2} [|\alpha|(2a_1a_2 + c_1c_2) + 3a_2c_2] \right. \\ &\left. + \frac{1}{c_g^2 r_1 r_2} (3a_1c_1|\alpha| + a_1a_2 + 2c_1c_2) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (d) eşitsizliği ispatlanır.

e) Her $u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için $\| |u^\varepsilon|^2 \|_q = \|u^\varepsilon\|_{2q}^2$ olur.

İspat: $\| |u^\varepsilon|^2 \|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u^\varepsilon|^{2q} dx dy \right)^{1/2q} = \|u^\varepsilon\|_{2q}^2$

f) $\|J_2\|_{q,V}^q = \frac{1}{2r_1} \int_V \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\xi_2}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon(\xi_1, \xi'_2)|^2 d\xi'_2 \right|^q d\xi_1 d\xi_2$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \int_{-R_1}^{R_1} \left| \int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon| |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_1}| d\xi'_2 \right|^q d\xi_1 \\ &\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_1}|^2 d\xi'_2 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_2 \right)^{\frac{q}{2}} d\xi_1 \\ &\leq \frac{2^q R_1}{r_1} \left(\int_{-R_1}^{R_1} \int_{-\infty}^\infty |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_1}|^2 d\xi'_2 d\xi_1 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_2 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\xi_1 \right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\leq \frac{2^q R_1 (2r_1)^{\frac{q}{2}}}{r_1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\int_{-R_1}^{R_1} \left(\int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi'_2 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\xi_1 \right)^{\frac{2-q}{2}}, \\ \|J_3\|_{q,V}^q &= \frac{1}{2r_2} \int_V \left| \frac{\partial}{\partial \eta_2} \int_{\eta_1}^\infty |\bar{u}^\varepsilon(\eta'_1, \eta_2)|^2 d\eta'_1 \right|^q d\eta_1 d\eta_2 \\ &\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \int_{-R_2}^{R_2} \left| \int_{-\infty}^\infty |\bar{u}^\varepsilon| |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_2}| d\eta'_1 \right|^q d\eta_2 \\ &\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^\infty |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_2}|^2 d\eta'_1 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-\infty}^\infty |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_1 \right)^{\frac{q}{2}} d\eta_2 \\ &\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \left(\int_{-R_2}^{R_2} \int_{-\infty}^\infty |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_2}|^2 d\eta'_1 d\eta_2 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^\infty |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_1 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\eta_2 \right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\leq \frac{2^q R_2 (2r_2)^{\frac{q}{2}}}{r_2} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^\infty |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_1 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\eta_2 \right)^{\frac{2-q}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{q,V}^q &= \frac{1}{2r_2} \int_V \left| \frac{\partial}{\partial \eta_1} \int_{\eta_2}^{\infty} |\bar{u}^\varepsilon(\eta_1, \eta'_2)|^2 d\eta'_2 \right|^q d\eta_1 d\eta_2 \\
&\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \int_{-R_2}^{R_2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}^\varepsilon| |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_1}| d\eta'_2 \right|^q d\eta_1 \\
&\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_1}|^2 d\eta'_2 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_2 \right)^{\frac{q}{2}} d\eta_1 \\
&\leq \frac{2^q R_2}{r_2} \left(\int_{-R_2}^{R_2} \int_{-\infty}^{\infty} |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_1}|^2 d\eta'_2 d\eta_1 \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_2 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\eta_1 \right)^{\frac{2-q}{2}} \\
&\leq \frac{2^q R_2 (2r_2)^{\frac{q}{2}}}{r_2} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\int_{-R_2}^{R_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta'_2 \right)^{\frac{q}{2-q}} d\eta_1 \right)^{\frac{2-q}{2}}.
\end{aligned}$$

g) İz yaklaşımı: (ξ, η) karakteristik koordinatlar olmak üzere $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi, \eta)|^2 d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\xi} (|u(\xi', \eta)|^2)_{\xi'} d\xi' d\eta \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u(\xi', \eta)| |u_{\xi'}(\xi', \eta)| d\xi' d\eta \\
&\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(\xi', \eta)|^2 d\xi' d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_{\xi'}(\xi', \eta)|^2 d\xi' d\eta \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\text{h) } \|J_2\|_{q,V}^q &\leq \frac{2^{\frac{3q+2}{2}} R_1^{\frac{4-q}{2}} r_1^{\frac{q}{2}}}{r_1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}^\varepsilon|^2 d\xi_1 d\xi'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\tilde{u}^\varepsilon)_{\xi_1}|^2 d\xi_1 d\xi'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{3q+2}{2}} R_1^{\frac{4-q}{2}} r_1^{\frac{q}{2}-1} (2r_1)^{\frac{q}{2}} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q = 2^{2q+1} R_1^{\frac{4-q}{2}} r_1^{q-1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^{2q}, \\
\|J_3\|_{q,V}^q &\leq \frac{2^{\frac{3q+2}{2}} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{\frac{q}{2}}}{r_2} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta_2 d\eta'_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_2}|^2 d\eta_2 d\eta'_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{3q+2}{2}} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{\frac{q}{2}-1} (2r_2)^{\frac{q}{2}} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q = 2^{2q+1} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{q-1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^{2q}, \\
\|J_4\|_{q,V}^q &\leq \frac{2^{\frac{3q+2}{2}} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{\frac{q}{2}}}{r_2} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\eta_1 d\eta'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\bar{u}^\varepsilon)_{\eta_1}|^2 d\eta_1 d\eta'_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{3q+2}{2}} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{\frac{q}{2}-1} (2r_2)^{\frac{q}{2}} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q \|u^\varepsilon\|_{H^1}^q = 2^{2q+1} R_2^{\frac{4-q}{2}} r_2^{q-1} \|u^\varepsilon\|_{H^1}^{2q}
\end{aligned}$$

EK 3

Bu tez çalışmasında kullanılan temel teoremler aşağıda listelenmiştir:

Teorem [Plancherel Teoremi]: $u \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ ise $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ve

$$\|\hat{u}\|_2 = \|\check{u}\|_2 = \|u\|_2$$

dır ([39] sayfa 42, [41] sayfa 183).

Bu teoremden dolayı $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzayının eşdeğer bir norm

$$\|\hat{u}\|_{H^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanabilir ([39] sayfa 52, [41] sayfa 282).

Teorem [Alaoglu Teoremi]: X normlu uzay ise $\{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ uzayının duali zayıf yıldız kompaktır ([42] sayfa 130).

Bu teoremmin daha geniş bir şekli ([43] sayfa 202)'de de verilmektedir.

Teorem [Aubin-Lions Teoremi]: B_0, B ve B_1 Banach uzayları olmak üzere $B_0 \subset B \subset B_1$, B_i ($i=0,1$) refleksif ve $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ kompakt gömme ise $1 < p_i < \infty$ ($i = 0, 1$) için

$$\{v : v \in L^{p_0}([0, T]; B_0), v_t \in L^{p_1}([0, T]; B_1)\} \hookrightarrow L^{p_0}([0, T]; B)$$

kompakt gömmedir ([44] sayfa 58).

Bu tez çalışmasında kullanılan temel eşitsizlikler aşağıda listelenmiştir:

i) *Sobolev Lemma*: $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ ise $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ve

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{H^2}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır ([45] sayfa 194).

ii) *Hölder Eşitsizliği*: $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ve $v \in L^q(\mathbb{R}^2)$ ise

$$\int_{\mathbb{R}^2} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dir ([41] sayfa 622).

iii) *Ladyzhenskaya eşitsizliği*: $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ için

$$\|u\|_4^4 \leq 4 \|u\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2$$

dir ([46] sayfa 21).

iv) *Sobolev gömme teoremleri*: $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ve kompakt $V \subset \mathbb{R}^2$ için

$$\|u\|_{p,V} \leq C\|u\|_{H^1}, \quad 2 \leq p < \infty$$

olacak şekilde p 'ye bağlı bir C sabiti vardır.

Sobolev gömme teoremlerinin daha geniş hali ([47] sayfa 118)'de verilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

İrma Hacınlıyan, 1976 yılında Ankara’da doğdu. İlköğrenimini Özel Feriköy İlköğretim Okul’unda, lise eğitimini Beyoğlu Teknik Lisesi Bilgisayar Bölümü’nde, yüksek öğrenimini ise 1994-1998 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’nde tamamladı. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde lisans üstü eğitime başladı. 2001 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamış olup, halen bu görevine devam etmektedir.