

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK ÇUBUKLARIN KUAZİ-STATİK ve DİNAMİK ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Y.Müh. Fethi KADIOĞLU
(501940034012)

100748

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Temmuz 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Ekim 1999

100748

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Surkay AKBAROV (Y.T.Ü.)

Prof. Dr. Saim AKYÜZ

Prof. Dr. Vural CİNEMRE

Prof. Dr. Musa İLYASOV (İ.Ü.)

Yalçın Aköz
Surkay Akbarov
Saim Akköz
Vural Cinemre
Musa İlyasov

EKİM 1999

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardımlarını esirgmeden çalışmamı destekleyerek şevk veren Sayın hocam Prof. Dr. Yalçın AKÖZ'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında fikir ve ilgilerini esirgmeden yol gösteren Yrd. Doç. Dr. Nihal Eratlı ve Araş Gör. Atilla Özütok'a ve ayrıca tezimi bitirmemde beni destekleyen ismini sayamadığım tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Hiçbir fedakarlıktan kaçınmayıp teşvik eden, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, ayrıca her zaman sabırla bana destek olan ailemin bütün fertlerine sonsuz teşekkür ederim.

Akademik çalışmalar yapmam için beni bu yola teşvik ederek özenle bekleyen ve bana büyük destek olan, fakat ne yazık ki doktora çalışmamı göremeyen rahmetli babam Ali KADIOĞLU'nu saygı ile anıyor ve bu tezi kendisine atfediyorum.

Temmuz, 1999

Fethi KADIOĞLU

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	VI
SEMBOL LİSTESİ	IX
ÖZET	X
SUMMARY	XV
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Amacı ve Problemin Tanımı	1
1.2. Konu ile İlgili Çalışmalar	2
1.3. Çalışmanın Kapsamı	6
2. VİSKOELASTİSİTE	8
2.1. Viskoelastisiteye Giriş	8
2.2. Doğrusallık	9
2.3. Temel Elemanlar	9
2.4. Viskoelastik Modeller	10
2.4.1 Maxwell Cismi	10
2.4.2 Kelvin Cismi	11
2.4.3 Üç Parametrelili (Standart Katı) Cisim	11
2.5. Diferansiyel Form	12
2.6. İntegral Form	13
3. TEMEL DENKLEMLER	16
3.1. Çubuk Geometrisi	16
3.2. Alan Denklemleri	17
4. LAPLACE-CARSON UZAYINDA TEMEL DENKLEMLER	22
4.1. Laplace Transformu	22
4.2. Laplace-Carson Transformu	22
4.3. Alan Denklemlerinin Laplace-Carson Transformu	23
4.4. Helisel Çubukların Laplace-Carson Transformu	24
4.5. Düzlemsel Çubukların Laplace-Carson Transformu	25
4.5.1. Doğru Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu	26
4.5.2. Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu	27
4.5.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu	28
4.5.2.2. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu	29
4.5.3. Parabolik Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu	30

5. FONKSİYONEL	32
5.1. Fonksiyonelin Elde Edilmesi	32
5.2. Helisel Çubuklar	34
5.3. Düzlemsel Çubuklar	34
5.3.1- Doğru Eksenli Çubuklar	35
5.3.2- Daire Eksenli Çubuklar	36
5.3.2.1- Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	36
5.3.2.2- Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	36
5.3.3- Parabolik Eksenli Çubuklar	37
6. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	39
6.1 Sonlu Elemana Giriş	39
6.2 Helisel Çubuklar	41
6.3 Doğru Eksenli Çubuklar	43
6.4 Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	45
6.5 Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	47
6.6 Parabolik Eksenli Çubuklar	48
7. SAYISAL TERS LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ	52
7.1. Giriş	52
7.2. En Büyük Duyarlılık Derecesi (<i>Maximum Degree of Precision</i>) Metodu	53
7.3. Schapery Kollokasyon Metodu	53
7.4. Dubner & Abate Metodu	55
7.5. Durbin Metodu	56
7.6. Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Yöntemlerine Ait Uygulamalar	57
7.6.1. Örnek-1	57
7.6.2. Örnek-2	58
7.6.3. Örnek-3	60
8. SAYISAL UYGULAMALAR	63
8.1. Doğru Eksenli Çubuklar	64
8.1.1. Örnek-4: Sabit Yüklü	64
8.1.2. Örnek-5: Üçgen Yüklü	66
8.1.3. Örnek-6: Sinüzoidal Yüklü	69
8.1.4. Örnek-7: Sabit Yüklü	72
8.1.5. Örnek-8: Sabit Yüklü Değişken Enkesitli	74
8.1.6. Örnek-9: Sabit Yüklü İki Ucu Ankastre	74
8.1.7. Örnek-10: Sabit Yüklü Dinamik Analiz	75
8.2. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	77
8.2.1. Örnek-11: Üçgen Yüklü	78
8.2.2. Örnek-12: Anlık Yüklü	80
8.2.3. Örnek-13: Sinüzoidal Yüklü	81
8.2.4. Örnek-14: Sabit Yüklü	82
8.2.5. Örnek-15: Sabit Yüklü Dinamik Analiz	83
8.2.6. Örnek-16: Tekil Yüklü Dairesel Çember	83
8.2.7. Örnek-17: Tekil Yüklü Elastik Zemine Oturan Dairesel Çember	86
8.3. Düzlemi İçinde Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	86
8.3.1. Örnek-18: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz	87
8.3.2. Örnek-19: Sabit Yüklü Dinamik Analiz	88

8.4. Düzlemi İçinde Yüklerle Yüklü Parabolik Eksenli Çubuklar	89
8.4.1. Örnek-20: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz	90
8.4.2. Örnek-21: Sabit Yüklü Dinamik Analiz	91
8.5. Helisel Çubuklar	92
8.5.1. Örnek-22: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz	92
8.5.2. Örnek-23: Sabit Yüklü Dinamik Analiz	94
8.5.3. Örnek-24: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz	94
9. SONUÇLAR	97
KAYNAKLAR	100
EKLER	105
Ek-A:Bilgisayar Programı	105
ÖZGEÇMİŞ	107



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 :Maxwell cismi.....	10
Şekil 2.2 :Kelvin cismi.....	11
Şekil 2.3 :Üç parametrelili (Standart katı) cisim.....	12
Şekil 2.4 : σ -t diyagramı.....	13
Şekil 3.1 :Kesit tesirleri.....	18
Şekil 4.1 :Helisel çubuk.....	25
Şekil 6.1 :Doğru eksenli çubuk için doğrusal çubuk elemanı.....	40
Şekil 6.2 :Daire eksenli çubuk için doğrusal çubuk elemanı.....	40
Şekil 7.1 :Dubner ve Durbin metotlarının karşılaştırılması	58
Şekil 7.2 :Dubner ve Durbin metotlarının karşılaştırılması.....	59
Şekil 7.3 :Dubner ve Durbin metotlarının karşılaştırılması.....	60
Şekil 7.4 :Durbin metodunda N parametresinin etkisi.....	61
Şekil 7.5 :Durbin metodunda N parametresinin etkisi.....	62
Şekil 8.1 :Sabit yük.....	64
Şekil 8.2 :Schapery kollokasyon metodu kullanarak KM (Kelvin Model) ve TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	65
Şekil 8.3 :Fourier metodunu kullanarak KM (Kelvin Model) ve TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	65
Şekil 8.4 :Uygulanan yükün zamanla değişimi.....	66
Şekil 8.5 :Fourier ters dönüşüm tekniğini kullanarak KM (Kelvin Modeli) ve TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	67
Şekil 8.6 :Fourier metodu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi.....	67
Şekil 8.7 :Schapery kollokasyon metodunu kullanarak TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	68
Şekil 8.8 :Farklı p 'lerle Schapery kollokasyon metodunu kullanarak KM (Kelvin Modeli) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi ($p=0.08, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6$).....	68
Şekil 8.9 :Farklı p 'lerle Schapery kollokasyon metodunu kullanarak KM (Kelvin Modeli) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi ($p=1, 2, 3, 4, 5, 6$).....	69
Şekil 8.10 :Uygulanan yükün zamanla değişimi.....	69
Şekil 8.11 :Schapery kollokasyon metodunu kullanarak kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	70
Şekil 8.12 :Fourier metodunu kullanarak kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi.....	70

Şekil 8.13	:Schapery kollokasyon metodunu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi.....	71
Şekil 8.14	:Fourier metodunu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi.....	71
Şekil 8.15	:Schapery kollokasyon metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=2m.$).....	72
Şekil 8.16	:Fourier metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=2m.$).....	73
Şekil-8.17	:Fourier metodunu kullanarak kirişin ortasında $t= 10$ sn.'deki yerdeğiştirmenin çeşitli h değişimi ($b=2m.$).....	73
Şekil 8.18	:Fourier metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=1m.$).....	74
Şekil 8.19	:TB4 ve TB12 kullanarak elastik zemin üzerindeki iki ucu ankastre kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirme.....	75
Şekil 8.20	:TPM için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı ($b= 2m.$, $h= 0.5$ m., $\eta= 2.744 \times 10^8$).....	76
Şekil 8.21	:TPM için yerdeğiştirme üzerinde viskozite katsayısı η değişiminin etkisi.....	76
Şekil 8.22	:TPM için frekans ve yerdeğiştirme üzerinde h kesit yüksekliğinin değişiminin etkisi.....	77
Şekil 8.23	:İki ucu ankastre dairesel kiriş.....	78
Şekil 8.24	:MDOP, Dubner, Durbin metodlarını kullanarak Şekil-8.4'de verilen yükleme için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($t < t_1= 2$ s.).....	79
Şekil 8.25	:Yayılı yükleme olarak Şekil-8.4 için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($t > t_1= 2$ s.).....	79
Şekil 8.26	:Etkiyen yayılı dış yüklerin zamanla değişimi.....	80
Şekil 8.27	:Yayılı yükleme Şekil-8.25 için kirişin ortasındaki yerdeğiştirme diyagramı.....	80
Şekil 8.28	:Yayılı yükleme Şekil-8.10 için kirişin ortasındaki yerdeğiştirme diyagramı.....	81
Şekil 8.29	:MDOP, Dubner, Durbin metodlarını kullanarak Şekil-8.1'de verilen yükleme için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi...	82
Şekil 8.30	:TPM için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı.....	83
Şekil 8.31	:Tekil dış yüklerle yüklü dairesel kiriş.....	84
Şekil 8.32	:Yük altındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı....	84
Şekil 8.33	:Kiriş kalınlığının frekans ve yerdeğiştirme üzerindeki etkisi.....	85
Şekil 8.34	:Yerdeğiştirme üzerinde viskozite katsayısının etkisi.....	85
Şekil 8.35	:Elastik zemin üzerinde yük altındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı.....	86
Şekil 8.36	:İki ucu ankastre dairesel kiriş.....	87
Şekil 8.37	:Yerdeğiştirmenin kuazi-statik davranışı.....	87
Şekil 8.38	:Yerdeğiştirmenin dinamik davranışı.....	88
Şekil 8.39	:Yerdeğiştirmenin dinamik davranışı.....	89
Şekil 8.40	:Bir ucu ankastre parabolik çubuk.....	89
Şekil 8.41	:Bir ucu ankastre parabolik çubukda orta noktadaki yerdeğiştirme diyagramı.....	90
Şekil 8.42	:Parabolik çubukta Dubner metodundaki N parametresinin etkisi.....	91

Şekil 8.43	:Parabolik çubukta dinamik analiz.....	91
Şekil 8.44	:Parabolik çubukta dinamik analizde h değişiminin etkisi.....	92
Şekil 8.45	:İki ucu ankastre helisel merdiven.....	93
Şekil 8.46	:İki ucu ankastre helisel merdivenin orta noktasındaki yerdeğiştirme- tirmesi.....	93
Şekil 8.47	:Helisel merdivendeki orta noktanın yerdeğiştirmesinin dinamik analizi.....	94
Şekil 8.48	:Helisel çubuk problemi.....	95
Şekil 8.49	:Helisel çubukdaki boş ucun binormal yönündeki yerdeğiştirme diyagramı.....	95
Şekil 8.50	:Helisel çubukdaki boş ucun binormal yönündeki yerdeğiştirmeye N etkisi.....	96
Şekil A.1	:Akış diyagramı.....	105



SEMBOL LİSTESİ

$\bar{T}, \bar{M}$	: Kesme ve eğilme momenti vektörü
$\bar{q}$	: Dış yük
k	: Winkler zemin katsayısı
$\bar{\gamma}$	: Kayma
$\bar{\Omega}, \bar{\omega}$	: Eğilmeden dolayı dönme ve birim dönme
A, k'	: Kesit alanı, kesme kuvveti için katsayı
$\bar{u}$	: Yerdeğiştirme vektörü
$\bar{D}, \bar{C}$	: Eğilme ve kayma rijitlikleri
$\bar{D}^*, \bar{C}^*$	: Viskoelastik çubuk için eğilme ve kayma rijitlikleri operatörleri
E, G	: Elastisite ve kayma modülleri
ν	: Poisson oranı
$Y(t), Y_1(t)$	: Normal ve kayma gerilmeleri için gevşeme fonksiyonları
$J(t), J_1(t)$	: Normal ve kayma şekil değiştirmeleri için sünme fonksiyonları
p	: Laplace dönüşüm parametresi
s	: Çubuk yay boyu
t	: Zaman
ρ	: Yoğunluk
m_i	: Birim uzunluk kütlesi ($m_i = \rho A$)
$\bar{F}(p)$	: Herhangi bir $F(t)$ fonksiyonunun Laplace-Carson dönüşümü
Q	: Operatör
$I(\bar{y})$	: Fonksiyonel
$[f, g]$	: Laplace-Carson uzayında iç çarpım
$[,]_{\sigma}$	: Dinamik sınır koşullarının verildiği yerlerde geçerlidir
$[,]_{\varepsilon}$	: Geometrik sınır koşullarının verildiği yerlerde geçerlidir
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
KM	: Kelvin modeli
TPM	: Üç parametrelili model
MDOP	: En büyük duyarlılık derecesi (<i>Maximum Degree of Precision</i>)

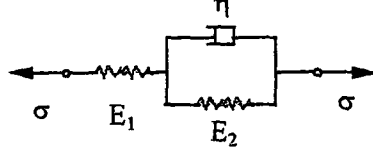
VİSKOELASTİK ÇUBUKLARIN KUAZİ-STATİK ve DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Malzemelerin viskoelastik özelliği, yapıların titreşiminde sönüme yol açar. Bu açıdan viskoelastik kabul olumlu sonuç verir. Doğadaki bütün malzemeler çevre koşullarına bağlı olarak az çok viskoelastik özellik gösterir. Viskoelastik teori ile hesap elastik teoriden daha karmaşık olduğu halde, viskoelastik teori gerçeğe daha uygun olduğu için bazı yapılarda viskoelastik teori kullanılır. Viskoelastik problemlerin analizi için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bazı koşulları sağlayan viskoelastik yapı problemleri, karşılıklı prensibini kullanarak elastik yapı gibi çözülebilmektedir. Laplace ve Fourier dönüşüm metodları da viskoelastik problemlerin çözümünde geniş ölçüde kullanılmaktadır. Karmaşık geometri ve dış yüklere sahip yapıları kapalı formda çözmek her zaman mümkün değildir ve sayısal tekniklere başvurmak gerekir.

Bu çalışmada, Poisson oranı ve elastisite modülünün her ikisi için de genel viskoelastik özelliğe sahip lineer Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişlerin, kuazi-statik ve dinamik analizi için sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Fonksiyoneller elde edilirken Gâteaux türevi yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca, alan denklemlerinden ve sınır koşullarından zamana göre türevleri kaldırmak için Laplace-Carson dönüşümü kullanılmıştır. Dönüşmüş uzayda yeni karışık sonlu eleman formülasyonları elde edilmiştir. Ters dönüşüm için Schapery kollokasyon ve Fourier metodları kullanılmıştır. Sayısal ters Laplace dönüşümüne büyük özen gösterilmiştir. Kullanılan Schapery kollokasyon, en büyük duyarlılık derecesi (maximun degree of precision), Durbin ve Dubner&Abate gibi sayısal ters dönüşüm metodları aynı problemleri çözmek için kullanılmıştır. Metodların performansı çeşitli problemlerle test edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılarak tartışılmıştır. Bütün uygulamalarda Kelvin ya da Üç Parametrelili Kelvin modeli kullanılmıştır. Bu modellerden bazıları şunlardır:

1. *Maxwell Stivisi*: yük anızın uygulandığında elastik olarak davranır. Fakat yerdeğiştirme zaman arttıkça belirsizce artar.
2. *Kelvin Modeli*'nde yerdeğiştirme, zamanın sonsuza gitmesi durumunda sonlu bir değere yaklaşır. Fakat yük aniden uygulandığında yapı elastik davranmaz.
3. *Üç Parametrelili Kelvin Modeli*: Bu model elastik davranır ve zaman sonsuza gittiğinde yerdeğiştirme sonlu bir değere yaklaşır. Bu nedenle Üç Parametrelili Kelvin modeli standart lineer malzeme olarak bilinmektedir. Bu model bir yay ve sönüm kutusu ile temsil edilerek Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1 Üç Parametrelili Viskoelastik Malzeme Modeli (TPM).

Viskoelastik davranışı temsil etmek için bellekli integral formda iki bünne ilişkileri düşünölmüştür. Bunlardan biri eğilme, diğeri kesme kuvveti içindir. Viskoelastik malzemeler için tek eksenli gerilme-şekil değıştirme ilişkisi bellekli integral formda

$$\sigma(t) = Y(0) \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (1)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, $Y(t)$ sırasıyla zamana bağı gerilme, şekil değıştirme ve gevşeme modülleridir. Ayrıca ters ilişki de

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $J(t)$ zamana bağı sünme modölüdür. Benzer ilişkiler kayma gerilmeleri ve kayma şekil değıştirmeleri içinde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \tau(t) &= Y_1(0) \gamma(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau \\ \gamma(t) &= J_1(0) \tau(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \tau(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Bu bünne ilişkilerini kullanarak, eğilme ve kayma rijitlikleri iki operatör yardımıyla basit formlarda

$$\begin{aligned} -\tilde{M} + D^* \tilde{\omega} &= 0 \\ -\tilde{T} + C^* \tilde{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_i^* ve C_i^* , I_i atalet momenti, A kesit alanı, k' kesme kuvveti için bir katsayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_i^* f &= I_i \left\{ Y(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \\ C_i^* f &= k'A \left\{ Y_1(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

formundadır. Burada $Y(t)$, $Y_1(t)$ sırasıyla eğilme momenti ve kesme kuvveti için gevşeme çekirdekleridir. Bunlar malzemeye bağlı olarak keyfi seçilebilirler.

Sembolik formda sınır koşulları,

$$\begin{aligned}\bar{T} - \hat{T} &= 0 & \Gamma_{\bar{T}} \\ \bar{M} - \hat{M} &= 0 & \Gamma_{\bar{M}} \\ -\bar{\Omega} + \hat{\Omega} &= 0 & \Gamma_{\bar{\Omega}} \\ -\bar{u} + \hat{u} &= 0 & \Gamma_{\bar{u}}\end{aligned}\tag{6}$$

şeklinde olup şapkalı değerler bilinen değerlerdir. Elbette bu sınır şartları özel problemlere ait değildirler. Bu sınır şartları, fonksiyonledeki sınırları kapsamaları için imkan sağlar. Sınır şartlarının açık formları bazı varyasyonel işlemlerden sonra elde edilecektir.

Sınır şartları ve alan denklemlerinden zamana göre türevleri kaldırmak için Laplace-Carson dönüşüm metodu kullanılacaktır. Gerçek bir fonksiyonun Laplace-Carson dönüşümü,

$$\bar{f}(p) = p f(p)\tag{7}$$

şeklinde olup gerçek bir fonksiyonun Laplace dönüşümü,

$$f(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt\tag{8}$$

iken ters dönüşümü ise

$$f(t) = L^{-1}[f(p)] = \int_{a-i\infty}^{a+j\infty} e^{pt} f(p) dp\tag{9}$$

şeklindedir. İntegrasyon, sanal düzlemde sanal eksene paralel sonsuz bir doğru boyunca hesaplanmaktadır. Öyle ki, $f(p)$ fonksiyonunun bütün tekil noktaları bu doğrunun solunda yer almaktadır.

Denge ve kinematik denklemleri ile (4) ve(6) denklemlerinin Laplace-Carson dönüşümlerini alalım. Böylece alan denklemlerini Laplace-Carson uzayında elde etmiş olacağız. Bu denklemler operatör formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q = L y - f\tag{10}$$

Operatörün açık formu,

$$Q = \begin{bmatrix} m_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & -t \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{ds} & t \times & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{D}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{C}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ \bar{\omega} \\ \bar{\gamma} \\ \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \bar{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T} \\ \bar{M} \\ -\bar{\Omega} \\ -\bar{u} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

şeklinde. Q operatörü potansiyel ise

$$\langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle \quad (12)$$

eşitliğini sağlamalıdır. (12) ifadesi sağlatıldıktan sonra fonksiyonel

$$I(y) = \int_0^1 \langle Q(\eta y, f), y \rangle d\eta \quad (13)$$

şeklinde elde edilir. (13) ifadesi içine (10) ifadesi yerleştirilirse, viskoelastik çubuklar için fonksiyonel

$$\begin{aligned} I(\bar{y}) = & - \left[\bar{u}, \frac{d\bar{T}}{ds} \right] + \left[t \times \bar{\Omega}, \bar{T} \right] - \left[\frac{d\bar{M}}{ds}, \bar{\Omega} \right] - [\bar{q}, \bar{u}] - [\bar{m}, \bar{\Omega}] \\ & - \frac{1}{2} \left[\bar{D}^{*-1} \bar{M}, \bar{M} \right] - \frac{1}{2} \left[\bar{C}^{*-1} \bar{T}, \bar{T} \right] + \left[\bar{u}, \bar{T} \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{\Omega}, \bar{M} \right]_{\varepsilon} \\ & + \left[(\bar{T} - \hat{\bar{T}}), \bar{u} \right]_{\sigma} + \left[(\bar{M} - \hat{\bar{M}}), \bar{\Omega} \right]_{\sigma} \end{aligned} \quad (14)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada, $[,]$ iç çarpımı gösterir ve

$$[f, g] = \int f g dz \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir. (14) ifadesindeki fonksiyoneldeki değişkenler Laplace-Carson uzayındadır. Bu nedenle, sonlu eleman formülasyonu aynı uzaya aittir. Sonlu eleman metodu, uygun esasların oluşumunda sistematik teknik ve genellik sağlar. Şekil fonksiyonundaki düzenlilik fonksiyoneldeki türevlerin maksimum derecelerine bağlıdır. (14) ifadesinde verilen fonksiyonelde, değişkenlerin birinci türevleri vardır. ψ_i şekil fonksiyonları için eleman formülasyonunu doğrulamak tamlık ve süreklilik koşullarını sağlamakla mümkündür. Sonlu eleman için şekil fonksiyonları

$$\psi_1 = (1 - \xi) \quad \psi_2 = \xi \quad (16)$$

şeklinde olup burada doğru ve daire eksenli viskoelastik çubuklar için,

$$\xi = \frac{z - z_i}{z_j - z_i} \quad \xi = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \quad (17)$$

şeklinde dir.

(14) ifadesindeki fonksiyonelde, uygulanan yükler ve iki nodlu değişkenler, ψ_i şekil fonksiyonları ile doğrusal eleman üzerinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u = \sum_{i=1}^2 u_i \psi_i \quad M = \sum_{i=1}^2 M_i \psi_i \quad q = \sum_{i=1}^2 q_i \psi_i \quad (18)$$

(14) ifadesindeki fonksiyonel içine bu yaklaşımlar yerleştirilir ve nodal değişkenlere göre ekstrem yapılırsa, viskoelastik çubuk için eleman matrisi operatör formda

$$[K_{ij}] \cdot \{y_j\} = [f_i] \quad (19)$$

şeklinde elde edilir. Parametrelerin tümü Laplace parametrelerinin fonksiyonlarıdır. Böylece dönüştürülmüş uzayda yeni sonlu eleman formülasyonları türetilmiştir.

Burada viskoelastik alan denklemleri ve sınır koşullarının Laplace dönüşümü yaklaşımında elde edilenler, aynı geometriye sahip elastik cisim için alan denklemleri ile üst üste düşer. Bu formülasyonda elastisite modülü operasyonel modüllerle yer değiştirilmiştir. Sayısal çözümler, p dönüşüm parametresinin farklı sayısal değerleri için elde edilmiştir. Son adım sayısal ters Laplace işlemidir. Ters Laplace dönüşüm teknikleri literatürde verilmiştir. Bu çalışmada, Schapery kollokasyon, en büyük duyarlılık derecesi, Dubner&Abate ve Durbin metodları kullanılmıştır.

Metodların performansı çeşitli kuazi-statik ve dinamik problemler için test edilmiştir. Bu formülasyonun özellikleri:

- Schapery kollokasyon ters dönüşüm metodu, zamana göre sabit yükler altındaki kuazi-statik problemler için çok uygundur.
- Zamana göre değişen yükler uygulandığında, kuazi-statik ve dinamik problemler için Fourier dönüşümlerine dayanan ters dönüşüm metodları iyi sonuçlar vermektedir. Çözümde, zaman arttığında, seride kullanılan elemanların sayısına bağlı olarak salınım görülmektedir.
- Bu metod düzensiz geometriye ve zamana bağlı yüklemeler altındaki çeşitli yapılara uygundur.
- Timoshenko kirişinin ve konvansiyonel kirişinin kuazi-statik davranışı kapalı olarak bulunmuştur.
- Bu metod ile kayma kilitlenmesi gözlenmemektedir.
- Serbest titreşim analizinden, titreşimin zamanla söndüğü görülmüştür. Sönümlenme zamanı viskozite katsayısına göre doğru orantılıdır.
- Titreşimde kiriş yüksekliğinin etkisi incelenmiştir. Titreşimin frekansının kirişin yüksekliği ile orantılı olduğu görülmüştür.
- Bu metod üç boyutlu çubuklar, plaklar ve kabuklar gibi diğer yapılar için de uygundur.

QUASI-STATIC and DYNAMIC ANALYSIS OF VISCOELASTIC BEAMS

SUMMARY

In the course of time, engineers have become increasingly conscious of the importance of the viscoelastic behaviour of many materials and mathematical formulations have been applied. Viscoelastic materials can be used to reduce the vibration of structures. Some more information about viscoelasticity can be found in literature. Although the calculation by viscoelastic theory is more complex than the elastic theory, but viscoelastic theory gives more realistic result. Various methods have been developed to analyse of viscoelastic problems. Satisfying some requirements, the problem of viscoelastic structures can be solved as elastic structure, employing correspondence principle. The Laplace and Fourier transform methods have been widely used in solution of viscoelastic problems. The problems have complex geometry and constitutive relations, closed form solution are often not possible and numerical techniques should be employed. The applications of the numerical methods to viscoelastic problems have been presented by numerous authors.

In this study, the linear Timoshenko beam and Euler-Bernoulli beam having the general form of relaxation modulus for both Poisson ratio and elasticity modulus are analysed for quasi-static and dynamic responses. The Gâteaux differential approaches is employed to construct the functional. In order to remove the time derivatives from the governing equations and boundary conditions, the method of the Laplace-Carson transform is utilized. New mixed finite element formulations were derived in the transformed space. For the inverse transform Schapery collocation and Fourier method were used. The special attention is given to the numerical inverse of Laplace transform. The available numerical inverse transform methods; such as Shapery, Fourier, Durbin, Dubner, Maximum Degree of Precision (MDOP) are used to solve the same problems and results are compared and discussed in the applications. The performance of the method is tested through various problem. In all applications Kelvin or three parameter Kelvin model is employed. These models:

1. It is well known that *Maxwell fluids* have an elastic response to the suddenly applied load. But, displacement increases indefinitely as the time increases.
2. In the *Kelvin model*, displacement approaches finite value for $t \rightarrow \infty$, but the structure does not have an elastic response to the suddenly applied load.
3. A *three parameter solid model* has an elastic response and displacement approaches finite value for $t \rightarrow \infty$. Therefore, three parameter materials are known as standard linear materials. This model represented by a spring-dashpot model is illustrated in Figure 1.

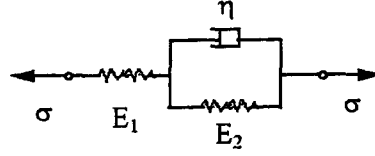


Figure 1 The model of Three Parameter Viscoelastic Material (TPM).

To represent viscoelastic behaviour, the two constitutive relations (one for the bending and one for the shear force) in hereditary integral form are assumed. The uniaxial stress-strain relation for viscoelastic materials can be written in hereditary form

$$\sigma(t) = Y(0) \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (1)$$

where $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, $Y(t)$ are time dependent stress, strain and relaxation modulus. The inverse relation can be written as follows

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (2)$$

where $J(t)$ is time dependent creep modulus. Similar relations are also written for shear stress and shear strain.

$$\begin{aligned} \tau(t) &= Y_1(0) \gamma(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau \\ \gamma(t) &= J_1(0) \tau(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \tau(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Using these constitutive relations, bending rigidity and shear rigidity can be written in simple forms using two operators,

$$\begin{aligned} -\bar{M} + D^* \bar{\omega} &= 0 \\ -\bar{T} + C^* \bar{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

where D_i^* and C_i^* are defined as:

$$\begin{aligned} D_i^* f &= I_i \left\{ Y(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \\ C_i^* f &= k'A \left\{ Y_1(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

where I_i is inertia moment, A is cross-section area, k' is shear coefficient, $Y(t)$, $Y_1(t)$ are relaxation kernels for bending moment and shear force respectively. They can be arbitrarily chosen depending on materials.

The boundary conditions in symbolic form are

$$\begin{aligned}\bar{T} - \hat{T} &= 0 & \text{on } \Gamma_{\bar{T}} \\ \bar{M} - \hat{M} &= 0 & \text{on } \Gamma_{\bar{M}} \\ -\bar{\Omega} + \hat{\Omega} &= 0 & \text{on } \Gamma_{\bar{\Omega}} \\ -\bar{u} + \hat{u} &= 0 & \text{on } \Gamma_{\bar{u}}\end{aligned}\tag{6}$$

where the variables with hat are known values. Of course these boundary conditions do not belong to a specific problem. These boundary condition serve to include boundary terms to the functionals. Explicit forms of the boundary conditions will be obtained after some variational manipulations.

In order to remove the time derivatives from the governing equations and boundary conditions, the method of the Laplace-Carson transform will be utilized. The Laplace-Carson transform of a real function is

$$\bar{f}(p) = p f(p)\tag{7}$$

where the Laplace transform of a real function is

$$f(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt\tag{8}$$

and inverse transform is obtained as

$$f(t) = L^{-1}[f(p)] = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} f(p) dp\tag{9}$$

The integration is carried out in the plane of the complex variable p along an infinite straight line parallel to the imaginary axis and situated so that all singular points of function $f(p)$ are located to the left of this straight line.

Taking Laplace-Carson transform of equations (4), (6) and that it is well known equilibrium and kinematic relations, are obtained. The field equations are obtained in Laplace-Carson space. These equations can be written in operator form.

$$Q = L y - f\tag{10}$$

The explicit form of the operator is

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & -t \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{ds} & t \times & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{D}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{C}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ \bar{\Theta} \\ \bar{\gamma} \\ \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \bar{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\bar{u}} \\ \hat{\bar{T}} \\ \hat{\bar{M}} \\ -\hat{\bar{\Omega}} \\ -\hat{\bar{u}} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

If the operator $\mathbf{Q}$ is potential

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (12)$$

must be satisfied. After satisfying the above equation the functional is obtained

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(\eta, \mathbf{y}, \mathbf{f}), \mathbf{y} \rangle d\eta \quad (13)$$

Inserting equation (10) into equation (13) the functional for viscoelastic beam is

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\bar{\mathbf{y}}) = & - \left[\bar{u}, \frac{d\bar{T}}{ds} \right] + \left[t \times \bar{\Omega}, \bar{T} \right] - \left[\frac{d\bar{M}}{ds}, \bar{\Omega} \right] - [\bar{q}, \bar{u}] - [\bar{m}, \bar{\Omega}] \\ & - \frac{1}{2} \left[\bar{D}^{*-1} \bar{M}, \bar{M} \right] - \frac{1}{2} \left[\bar{C}^{*-1} \bar{T}, \bar{T} \right] + \left[\hat{\bar{u}}, \bar{T} \right]_{\epsilon} + \left[\hat{\bar{\Omega}}, \bar{M} \right]_{\epsilon} \\ & + \left[(\bar{T} - \hat{\bar{T}}), \bar{u} \right]_{\sigma} + \left[(\bar{M} - \hat{\bar{M}}), \bar{\Omega} \right]_{\sigma} \end{aligned} \quad (14)$$

where $[,]$ is inner product which is defined as

$$[f, g] = \int f g dz \quad (15)$$

The functional variables in equation (14) are in Laplace-Carson space. Therefore the finite element formulation belongs to the same space. The finite element method provides a general and systematical technique for constructing the appropriate basis. The regularity of the shape function depends on the maximum degree of derivatives in the functional since the first derivatives of the variables exist in the functional given in equation (14). Conforming element formulation for the shape function ψ_i must satisfy completeness and compatibility requirements. The shape functions for finite element are

$$\psi_1 = (1 - \xi) \quad \psi_2 = \xi \quad (16)$$

where for straight and circular viscoelastic beam

$$\xi = \frac{z - z_i}{z_j - z_i} \quad \xi = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \quad (17)$$

Two nodal variables and applied loads given in equations (14) are expressed by shape functions ψ_i in the element.

$$u = \sum_{i=1}^2 u_i \psi_i \quad M = \sum_{i=1}^2 M_i \psi_i \quad q = \sum_{i=1}^2 q_i \psi_i \quad (18)$$

Inserting these approximations into the functional equation (14) and extremizing with respect to nodal variables yields the following element matrix for viscoelastic beam in operator form:

$$[K_{ij}] \cdot \{y_j\} = [f_i] \quad (19)$$

All of the parameters are functions of Laplace parameter. The new mixed finite element formulations are derived in transformed space.

In these approaches the Laplace transform of viscoelastic field equations and boundary conditions are formally identical with the equations for an elastic body of the same geometry. In this formulation elastic modulus is replaced by the operational modulus. And the numerical solution is obtained for different numerical values of the transform parameter p . The final step is numerical Laplace inversion process. The classification of Laplace inversion techniques are given in literature. In this study, the Schapery collocation method, Maximum degree of precision method, Dubner Abate method and Durbin method are employed.

The performance of the method is tested through various quasi-static and dynamic problems. The properties of this formulation briefly are:

- The Schapery collocation inverse transform method is very suitable for quasi-static problems under the loads which are constant with time.
- If the applied load varies with time, Fourier inverse transform method gives good results for both quasi-static and dynamic problems. In the solution, the oscillation is observed when time increases, depending on the number of elements used in the series.
- This method is suitable to handle various structures with irregular geometries and time dependent loading.
- It is found that the responses of the Timoshenko beam and the conventional beam of quasi-static behaviour are very close.
- This methods avoids shear locking.
- From the free vibration analysis, it is observed that the vibration is damping with time. Damping time is inversely proportional with the viscosity coefficient.
- The effect of beam height on the vibration is investigated. It is found that the frequency of vibration is inversely proportional to the depth of the beam.
- The established method is very suitable for other structures, such as three dimensional beams, plates and shells. This type of problems are under study.

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Amacı ve Problemin Tanımı

Bu çalışmada viskoelastik bünye denklemlerine sahip çubuklar ele alınarak çeşitli kuazi-statik ve dinamik yüklemeler altındaki davranışları incelenmiştir. Yapılan incelemede malzemenin viskoelastik özellikleri dikkate alınmıştır. Çünkü az çok bütün malzemeler viskoelastik özellik taşımaktadır. Teorilerde malzemenin fizik yapısı hakkında yapılan kabuller önem kazanmaktadır. Birçok teoride kolaylığı bakımından homogen ve izotrop cisim ve lineer-elastik kabul yapılmaktadır. Çevre koşulları özellikle sıcaklık, malzeme davranışını etkiler. Ayrıca yapının önemi, malzemenin daha gerçekçi davranışının gözönüne alınmasını gerektirebilir. Örneğin, geniş açıklıklı özel yapılar, nükleer santral veya uzay araçları gibi hassas yapılarda her malzemede az veya çok var olan viskoelastik malzeme davranışının hesaplarda da göz önüne alınmasını anlamlı ve zorunlu kılar.

Viskoelastik davranışlar malzemeye bağlı olarak değişik zaman dilimleri içerisinde ön plana çıkabilir. Plastiklerde dakikalar içinde farkedilen viskoelastik özellik, betonda yıllara kadar uzayabilir. Malzemelerde çevre koşullarına bağlı olarak mekanik davranış değişmektedir. Bu durumda, malzemelerin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemlerinde, zamanında bir değişken olarak hesaba katılması gereklidir. Zamana bağlılık problemin çözümünü zorlaştırır. Zamana bağlı olan viskoelastik problemler üç farklı şekilde çözülebilir:

- problemin elastik çözümlerini kullanarak karşılık prensibi ile çözüme gidilebilir.
- Çeşitli sayısal yöntemlerden yararlanılarak gerçek zaman uzayında problem çözülebilir.

- integral dönüşüm tekniklerinden yararlanarak, problemi dönüşmüş uzayda çeşitli sayısal yöntemler ile çözüldükten sonra ters çözüm metotlarından faydalanarak gerçek zaman uzayındaki çözümlere ulaşılabilir.

Bu çalışmada, lineer viskoelastik bünye bağıntıları göz önüne alınarak eksenel keyfi geometriye sahip çubuklar için Laplace-Carson uzayında bir sonlu eleman metodu geliştirilmiştir. Uzama ve kayma için farklı viskoelastik özellikler göz önüne alınabilmektedir. Çözümler kuazi-statik ve dinamik yüklemeler için yapılmıştır. Sonra sayısal ters dönüşüm ile zaman uzayına geri dönülmüştür. Böylece istenilen sınır şartları ve yükleme altında uzay çubukların kuazi-statik ve dinamik davranışı incelenmiştir.

1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar

Viskoelastisitenin problemlerini ortaya koyan ve temel bilgileri içeren kitaplar [1-4] bulunmaktadır. Literatürde zamana bağlı problemleri çözebilmek için birçok araştırmacı tarafından çeşitli yöntemler sunulmuştur. Bunlara ilk örnek olarak, beton, plastik, ahşap ve metaller gibi mühendislik malzemeleri sıcaklık yükseldiğinde zamana bağlı davranışları 1950'lerde Freudenthal [5] tarafından incelenmiştir. Bu malzemelerin davranışları lineer viskoelastik modeller ile tariflenebilir. Özellikle, çok sayıda lineer kuazi-statik problemler incelenmiş ve bazı çözüm metodları geliştirilmiştir. Bunları incelemek amacı ile literatürde bulunan konu ile ilgili çalışmalar tarih sırasıyla ele alınmıştır.

1948'de Alfrey [6], elastik-viskoelastik karşılaştırması yaparak lineer viskoelastik problemlerin çözümüne gitmiştir. Benzer konu ile 1955'de Lee [7] ise Laplace dönüşüm yaklaşımını uygulamıştır. Bu iki çalışmada da elastik çözümün kapalı formunun var olması halindeki viskoelastik problemler çözülmüştür.

Eksenel gerilme-şekil değiştirme bağıntısının viskoelastik, kayma bağıntısının elastik kabul edildiği özel viskoelastik çubuklara ait kuazi-statik problemler için konsol giriş gibi elastik çözümü bilinen problemlerin Laplace yöntemiyle çözüme ulaşılan çalışmalar [8-10] bulunmaktadır.

1963'de Flaherty [11], Laplace dönüşüm metodunu kullanarak, uzamaya ve yukarıdaki çalışmalara ek olarak kaymaya karşı da viskoelastik kabul edilen Timoshenko kirişinin titreşim problemlerini doktora tezi olarak incelemiştir. Çalışmasında, uzamadaki viskoelastik operatörün kaymadaki ile orantılı olduğunu düşünmüştür.

1966'da Pan [12], eksenel viskoelastik bünye bağıntısı kabulü yanısıra kayma içinde viskoelastik kabul yapmıştır. Ancak, malzemenin sıkışmazlık kabulü özel bünye yapısına dönüştürmüştür. Değişkenler, elastik çözüme ait özfonksiyonlar kullanılarak seriye açılmış ve zaman uzayında çözümlere ulaşılmıştır.

1968'de Halpin ve Pagano [13], anizotrop katılarda Prony serisi ile gösterilebilen viskoelastik malzemenin gevşeme fonksiyonu simetrik matrislerle gösterilebilen bağıntılara ulaştığını ispatlamışlardır. Aynı yıl, Zienkiewicz ve arkadaşları [14] küçük zaman adımları ile, bu zaman aralığında gerilmelerin sabit olduğu kabulü ile şekil değiştirme uygunluk koşulunu kullanarak adım-adım çözüme ulaşmışlardır. Ayrıca Berger [15] tarafından kısmi diferansiyel denklem takımına integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözümlere ulaşılmıştır.

1970'de Taylor ve arkadaşları [16], sıcaklık ve mekanik yükler altında lineer viskoelastik kuazi-statik problemlerin çözümü için bir hesap algoritması geliştirmişlerdir. Bu algoritmada, stasyoner problem için bölge ayrıklaştırılarak, integral denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

1971'de Huang ve Huang [17] tarafından Laplace dönüşümü ile karşılık prensibi kullanılarak viskoelastik Timoshenko kirişinin serbet titreşimi incelenmiştir. Rizzo ve Shippy [18] tarafından yapılan başka bir çalışmada da, yine karşılık prensibi kullanılarak lineer viskoelastik malzemedan yapılmış düzlem sınır değer problemleri için Laplace transform uzayında sayısal çözümlere ulaşılmıştır.

1972'de Aboudi [19], küresel boşluğa sahip, yüzeyden ani yüklenen viskoelastik problem için Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak yaklaşık ters transformla çözüme ulaşmıştır. Aynı yıl Carpenter [20] tarafından Kelvin malzemesi serisi ile gösterilebilen ve Poisson oranı sabit kabul edilen özel bir viskoelastik malzeme için t zaman parametresi göz önüne alınarak Runge-Kutta ve sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır.

1973'de Adey ve Brebbia [21] tarafından Laplace dönüşümü ile zaman parametresi yok edilerek statik yükler için, probleme karşı gelen elastik yapı sonlu elemanla çözüme ulaştırılıyor. Viskoelastik yapı için kabul edilen özel bir gevşeme fonksiyonu için, ters dönüşümler mümkün olmakta ve çözümlere ulaşılmaktadır.

1974'de Warzée [22] tarafından termoviskoelastik problemler ele alınarak gerçek uzayda sonlu eleman ve sonlu farklarla çözülmüştür. Ayrıca transform tekniği ile zaman parametresi yokedilmiştir. Transform uzayında ulaşılan sonuçlardan ters dönüşümle çözüme ulaşılmıştır. Aynı yıl Yamada ve arkadaşları [23], Maxwell ve Kelvin gibi özel malzeme ve harmonik gerilme kabulü ile rijitlik matrisini elde ederek, serbest titreşim frekanslarına ulaşmışlardır. Yapılan başka bir çalışmada Holzlöhner [24] tarafından zamana bağlı sonlu eleman problemlerine Laplace transform tekniği uygulanmıştır.

1976'da Kırıl ve arkadaşları [25] tarafından genel geometriye sahip viskoelastik çubuklara ait integro-diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Denklemleri dinamik yükler altında çözmek için Laplace dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem takımı taşıma matrisi yöntemi ile Laplace uzayında çözülmüş ve ters dönüşümlerle sonuca ulaşılmıştır. Aynı yıl Piessens ve Dang [26] tarafından yapılan çalışmada ise, sayısal ters Laplace dönüşümü ve uygulamaları için 1934 ile 1976 yılları arasında yapılan 300'den fazla referanslar gösterilerek derlenmiştir.

1977'de Huang [27] elastik zemine oturan lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin sabit hızla hareket eden sabit yükler altında ki davranışını incelemiştir. Aynı yıl Yagawa ve arkadaşları [28] tarafından virtüel iş denklemlerine, yerdeğiştirme koşullarını katabilmek için Lagrange çarpanı kavramı kullanılmıştır. Böylece süperpozisyon metodu genelleştirilmiş düzlem elastisite denklemleri kullanılarak zamana bağlı kiriş eğilme problemlerine çözüm aranmıştır. Başka bir çalışma Aral ve Gülçat [29] tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında zamana bağlı sınır şartları ile dalga denklemlerinin çözümü Laplace uzayında sonlu eleman metodu ile elde edilmiş ve ters dönüşümlerle sonuçlara ulaşılmıştır.

1979'da Krings ve Waller [30], taşıma matrisi metodunu Laplace dönüşümü ile birleştirerek basit kiriş titreşim problemlerini çözmüşlerdir.

1981'de Manolis ve Beskos [31] tarafından delik içeren keyfi şekilli bir viskoelastik ortamda düzlem harmonik veya değişken dalga nedeniyle gerilme yığılmaları sınır integral yöntemiyle bulunmuştur.

1982'de Narayanan ve Beskos [32] tarafından yapılan çalışmada, kompleks zamana bağlı lineer problemleri sayısal olarak çözmek için Laplace dönüşüm metodlarının kullanılmasında genel ve sistematik bir tartışma sunulmuştur. Zaman bölgesindeki çözümü, sayısal ters Laplace alınarak ulaşılan çözümle kontrol etmişlerdir. Ayrıca literatürde varolan sekiz tane sayısal ters Laplace dönüşüm metodlarını kullanımlarına göre incelemişlerdir.

1986'da Podhorecki [33], çubuğun boyuna titreşimlerini incelemek için gerçek uzayda sonlu eleman kullanmıştır. Aynı yıl White [34] tarafından Hereditary integral tipindeki bünye bağıntıları sonlu farklar ile ayrıklaştırılmış düzlem şekil değiştirme problemine, sonlu eleman metodu ile gerçek zaman uzayında statik yükler için çözüm bulunmuştur.

1987'de Chen ve arkadaşları [35] tarafından bir boyutlu ısı problemlerini Laplace dönüşümü kullanarak sonlu eleman metodu ile incelemişlerdir. Çalışmada Honig ve Hirdes ters dönüşüm metodları kullanılmıştır.

1988'de Sim ve Kwak [36] tarafından izotropik, lineer viskoelastik problemler sınır eleman metodu (BEM) ile zaman bölgesinde formüle edilmiştir. Viskoelastik temel çözümler gevşeme fonksiyonlarının sabit katsayıları cinsinden temsil edilmiştir.

1990'da Rencis ve arkadaşları [37] Euler-Bernoulli viskoelastik kirişinin davranışını zaman basamaklı Newmark metoduna dayalı işlem ve sonlu eleman metodu kullanmışlardır.

1992'de Lubliner ve Panoskaltsis [38] tarafından viskoelastik malzemeleri tanımlamak için Kuhn modelleri geliştirilmiş ve sünme fonksiyonları asimtotik olarak logaritmik olan yapı malzemeleri için geliştirilmiştir. Sünme fonksiyonları kullanılarak Laplace transformları metodu ile gevşeme fonksiyonları bulunmuştur.

1995'de Lee [39] zaman bölgesinde sınır eleman (BEM) yöntemiyle viskoelastik cisimlerin gerilme analizini incelemiştir. Temel çözümleri ve gerilme çekirdeğini

elastik-viskoelastik karşıtlık prensibini kullanarak elde etmiştir. Aynı yıl Chen [40] tarafından bir çalışma yapılmıştır. alışmasında, viskoelastik Timoshenko kirişlerinin kuazi-statik ve dinamik analizi için Laplace dönüşümü yardımıyla sonlu eleman metodunu kullanılmıştır. Problemlerinde basitleştirme yapılmış ve kolayca ters Laplace dönüşümleri alınabilen özel olarak sünme fonksiyonu Prony serisine açılmıştır. Ayrıca kaymaya karşı olan sünme fonksiyonunu da uzamadaki sünme fonksiyonu ile aynı alınmıştır. Bunun anlamı Poisson oranı sabit alınmıştır.

1997'de Johnson ve arkadaşları da [41], Maxwell katısını Prony serisi ile temsil etmişlerdir. Viskoelastik ince kirişlerin dinamiği için hareketin elastodinamik denklemlerini virtüel iş prensibinden türeterek sonlu eleman metodu ile gerçek uzayda özölmüştür. Elastik sonuçlara viskoelastik değerler süperpoze edilmiştir. Aynı yıl başka bir çalışma da Wang ve arkadaşları [42] tarafından yapılmıştır. alışmalarında kuazi-statik yüklemeler altında lineer viskoelastik Euler-Bernoulli ve lineer viskoelastik Timoshenko kirişlerinin eğilme özömleri arasındaki kesin ilişkileri sunulmaktadır. Bu ilişkiler bilinen Euler-Bernoulli sonuçlarının, Timoshenko sonuçlarına doğrudan geçisi sağlamaktadır.

1999'da Aköz ve Kadioğlu [43] tarafından yapılan çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişinin, kuazi-statik ve dinamik yükler altındaki davranışı Laplace-Carson uzayında karışık sonlu eleman metodu ile incelenmiştir. Çalışmada dönme ve kayma etkileride dikkate alınmıştır. Ayrıca uzama ve kaymaya karşı her ikisinde farklı viskoelastik özellik gösteren malzeme olarak alınabilmektedir.

1.3. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, öncelikle kayma etkisini de göz önüne alacak şekilde, viskoelastik çubukların, kuazi-statik ve dinamik davranışlarına ait karışık sonlu eleman çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Laplace-Carson dönüşüm uzayında bulunacak olan özömlerin, zaman uzayına taşınması için Schapery kollokasyon, en büyük duyarlılık derecesi (MDOP), Dubner&Abate ve Durbin metodları kullanılmıştır. Geliştirilen yöntem, daha önce elastik olarak incelenmiş uzay çubuklara da uygulanmıştır. Böylece, eksen geometrisi keyfi çubuklardan oluşmuş yapıların hesabında, malzemenin viskoelastik karakteri de göz önüne alınabilecektir.

Genelde uygulamalarda çözüm kolaylığı nedeniyle yapılar, elastik malzeme kabulü ile hesaplanmaktadır. Ancak çok özel yapılar, malzemelerin daha gerçekçi özelliği olan viskoelastik karakteri göz önüne alarak hesaplanmaktadır. Geliştirilen yöntem, viskoelastik problemleri oldukça kolaylaştıracağı gibi daha gerçekçi olan viskoelastik hesabı mühendislikte daha yaygın kullanılabilir hale getirebilecektir. Böylece, ekseni ve en kesiti bakımından keyfi geometriye sahip, istenen herhangi bir viskoelastik karaktere sahip çubuklar için uygulanabilir bir sayısal metot geliştirilmiştir.



2.VİSKOELASTİSİTE

2.1. Viskoelastisiteye Giriş

Bazı malzemelerde çevre koşullarına bağlı olarak mekanik davranış yükleme hızına ve süresine bağlı olarak değişir. Bu durumda, malzemelerin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemlerinde, zamanın da bir değişken olarak hesaba katılması gereklidir.

Zamanın mekanik davranışa etkisini incelemek için, $t=0$ anında bir çubuğa σ_0 sabit gerilmesi uygulanır, t_1 süre sonra boşaltılır. Sonra zaman içinde oluşan şekil değiştirmeler ölçülür. Elde edilen sonuçlarla çizilen şekil değiştirme-zaman eğrileri malzemenin davranışı ve zamana bağlılığı hakkında bilgi verir. Genelde elastik, plastik ve viskoelastik olmak üzere üç çeşit davranış biçimi görülür. Bunlardan birincisi olan elastik davranışta, malzemeye yükleme yapıldığı zaman şekil değiştirme gerilme ile aynı anda oluşur ve yükleme değişmedikçe gerilme ve şekil değiştirme sabit kalır. Kuvvet kaldırıldığında gerilme ve şekil değiştirmede sıfır olur. Yani ortam başlangıçtaki konumuna geri döner. Tam plastik davranışta, akma sınırının üstüne çıkan bir gerilme uygulanınca ani şekil değiştirme ve onu izleyen plastik şekil değiştirme kısa sürede oluşur ve zamanla değişmez. Yük kaldırılınca plastik şekil değiştirme kalır. Plastik şekil değiştirme zamandan ve yükleme hızından bağımsız olarak sadece gerilmenin geçmişte aldığı en büyük değerine bağlıdır. Viskoelastik davranışta, malzemeye sabit gerilme uygulandığında ani elastik uzama ve hemen ardından zamanla sürekli artan uzama oluşur. Yük kaldırıldığında ise, ani bir geri dönüşü, zamanla azalan bir geri dönüş izler. Herhangi bir andaki şekil değiştirme gerilmenin geçmişte aldığı bütün değerlerine bağlıdır. Ayrıca viskoelastik davranışta şekil değiştirmeye yükleme hızının ve süresinin de etkisi vardır. Elastik ve plastik davranışta yükleme hızı ne olursa olsun aynı gerilme altında son şekil değiştirmeler aynı olurken viskoelastik cisimde farklı olur.

Yükleme altındaki cisimlerin zamana bağlı davranışı sünme ve gevşeme olarak tanımlanabilir. *Sünme*, sabit gerilme altında malzemelerde zamanla sürekli oluşan şekil değiştirme olayıdır. Sünme denen bu olay metallarda yüksek sıcaklıklarda, beton, ahşap ve plastiklerde ise oda sıcaklığında oluşur. Malzemenin sünmesi yapı elemanlarının davranışını belirlemede zaman zaman önemli rol oynar. Şekil değiştirmenin uzun süre devam etmesi sonucunda, yapıda istenilmeyen değişiklikler ortaya çıkabilir. Büyük şekil değiştirmeler ortaya çıktığında, bunların mertebesinin hesaplanarak yapının ömrü boyunca emniyetli kalabilmesini sağlamak gerekmektedir. Yapı sistemlerinde gerilmelerin yanında şekil değiştirmenin de sınırlı olması gerekir. Sabit şekil değiştirme altındaki bir malzemede gerilmenin zamanla azalması olayına da *gevşeme (relaxation)* denir. Gevşeme zamana bağlı bir davranış gösterir. Bazı uygulama alanlarında gevşeme olayının gözönüne alınması gerekir.

2.2. Doğrusallık

Herhangi bir t zamanında gerilme, şekil değiştirme ile orantılı ve lineer süperpozisyon ilkesi geçerli ise bu malzemeye *doğrusal (lineer) viskoelastisite* denir. Bu doğrusallık için sağlanması gereken koşulları,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[c \sigma(t)] &= c \mathcal{L}[\sigma(t)] \\ \mathcal{L}[\sigma_1(t) + \sigma_2(t - t_1)] &= \mathcal{L}[\sigma_1(t)] + \mathcal{L}[\sigma_2(t - t_1)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde $\mathcal{L}$ bir operatör ve c bir sabit olmak üzere matematik ifadelerle yazabiliriz.

2.3. Temel Elemanlar

Viskoelastik davranışın genel olarak *yay ve yağ kutusu (amortisör)* diye isimlendirilmiş iki temel elemanı vardır. Yay şeklinde mekanik modelle temsil edilen cisimlerde bünye denklemi,

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.2)$$

şeklinde ve gerilme ile şekil değiştirme orantılı olup bu modele uyan cisimlere *Hooke cismi* denir. Dashpot olarak isimlendirilen yağlı amortisörlerle mekanik

modellendirilmiş cisimlerde bünye denklemi,

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada η viskozite katsayısıdır. Görüldüğü gibi gerilme ile şekil değiştirme hızı orantılıdır. Bu özelliğe sahip cisme *Newton cismi* denir.

2.4. Viskoelastik Modeller

Gerçek cisimlerin davranışı bu temel modellerin karışımından meydana gelen mekanik modellerin davranışına benzetilir. Bunların karışık olarak birleşmesinden elde edilen çeşitli modellerle viskoelastik cisimlerin davranışı formüle edilir.

Viskoelastik malzemelerin bünye denklemlerini genel bir çerçevede ele almadan önce basit olarak üç modeli gözden geçirelim. İlk önce bu modelleri inceleyerek mekanik davranışlarına ait bünye denklemlerini çıkaralım.

2.4.1. Maxwell Cismi:

Bu model Şekil 2.1'deki gibi bir Hooke cismi ile bir Newton cisminin seri bağlanması ile elde edilmektedir. Aynı σ gerilmesi etkisinde olan bu modelin ϵ toplam uzaması, yaydaki uzama ϵ_1 ile amortisördeki uzama ϵ_2 'nin toplamına eşittir. ϵ toplam uzamanın zamana göre türevi,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 \quad (2.4)$$

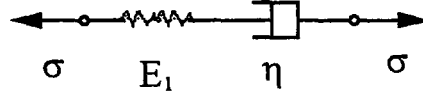
olmak üzere (2.2) ve (2.3) ifadesinden,

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.5)$$

şeklinde Maxwell cisminin mekanik davranışının diferansiyel denklemi elde edilir. Bu (2.5) ifadesini düzenlersek bünye denklemi,

$$E_1 \sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1 \eta \dot{\epsilon} \quad (2.6)$$

haline gelir.



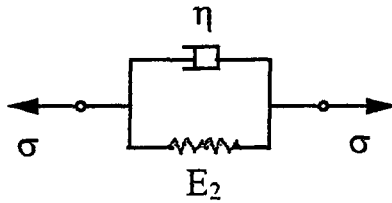
Şekil 2.1 Maxwell cismi

2.4.2. Kelvin Cismi:

Bu model de Şekil 2.2’de görüldüğü gibi bir yay ile bir amortisörden oluşan iki temel modelin paralel bağlanmasından meydana gelmektedir. Her iki temel modelin uzaması aynı ϵ ’dur ve modellere gelen gerilme σ_1 ve σ_2 ise Kelvin cisminine uygulanan σ gerilmesi bunların toplamıdır. Buna göre (2.2) ve (2.3)’den cismin mekanik davranışının diferansiyel denklemi,

$$\sigma = E_2 \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (2.7)$$

şeklindedir.



Şekil 2.2 Kelvin cismi

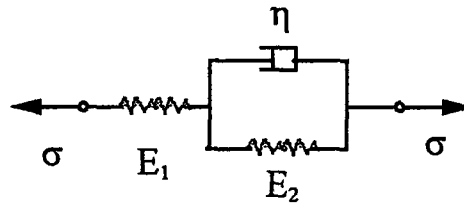
2.4.3. Üç Parametrelili (Standart Katı) Cisim:

Bu modelde temel elemanlardan iki tane yay ve bir tane amortisörün bağlanması ile elde edilmektedir. Şekil 2.3’de gösterildiği gibi temel elemanlardan olan bir yayın

Kelvin cisminin eklenmesiyle meydana gelmiştir. Standart katı cisme uygulanan σ gerilmesi, yaydaki σ gerilmesi ile Kelvin cisminin gelen σ gerilmesine eşittir. Uzunluklar için ise Standart katı cismin ε uzaması, yaydaki ε_1 uzaması ile Kelvin cisminin ε_2 uzamasının toplamıdır. Böylece (2.2) ve (2.3) ifadelerinden de yararlanarak Standart katı cisim için mekanik davranışının diferansiyel denklemi,

$$(E_1 + E_2) \sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1 E_2 \varepsilon + E_1 \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.3 Üç parametrelili (Standart katı) cisim

2.5. Diferansiyel form

Bölüm 2.4’de açıklanan basit özel modellerdeki (2.6-8) bünye denklemleri

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (2.9)$$

formda yazılabilir. Bu ifade genelleştirilmek istenirse viskoelastik malzemelerin bünye denklemleri en genel formda,

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + p_3 \dddot{\sigma} + \dots = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + q_3 \dddot{\varepsilon} + \dots \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. O zaman viskoelastik malzemelerin tek eksenli gerilme için gerilme-şekil değiştirme ilişkileri kısaca,

$$\tilde{\mathbf{P}} \sigma = \tilde{\mathbf{Q}} \varepsilon \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{P}$ ve $\tilde{Q}$ operatörlerdir. Bu operatörler zamana göre malzeme sabitlerine bağlı lineer diferansiyel operatörlerin serisi olarak,

$$\tilde{P} = \sum_{r=0}^m p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad , \quad \tilde{Q} = \sum_{r=0}^n q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (2.12)$$

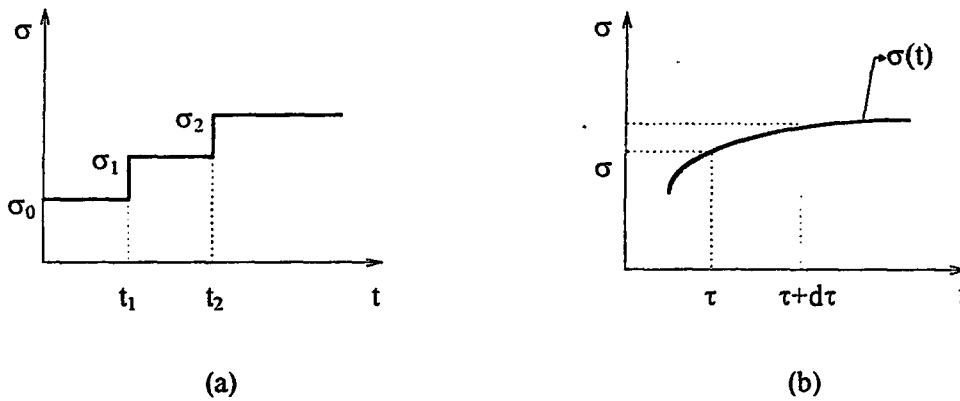
şekilde ifade edilebilir. Burada p_r ve q_r , malzemenin η viskoelastisite katsayıları ile E elastisite modullerinin birleşiminden meydana gelmiş katsayılardır. Ayrıca modeldeki elemanların özel olarak sıralanmasına bağlıdır. Özellikle serinin belli bir sayıda terimi seçildiğinde, lineer viskoelastik malzemenin özel bir tipinin mekanik davranışına ait bünye denklemini karakterize eder.

2.6. İntegral Form

Lineer viskoelastisitede superpozisyon prensibi geçerlidir. Böylece, varolan problemin toplam sonucu, herbir sebebin sonuçlarının toplamına eşittir. Buna göre, herhangi bir malzemeye Şekil 2.4.a'daki gibi basamak şeklinde gerilme uygulanırsa, yüklemeye yanıt olarak sünmede,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sigma_1 J(t - t_1) + \sigma_2 J(t - t_2) + \dots \quad (2.13)$$

biçiminde olacaktır. Burada $J(t)$ sünme fonksiyonudur.



Şekil 2.4 σ-t diyagramı

Bu nedenle Şekil 2.4.b'deki gibi keyfi $\sigma = \sigma(t)$ gerilme etkisi altındaki malzemede $d\sigma$ büyüklüğü şeklinde ve herbirinin sonsuz küçük basamak yüklemeler olarak incelenebilir. Buna karşılık sünme davranışı,

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma \\ \varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau\end{aligned}\tag{2.14}$$

şeklinde integral olarak süperpozisyon ile bulunabilir. Bu tür integraller *Bellekli (Hereditary) İntegraller* olarak isimlendirilir. Böylece herhangi bir t zamandaki şekil değiştirmenin, uygulanan bütün gerilmenin etkisine bağlı olduğu görülmektedir.

Başlangıçta malzemeler için şekil değiştirme ve gerilmelerin sıfır olduğu söylenebilir. O zaman (2.14) ifadesinde, zamanın negatifliği söz konusu olamaz ve

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau\tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir.

Bundan başka, yüklenen gerilmelerin başlangıçta ani olarak yapıldığı düşünülürse, $t=0$ 'daki $\sigma(0)$ büyüklüğü de dikkate alındığı zaman genellikle

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) J(t) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau\tag{2.16}$$

formunda yazılır.

Yukarıdaki benzer düşünce ile, gerilmelerde zamanın bir fonksiyonu olarak

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t Y(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau\tag{2.17}$$

şeklinde şekil değıştirmeler integral içine sokularak gösterilebilir. Burada $Y(t)$ gevşeme fonksiyonudur. Malzemeye $t=0$ anında bakılarak başlangıçta gerilme ve şekil değıştirmenin olmadığı düşünülerek, (2.15) ve (2.16) ifadeleriyle karşılaştırıldığında benzer şekildeki ifadeler

$$\sigma(t) = \int_0^t Y(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.18)$$

ve

$$\sigma(t) = \varepsilon(0) Y(t) + \int_0^t Y(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.19)$$

olarak yazılabilir.

3. TEMEL DENKLEMLER

3.1. Çubuk Geometrisi

Çubuk, bir boyutu diğer iki boyutunun yanında çok büyük olan taşıyıcı elemanlara denir. Çubukta çubuk eksen ve dik kesit olmak üzere iki temel eleman vardır. Çubuk eksen genel olarak üç boyutlu uzayda tanımlanan bir eğridir ve ardışık dik kesitlerin ağırlık merkezlerinin geometrik yeridir. Dik kesit ise sınırlı bir düzlem parçasıdır. Çubuk, dik kesitin kendi ağırlık merkezinde çubuk eksen olan herhangi bir uzay eğrisine her zaman dik kalacak şekilde hareketinden oluşur. Eğer çubuk kesiti eksen boyunca değişirse değişken kesitli çubuklar söz konusudur.

Çubuk eksen

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (3.1)$$

bir vektörle tarif edilmektedir. Burada, s eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen herhangi bir nokta ile ele alınan nokta arasındaki yay boyunu ve $\vec{r}$ ise ele alınan noktanın yer vektörünü gösterir.

$\vec{t}$, $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ olarak isimlendirilen üç birim vektörün çubuk hesaplarında önemli bir rolü vardır. Bunlardan birincisi teğet birim vektör olup,

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu birim vektör artan s yönünde ve eksen eğrisine teğettir. İkincisi asal normal birim vektördür. Bu birim vektörde eğrilik merkezine yönelmiş ve oskulator düzlem içinde teğet vektörüne diktir. Üçüncüsü ise binormal vektör olup

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (3.3)$$

şeklinde iki birim vektörün vektörel çarpılmasıyla elde edilir. Bu üç birim vektörler arasında Frenet formülleri adı verilen

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}\tag{3.4}$$

üç bağıntı mevcuttur[44]. Burada κ eğriliği, τ ise burulma eğriliğini gösterir. Özel hallerde $\tau = 0$ düzlemsel eğrileri, $\kappa = 0$ doğruları ve R herhangi bir dairenin yarıçapı olmak üzere $\kappa = 1/R$ daire eksenli eğrileri ifade eder.

3.2. Alan Denklemleri

Çubuklara ait geniş bilgi [45]'de bulunmaktadır. Kullanılan alan denklemleri,

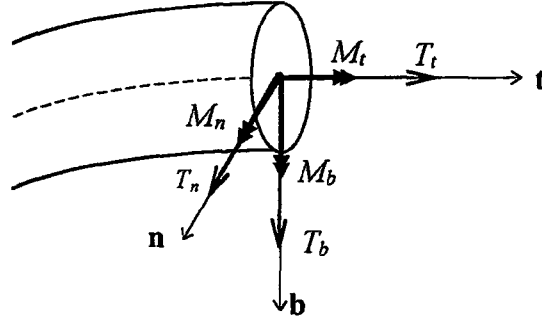
$$\begin{aligned}-\frac{d\vec{T}}{ds} - \vec{q} + m_i \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= 0 \\ -\frac{d\vec{M}}{ds} - \vec{t} \times \vec{T} - \vec{m} &= 0\end{aligned}\tag{3.5}$$

Denge denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} &= 0 \\ \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} &= 0\end{aligned}$$

Kinematik denklemler

şeklindedir. Burada Şekil 3.1'de gösterildiği gibi $\vec{T}$, $\vec{M}$ kesit tesirlerini, $\vec{\Omega}$ dik kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmesini, $\vec{\omega}$ relatif birim dönmeyi, $\vec{\gamma}$ relatif birim şekil değiştirmesini, m_i birim uzunluk kütlesini tanımlar.



Şekil 3.1 Kesit tesirleri

Böylece (3.5) denklemleri ile uzayda bulunan bütün çubuklar için geçerli olan denge ve kinematik denklemleri verilmiştir. (3.4) ifadesinde bulunan κ ve τ eğriliklerinin aldığı değerlere göre çubuklar sınıflanabilir. $\tau = 0$ olması düzlemsel çubukları ifade eder. $\tau = 0$ iken $\kappa = 0$ ise doğru eksenli çubukları ve R herhangi bir dairenin yarıçapı olmak üzere $\kappa = 1/R$ ise daire eksenli eğrileri ifade eder. Birim açıdaki yükselme miktarı h olmak üzere $c = \sqrt{R^2 + h^2}$ iken $\tau = -h/c^2$ ve $\kappa = R/c^2$ ise helisel çubuklara ait denklemler ortaya çıkar. $m = \frac{4 \cdot f}{L^2}$ şeklinde seçilerek $x = m \cdot z^2$ olmak

üzere tekrar $\tau = 0$ iken $\kappa = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$ ise parabolik eksenli eğrileri ifade eder.

Burada x üzerindeki türev z 'e göredir. κ ve τ 'nin çeşitli değerlerine göre (3.5) denklemleri ile doğru eksenli çubuklar, daire eksenli hem düzlemine dik hemde düzlemi içinde yüklü çubuklar, parabolik eksenli çubuklar ve helisel çubuklara ait denklemler elde edilmiştir.

Bünye bağıntıları, kesit tesirleri ile şekil değiştirmeler arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} -\tilde{M} + D^* \tilde{\omega} &= 0 \\ -\tilde{T} + C^* \tilde{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

biçimindedir. Burada D_i^* ve C_i^* operatör formda eğilme ve kayma rijitliğidir.

Elastik malzemelerde E elastisite modülü, I_i atalet momenti, A kesit alanı ve G kayma modülü olmak üzere eksenlerin kesitin asal eksenleri ile çakışması halinde eğilme ve

kayma rijitlikleri

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} k'AG & 0 & 0 \\ 0 & k'AG & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GI_t \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklindedir. Bu çalışmada bu özellik kabul edilmiştir. Viskoelastik malzemelerin bünye bağıntıları bellekli (*Hereditary*) integral formda [3] uzamaya karşı,

$$\sigma(t) = Y(0) \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

dönmeye karşı,

$$\tau(t) = Y_1(0) \gamma(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $Y(t)$, $Y_1(t)$ sırasıyla normal ve kayma gerilmelerine karşı gelen gevşeme modülüdür. Denklem (3.8) ve (3.9)'un ters ilişkileri de $J(t)$ ve $J_1(t)$ sünme fonksiyonları olmak üzere,

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

$$\gamma(t) = J_1(0) \tau(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \tau(\tau) d\tau$$

şeklinde yazılabilir.

Moment ve kesme kuvveti, normal ve kayma gerilmelerinin bileşkesi olarak

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_A \sigma y \, dA \\ T_i(t) &= \int_A \tau \, dA \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde viskoelastisite için geçerli olan denklem (3.8) ve (3.9)'daki bünye bağıntıları ile elde edilir. Kirişin bilinen kinematikinden yararlanarak kesit tesirleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 M_n(t) &= I_n \left\{ Y(0) \omega_n(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \omega_n(\tau) d\tau \right\} \\
 M_t(t) &= I_0 \left\{ Y_1(0) \omega_t(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \omega_t(\tau) d\tau \right\} \\
 M_b(t) &= I_b \left\{ Y(0) \omega_b(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \omega_b(\tau) d\tau \right\} \\
 T_n(t) &= k'A \left\{ Y_1(0) \gamma_n(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma_n(\tau) d\tau \right\} \\
 T_t(t) &= A \left\{ Y(0) \gamma_t(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma_t(\tau) d\tau \right\} \\
 T_b(t) &= k''A \left\{ Y_1(0) \gamma_b(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \gamma_b(\tau) d\tau \right\}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Burada denklem (3.12)'deki ifadeler kullanılarak, denklem (3.6)'daki operatör formdaki eğilme ve kayma rijitliği viskoelastik malzemeler için, $f(t)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$D_n^* f = I_n \left\{ Y(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \tag{3.13.a}$$

$$D_t^* f = I_0 \left\{ Y_1(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \tag{3.13.b}$$

$$D_b^* f = I_b \left\{ Y(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (3.13.c)$$

$$C_n^* f = k'A \left\{ Y_1(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (3.13.d)$$

$$C_t^* f = k'A \left\{ Y(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (3.13.e)$$

$$C_b^* f = k'A \left\{ Y_1(0) f(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (3.13.f)$$

şeklindedir.

Sınır koşulları da sembolik formda

$$\begin{aligned} \bar{T} - \hat{T} &= 0 & \Gamma_{\bar{T}} \\ \bar{M} - \hat{M} &= 0 & \Gamma_{\bar{M}} \\ -\bar{\Omega} + \hat{\Omega} &= 0 & \Gamma_{\bar{\Omega}} \\ -\bar{u} + \hat{u} &= 0 & \Gamma_{\bar{u}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada şapkalı değerler sınırdaki bilinen değerleri ifade etmektedir. Bu sınır koşulları özel problemlere ait değildir. Her probleme uygulanabilir. Daha ayrıntılı olarak bu sınır koşullarını, birkaç varyasyonel işlemden sonra fonksiyonel içinde görmek mümkündür.

Viskoelastik problemde $t=0$ anında yapının konumu diğer bir deyişle başlangıç koşulları da gereklidir. Geliştirilen teoremin uygulama problemlerinde $t=0$ için yerdeğiştirmelerin ve hızların sıfır olduğu yani, yapının sükunetten harekete başladığı kabul edilmiştir.

4. LAPLACE-CARSON UZAYINDA TEMEL DENKLEMLER

4.1. Laplace Transformu

Bizim aradığımız büyüklüklerin hepsi zamanın fonksiyonudur. Zaman parametresini büyüklüklerden kurtarmak için Laplace transformu uygulanır. Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace Transformu $F(p)$ ile tanımlanırsa,

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu işlemin tersi de mümkündür. Şöyleki,

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (4.2)$$

ifadesi de mümkündür.

4.2. Laplace-Carson Transformu

Alan denklemlerine Laplace transformu uygulandığında, görüntü bakımından hemen hemen elastik haldeki denklemlere benzer denklemler elde edilmektedir. Bu arada kolaylık bakımından Laplace transformunun p katı alınarak

$$\bar{F}(p) = p F(p) \quad (4.3)$$

şeklinde, büyüklüklerin $\bar{F}(p)$ ile tanımlandığı Laplace-Carson dönüşümleri elde edilir.

Laplace-Carson dönüşümleri ile elastik haldeki denklemler üst üste düşer. Laplace-Carson uzayında hesaplanan bir büyüklüğün zaman uzayına tekrar taşınması gerekir.

4.3. Alan Denklemlerinin Laplace-Carson Transformu

Zaman parametresini yok etmek için, daha önce söylendiği gibi, Bölüm 3.2’de verilen denklemlerin Laplace-Carson dönüşümleri

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{\bar{T}}}{ds} - \bar{\bar{q}} + m_i p^2 \bar{\bar{u}} &= 0 \\ -\frac{d\bar{\bar{M}}}{ds} - \bar{\bar{t}} \times \bar{\bar{T}} - \bar{\bar{m}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Denge denklemleri}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{\Omega}}}{ds} - \bar{\bar{\omega}} &= 0 \\ \frac{d\bar{\bar{u}}}{ds} + \bar{\bar{\Omega}} - \bar{\bar{\gamma}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Kinematik denklemler} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -\bar{\bar{M}} + \bar{\bar{D}}^* \bar{\bar{\omega}} &= 0 \\ -\bar{\bar{T}} + \bar{\bar{C}}^* \bar{\bar{\gamma}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Bünye denklemleri}$$

biçimindedir. Sınır koşullarında sembolik formda

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}} - \bar{\bar{T}} &= 0 & \Gamma_{\bar{\bar{T}}} \\ \bar{\bar{M}} - \bar{\bar{M}} &= 0 & \Gamma_{\bar{\bar{M}}} \\ -\bar{\bar{\Omega}} + \bar{\bar{\Omega}} &= 0 & \Gamma_{\bar{\bar{\Omega}}} \\ -\bar{\bar{u}} + \bar{\bar{u}} &= 0 & \Gamma_{\bar{\bar{u}}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

Alan denklemleri genel çubuklar için yukarıda görüldüğü gibi yazılabilir. Şimdi bu denklemler ele alınarak özel haller için ayrı ayrı incelenmiştir.

4.4. Helisel Çubukların Laplace-Carson Transformu

Elastik genel çubukların Laplace-Carson uzayında bulunan (4.4) ve (4.5) alan denklemlerini ele alalım. Şekil 4.1’de görüldüğü gibi, çubuk ekseninin daire tabanlı *helis* olduğu kabul edilsin. Helisin sarıldığı silindirin yarıçapı da R olsun. Taban dairesi üzerinde ölçülen ve x ekseninden itibaren sayılan θ açısı parametre olarak seçilerek ds çubuk boyuda $ds = c d\theta$ şeklinde alınsın. Helisel çubukta üç tane yerdeğiştirme, üç tane dönme, üç tane moment ve üç tane de kesme kuvvetleri olmak üzere oniki adet bilinmeyen mevcuttur. Helisel çubuklar için daha ayrıntılı bilgi [46] nolu referansda bulunmaktadır.

Helisel çubuğa ait Laplace-Carson uzayındaki alan denklemleri sınır koşulları ile birlikte,

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{T}_t}{d\theta} + \frac{R}{c} \bar{T}_n - c \bar{p}_t + c m_i p^2 u_t &= 0 \\ -\frac{d\bar{T}_n}{d\theta} - \frac{R}{c} \bar{T}_t + \frac{h}{c} \bar{T}_b - c \bar{p}_n + c m_i p^2 u_n &= 0 \\ -\frac{d\bar{T}_b}{d\theta} - \frac{h}{c} \bar{T}_n - c \bar{p}_b + c m_i p^2 u_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{M}_t}{d\theta} + \frac{R}{c} \bar{M}_n - c \bar{m}_t &= 0 \\ -\frac{d\bar{M}_n}{d\theta} - \frac{R}{c} \bar{M}_t + \frac{h}{c} \bar{M}_b + c \bar{T}_b - c \bar{m}_n &= 0 \\ -\frac{d\bar{M}_b}{d\theta} - \frac{h}{c} \bar{M}_n - c \bar{T}_n - c \bar{m}_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.b)$$

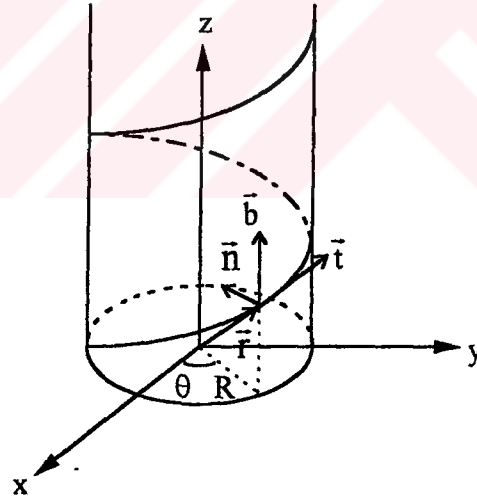
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Omega}_t}{d\theta} - \frac{R}{c} \bar{\Omega}_n - c \bar{\omega}_t &= 0 \\ \frac{d\bar{\Omega}_n}{d\theta} + \frac{R}{c} \bar{\Omega}_t - \frac{h}{c} \bar{\Omega}_b - c \bar{\omega}_n &= 0 \\ \frac{d\bar{\Omega}_b}{d\theta} + \frac{h}{c} \bar{\Omega}_n - c \bar{\omega}_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.c)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}_t}{d\theta} - \frac{R}{c} u_n - c\bar{\gamma}_t &= 0 \\
\frac{d\bar{u}_n}{d\theta} + \frac{R}{c} u_t - \frac{h}{c} u_b - c\Omega_b - c\bar{\gamma}_n &= 0 \\
\frac{d\bar{u}_b}{d\theta} + \frac{h}{c} u_n + c\Omega_n - c\bar{\gamma}_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.6.d}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{M} + \bar{D}^* \bar{\omega} &= 0 \\
-\bar{T} + \bar{C}^* \bar{\gamma} &= 0
\end{aligned} \tag{4.6.e}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T} - \bar{T} &= 0 & \Gamma_{\bar{T}} \\
\bar{M} - \bar{M} &= 0 & \Gamma_{\bar{M}} \\
-\bar{\Omega} + \bar{\Omega} &= 0 & \Gamma_{\bar{\Omega}} \\
-\bar{u} + \bar{u} &= 0 & \Gamma_{\bar{u}}
\end{aligned} \tag{4.6.f}$$

şeklinde olmaktadır.



Şekil 4.1 Helisel Çubuk

4.5. Düzlemsel Çubukların Laplace-Carson Transformu

Düzlemsel çubuklar için daha ayrıntılı bilgi [46] nolu referansda bulunmaktadır.

Düzlemsel çubuklar deyince, eksen eğrisi bir düzlem içinde olan çubuklar akla gelir.

Bunlarda burulma eğriliği $\tau=0$ olmaktadır. Bu nedenle birim vektörlerden binormal vektör $\vec{b}$, doğrultu bakımından sabittir, değişmez.

Düzlemsel çubukları da eksenlerine göre *Doğru Eksenli*, *Daire Eksenli* ve *Parabolik Eksenli* olmak üzere gruplamak mümkündür. Özel hallerde $\kappa=0$ ise doğru eksenli çubukları ve R herhangi bir dairenin yarıçapı olmak üzere $\kappa = 1/R$ ise daire eksenli çubukları ifade etmektedir. $m = \frac{4 \cdot f}{L^2}$ şeklinde seçilerek $x=m \cdot z^2$ olmak üzere

$\kappa = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$ ise parabolik eksenli eğrileri ifade eder. Burada x üzerindeki türev z 'e göredir.

4.5.1. Doğru Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu

(3.4)'den yararlanarak (4.4) ve (4.5) alan denklemleri incelenecek olursa, ds çubuk boyuda $ds=dz$ şeklinde alındığı zaman, elastik zemine oturan düzlemine dik yüklerle yüklü doğru eksenli çubuğa ait Laplace-Carson uzayındaki alan denklemleri sınır koşulları ile birlikte,

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\bar{T}}{dz} - \bar{q} + k \bar{v} &= -m_i p^2 \bar{v} \\
 -\frac{d\bar{M}}{dz} + \bar{T} &= 0 \\
 \frac{d\bar{\Omega}}{dz} - \bar{\omega} &= 0 \\
 \frac{d\bar{v}}{dz} + \bar{\Omega} - \bar{\gamma} &= 0 \\
 -\bar{M} + \bar{D}^* \bar{\omega} &= 0 \\
 -\bar{T} + \bar{C}^* \bar{\gamma} &= 0 \\
 \bar{T} - \bar{\bar{T}} &= 0 \\
 \bar{M} - \bar{\bar{M}} &= 0 \\
 \bar{\Omega} + \bar{\bar{\Omega}} &= 0 \\
 -\bar{v} + \bar{\bar{v}} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

biçiminde yazılabilir. Kayma etkileride dikkate alınmıştır. Burada eğilme ve kayma rijitlikleri,

$$\begin{aligned}\bar{D}^* &= I \bar{Y} \\ \bar{C}^* &= k' A \bar{Y}_1\end{aligned}\quad (4.8)$$

şeklindedir.

(4.7)'deki denklemler arasından bazı bilinmeyen büyüklükler yok edilebilir. Mühendisler için önemli olan M ve v büyüklükleri ise T kesme kuvveti denklem (4.7) içinden yok edilir. Benzer şekilde aynı denklemlerden $\mathcal{Q}$ da yok edilir. Böylece kayma etkileri de ihmal edilebilir. Bilinmeyen sayısı dört taneden iki taneye indirilmiş olur.

Bu durumda kayma etkilerini de dikkate alarak bilinmeyen sayısı iki olacak şekilde (4.7)'deki elastik zemine oturan düzlemine dik yüklerle yüklü doğru eksenli kirişlerin denge denklemleri ve kinematik denklemler,

$$\begin{aligned}-\frac{d^2 \bar{M}}{dz^2} + k \bar{v} - \bar{q} &= -m_i p^2 \bar{v} \\ \frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} + \bar{\omega} - \frac{d\bar{\gamma}}{dz} &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

şeklini alır. Daha detaylı çalışma [43] nolu referansda yapılarak kayma etkileri incelenmiştir.

4.5.2. Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu

(3.4)'den yararlanarak (4.4) ve (4.5) alan denklemleri incelenip, ds çubuk boyuda $ds=R \cdot d\theta$ şeklinde alınsın. Yüklemeler açısından problemi ele alarak incelediğimiz zaman da, düzlemine dik ve düzlemi içinde yüklü olmak üzere daire eksenli çubukları iki gruba ayırabiliriz. Her iki grupta bilinmeyen sayısı oniki taneden altı taneye düşer.

4.5.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu

Düzlemi içindeki yüklerle yüklü daire eksenli çubukları ele alırsak bilinmeyen sayısı $\bar{u}_n, \bar{u}_t, \bar{\mathcal{Q}}_b, \bar{M}_b, \bar{T}_n, \bar{T}_t$ olmak üzere oniki taneden altı taneye düşer. O zaman düzlemi içinde yüklerle yüklü daire eksenli çubuğa ait Laplace-Carson uzayındaki alan denklemleri de sınır koşulları ile birlikte,

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{T}_t}{d\theta} - R\bar{q}_t + \bar{T}_n &= -m_i p^2 \bar{u}_t \\ -\frac{d\bar{T}_n}{d\theta} - \bar{T}_t - R\bar{q}_n &= -m_i p^2 \bar{u}_n \\ -\frac{d\bar{M}_b}{d\theta} - R\bar{T}_n - R\bar{m}_b &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathcal{Q}}_b}{d\theta} - R\bar{\omega}_b &= 0 \\ \frac{d\bar{u}_t}{d\theta} - \bar{u}_n - R\bar{\gamma}_t &= 0 \\ \frac{d\bar{u}_n}{d\theta} + \bar{u}_t - R\bar{\mathcal{Q}}_b - R\bar{\gamma}_n &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

(4.10)

$$\begin{aligned} -\bar{M}_b + \bar{D}_b^* \bar{\omega}_b &= 0 \\ -\bar{T}_t + \bar{C}_t^* \bar{\gamma}_t &= 0 \\ -\bar{T}_n + \bar{C}_n^* \bar{\gamma}_n &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} -\bar{u}_t &= -\hat{\bar{u}}_t \\ -\bar{u}_n &= -\hat{\bar{u}}_n \\ -\bar{\mathcal{Q}}_b &= -\hat{\bar{\mathcal{Q}}}_b \\ \bar{M}_b &= \hat{\bar{M}}_b \\ \bar{T}_t &= \hat{\bar{T}}_t \\ \bar{T}_n &= \hat{\bar{T}}_n \end{aligned} \quad (d)$$

biçiminde yazılabilir. Burada eğilme ve kayma rijitlikleri de,

$$\begin{aligned}
\bar{D}_b^* &= I_b \bar{Y} \\
\bar{C}_t^* &= A \bar{Y} \\
\bar{C}_n^* &= k' A \bar{Y}_1
\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklindedir.

4.5.2.2. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu

Düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar ele alınırsa bilinmeyen sayısı $\bar{u}_b$, $\bar{\Omega}_n$, $\bar{\Omega}_t$, $\bar{M}_n$, $\bar{M}_t$, $\bar{T}_b$ olmak üzere oniki taneden altı taneye düşer. Bu durumda elastik zemine oturan, düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuğa ait Laplace-Carson uzayındaki alan denklemleri de sınır koşulları ile birlikte,

$$\begin{aligned}
-\frac{dT_b}{d\theta} - qR + kRu_b &= -m_i p^2 \bar{u}_b \\
-\frac{dM_n}{d\theta} - M_t + RT_b - Rm_n &= 0 \\
-\frac{dM_t}{d\theta} + M_n - Rm_t + k_t R\Omega_t &= 0
\end{aligned} \tag{4.12.a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\theta} - \bar{\Omega}_n - R\bar{\omega}_t &= 0 \\
\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\theta} + \bar{\Omega}_t - R\bar{\omega}_n &= 0 \\
\frac{d\bar{u}_b}{d\theta} + R\bar{\Omega}_n - R\bar{\gamma}_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.12.b}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{M}_n + \bar{D}_n^* \bar{\omega}_n &= 0 \\
-\bar{M}_t + \bar{D}_t^* \bar{\omega}_t &= 0 \\
-\bar{T}_b + \bar{H}_b^* \bar{\gamma}_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.12.c}$$

$$\begin{aligned}
-u_b + \bar{\bar{u}}_b &= 0 \\
-\Omega_n + \bar{\bar{\Omega}}_n &= 0 \\
-\Omega_t + \bar{\bar{\Omega}}_t &= 0 \\
M_n - \bar{\bar{M}}_n &= 0 \\
M_t - \bar{\bar{M}}_t &= 0 \\
M_b - \bar{\bar{T}}_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.12.d}$$

biçiminde yazılabilir. Burada eğilme ve kayma rijitlikleri de,

$$\begin{aligned}
\bar{D}_n^* &= I_n \bar{Y} \\
\bar{D}_t^* &= I_t \bar{Y}_1 \\
\bar{C}_b^* &= k'A \bar{Y}_1
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklindedir.

4.5.3. Parabolik Eksenli Çubukların Laplace-Carson Transformu

Parabolik çubuklar incelediğinde de yüklerin düzlemi içindeki yüklerle yüklü olması halinde bilinmeyenler, $\bar{u}_n$, $\bar{u}_t$, $\bar{\Omega}_b$, $\bar{M}_b$, $\bar{T}_n$, $\bar{T}_t$ olmak üzere altı tane olduğu görülmektedir. Burada da ds çubuk boyu $ds = \sqrt{1+x'^2} dz$ şeklinde alınmıştır. x üzerindeki türev z' 'e göredir. O zaman $\kappa = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$ olmak üzere düzlemi içinde

yüklerle yüklü parabolik eksenli çubuğa ait Laplace-Carson uzayındaki alan denklemleri de sınır koşulları ile beraber,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{T}_t}{dz} - \bar{q}_t + \kappa \bar{T}_n &= 0 \\
-\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{T}_n}{dz} - \kappa \bar{T}_t - \bar{q}_n &= 0 \\
-\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{M}_b}{dz} - \bar{T}_n - \bar{m}_b &= 0
\end{aligned} \tag{4.14.a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{\mathcal{Q}}_b}{dz} - \bar{\omega}_b &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{u}_t}{dz} - \kappa \bar{u}_n - \bar{\gamma}_t &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{d\bar{u}_n}{dz} + \kappa \bar{u}_t - \bar{\mathcal{Q}}_b - \bar{\gamma}_n &= 0
\end{aligned} \tag{4.14.b}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{M}_b + \bar{D}_b^* \bar{\omega}_b &= 0 \\
-\bar{T}_t + \bar{C}_t^* \bar{\gamma}_t &= 0 \\
-\bar{T}_n + \bar{C}_n^* \bar{\gamma}_n &= 0
\end{aligned} \tag{4.14.c}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{u}_t &= -\hat{\bar{u}}_t \\
-\bar{u}_n &= -\hat{\bar{u}}_n \\
-\bar{\mathcal{Q}}_b &= -\hat{\bar{\mathcal{Q}}}_b \\
\bar{M}_b &= \hat{\bar{M}}_b \\
\bar{T}_t &= \hat{\bar{T}}_t \\
\bar{T}_n &= \hat{\bar{T}}_n
\end{aligned} \tag{4.14.d}$$

biçiminde yazılabilir. Burada da eğilme ve kayma rijitlikleri,

$$\begin{aligned}
\bar{D}_b^* &= I_b \bar{Y} \\
\bar{C}_t^* &= A \bar{Y} \\
\bar{C}_n^* &= k' A \bar{Y}_l
\end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklindedir.

5. FONKSİYONEL

5.1. Fonksiyonelin Elde Edilmesi

En genel eğriye sahip viskoelastik kirişler için geçerli olan Laplace-Carson uzayındaki (4.4) denklemleri, (4.5) sınır koşulları ile birlikte operatör formunda [47],

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (5.1)$$

yazılabilir. $\mathbf{Q}$ operatörüne ait açık ifade,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{ds} & -t \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{ds} & t \times & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{D}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \bar{C}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\gamma} \\ \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{\Omega}} \\ \dot{\bar{M}} \\ \dot{\bar{T}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ \bar{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\bar{T}} \\ \dot{\bar{M}} \\ -\dot{\bar{\Omega}} \\ -\dot{\bar{u}} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde verilmiştir.

$\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyelliği, $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle$ iki vektörün iç çarpımı olmak üzere

$$\langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle \quad (5.3)$$

eşitliğinin sağlanması ile gösterilebilir. Burada $dQ(y, \bar{y})$,

$$dQ(y, \bar{y}) = \frac{\partial Q(y + \zeta \bar{y})}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \quad (5.4)$$

şeklinde tariflenerek Q operatörünün Gâteaux türevini göstermektedir.

Sonuç olarak fonksiyonel, Q operatörünün potansiyel olduğu gösterildikten sonra alan denklemlerinin fonksiyonel karşılığı Oden ve Reddy [48,49] tarafından verildiği gibi,

$$I(y) = \int_0^1 \langle Q(\eta y, y), y \rangle d\eta \quad (5.5)$$

ifadesinden elde edilir. Burada η skaler bir büyüklüktür.

Çeşitli matematik işlemler sonucu herhangi bir eğriye sahip olan viskoelastik çubuklara ait fonksiyonel,

$$\begin{aligned} I(\bar{y}) = & - \left[\bar{u}, \frac{d\bar{T}}{ds} \right] + \left[t \times \bar{\Omega}, \bar{T} \right] - \left[\frac{d\bar{M}}{ds}, \bar{\Omega} \right] - [\bar{q}, \bar{u}] - [\bar{m}, \bar{\Omega}] \\ & - \frac{1}{2} \left[\bar{D}^{*-1} \bar{M}, \bar{M} \right] - \frac{1}{2} \left[\bar{C}^{*-1} \bar{T}, \bar{T} \right] + \frac{m_i p^2}{2} [\bar{u}, \bar{u}] \\ & + \left[\hat{\bar{u}}, \bar{T} \right]_{\varepsilon} + \left[\hat{\bar{\Omega}}, \bar{M} \right]_{\varepsilon} + \left[(\bar{T} - \hat{\bar{T}}), \bar{u} \right]_{\sigma} + \left[(\bar{M} - \hat{\bar{M}}), \bar{\Omega} \right]_{\sigma} \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilmiş olur. σ ve ε alt indisleri, köşeli parantezler içindeki terimlerin sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarının belirlediği sınırlarda geçerlidir. Ayrıca köşeli parantezler bölgedeki iç çarpımı ifade etmektedir. Burada $\bar{u}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{M}$, $\bar{T}$ bilinmeyen vektörel büyüklükler olmak üzere Laplace-Carson uzayında oniki bilinmeyen vardır ve büyüklükler p Laplace parametresine bağlıdır.

Denklem (5.6) kullanılarak geometriye bağlı özel hallere ait fonksiyonelleri türetmek mümkündür.

5.2. Helisel Çubuklar

Birim açıdaki yükselme miktarı h olmak üzere $c = \sqrt{R^2 + h^2}$ iken $\tau = -h/c^2$ ve $\kappa = R/c^2$ alınarak (5.6)'da yerine yerleştirilirse helisel çubuklara ait fonksiyonel ortaya çıkar. Bu durum da fonksiyonel açık olarak,

$$\begin{aligned}
I(\bar{y}) = & -[\bar{u}_n, \bar{T}_n'] - [\bar{u}_b, \bar{T}_b'] - [\bar{u}_t, \bar{T}_t'] - \tau[\bar{u}_b, \bar{T}_n] + \kappa[\bar{u}_t, \bar{T}_n] + [\bar{u}_n, \bar{T}_b] \\
& - \kappa[\bar{u}_n, \bar{T}_t] - [\bar{\Omega}_b, \bar{T}_n] + [\bar{\Omega}_n, \bar{T}_b] + \tau[\bar{\Omega}_n, \bar{M}_b] - \kappa[\bar{\Omega}_n, \bar{M}_t] - \tau[\bar{\Omega}_b, \bar{M}_n] \\
& - [\bar{M}_n', \bar{\Omega}_n] - [\bar{M}_b', \bar{\Omega}_b] - [\bar{M}_t', \bar{\Omega}_t] + \kappa[\bar{\Omega}_t, \bar{M}_n] - [\bar{q}_n, \bar{u}_n] - [\bar{q}_b, \bar{u}_b] \\
& - [\bar{q}_t, \bar{u}_t] - [\bar{m}_n, \bar{\Omega}_n] - [\bar{m}_b, \bar{\Omega}_b] - [\bar{m}_t, \bar{\Omega}_t] + \frac{m_i p^2}{2} [\bar{u}_n, \bar{u}_n] \\
& + \frac{m_i p^2}{2} [\bar{u}_b, \bar{u}_b] + \frac{m_i p^2}{2} [\bar{u}_t, \bar{u}_t] - \frac{1}{2\bar{D}_n^*} [\bar{M}_n, \bar{M}_n] - \frac{1}{2\bar{D}_b^*} [\bar{M}_b, \bar{M}_b] \\
& - \frac{1}{2\bar{D}_t^*} [\bar{M}_t, \bar{M}_t] - \frac{1}{2\bar{C}_n^*} [\bar{T}_n, \bar{T}_n] - \frac{1}{2\bar{C}_b^*} [\bar{T}_b, \bar{T}_b] - \frac{1}{2\bar{C}_t^*} [\bar{T}_t, \bar{T}_t] \\
& + [\hat{\bar{u}}, T]_{\mathcal{E}} + [\hat{\bar{\Omega}}, M]_{\mathcal{E}} + [(T - \hat{T}), u]_{\mathcal{O}} + [(M - \hat{M}), \Omega]_{\mathcal{O}}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklinde. Burada türevler s çubuk boyuna göre olmak üzere oniki tane bilinmeyen bulunmaktadır. Bütün bilinmeyenler de Laplace-Carson uzayında p Laplace parametresine bağlıdır.

5.3. Düzlemsel Çubuklar

Düzlemsel çubuklara ait bağıntıları elde etmek için $\tau = 0$ olması gerekir. Böylece (5.7) ifadesinde τ burulma eğriliği yerine sıfır yazarsak düzlemsel çubuklara ait fonksiyonel elde edilir. Düzlemsel eğriler de κ 'nın değişik değerlerine göre çeşitli eğrileri ifade etmektedir. Bu durumlar ayrı ayrı incelenebilir.

5.3.1. Doğru Eksenli Çubuklar

$\tau = 0$ iken $\kappa = 0$ ise doğru eksenli eğriler ifade edilir. Doğru eksenli çubuklara ait fonksiyoneli (5.7) ifadesinden açık olarak

$$\begin{aligned} I(\bar{\gamma}) = & \left[(\bar{\Omega} + \frac{d\bar{v}}{dz}), \bar{T} \right] + \frac{1}{2} \left[\bar{M}, \frac{d\bar{\Omega}}{dz} \right] + \frac{1}{2} \left[(\frac{d\bar{\Omega}}{dz} - \bar{\omega}), \bar{M} \right] + \frac{(k + m_i p^2)}{2} [\bar{v}, \bar{v}] \\ & - \frac{1}{2} [\bar{\gamma}, \bar{T}] - \frac{1}{2} [(\bar{M} - \bar{D}^* \bar{\omega}), \bar{\omega}] - \frac{1}{2} [(\bar{T} - \bar{C}^* \bar{\gamma}), \bar{\gamma}] - [\bar{q}, \bar{v}] \\ & - [\hat{\bar{T}}, \bar{v}]_{\sigma} - [\hat{\bar{M}}, \bar{\Omega}]_{\sigma} - [(\bar{v} - \hat{\bar{v}}), \bar{T}]_{\varepsilon} - [(\bar{\Omega} - \hat{\bar{\Omega}}), \bar{M}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. Buradaki büyüklükler Laplace-Carson uzayında, $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{T}$, $\bar{M}$ olmak üzere altı tanedir.

(5.8) fonksiyoneli içinde bulunan γ ve ω değişkenleri yok edilerek ve Bernoulli-Navier hipotezinin geçerli olduğu kabulü yapılarak doğru eksenli çubuklar için yeni bir fonksiyonel

$$\begin{aligned} I(\bar{\gamma}) = & \frac{(k + m_i p^2)}{2} [\bar{v}, \bar{v}] + [\bar{M}', \bar{v}'] - [\bar{q}, \bar{v}] - \frac{1}{2I} [\bar{J}\bar{M}, \bar{M}] - \frac{1}{2k'} \left[\frac{\bar{J}_1}{A} \bar{M}', \bar{M}' \right] \\ & - [(\bar{T} - \hat{\bar{T}}), \bar{v}]_{\sigma} - [(\bar{M} - \hat{\bar{M}}), \bar{v}']_{\sigma} - [\hat{\bar{v}}, \bar{T}]_{\varepsilon} - [\hat{\bar{v}}', \bar{M}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir. Bu yeni fonksiyonelde $\bar{v}$, $\bar{M}$ gibi iki bilinmeyen vardır. Diğer büyüklükleri bulmak istemiyorsak, (5.9)'daki fonksiyonel kullanılarak daha kolay çözüme ulaşılabilir.

Böylece doğru eksenli çubuklara ait fonksiyoneli genel çubuklara ait (5.7) fonksiyoneli içinde elde edilebilir. Ancak doğru eksenli çubuklara ait (4.7) ve (4.9) denklemleri ele alınarak da (5.8) ve (5.9)'daki fonksiyonelleri elde etmek mümkündür. Benzer çalışma daha ayrıntılı olarak Aköz ve Kadioğlu [43,50] tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda doğru eksenli Timoshenko çubukları ele alınarak altı bilinmeyenli ve iki bilinmeyenli olarak kuazi-statik ve dinamik yükler altındaki davranış incelenmiştir.

5.3.2. Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuklara ait fonksiyonelleri elde etmek için (5.7) ifadesinden yararlanarak türetilir. (5.7) ifadesinde $\tau = 0$ iken ve R herhangi bir dairenin yarıçapı olmak üzere $\kappa = 1/R$ ise daire eksenli eğrilere ait fonksiyoneller elde edilir. Ancak daire eksenli çubuklarda yüklemenin durumuna göre bazı bilinmeyenler sıfır olmaktadır. Bu durumları ayrı ayrı incelemek mümkündür.

5.3.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

(5.7) ifadesinden türeterek elde ettiğimiz daire eksenli çubuklara ait fonksiyonelde, yüklemeler daire eksenli çubuğun düzlemi içinde bulumakta ise bilinmeyen sayısı onikiden $\bar{u}_n, \bar{u}_t, \bar{Q}_b, \bar{M}_b, \bar{T}_n, \bar{T}_t$ olmak üzere altı taneye düşmektedir. (5.7)'den elde edilen fonksiyonel açık olarak,

$$\begin{aligned} I(\bar{y}) = & -[\bar{m}_b, \bar{Q}_b] - [\bar{p}_n, \bar{u}_n] - [\bar{p}_t, \bar{u}_t] - \chi[\bar{T}_t, \bar{u}_n] + \chi[\bar{T}_n, \bar{u}_t] - [\bar{T}_n, \bar{Q}_b] \\ & - [\bar{T}_n', \bar{u}_n] - [\bar{T}_t', \bar{u}_t] - [\bar{M}_b', \bar{Q}_b] - \frac{I}{2\bar{D}_b^*} [\bar{M}_b, \bar{M}_b] - \frac{I}{2\bar{C}_n^*} [\bar{T}_n, \bar{T}_n] \\ & - \frac{I}{2\bar{C}_t^*} [\bar{T}_t, \bar{T}_t] + \frac{m_t p^2}{2} [\bar{u}_n, \bar{u}_n] + [(\bar{T}_n - \hat{T}_n), \bar{u}_n]_{\sigma} + [(\bar{T}_t - \hat{T}_t), \bar{u}_t]_{\sigma} \\ & + [(\bar{M}_b - \hat{M}_b), \bar{Q}_b]_{\sigma} + [\hat{u}_n, \bar{T}_n]_{\varepsilon} + [\hat{u}_t, \bar{T}_t]_{\varepsilon} + [\hat{Q}_b, \bar{M}_b]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklinde. Buradaki büyüklükler de Laplace-Carson uzayında ve p Laplace parametresine bağlıdır. (5.10) ifadesindeki türevler s çubuk boyuna göre.

(5.10)'da verilen düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuklara ait fonksiyoneli (5.7)'den türetmek yerine, sadece düzlemi içindeki daire eksenli çubuklara ait (4.10) denklemlerini ele alarak (5.10)'daki fonksiyonel elde edilebilir.

5.3.2.2. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuklara etkiyen yüklemeler düzlemine dik olarak etkimesi halinde bilinmeyenler oniki taneden $\bar{u}_b, \bar{Q}_n, \bar{Q}_t, \bar{M}_n, \bar{M}_t, \bar{T}_b$ olmak üzere altı taneye düşmektedir. (5.7)'den elde edilen fonksiyonel açık olarak,

$$\begin{aligned}
I(\bar{y}) = & \frac{kR}{2} [\bar{u}_b, \bar{u}_b] - R [\bar{m}_t, \bar{\mathcal{Q}}_t] - R [\bar{q}, \bar{u}_b] + R [\bar{T}_b, \bar{\mathcal{Q}}_n] \\
& + [\bar{M}_n, \bar{\mathcal{Q}}_t] - [\bar{M}_t, \bar{\mathcal{Q}}_n] + - [\bar{T}_b', \bar{u}_b] - [\bar{M}_n', \bar{\mathcal{Q}}_n] - [\bar{M}_t', \bar{\mathcal{Q}}_t] \\
& + \frac{m_i p^2 R}{2} [\bar{u}_b, \bar{u}_b] - \frac{R}{2\bar{D}_t^*} [\bar{M}_t, \bar{M}_t] - \frac{R}{2\bar{D}_n^*} [\bar{M}_n, \bar{M}_n] - \frac{R}{2\bar{C}_b^*} [\bar{T}_b, \bar{T}_b] \\
& + [\bar{T}_b - \hat{\bar{T}}_b, \bar{u}_b]_{\sigma} + [\bar{M}_n - \hat{\bar{M}}_n, \bar{\mathcal{Q}}_n]_{\sigma} + [\bar{M}_t - \hat{\bar{M}}_t, \bar{\mathcal{Q}}_t]_{\sigma} \\
& + [\hat{\bar{u}}_b, \bar{T}_b]_{\varepsilon} + [\hat{\bar{\mathcal{Q}}}_n, \bar{M}_n]_{\varepsilon} + [\hat{\bar{\mathcal{Q}}}_t, \bar{M}_t]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklindedir. Buradaki türevler θ açısına göredir. Ayrıca buradaki büyüklükler de Laplace-Carson uzayında ve p Laplace parametresine bağlıdır. Elastik zemin olması durumu da dikkate alınmıştır.

(5.11)'da verilen düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklara ait fonksiyoneli de (5.7)'den türetmek yerine, sadece düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklara ait (4.12) denklemlerini ele alarak (5.11)'deki fonksiyonel elde edilebilir.

5.3.3. Parabolik Eksenli Çubuklar

Burada düzlemi içinde yüklü ve eksenli parabol olan bir çubuk ele alınmıştır.

$$m = \frac{4 \cdot f}{L^2} \text{ şeklinde seçilerek } x = m \cdot z^2 \text{ olmak üzere tekrar } \tau = 0 \text{ iken } \kappa = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$$

alınarak parabolik eksenli eğriler incelenmiştir. x üzerindeki türev z 'e göredir. Burada da düzlemi içindeki yüklerle yüklü parabolik eksenli çubuklara ait fonksiyonel (5.7)'den türetilir. Açık olarak fonksiyonel,

$$\begin{aligned}
I(\bar{y}) = & -[\bar{m}_b, \bar{\mathcal{Q}}_b] - [\bar{p}_n, \bar{u}_n] - [\bar{p}_t, \bar{u}_t] - \chi [\bar{T}_t, \bar{u}_n] + \chi [\bar{T}_n, \bar{u}_t] - [\bar{T}_n, \bar{\mathcal{Q}}_b] \\
& - [\bar{T}_n', \bar{u}_n] - [\bar{T}_t', \bar{u}_t] - [\bar{M}_b', \bar{\mathcal{Q}}_b] - \frac{I}{2\bar{D}_b^*} [\bar{M}_b, \bar{M}_b] - \frac{I}{2\bar{C}_n^*} [\bar{T}_n, \bar{T}_n] \\
& - \frac{I}{2\bar{C}_t^*} [\bar{T}_t, \bar{T}_t] + \frac{m_i p^2}{2} [\bar{u}_n, \bar{u}_n] + [\bar{T}_n - \hat{\bar{T}}_n, \bar{u}_n]_{\sigma} + [\bar{T}_t - \hat{\bar{T}}_t, \bar{u}_t]_{\sigma} \\
& + [\bar{M}_b - \hat{\bar{M}}_b, \bar{\mathcal{Q}}_b]_{\sigma} + [\hat{\bar{u}}_n, \bar{T}_n]_{\varepsilon} + [\hat{\bar{u}}_t, \bar{T}_t]_{\varepsilon} + [\hat{\bar{\mathcal{Q}}}_b, \bar{M}_b]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (5.12)$$

biçimindedir. Buradaki türevler s çubuk boyuna göredir ve ds çubuk boyuda $ds = \sqrt{1 + x'^2} dz$ şeklindedir.

(5.12)'de verilen düzlemi içinde yüklü parabolik eksenli çubuklara ait fonksiyoneli (5.7)'den türetmek yerine, sadece düzlemi içinde yüklü parabolik eksenli çubuklara ait denklemler ele alınarak da (5.12)'deki fonksiyoneli elde etmek mümkündür.



6. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

6.1. Sonlu Elemana Giriş

Sonlu eleman metodu bilgisayarların gelişmesiyle karmaşık problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Kullanılan sayısal yöntemlerden biri olan sonlu eleman yöntemi, yapı sistemine ait mesnet şartları, dış etkenlerin aktarılması ve sistemin yapısının düzgün olmaması gibi önemli etkenleri dikkate alabilmesi açısından, matematik güçlükler sebebi ile çözümü zor olan veya çözilemeyen karmaşık sistemlerin çözümüne olanak sağlamaktadır.

Sonlu elemanlar metodunda, serbest parametrelerin nodal değerleri bilinmeyenlerdir. Bu parametrelerin bölgedeki değerleri şekil fonksiyonları kullanılarak elde edilir. Şekil fonksiyonları seçilirken dikkat edilmesi gereken, (5.6) ifadesindeki fonksiyonelde varolan değişkenlerin türev dereceleridir. Seçilen şekil fonksiyonları *Tamlık* ve *Süreklilik koşulları*'nı sağlamalıdır [51].

Şekil fonksiyonu ψ için eleman formülasyonu aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır.

- Uygunluk koşulu: Eleman sınırlarında C^r sürekliliği olmalıdır.
- Tamlık: Eleman içinde C^{r+1} sürekliliği olmalıdır.

Burada $(r+1)$ fonksiyonel içindeki en yüksek türevin derecesini göstermektedir. Viskoelastik çubukların denklemlerinden elde edilen fonksiyonelerde bulunan değişkenlerin maksimum türev derecesinin mertebesi bir olduğundan doğrusal şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (1-\xi) \\ \psi_2 &= \xi\end{aligned}\tag{6.1}$$

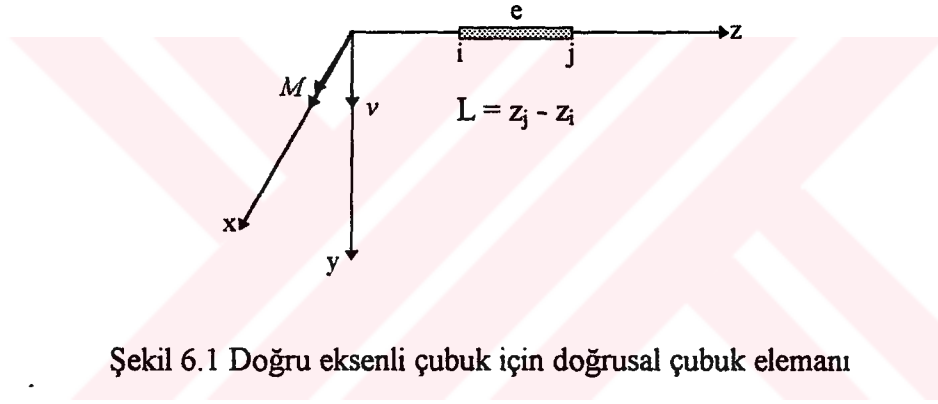
olarak alınmıştır. Burada doğru eksenli çubuklar için

$$\xi = \frac{z - z_i}{z_j - z_i} \quad (6.2)$$

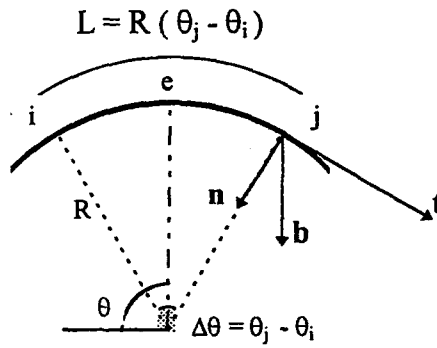
şeklinde alınarak doğrusal şekil fonksiyonları (6.1)'den elde edilirken dairesel çubuklar içinde doğrusal şekil fonksiyonları

$$\psi_1 = \frac{R(\theta_j - \theta)}{L}, \quad \psi_2 = \frac{R(\theta - \theta_i)}{L} \quad (6.3)$$

şeklinde alınmıştır. Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de de kullanılan çubuk elemanlar görülmektedir.



Şekil 6.1 Doğru eksenli çubuk için doğrusal çubuk elemanı



Şekil 6.2 Daire eksenli çubuk için doğrusal çubuk elemanı

Elemanın her nodundaki bilinmeyen değişkenler ve verilen dış yükler şekil fonksiyonları cinsinden,

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \sum_{i=1}^2 \bar{u}_i \psi_i & \bar{\Omega} &= \sum_{i=1}^2 \bar{\Omega}_i \psi_i \\
\bar{M} &= \sum_{i=1}^2 \bar{M}_i \psi_i & \bar{T} &= \sum_{i=1}^2 \bar{T}_i \psi_i \\
\bar{q} &= \sum_{i=1}^2 \bar{q}_i \psi_i & \bar{m} &= \sum_{i=1}^2 \bar{m}_i \psi_i
\end{aligned} \tag{6.4}$$

şeklinde alınarak fonksiyonellerde yerine yerleştirilir. Şekil fonksiyonları cinsinden (5.6) ifadesindeki fonksiyonelde yerine yerleştirildikten sonra nodal değişkenlere göre ekstremum olması şartı ile eleman denklemleri geliştirilmiştir. Geliştirilen bütün sonlu eleman denklemleri Laplace-Carson uzayında bulunmaktadır.

6.2. Helisel Çubuklar

Çubuk eksenini daire tabanlı *helis* olarak alınsın. Helisin sarıldığı silindirin yarıçapı R olsun. Taban dairesi üzerinde ölçülen ve x ekseninden itibaren sayılan θ açısı parametre olarak seçilirse, ds çubuk boyuda $ds=c \cdot d\theta$ şeklinde alınsın. Doğrusal şekil fonksiyonları da (6.3)'de verildiği gibi seçilsin. O zaman birim açıdaki yükselme miktarı h olmak üzere $c = \sqrt{R^2 + h^2}$ iken $\tau = -h/c^2$ ve $\kappa = R/c^2$ alınarak helisel çubuğa ait elde edilen sonlu eleman denklemi

$$[k_{ij}] \cdot \{y_j\} = [f_i] \tag{6.5}$$

formunda elde edilmektedir. Açık formda, $i=1,2,\dots,24$ ve $j=1,2,\dots,24$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \bar{u}_{ti} & y_2 &= \bar{u}_{ni} & y_3 &= \bar{u}_{bi} & y_4 &= \bar{\Omega}_{ti} & y_5 &= \bar{\Omega}_{ni} & y_6 &= \bar{\Omega}_{bi} \\
y_7 &= \bar{M}_{ti} & y_8 &= \bar{M}_{ni} & y_9 &= \bar{M}_{bi} & y_{10} &= \bar{T}_{ti} & y_{11} &= \bar{T}_{ni} & y_{12} &= \bar{T}_{bi} \\
y_{13} &= \bar{u}_{tj} & y_{14} &= \bar{u}_{nj} & y_{15} &= \bar{u}_{bj} & y_{16} &= \bar{\Omega}_{tj} & y_{17} &= \bar{\Omega}_{nj} & y_{18} &= \bar{\Omega}_{bj} \\
y_{19} &= \bar{M}_{tj} & y_{20} &= \bar{M}_{nj} & y_{21} &= \bar{M}_{bj} & y_{22} &= \bar{T}_{tj} & y_{23} &= \bar{T}_{nj} & y_{24} &= \bar{T}_{bj}
\end{aligned} \tag{6.6.a}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \bar{q}_{ti} \frac{L}{3} + \bar{q}_{tj} \frac{L}{6} & f_2 &= \bar{q}_{ni} \frac{L}{3} + \bar{q}_{nj} \frac{L}{6} & f_3 &= \bar{q}_{bi} \frac{L}{3} + \bar{q}_{bj} \frac{L}{6} \\
f_{13} &= \bar{q}_{ti} \frac{L}{6} + \bar{q}_{tj} \frac{L}{3} & f_{14} &= \bar{q}_{ni} \frac{L}{6} + \bar{q}_{nj} \frac{L}{3} & f_{15} &= \bar{q}_{bi} \frac{L}{6} + \bar{q}_{bj} \frac{L}{3} \\
f_4 &= \bar{m}_{ti} \frac{L}{3} + \bar{m}_{tj} \frac{L}{6} & f_5 &= \bar{m}_{ni} \frac{L}{3} + \bar{m}_{nj} \frac{L}{6} & f_6 &= \bar{m}_{bi} \frac{L}{3} + \bar{m}_{bj} \frac{L}{6} \\
f_{16} &= \bar{m}_{ti} \frac{L}{6} + \bar{m}_{tj} \frac{L}{3} & f_{17} &= \bar{m}_{ni} \frac{L}{6} + \bar{m}_{nj} \frac{L}{3} & f_{18} &= \bar{m}_{bi} \frac{L}{6} + \bar{m}_{bj} \frac{L}{3} \\
f_7 &= f_8 = f_9 = f_{10} = 0 & f_{11} &= f_{12} = f_{19} = f_{20} = 0 & f_{21} &= f_{22} = f_{23} = f_{24} = 0
\end{aligned} \tag{6.6.b}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,12} &= k_{14,24} = k_{5,9} = k_{17,21} = \frac{\tau L}{3} & k_{5,12} &= k_{17,24} = \frac{L}{3} \\
k_{2,24} &= k_{14,12} = k_{5,21} = k_{17,9} = \frac{\tau L}{6} & k_{17,12} &= k_{5,24} = \frac{L}{6} \\
k_{3,11} &= k_{15,23} = k_{6,8} = k_{18,20} = -\frac{\tau L}{3} & k_{6,11} &= k_{18,23} = -\frac{L}{3} \\
k_{3,23} &= k_{15,11} = k_{6,20} = k_{18,8} = -\frac{\tau L}{6} & k_{18,11} &= k_{6,23} = -\frac{L}{6} \\
k_{1,11} &= k_{13,23} = k_{4,8} = k_{16,20} = \frac{\chi L}{3} & X_i &= \frac{1}{D_{ni}^*} & K_i &= \frac{1}{C_{ni}^*} \\
k_{1,23} &= k_{13,11} = k_{4,20} = k_{16,8} = \frac{\chi L}{6} & Y_i &= \frac{1}{D_{bi}^*} & K_i &= \frac{1}{C_{bi}^*} \\
k_{2,10} &= k_{14,22} = k_{5,7} = k_{17,19} = -\frac{\chi L}{3} & I_i &= \frac{1}{D_{ti}^*} & A_i &= \frac{1}{C_{ti}^*} \\
k_{2,22} &= k_{14,10} = k_{5,19} = k_{17,7} = -\frac{\chi L}{6}
\end{aligned} \tag{6.6.c}$$

$$\begin{aligned}
k_{7,7} &= -L\left(\frac{I_i}{4} + \frac{I_j}{12}\right) & k_{8,8} &= -L\left(\frac{X_i}{4} + \frac{X_j}{12}\right) & k_{9,9} &= -L\left(\frac{Y_i}{4} + \frac{Y_j}{12}\right) \\
k_{7,19} &= -L\left(\frac{I_i}{12} + \frac{I_j}{12}\right) & k_{8,20} &= -L\left(\frac{X_i}{12} + \frac{X_j}{12}\right) & k_{9,21} &= -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{12}\right) \\
k_{19,19} &= -L\left(\frac{I_i}{12} + \frac{I_j}{4}\right) & k_{20,20} &= -L\left(\frac{X_i}{12} + \frac{X_j}{4}\right) & k_{21,21} &= -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{4}\right) \\
k_{10,10} &= -L\left(\frac{A_i}{4} + \frac{A_j}{12}\right) & k_{11,11} &= -L\left(\frac{K_i}{4} + \frac{K_j}{12}\right) & k_{12,12} &= -L\left(\frac{K_i}{4} + \frac{K_j}{12}\right) \\
k_{10,22} &= -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{12}\right) & k_{11,23} &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{12}\right) & k_{12,24} &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{12}\right) \\
k_{22,22} &= -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{4}\right) & k_{23,23} &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{4}\right) & k_{24,24} &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,10} &= k_{13,10} = k_{2,11} = k_{14,11} = k_{3,12} = k_{15,12} = 0.5 \\
k_{5,8} &= k_{17,8} = k_{6,9} = k_{18,9} = k_{4,7} = k_{16,7} = 0.5 \\
k_{1,22} &= k_{13,22} = k_{2,23} = k_{14,23} = k_{3,24} = k_{15,24} = -0.5 \\
k_{5,20} &= k_{17,20} = k_{6,21} = k_{18,21} = k_{4,19} = k_{16,19} = -0.5
\end{aligned} \tag{6.6.d}$$

şeklindedir ve $k_{ij}=k_{ji}$ simetriktir. Şimdi özel hallere ait olan sonlu eleman denklemleri, (6.6) ifadelerinden yararlanılarak (6.5)'de bulunan genel çubuklara ait sonlu eleman denkleminde türetilerek incelensin.

6.3. Doğru Eksenli Çubuklar

Doğru eksenli çubuklara ait sonlu eleman denklemleri (5.8) ve (5.9)'da bulunan fonksiyonlardan, (6.2) yardımıyla (6.1)'deki şekil fonksiyonları kullanarak elde edilebilmektedir. Benzer şekilde ayrıntılı bir çalışma Aköz ve Kadioğlu [43,50] tarafından yapılmıştır. Çalışmada, doğru eksenli viskoelastik çubuklara ait alan denklemlerinden, doğru eksenli çubuklar için fonksiyonlar elde edilerek sonlu eleman denklemlerine ulaşılmıştır.

Ancak burada doğru eksenli çubuklara ait sonlu eleman denklemleri genel çubuklara ait sonlu eleman denklemlerinden elde edilecektir. (6.6)'da elemanları görülen ve (6.5)'de verilen sonlu eleman matrisinden doğru eksenli çubuklar için geçerli olan eleman matrisi türetilir. (6.6) ifadelerinde verilen eğrilikler yerine, $\tau = 0$ ve $\kappa = 0$ yazılarak uygun şekilde düzenlenerek elde edilebilir. Kayma etkilerini de göz önünde bulunduracak şekilde eleman denklemi,

$$k_{11} = k_{77} = \frac{(k + m_i p^2) L}{3} \quad k_{17} = k_{71} = \frac{(k + m_i p^2) L}{6} \tag{6.7}$$

olmak üzere açık formu,

[illegible]

şeklindedir. Kayma etkileri dikkate alınmak istenmezse, bu sefer bilinmeyen sayısı her nodda ikiye düşerek eleman denklemi,

$$\begin{bmatrix} \frac{(k+m_i p^2)L}{3} & \frac{1}{L} & \frac{(k+m_i p^2)L}{6} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{L}{3I}J - \frac{J_1}{Ak'L} & -\frac{1}{L} & -\frac{L}{6I}J + \frac{J_1}{Ak'L} \\ \frac{(k+m_i p^2)L}{6} & -\frac{1}{L} & \frac{(k+m_i p^2)L}{3} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{L}{6I}J + \frac{J_1}{Ak'L} & \frac{1}{L} & -\frac{L}{3I}J - \frac{J_1}{Ak'L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_i \frac{L}{3} + \bar{q}_j \frac{L}{6} \\ 0 \\ \bar{q}_i \frac{L}{6} + \bar{q}_j \frac{L}{3} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

haline gelir.

6.4. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

(6.6)'da verilen eğrilikler yerine $\tau = 0$ ve $\kappa = 1/R$ yazılarak bilinmeyenler $\bar{u}_n$, $\bar{u}_t$, $\bar{\Omega}_b$, $\bar{M}_b$, $\bar{T}_n$, $\bar{T}_t$ olacak şekilde düzenlendiğinde, genel çubuklara ait eleman denkleminde, düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan sonlu eleman denklemi,

$$[k_{ij}] \cdot \{y_i\} = [f_i] \quad (6.10)$$

şeklinde elde edilebilir ve

$$\begin{aligned} u_1 = \bar{u}_{ni} \quad u_2 = \bar{u}_{ti} \quad u_3 = \bar{\Omega}_{bi} \quad u_4 = \bar{M}_{bi} \quad u_5 = \bar{T}_{ti} \quad u_6 = \bar{T}_{ni} \\ u_7 = \bar{u}_{nj} \quad u_8 = \bar{u}_{tj} \quad u_9 = \bar{\Omega}_{bj} \quad u_{10} = \bar{M}_{bj} \quad u_{11} = \bar{T}_{tj} \quad u_{12} = \bar{T}_{nj} \end{aligned} \quad (6.11.a)$$

$$\begin{aligned} Y_i = \frac{1}{D_{bi}^*} \quad A_i = \frac{1}{C_{ti}^*} \quad K_i = \frac{1}{C_{bi}^*} \quad k_{1,1} = \frac{m_i p^2 L}{3} \quad k_{1,7} = \frac{k_{1,1}}{2} \\ y_1 = -L\left(\frac{Y_i}{4} + \frac{Y_j}{12}\right) \quad a_1 = -L\left(\frac{A_i}{4} + \frac{A_j}{12}\right) \quad k_1 = -L\left(\frac{K_i}{4} + \frac{K_j}{12}\right) \\ y_2 = -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{12}\right) \quad a_2 = -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{12}\right) \quad k_2 = -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{12}\right) \\ y_3 = -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{4}\right) \quad a_3 = -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{4}\right) \quad k_3 = -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.11.b)$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \bar{q}_{ni} \frac{L}{3} + \bar{q}_{nj} \frac{L}{6} & f_2 &= \bar{q}_{ti} \frac{L}{3} + \bar{q}_{tj} \frac{L}{6} & f_3 &= \bar{m}_{bi} \frac{L}{3} + \bar{m}_{bj} \frac{L}{6} \\
f_7 &= \bar{q}_{ni} \frac{L}{6} + \bar{q}_{nj} \frac{L}{3} & f_8 &= \bar{q}_{ti} \frac{L}{6} + \bar{q}_{tj} \frac{L}{3} & f_9 &= \bar{m}_{bi} \frac{L}{6} + \bar{m}_{bj} \frac{L}{3}
\end{aligned} \tag{6.11.c}$$

olmak üzere simetrik olan k_{ij} matrisinin açık formu,

$$\begin{bmatrix}
k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & \frac{1}{2} & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{6} \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 \\
-\frac{\chi L}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_1 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & k_1 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & k_2 \\
k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & \frac{1}{2} & k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{3} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_3 & 0 & 0 \\
-\frac{\chi L}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_3 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & k_2 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & k_3
\end{bmatrix} \tag{6.12}$$

şeklindedir.

Ayrıca düzlemi içinde yüklü viskoelastik daire eksenli çubuklara ait denklemlerden elde edilerek bulunan (5.10)'daki fonksiyonel yardımıyla (6.3)'teki gibi şekil fonksiyonlarını kullanarak da bağımsız olarak, düzlemi içinde yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli (6.12)'deki sonlu eleman denkleminin aynısını elde etmek mümkündür.

6.5. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

(6.6)'da verilen eğrilikler yerine $\tau = 0$ ve $\kappa = 1/R$ yazılarak bilinmeyenler $\bar{u}_b$, $\bar{\Omega}_n$, $\bar{\Omega}_t$, $\bar{M}_n$, $\bar{M}_t$, $\bar{T}_b$ olacak şekilde düzenlenirse, (6.5)'den düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan sonlu eleman denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 Y_i &= \frac{1}{D_{bi}^*} & A_i &= \frac{1}{C_{ti}^*} & K_i &= \frac{1}{C_{bi}^*} & k_{1,1} &= \frac{(k + m_i p^2)L}{3} & k_{1,7} &= \frac{k_{1,1}}{2} \\
 y_1 &= -L\left(\frac{Y_i}{4} + \frac{Y_j}{12}\right) & a_1 &= -L\left(\frac{A_i}{4} + \frac{A_j}{12}\right) & k_1 &= -L\left(\frac{K_i}{4} + \frac{K_j}{12}\right) \\
 y_2 &= -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{12}\right) & a_2 &= -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{12}\right) & k_2 &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{12}\right) \\
 y_3 &= -L\left(\frac{Y_i}{12} + \frac{Y_j}{4}\right) & a_3 &= -L\left(\frac{A_i}{12} + \frac{A_j}{4}\right) & k_3 &= -L\left(\frac{K_i}{12} + \frac{K_j}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

olmak üzere simetrik eleman matrisinin açık formu,

$$\begin{bmatrix}
 k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & \frac{1}{2} & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{6} \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 \\
 -\frac{\chi L}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_1 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & k_1 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & k_2 \\
 k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{6} & \frac{1}{2} & k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{3} \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_3 & 0 & 0 \\
 -\frac{\chi L}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 & -\frac{\chi L}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_3 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{6} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & k_2 & -\frac{1}{2} & \frac{\chi L}{3} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & k_3
 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

şeklindedir. Ayrıca, sonlu eleman denkleminin sağ tarafı ise

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{q}_{bi} \frac{L}{3} + \bar{q}_{bi} \frac{L}{6} & f_7 &= \bar{q}_{bi} \frac{L}{6} + \bar{q}_{bi} \frac{L}{3} & f_4 &= f_{10} = 0 \\
 f_2 &= \bar{m}_{ni} \frac{L}{3} + \bar{m}_{ni} \frac{L}{6} & f_8 &= \bar{m}_{ni} \frac{L}{6} + \bar{m}_{ni} \frac{L}{3} & f_5 &= f_{11} = 0 \\
 f_3 &= \bar{m}_{ti} \frac{L}{3} + \bar{m}_{ti} \frac{L}{6} & f_9 &= \bar{m}_{ti} \frac{L}{6} + \bar{m}_{ti} \frac{L}{3} & f_6 &= f_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

şeklindedir.

(5.11)'da bulunan fonksiyonel yardımıyla (6.3)'teki gibi şekil fonksiyonlarını kullanarak da (6.14)'teki düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan sonlu eleman denkleminin aynısını elde etmek mümkündür.

6.6. Parabolik Eksenli Çubuklar

Eksenli $x=m \cdot z^2$ olacak şekilde düzlemi içinde yüklü bir parabolik çubuk alınsın. Burada ds çubuk boyu $ds = \sqrt{1+x'^2} dz$ şeklinde olacaktır. (5.12)'de bulunan fonksiyonlardan, (6.2) yardımıyla (6.1)'deki şekil fonksiyonları kullanılarak parabolik eksenli çubuklar için geçerli olan sonlu eleman denklemi elde edilebilir. $m = \frac{4 \cdot f}{L^2}$ şeklinde seçilerek

$x=m \cdot z^2$ olmak üzere tekrar $\tau = 0$ iken $\kappa = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}$ alınarak bilinmeyenler $\bar{u}_n, \bar{u}_t,$

$\bar{\Omega}_b, \bar{M}_b, \bar{T}_n, \bar{T}_t$ olacak şekilde şekil fonksiyonlarıyla beraber (5.12)'deki fonksiyonelde yerine koyularak ekstremum olacak şekilde düzenlendiğinde, düzlemi içinde yüklü parabolik eksenli çubuklar için geçerli olan eleman denklemi elde edilmiş olur. (6.10)'daki düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuklara ait sonlu eleman denklemi ile aynı formda yazılabilir. Ancak, (6.10)'daki k_{ij} eleman matrisinin parabolik çubuk olması durumu için yeni açık formu,

$$\begin{bmatrix}
 k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -V_4 & \frac{1}{2} & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -V_5 & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & V_5 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -V_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -V_2 \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 \\
 -V_4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_1 & 0 & -V_5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
 \frac{1}{2} & V_4 & -V_1 & 0 & 0 & k_1 & \frac{1}{2} & V_5 & -V_2 & 0 & 0 & k_2 \\
 k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & -V_5 & \frac{1}{2} & k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -V_6 & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & V_6 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -V_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -V_3 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & y_3 & 0 & 0 \\
 -V_5 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_2 & 0 & -V_6 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & a_3 & 0 \\
 -\frac{1}{2} & V_5 & -V_2 & 0 & 0 & k_2 & -\frac{1}{2} & V_6 & -V_3 & 0 & 0 & k_3
 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{4*f}{L^2} & a &= z_1 & b &= z_2 \\
 sq_a &= \sqrt{1+4*a^2*m^2} & sa &= 2*m*a & ca1 &= 8*m^2*a^2-13 \\
 sq_b &= \sqrt{1+4*b^2*m^2} & sb &= 2*m*b & cb1 &= 8*m^2*b^2-13 \\
 ca2 &= 16*m^2*a^2-1 & ca4 &= 16*m^2*a*b-1 \\
 cb2 &= 8*m^2*b^2-1 & cb4 &= 3-48*m^2*a*b \\
 ca3 &= 24*m^2*a^3-16*b-64*a^2*b*m^2+a*(3+48*b^2*m^2) \\
 cb3 &= 48*m^2*a^2*b-16*a*(1+4*b^2*m^2)+3*(b+8*b^3*m^2) \\
 ca5 &= 5*a+8*b+8*a^3*m^2-16*a^2*b*m^2 \\
 cb5 &= 8*a+5*b-16*a*b^2*m^2+8*b^3*m^2 \\
 ca6 &= 16*a*b*m^2-1 & ca8 &= 48*a^2*m^2-3 \\
 cb6 &= 1-4*a*b*m^2 & cb8 &= 48*b^2*m^2-3
 \end{aligned} \quad (6.17.a)$$

$$\begin{aligned}
ca7 &= 1 - 4*m^2*a^2 & ca10 &= 192*(a-b)^2*m^3 \\
cb7 &= 1 - 4*m^2*b^2 & cb10 &= 4*(a-b)^2*m^2 \\
ca9 &= \log(sqa^2) - \log(sqb^2) & ca11 &= \arcsin h(sa) \\
cb9 &= \arctan(sa) - \arctan(sb) & cb11 &= \arcsin h(sb) \\
ca12 &= sb*sqb*cb1 - 2*m*sqa*ca3 \\
cb12 &= -sa*sqa*ca1 + 2*m*sqb*cb3 \\
ca13 &= 2*m*(sqb*cb5 - sqa*ca5) & ca15 &= 45*m*a - 240*a^3*m^3 \\
cb13 &= 960*m^4*(a-b)^2*(b-a) & cb15 &= 45*m*b - 240*b^3*m^3 \\
ca14 &= 4 - 83*a^2*m^2 + 24*a^4*m^4 \\
cb14 &= 4 - 83*b^2*m^2 + 24*b^4*m^4 \\
ca16 &= -4 + 120*b^2*m^2 + 96*a^4*m^4 - 360*b*a^3*m^4 & (6.17.b) \\
cb16 &= -(3 + 16*b^2*m^2)*15*a*b*m^4 + 8*a^2*(m^2 + 60*b^2*m^4) \\
ca17 &= 65*a*b^2*m^2 - 4 + 18*b^2*m^2 - 40*a*b^3*m^4 + 16*b^4*m^4 \\
cb17 &= (a + 2*b - 16*a*b^2*m^2)*m \\
ca18 &= 4 - 50*a*b*m^2 - 40*b^2*m^2 + 24*a^4*m^4) \\
cb18 &= a^2*m^2*(7 + 80*b^2*m^2) - 80*a^3*b*m^4) \\
ca19 &= -240*a^3*b*m^4 + 120*a^2*(m^2 + 4*b^2*m^4) \\
cb19 &= -45*a*(b*m^2 + 8*b^3*m^4) + 4*(-1 + 2*b^2*m^2 + 24*b^4*m^4) \\
ca20 &= 4 + 7*b^2*m^2 + 40*a^2*m^2*(-1 + 2*b^2*m^2) \\
cb20 &= 24*b^4*m^4 - 10*a*b*m^2*(5 + 8*b^2*m^2) \\
ca21 &= (-2*a - b + 16*a^2*b*m^2)*15*m \\
cb21 &= -4 + 18*m^2*b^2 + 65*a*b*m^2 + 16*a^4*m^4 - 40*a^3*b*m^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \frac{2*sqb*cb14 + 2*sqa*(ca16 + cb16) + cb15*(ca11 - cb11)}{cb13} \\
V_{12} &= \frac{2*sqb*ca17 + 2*sqa*(ca18 + cb18) + cb17*(cb11 - ca11)}{cb13} \\
V_{13} &= \frac{2*sqa*ca14 + 2*sqb*(ca19 + cb19) + ca15*(cb11 - ca11)}{cb13} \\
V_{14} &= \frac{2*sqa*cb21 + 2*sqb*(ca20 + cb20) + ca21*(cb11 - ca11)}{cb13} & (6.17.c)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{ca12 - 3*cb12*ca11 + cb8*cb11}{ca10} & y_1 &= -\left(\frac{V_{11}}{\bar{D}_{bi}^*} + \frac{V_{12}}{\bar{D}_{bj}^*}\right) \\
V_2 &= \frac{ca13 + 3*ca6*ca11 + cb4*cb11}{ca10} & y_2 &= -\left(\frac{V_{12}}{\bar{D}_{bi}^*} + \frac{V_{14}}{\bar{D}_{bj}^*}\right) \\
V_3 &= \frac{cb12 - 3*ca2*ca11 + ca8*cb11}{ca10} & y_3 &= -\left(\frac{V_{14}}{\bar{D}_{bi}^*} + \frac{V_{13}}{\bar{D}_{bj}^*}\right) \\
V_4 &= \frac{cb7*cb9 + sb - sa + sb*ca9}{ca10} & a_1 &= -\left(\frac{V_{11}}{\bar{C}_{ti}^*} + \frac{V_{12}}{\bar{C}_{tj}^*}\right) \\
V_5 &= \frac{-cb6*cb9 - sb + sa - m*(a+b)*ca9}{ca10} & a_2 &= -\left(\frac{V_{12}}{\bar{C}_{ti}^*} + \frac{V_{14}}{\bar{C}_{tj}^*}\right) \\
V_6 &= \frac{ca7*cb9 + sb - sa + sa*ca9}{ca10} & a_3 &= -\left(\frac{V_{14}}{\bar{C}_{ti}^*} + \frac{V_{13}}{\bar{C}_{tj}^*}\right) \\
k_1 &= -\left(\frac{V_{11}}{\bar{C}_{ni}^*} + \frac{V_{12}}{\bar{C}_{nj}^*}\right) & k_2 &= -\left(\frac{V_{12}}{\bar{C}_{ni}^*} + \frac{V_{14}}{\bar{C}_{nj}^*}\right) & k_3 &= -\left(\frac{V_{14}}{\bar{C}_{ni}^*} + \frac{V_{13}}{\bar{C}_{nj}^*}\right)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

şeklindedir.

Ayrıca, sonlu eleman denkleminin sağ tarafı ise

$$\begin{aligned}
f_1 &= \bar{q}_{ni} V_1 + \bar{q}_{ni} V_2 & f_7 &= \bar{q}_{bi} V_2 + \bar{q}_{bi} V_3 & f_4 &= f_{10} = 0 \\
f_2 &= \bar{q}_{ti} V_1 + \bar{q}_{ti} V_2 & f_8 &= \bar{q}_{ti} V_2 + \bar{q}_{ti} V_3 & f_5 &= f_{11} = 0 \\
f_3 &= \bar{m}_{bi} V_1 + \bar{m}_{bi} V_2 & f_9 &= \bar{m}_{bi} V_2 + \bar{m}_{bi} V_3 & f_6 &= f_{12} = 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

şeklindedir.

7. SAYISAL TERS LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ

7.1. Giriş

Laplace-Carson uzayında hesaplanan bir büyüklüğün anlam kazanması için, zaman uzayına taşınabilmesi gerekir. Bu da ancak sayısal ters Laplace dönüşüm teknikleri ile mümkündür. Literatürde birçok sayısal ters Laplace dönüşüm tekniği vardır. Doğru sonuçlara erişmek için uygun tekniğin seçimi ve tekniğin uygun kullanılması deneyim gerektirir. Bu çalışmada ele alınan kuazi-statik ve dinamik problemlerin çözümünde başvurulmuş sayısal ters Laplace dönüşümleri aşağıda açıklanmıştır.

Literatürde var olan çeşitli sayısal ters Laplace dönüşümleri Narayanan [32] tarafından incelenmiş ve sınıflandırma yapılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre çalışmaları 3 grup ile

- Interpolasyon-kollokasyon metodları [52-54]
- Ortogonal fonksiyonların açılımına dayanan metodlar [55-57]
- Sayısal Fourier transformuna dayalı metodlar [58, 59]

olarak sınıflandırmak mümkündür.

Bunlara ilave olarak, 1993'de Duffy [60] tarafından sayısal ters Laplace dönüşümleri incelenerek, literatürden aldığı uygulamalarla üç sayısal ters dönüşüm metodunun karşılaştırması yapılmıştır.

Yukarıda verilen sayısal ters Laplace dönüşüm tekniklerinden olan 3 gruptaki çeşitli metodlardan bazıları bu çalışmada kullanılmıştır. Burada çalışmada kullanılan teknikler hakkında kısaca bilgi vererek inceleyelim.

7.2. En Büyük Duyarlılık Derecesi (*Maximum Degree of Precision*) Metodu

$r = p/t$ değişken dönüşümü yapılarak (4.2) nolu ifadede yerine konulur ve $\phi(p)$ regular olmak şartıyla $F(p) = \phi(p)/p^m$ şeklinde yazılarak quadrature formülü ile (7.1) şekline dönüşür.

$$f(t) \cong \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n W_k^m S_k^m \left[F\left(\frac{S_k}{t}\right) \right] \quad (7.1)$$

Burada W_k ağırlık değerleri, S_k apsis değerleridir. Ağırlık ve apsis değerleri Krylov ve Skoblya [52]'den alınacaktır. Daha detaylı bilgi Krylov ve Skoblya [52] tarafından yapılan çalışmada bulunmaktadır. Geliştirilen bilgisayar programından $m=1$ ve $n=10$ için iyi sonuçlar alınmıştır. Özellikle herhangi bir zamandaki değer isteniyorsa bu metod tavsiye edilir. Çünkü doğrudan istenen zamandaki değer bulunabiliyor. Diğer metodlarla istenen zamandaki tek değeri bulmanın imkanı yoktur ve eğer t zamanındaki sonuç istenirse $(0,t)$ aralığı Δt adımları ile taranarak t zamanına ulaşıldığı için zaman kaybı çoktur. Nedeni ise karmaşık sayılarla uğraşılmasıdır. Çünkü bu metotta Laplace dönüşüm parametresi kompleks değerlere sahiptir.

Bu metod için $N=10$ alınması yeterlidir. Δt zaman aralığı istendiği gibi verilebilir ve istenildiği kadar Δt alınabilir. Hatta istenilen tek bir zamandaki değer doğrudan bulunabilir. Yapılan test problemlerinde bu incelenmiştir. Δt değerini ilk önce 0.1 alınmış, sonra 1., daha sonrada 5., 10. saniye gibi alınarak sonuçlar karşılaştırılmış ve aynı sonuçlar elde edilmiştir. Δt 'nin değişmesi sonuçları etkilememektedir.

7.3. Schapery Kollokasyon Metodu

p Laplace dönüşüm parametresi real değerlere sahiptir [53]. Schapery kollokasyon metodu atalet kuvvetlerinin ihmal edildiği kuazi-statik problemler için uygundur. Aranılan fonksiyonun sonsuzdaki değerinin bilinmesi gerekiyor. Fonksiyonun sonsuzdaki değeri bilinmiyorsa bu metod kullanılamaz. Bu nedenle dinamik çözümde bu metod kullanılmıyor. Kuazi-statik çözümde iyi sonuçlar veriyor.

Aranan fonksiyonun kendisi iki parçaya ayrılarak

$$v(t) = \Delta v(t) + v_{\infty} \quad (7.2)$$

şeklinde olduğunu düşünölsün. Fonksiyon yaklaşık olarak

$$\tilde{v}(t) = \tilde{\Delta}v(t) + v_{\infty} \quad (7.3)$$

seçilsin ve aşğıdaki şartları sağlasın.

$$\Delta v(\infty) = 0 \quad p\tilde{v}|_{p=0} = v(\infty) = v_{\infty} \quad (7.4)$$

Yaklaşık olarak alınan fonksiyon aşğıdaki gibi seçilsin.

$$\tilde{\Delta}v(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\lambda_i t} \quad (7.5)$$

(7.2) ve (7.3) fonksiyonları arasında en küçük kareler yöntemi kullanölsün. Böylece aralarındaki fark minimum yapılmış olur.

$$E^2 = \int_0^{\infty} (v(t) - \tilde{v}(t))^2 dt$$

$$E^2 = \int_0^{\infty} \left[\Delta v(t) - \sum_{i=1}^N A_i e^{-\lambda_i t} \right]^2 dt \quad (7.6)$$

Gerekli işlemler yapıp düzenlendiğinde,

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} A_i = p \overline{\Delta v(p)} \Big|_{p=\lambda_j} \quad j = 1, N \quad (7.7)$$

haline dönüşür. Şimdi (7.3) ifadesinin Laplace dönüşümü alönsin.

$$\bar{v}(p) = \overline{\Delta v}(p) + \frac{1}{p} v_{\infty} \quad (7.8)$$

Bu ifade düzenlendiğinde,

$$p \overline{\Delta v} = p \bar{v}(p) - v_{\infty} \quad (7.9)$$

(7.7) ifadesinde yerine yerleştirildiği zaman,

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} A_i = (p \bar{v}(p) - v_{\infty}) \Big|_{p=\lambda_j} \quad (7.10)$$

ifadesi elde edilir. Bu (7.10) ifadesi $N \times N$ lik bir denklem verir. Bu denklemden A_i katsayıları bulunur. A_i katsayıları bulunduktan sonra çözüm (7.3) şeklinde seçilmiştir. O halde çözüm:

$$v(t) = v_{\infty} + \sum_{i=1}^N A_i e^{-\lambda_i t} \quad (7.11)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

7.4. Dubner ve Abate Metodu

Detaylı bilgi Dubner ve Abate [58] tarafından yapılan çalışmada bulunmaktadır. Bir kısmı elle çıkartılarak incelenmiştir. Bu metot Fourier-kosinüs transformaya dayalıdır ve p Laplace dönüşüm parametresi kompleks değerlere sahiptir. Statik ve dinamik çözümler için iyi sonuçlar vermektedir.

Laplace uzayındaki sonuçlar biliniyorsa zaman uzayındaki çözümler,

$$f(t) \cong \frac{2e^{at}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \text{Re}[F(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left[F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi}{T} t\right) \right\} \quad (7.12)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. Burada,

$$a T = A \quad T = 2 t \quad (7.13)$$

şeklinde alırsak (7.12) ifadesi

$$f(t) \cong \frac{e^{A/2}}{t} \left\{ \frac{1}{2} F\left(\frac{A}{2t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Re} \left[F\left(\frac{A + 2n\pi i}{2t}\right) \right] \right\} \quad (7.14)$$

haline gelir.

Geliştirilen bilgisayar programı yapılırken (7.12) ifadesi ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlardan da görülebileceği gibi ters dönüşüm işlemi alındıktan sonra zamanın belli bir değerinden sonra salınımlar meydana gelmektedir.

$a = aT / T$, $dT = T / N$ alınmaktadır. Geliştirilen programa dışarıdan aT , T ve N data olarak girilmektedir.

(7.12) ifadesi $0 \leq t \leq T$ için geçerlidir. Ancak $t \leq T/4$ için iyi sonuç vermektedir. Daha fazla bilgi [58] numaralı kaynakda açıklanmaktadır. Diğer zamanlarda salınımlar meydana gelmektedir. Salınımlar seçilen aT ve N değerlerine bağlıdır. Bu değerler ne kadar büyük alınırsa çözümden sapmalar ve oluşan salınımlar daha büyük zamanlarda ortaya çıkmaktadır.

7.5. Durbin Metodu

Detaylı bilgi Durbin [59] tarafından yapılan bir çalışmada bulunmaktadır. Bu metot sinüs-kosinüs Fourier transformaya dayalıdır ve p Laplace dönüşüm parametresi kompleks değerlere sahiptir. Laplace uzayındaki sonuçlar biliniyorsa zaman uzayındaki çözümler,

$$f(t_j) \cong \frac{2 e^{a j \Delta t}}{T} \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[F(a)] + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} L_k [A(k) + i B(k)] W^{jk} \right] \right\} \quad (7.15)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. Burada (7.15)'deki katsayılar

$$A(k) = \sum_{l=0}^L \operatorname{Re} \left[F \left(a + i (k+l N) \frac{2\pi}{N} \right) \right] \quad (7.16)$$

$$B(k) = \sum_{l=0}^L \operatorname{Im} \left[F \left(a + i (k+l N) \frac{2\pi}{N} \right) \right] \quad (7.17)$$

biçiminde olup diğer katsayılar

$$W = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \quad (7.18)$$

$$L_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \quad (7.19)$$

şeklindedir. $L=1$ almak yeterlidir. Statik ve dinamik çözümler için iyi sonuçlar vermektedir.

7.6. Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Yöntemlerine Ait Uygulamalar

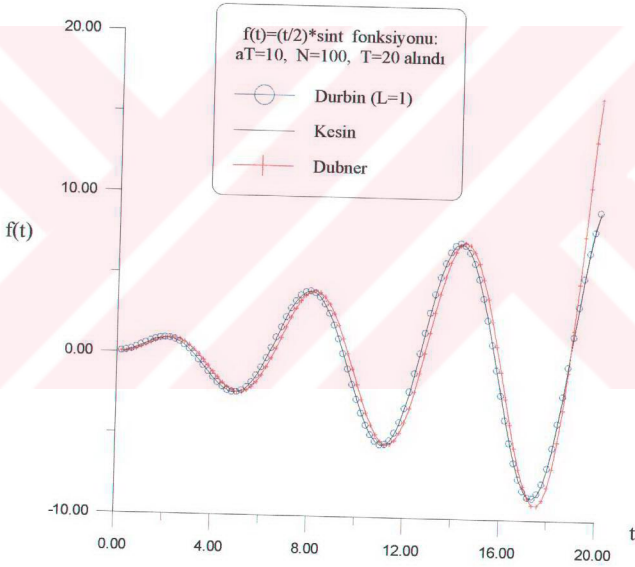
Yukarıda anlatılan sayısal ters dönüşüm metodlarının teorilerini ele alarak bilgisayar programı geliştirilmiştir. Böylece Laplace uzayındaki sayısal çözümler verildiği takdirde buna karşı gelen gerçek zaman uzayındaki çözümler geliştirilen bilgisayar programı yardımı ile elde edilmektedir. Sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerini test etmek için birkaç örnek seçilsin. Test örneklerinin Laplace dönüşümü bilinen veya dönüşümü kolaylıkla alınabilen bir zamanın fonksiyonu şeklinde ele alınsın. Kullanılan yöntemlerden birkaçı incelensin. Sonuçlar da grafik ile gösterilirse:

7.6.1. Örnek-1

İlk örnekte aranılan zamanın fonksiyonu olarak $f(t) = \frac{t}{2} \sin t$ şeklinde bir fonksiyon seçilsin. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü,

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \quad (7.20)$$

biçimindedir. Şimdi çeşitli p değerleri için (7.20) ifadesi ile aranan fonksiyonun sayısal değerleri biliniyor. Bu sayılar kullanılarak gerçek zaman uzayındaki çözümlere ulaşılmaya çalışılsın. Burada sayısal ters dönüşüm yapabilen geliştirilen bilgisayar programından faydalanılacaktır. Sonuçlar Şekil 7.1’de topluca gösterilmiştir. Görüldüğü gibi aranan fonksiyon elde edilmiştir. Dubner ve Abate yöntemi teorisinden de görüleceği gibi zamanın büyük değerlerindeki çözüm etrafında salınım yapıyor. Durbin metodu ise zamanın büyük değerlerinde sonsuza gidiyor.



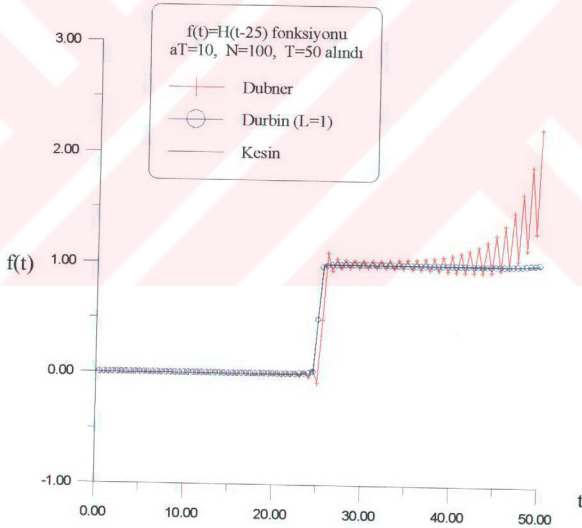
Şekil 7.1 Dubner ve Durbin metodlarının karşılaştırılması

7.6.2.Örnek-2

İkinci örnekte de aranan zamanın fonksiyonu olarak $f(t) = H(t - 25)$ şeklinde bir fonksiyon seçilsin. Bu fonksiyonun da Laplace dönüşümü,

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-25p} \quad (7.21)$$

biçimindedir. Böylece çeşitli p değerleri için (7.21) ifadesi ile aranan fonksiyonun Laplace uzayındaki sayısal değerleri biliniyor. Bu sayılar kullanılarak gerçek zaman uzayındaki çözümlere ulaşmaya çalışılsın. Burada sayısal ters dönüşüm yapabilen geliştirilen bilgisayar programından faydalanılsın. Sonuçlar Şekil 7.2'de topluca gösterilmiştir. Görüldüğü gibi aranan fonksiyon elde edilmiştir. Dubner ve Abate yöntemi teorinden de anlaşılacağı gibi zamanın büyük değerlerindeki çözüm etrafında salınım görülmektedir. Ancak meydana gelen salınım seçilen N parametresi değerine bağlıdır. Bu N değeri büyük alınırsa salınım zamanın daha büyük değerlerinde görülmektedir. Bu nedenle salınımın başladığı zaman N değerine bağlıdır. Durbin metodu ise zamanın büyük değerlerinde sonsuza gidiyor.



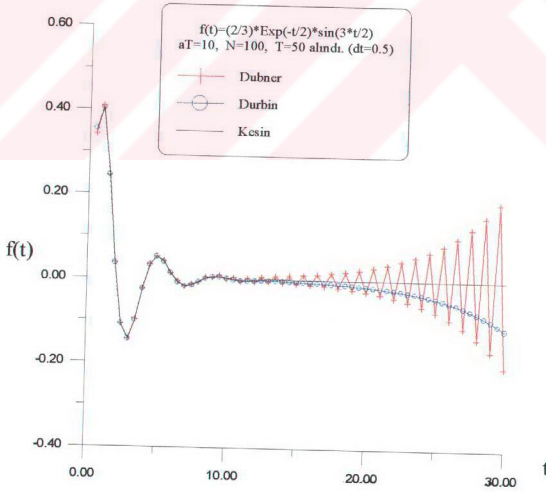
Şekil 7.2 Dubner ve Durbin metodlarının karşılaştırılması

7.6.3. Örnek-3

Üçüncü örnekte de aranılan fonksiyon olarak $f(t) = \frac{2}{3} e^{-t/2} \sin(\frac{3}{2}t)$ şeklinde bir zamanın fonksiyon seçilsin. Bu fonksiyonun da Laplace dönüşümü,

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 2.5} \quad (7.22)$$

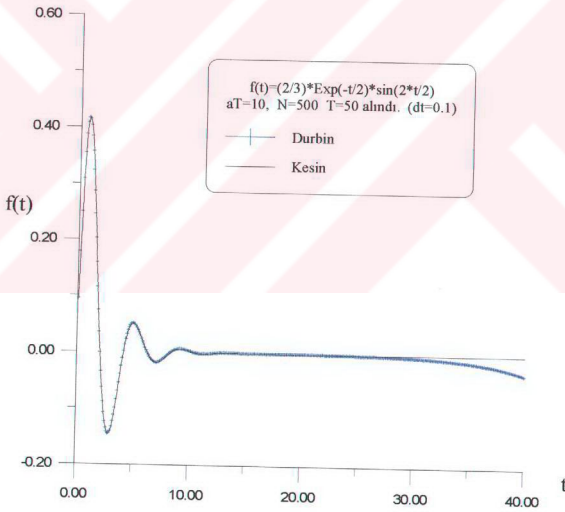
biçimindedir. Böylece mevcut (7.22) ifadesi ile çeşitli p değerleri için aranılan fonksiyonun Laplace uzayındaki sayısal değerleri biliniyor. Burada da bu uzaydaki sayısal değerleri ele alarak gerçek zaman uzayındaki çözümlere ulaşmaya çalışılsın. Sayısal ters dönüşüm yapabilen geliştirilen bilgisayar programından yararlanılsın. Sonuçlar Şekil 7.3’de topluca gösterilmiştir. Görüldüğü gibi aranan fonksiyon elde edilmiştir. Dubner ve Abate yöntemi ile burada da görüleceği gibi zamanın büyük değerlerindeki çözüm etrafında salınım yapıyor. Seçilen N değerini daha büyük alırsak Dubner ve Abate metoduna göre salınım daha büyük zamanlarda oluşacaktır.



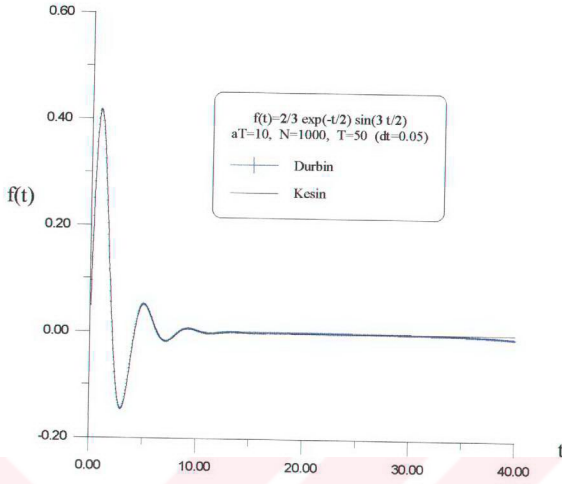
Şekil 7.3 Dubner ve Durbin metodlarının karşılaştırılması

Durbin metodunda da zamanın büyük değerlerinde sonsuza gidildiği görülmektedir. Bu Durbin metodunda da seçilen N parametresi önemli rol oynuyor. N değıştikçe büyük zamanlardaki çözümde değışiyor. N değışiminin sonuçları grafik olarak görölmek istenirse Şekil 7.4 ve Şekil 7.5’de verilmektedir. Bu şekillerde aT ve T değerleri sabit tutularak N parametresinin değışimi incelenmiştir. Burada aT= 10 ve T= 50 saniye olarak alınmıştır. Şekil 7.4’deki sonuçta N= 500 alındığında yaklaşık 28 saniyelerde çözümde uzaklaşma görölürken, Şekil 7.5’de uzaklaşma N= 1000 alındığında yaklaşık 36 saniyelerde görölmektedir. Daha önce Şekil 7.3’de verilen grafikde Durbin metoduna ait çözümde uzaklaşma daha zamanın başlarında yaklaşık 18 saniyelerde başlamaktadır.

Burada göröldüğü gibi N büyüdükçe sonsuza gidilen zaman da değışmektedir. Sonuç olarak N ne kadar büyük alınırsa o kadar iyi çözüm elde ediliyor.



Şekil 7.4 Durbin metodunda N parametresinin etkisi



Şekil 7.5 Durbin metodunda N parametresinin etkisi

8. SAYISAL UYGULAMALAR

Geliştirilen metodun performansı aşağıda sunulan çeşitli problemlerle test edilmiştir. Test problemlerinde kullanılan modellerin yay ve amortisörlerle bağlanması Bölüm-2.3'de şekillerle açıklanmıştır. Bütün uygulamalarda Kelvin ve üç parametrelili katı model kullanılmıştır. Çünkü Maxwell cisminde yük aniden uygulandığında elastik davranış göstermektedir. Fakat yerdeğiştirmeler zaman arttıkça belirsiz artmaktadır. Kelvin modelinde yerdeğiştirmeler $t \rightarrow \infty$ için sonlu bir değere yaklaşırken, yapıda da yük aniden uygulandığında elastik davranış vermez. Ancak Üç Parametrelili katı model elastik davranış verir ve $t \rightarrow \infty$ a giderkende yerdeğiştirmeler sonlu bir değere yaklaşır. Bu nedenle Üç Parametrelili katı model standart lineer malzeme olarak bilinmektedir.

Malzeme katsayıları referans [40]'daki gibi seçilmiştir. Kelvin modelinde katsayılar $E_0 = 9.8 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 2.744 \times 10^7 \text{ Ns/m}^2$, $\nu = 0.3$ ve diğer Üç Parametrelili katı modelde $E_1 = 9.8 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $E_2 = 2.45 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 2.744 \times 10^8 \text{ Ns/m}^2$, $\nu = 0.3$ olacak şekilde alınarak bütün örneklerde kullanılmıştır.

Kullanılan malzemelerin sünme fonksiyonları ve Laplace-Carson ifadeleri, Kelvin için

$$J(t) = \frac{1}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\eta} t} \right) \quad \bar{J}(t) = \frac{1}{E_0} \left(1 - \frac{p}{p + \frac{E_0}{\eta}} \right) \quad (8.1)$$

şeklinde iken Üç Parametrelili katı model için de

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \right) \quad \bar{J}(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \frac{p}{p + \frac{E_2}{\eta}} \right) \quad (8.2)$$

biçimindedir.

8.1. Doğru Eksenli Çubuklar

Geliştirilen programın test edilmesi amacı ile kesin çözümü hesaplayabildiğimiz özel basit problemler çözülmektedir. Bu nedenle iki ucundan basit mesnetlendirilmiş ve düzgün yayılı yük ile yüklü bir kiriş incelenmiştir. Sayısal çözümleri karşılaştırmak amacı ile önce problemlerin kesin çözümleri elde edilmiştir.

Burada incelenen bütün örneklerde Örnek-9 haricinde iki ucu basit mesnetli kiriş ele alınarak orta noktasındaki yerdeğişirmeler değişik yüklemeler altında incelenmiştir. Geometrik büyüklükler olarak kirişin boyu $L= 10$ m., genişliği $b= 2$ m. ve kalınlığı $h=0.5$ m. alınmıştır. Bütün örneklerde çubuk 20 elemana bölünerek hesaplanmıştır.

8.1.1. Örnek-4: Sabit Yüklü

Kirişin z eksenı boyunca bütün y doğrultusunda $q_0= 10$ N/m şiddetinde düzgün yayılı yük etmektedir. Etkiyen yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1'de gösterilmiştir.

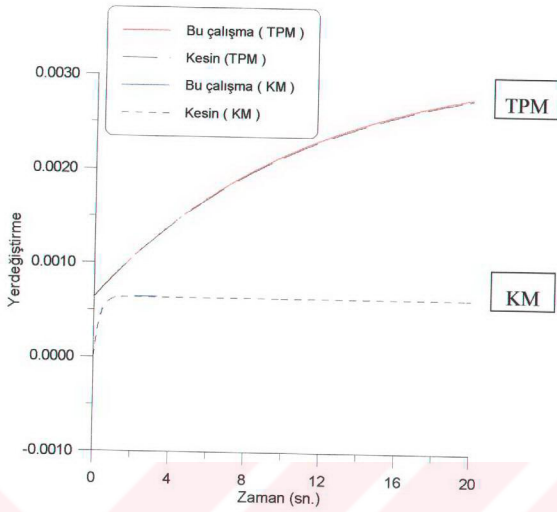


Şekil 8.1 Sabit yük

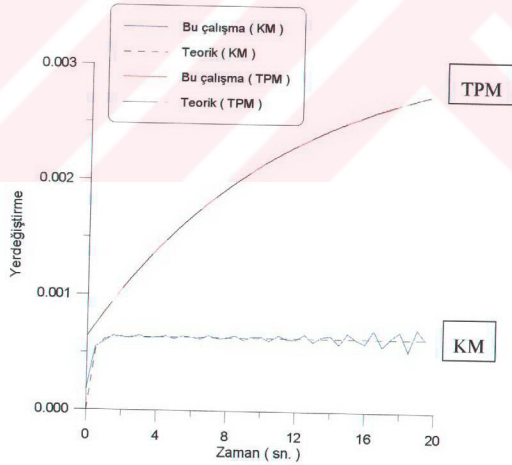
Kirişin orta noktasındaki kesin çökmenin kapalı olarak ifadesi

$$v(t) = \frac{5q_0 L^4}{384 I} J(t) \quad (8.3)$$

şeklindedir. Burada $J(t)$ malzemenin zamana bağlı sünme fonksiyonudur. Bu problem Kelvin ve Üç Parametrelı katı model ele alınarak Schapery kollokasyon ve Fourier ters dönüşüm tekniklerinden faydalanılarak çözülmüştür. Sonuçlar kesin çözüm olan denklem (8.3) ile karşılaştırılarak toplu halde Şekil 8.2 ve Şekil 8.3'de verilmiştir. Sonuçların üst üste düştüğü görülmektedir. Şekil 8.3'de ters Fourier Laplace dönüşümü kullanıldığında zamanın büyük değerlerinde dalgalanma görülmektedir.



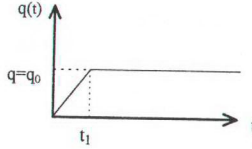
Şekil 8.2 Schapery kollokasyon metodu kullanarak KM (Kelvin Model) ve TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi



Şekil 8.3 Fourier metodunu kullanarak KM (Kelvin Model) ve TPM (Üç Parametrelili Model) için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

8.1.2. Örnek-5: Üçgen Yüklü

Bir önceki örnekte olduğu gibi aynı malzeme ve geometrik özellikler alınmıştır. Bu örnekte yükün zamanla değişimi Şekil 8.4'de çizilmiştir.



Şekil 8.4 Uygulanan yükün zamanla değişimi

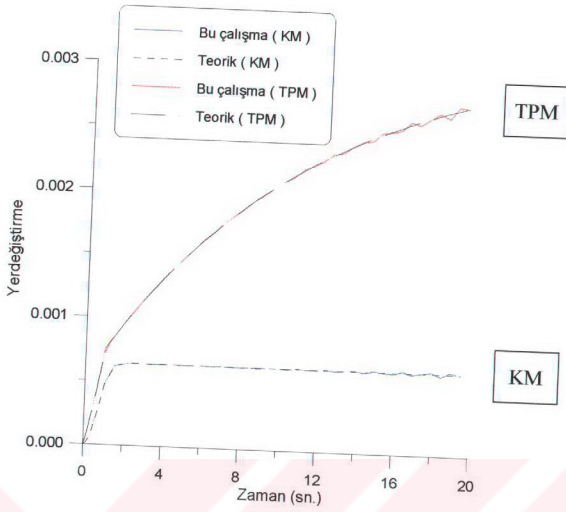
Yükün etkiye süresi $t_1=1$ sn. olarak alınmıştır. Kelvin ve Üç Parametrelili katı malzemeli modellerde, $t < t_1 = 1$ s. için kirişin orta noktasındaki kesin çökmenin kapalı olarak ifadesi

$$\begin{aligned} v_{\text{kelvin}}(t) &= \frac{5q_0 L^4}{384 E_0 I t_1} \left(t + \frac{\eta}{E_0} \left(e^{-\frac{E_0}{\eta} t} - 1 \right) \right) \\ v_{\text{üç par}}(t) &= \frac{5q_0 L^4}{384 I t_1} \left(\frac{t}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(t + \frac{\eta}{E_2} \left(e^{-\frac{E_2}{\eta} t} - 1 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

şeklinde elde edilir iken $t > t_1 = 1$ s. zamanı için orta noktadaki kesin çökmenin kapalı ifadesi ise

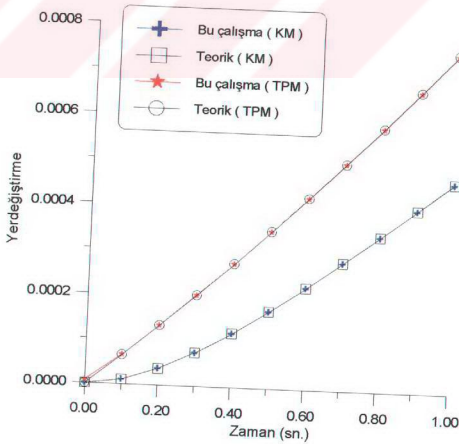
$$\begin{aligned} v_{\text{kelvin}}(t) &= \frac{5q_0 L^4}{384 E_0 I t_1} \left(t_1 - \frac{\eta}{E_2} e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \left(e^{-\frac{E_2}{\eta} t_1} - 1 \right) \right) \\ v_{\text{üç par}}(t) &= \frac{5q_0 L^4}{384 E_2 I t_1} \left(t_1 \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{\eta}{E_2} e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \left(e^{-\frac{E_2}{\eta} t_1} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

biçiminde elde edilmiştir. Bu problem Kelvin modeli (KM) ve Üç Parametrelili katı model (TPM) için basit mesnetli kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi kesin çözümlerle karşılaştırılarak Şekil 8.5'de gösterilmiştir.

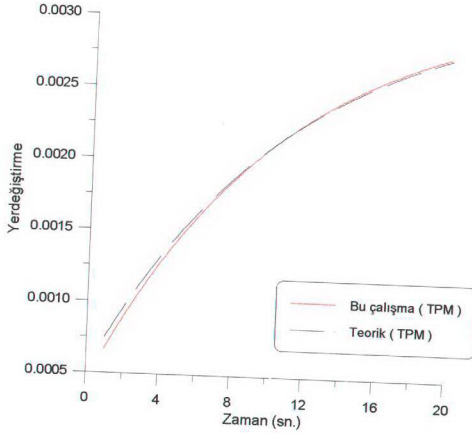


Şekil 8.5 Fourier ters dönüşüm tekniğini kullanarak KM (Kelvin Modeli) and TPM (Üç Parametrel Model) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

Ayrıca Şekil 8.6'da da $t < t_1 = 1$ s. için sonuçlar kesin çözümlerle beraber verilmiştir. Şekil 8.7'de Üç Parametrel katı model ele alınarak $t > t_1 = 1$ s. zamanında sonuçları elde etmek için Schapery kollokasyon metodu kullanılmıştır.

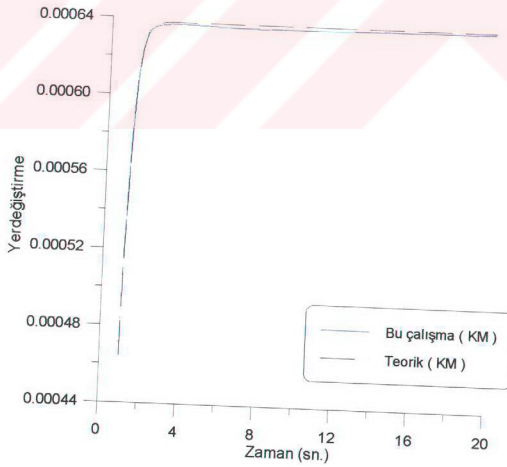


Şekil 8.6 Fourier methodu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi

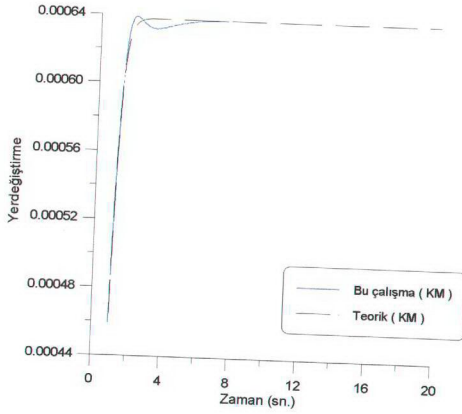


Şekil 8.7 Schapery kollokasyon methodunu kullanarak TPM (Üç Parametrelî Model) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

Schapery kollokasyon metodunun başarısı p Laplace parametresinin seçimine bağlıdır ve Kelvin modeli alınarak sonuçlar incelenerek Şekil 8.8 ve Şekil 8.9'da verilmiştir. Schapery metodu için Laplace parametresi olarak 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 almak yeterlidir.



Şekil 8.8 Farklı p 'lerle Schapery kollokasyon methodunu kullanarak KM (Kelvin Modeli) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi ($p=0.08, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)



Şekil 8.9 Farklı p 'lerle Schapery kollokasyon methodunu kullanarak KM (Kelvin Modeli) için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi ($p=1,2,3,4,5,6$)

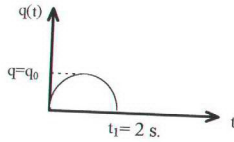
8.1.3. Örnek-6: Sinüzoidal Yüklü

Kelvin modelli iki ucu basit mesnetli viskoelastik kirişe zamanla değişimi Şekil 8.10'da gösterilen üniform yayılı yük etkisin. Kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

$$v_{kelvin}(t) = \frac{5q_0 L^4}{384 E_0 I} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \pi^2 \frac{t_1^2}{t_1^2})} \left(\lambda \sin\left(\frac{\pi}{t_1} t\right) + \frac{\pi}{t_1} (e^{-\lambda t} - \cos\left(\frac{\pi}{t_1} t\right)) \right) \rightarrow t \leq t_1$$

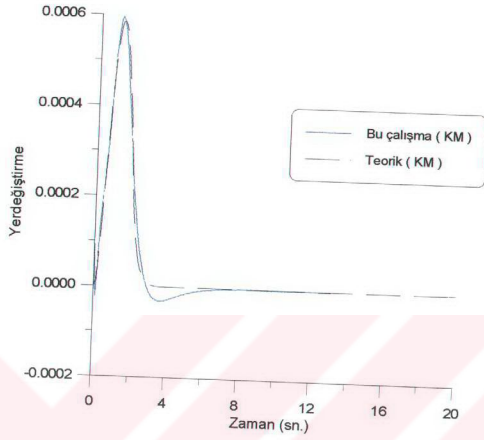
$$v_{kelvin}(t) = \frac{5q_0 L^4}{384 E_0 I} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \pi^2 \frac{t_1^2}{t_1^2})} \frac{\pi}{t_1} e^{-\lambda t} (1 + e^{-\lambda t_1}) \rightarrow t \geq t_1 \quad (\lambda = \frac{E}{\eta}) \quad (8.6)$$

olarak elde edilmiştir.

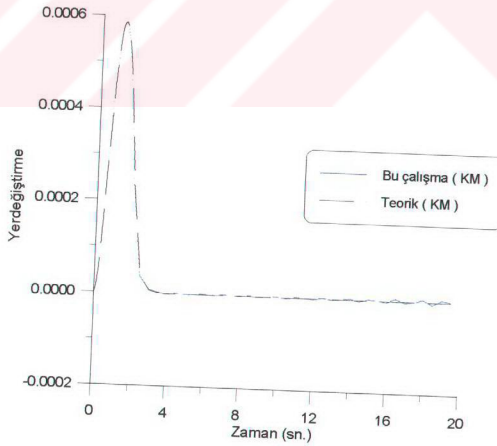


Şekil 8.10 Uygulanan yükün zamanla değişimi

Çubukta 10 eleman ve $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=3$, $p_4=4$, $p_5=5$ ve $p_6=6$ alınarak orta noktada elde edilen sonlu eleman çözümleri kullanılarak zaman uzayında erişilen sonuçlar Şekil 8.11 ve Şekil 8.12'de kesin çözümlerle karşılaştırılarak verilmiştir.

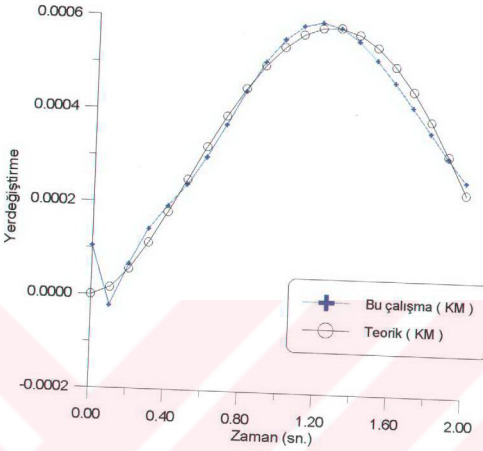


Şekil 8.11 Schapery kollokasyon methodunu kullanarak kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

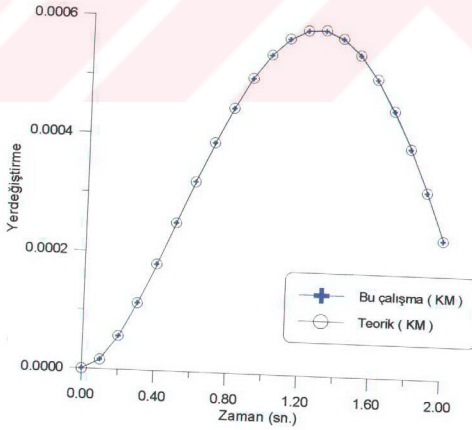


Şekil 8.12 Fourier methodunu kullanarak kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişimi

Ayrıca $t < t_1$ için aynı problemin sonuçları Şekil 8.13 ve Şekil 8.14'de kesin çözümler ile verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi kesik (anlık) yükler için Fourier metodu daha iyi sonuçlar vermektedir.



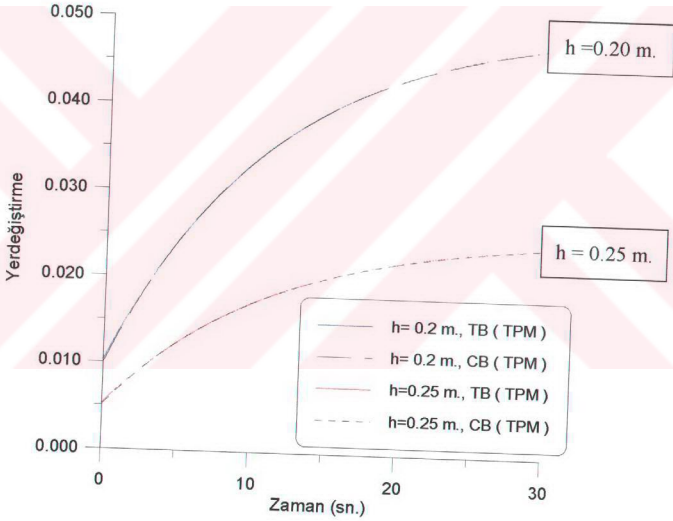
Şekil 8.13 Schapery kollokasyon metodunu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi



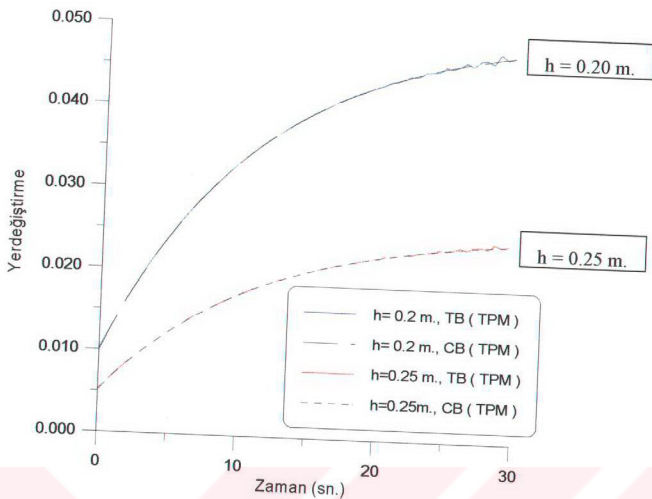
Şekil 8.14 Fourier metodunu kullanarak $t < t_1$ için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi

8.1.4. Örnek-7: Sabit Yüklü

Genellikle sonlu eleman metodunda [40] kirişin kalınlığı azaldığı zaman kayma kilitlenmesiyle karşılaşmaktadır. Literatürde bu zorluklardan kurtulmak için ya indirgenmiş integral (*Reduced Integration*) yada Kirchhoff elemanı kullanılmaktadır [61, 62]. Bu çalışmada kullanılan formülasyonda kayma kilitlenmesinin olmadığını göstermek için Schapery kollokasyon ve Fourier metodları ile Şekil 8.1'deki gibi sabit yayılı yük altında basit mesnetli viskoelastik kiriş ele alınsın. Üç Parametrelili katı modelden oluşan kirişin değişik sabit h yükseklikleriyle elde edilen sonuçlar Şekil 8.15 ve Şekil 8.16'da gösterilmiştir.

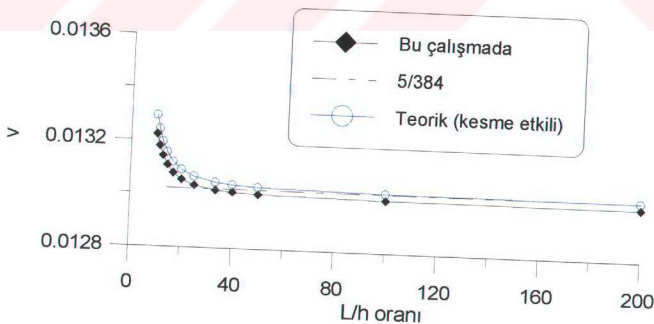


Şekil 8.15 Schapery kollokasyon metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=2$ m.)



Şekil 8.16 Fourier metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=2m$.)

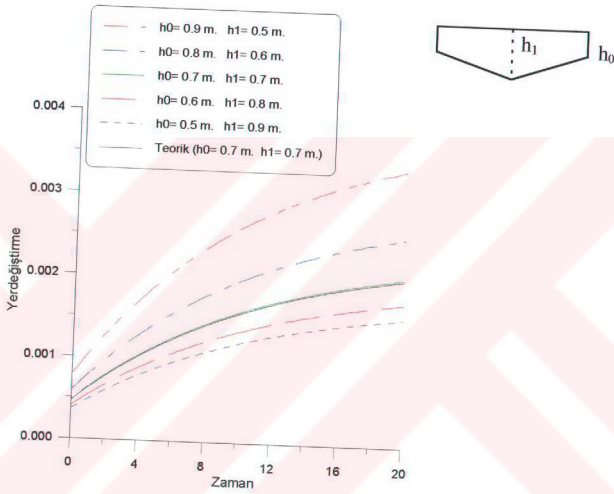
Ayrıca h daha da küçültülerek kayma kilitlenmesi incelenmiştir. Çeşitli h kesit yükseklikleri için problem çözülerek sonuçları Şekil 8.17'de verilmiştir. Kayma kilitlenmesinin olmadığı Şekil 8.17'den anlaşılmaktadır. Kesit yüksekliğinin azaltılması durumunda sonuçlar hesaplanırken kesme kuvvetinin etkisi de dikkate alınmıştır.



Şekil 8.17 Fourier metodunu kullanarak kirişin ortasında $t=10$ sn.'deki yerdeğiştirmenin çeşitli h değışimi ($b=2m$.)

8.1.5. Örnek-8: Sabit Yüklü Değişken Enkesitli

Bu örnekte de eksen boyunca değişken enkesitli kiriş incelenmiştir. Üç Parametrelili katı modele sahip kirişin Şekil 8.1'deki gibi sabit yayılı yük ile yüklenmesi durumunda Fourier metodunu kullanarak orta noktadaki yerdeğiştirmeye ait sonuçları değişik h kalınlıkları için Şekil 8.18'de çeşitli alternatiflerle sunulmuştur. Sonuçların istenilen derecede iyi olduğu görülmektedir.

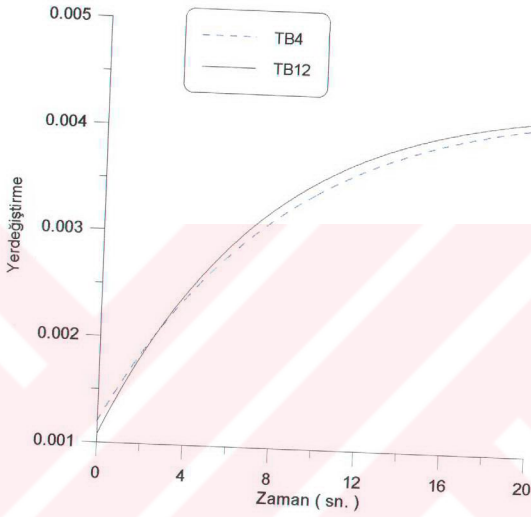


Şekil 8.18 Fourier metodunu kullanarak TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi ($b=1$ m.)

8.1.6. Örnek-9: Sabit Yüklü İki Ucu Ankastre

Burada da elastik zemine oturan iki ucu ankastre doğru eksenli Üç Parametrelili katı model için hem kayma etkisi dikkate alınarak TB12 ile hemde kayma etkisi ihmal edilerek TB4 ile sonuçlar elde edilmiştir. Elastik zemin olarak Winkler zemini dikkate alınmıştır. Bu örnekte kirişin geometrik özellikleri $L = 10$ m., $b = 2$ m., $h = 0.5$ m. olarak alınarak $q_0=100\delta(t)$ N/m'lik sabit yayılı yük uygulanmaktadır. Winkler zemin katsayısı olarak $k= 10$ kN/m. alınmıştır. Şekil 8.19'da kirişin orta noktasındaki

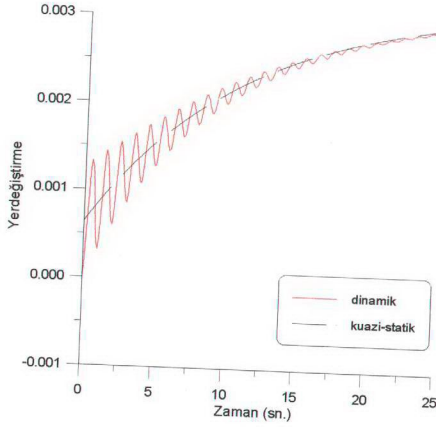
yerdeğiştirmenin zamanla değişimi gösterilmiştir. Kayma etkisini ihmal ederek TB4 ile hesap yapıldığında kirişin ortasındaki moment değeri $M_c=287$ Nm ve mesnetlerdeki moment değeri $M_s= -612$ Nm olarak elde edilmiştir. Kayma etkisini dikkate alarak TB12 ile hesap yaptığımızda da kirişin ortasındaki moment değeri $M_c=288$ Nm ve mesnetlerde moment değeri ise $M_s= -612$ Nm olarak bulunmuştur.



şekil 8.19 TB4 ve TB12 kullanarak elastik zemin üzerindeki iki ucu ankastre kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirme

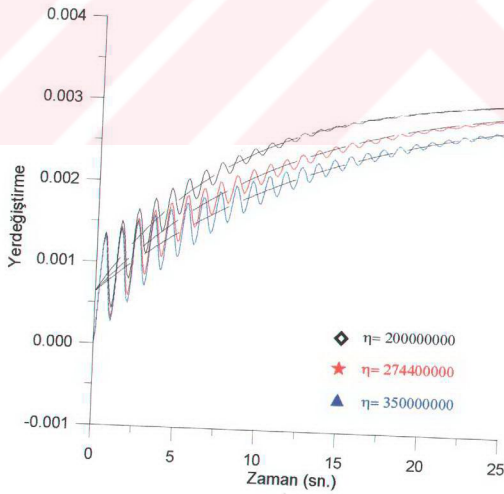
8.1.7. rnek-10: Sabit Yüklü Dinamik Analiz

Dinamik davranışı incelemek için önceki örneklerdeki gibi iki ucu basit mesnetli $q_0=10\delta(t)$ N/m sabit yaylı yükle yüklü viskoelastik doğru eksenli kiriş ele alınmıştır. Viskoelastik malzemenin yoğunluğunu ise $\rho= 500$ kg/m³ olsun. Sunulan formlas-yonda üç Parametrelili katı modele sahip kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin zamanla değişiminin kuazi-statik ve elasto dinamik sonuçları hesaplanarak şekil 8.20'de beraberce verilmiştir. Seçilen malzeme için viskoelastik kirişin dinamik davranışı 25 saniyeden sonra görülmemektedir.



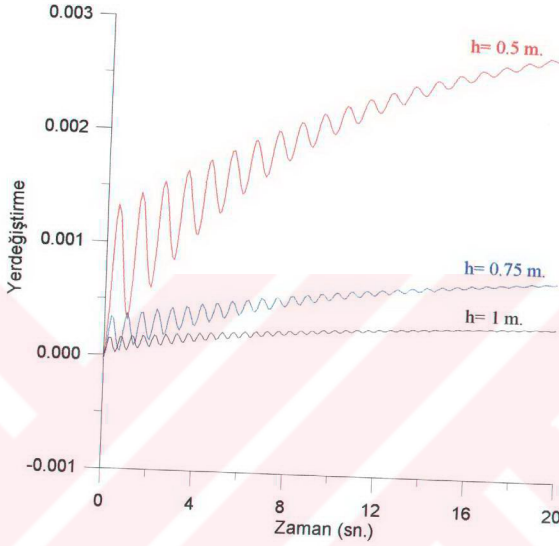
Şekil 8.20 TPM için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirme için kuazi-statik ve dinamik davranışı ($b=2\text{ m}$, $h=0.5\text{ m}$, $\eta=2.744 \times 10^8$)

Viskoelastik kirişte η viskozite katsayısının artmasının etkisinin sonuçları incelenerek Şekil 8.21'de verilmiştir. Görüldüğü gibi η viskozite katsayısı arttıkça zamanla kirişin ortasındaki yerdeğiştirme azalmaktadır.



Şekil 8.21 TPM için yerdeğiştirme üzerinde viskozite katsayısı η değişiminin etkisi

Ayrıca kirişin dinamik davranışında, viskoelastik kirişin kalınlığının değişiminin etkisi de incelenerek sonuçlar Şekil 8.22’de gösterilmiştir. Beklenildiği gibi kalınlık artışı zaman kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmesi azalmakta ve titreşimin frekansı da kalınlıkla doğru orantılı olduğu görülmektedir.



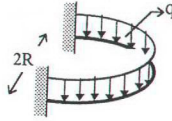
Şekil 8.22 TPM için frekans ve yerdeğiştirme üzerinde h kesit yüksekliğinin değişiminin etkisi

8.2. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Örnek-13 haricinde bütün örneklerde kesit büyüklükleri $R=10$ m., $b=1$ m. ve $h=1$ m. olarak alınmıştır. Örnek-13’de $b=1$ m, $h=0.5$ m. alınarak üç tekil yük ile yüklü daire eksenli kiriş alınmıştır. Örnek-14’de de elastik zemine oturan daire eksenli kiriş incelenmiştir. Örnek-13 ve 14 harici diğerlerinde iki ucu ankastre daire eksenli kiriş ele alınmıştır. Buradaki bütün örnekler 10 elemana bölünerek hesaplanmıştır.

8.2.1. Örnek-11: Üçgen Yüklü

Şekil 8.23'de gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 10 \text{ N/m}$ olan sabit yayılı yüklü iki ucu ankastre kiriş incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.4'de çizilmiştir. Yükün etkiye süresi $t_1 = 2 \text{ sn.}$ olarak alınmıştır.



Şekil 8.23 İki ucu ankastre dairesel kiriş

Bu örnekte dairesel kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin kesin çözümü Üç Parametrelili katı model için

$$\delta = \frac{\bar{D}_t^*}{\bar{D}_n^*} = \frac{2 b^2}{(1+\nu) h^2} \Rightarrow \tilde{T}_1 = \frac{R^4(1+\nu)}{\pi I_0} (2\pi(1+\delta) - (\pi^2 + 4\delta + 4) + \frac{\pi^3}{4}) \quad (8.7)$$

olacak şekilde $t < t_1 = 2 \text{ s.}$ zaman aralığında

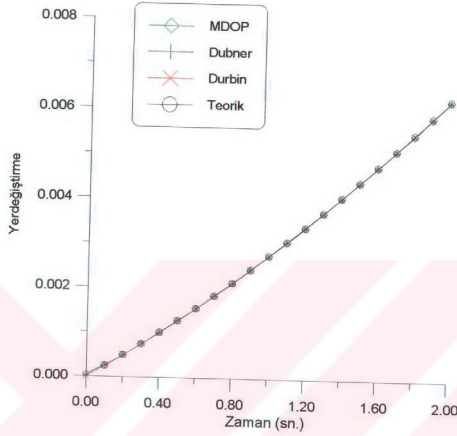
$$u_b = \frac{q_0 \tilde{T}_1}{t_1} \left(\frac{t}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(t + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) \right) \right) \quad (8.8)$$

biçiminde elde edilir iken $t > t_1 = 2 \text{ s.}$ zaman aralığında ise

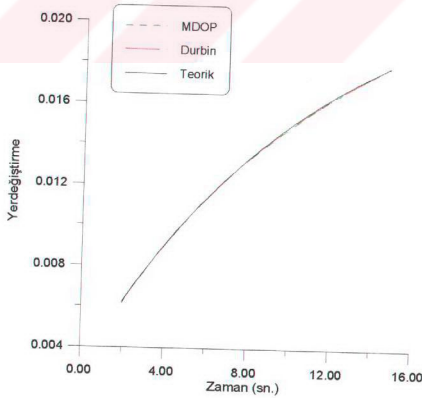
$$u_b = \frac{q_0 \tilde{T}_1}{E_2 t_1} (t_1 + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t_1} (1 - e^{-\lambda t})) \quad (8.9)$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu problem TPM (Üç Parametrelili Model) için MDOP (Maximum degree of precision), Dubner ve Durbin ters dönüşüm tekniklerinden yararlanarak çözülmüştür. Zamana göre kirişin orta noktasının yerdeğiştirmesinin değişimini kesin çözümlerle beraber $t < t_1 = 2 \text{ s.}$ için Şekil 8.24'de ve $t > t_1 = 2 \text{ s.}$ için ise Şekil 8.25'de verilmiştir. Bu problemde MDOP ve Durbin iyi sonuçlar

vermektedir. Dubner ters dönüşüm tekniğinde parametreler $aT=10$, $N=100$ olarak seçilirse zaman arttığında salınım görülmektedir. Dubner metodunun sonuçlarında varolan değişim şekillerde gösterilmemiştir. Seçilen parametreler arttığında zaman meydana gelen dalgalanma daha büyük zamanlar da ortaya çıkmaktadır.



Şekil 8.24 MDOP, Dubner, Durbin metodlarını kullanarak Şekil 8.4'de verilen yükleme için kirişin ortasındaki yerdeğiştiriminin değişimi ($t < t_1 = 2$ s.).



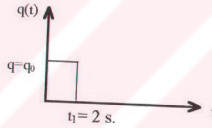
Şekil 8.25 Yayılı yükleme olarak Şekil 8.4 için kirişin ortasındaki yerdeğiştiriminin değişimi ($t > t_1 = 2$ s.).

8.2.2. Örnek-12: Anlık Yüklü

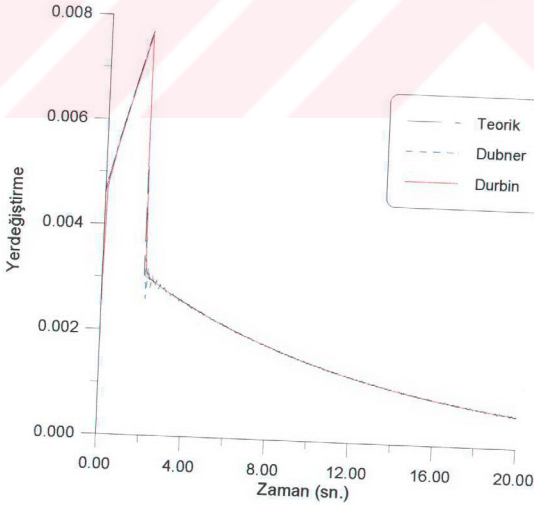
Bu örnekte de bir önceki örnekte verilen aynı geometrik ve malzeme özellikteki problem Şekil 8.26'deki yük için çözülmüştür. Kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirme-
menin değişimi Şekil 8.27'de, TPM için (8.7)'den yararlanarak elde edilen kesin
çözüm

$$\begin{aligned} t < t_1 &\Rightarrow u_b = q_0 \tilde{T}_1 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\lambda t}) \right) \\ t > t_1 &\Rightarrow u_b = q_0 \tilde{T}_1 \frac{e^{-\lambda t}}{E_2} (e^{\lambda t_1} - 1) \end{aligned} \quad (8.10)$$

ile beraber verilmiştir. Bu problemde MDOP, Dubner ve Durbin ters Laplace dönüşüm teknikleri incelenmiştir.



Şekil 8.26 Etkiyen yayılı dış yüklerin zamanla değişimi



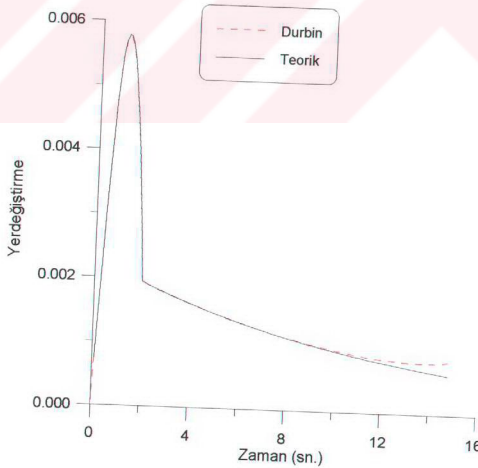
Şekil 8.27 Yayılı yükleme Şekil 8.26 için kirişin ortasındaki yerdeğiştirme diyagramı

8.2.3.Örnek-13: Sinüzoidal Yüklü

Burada da bir önceki örnekte verilen aynı geometrik ve malzeme özellikteki problem Şekil 8.10'daki yayılı yük için çözülmüştür. (8.7)'den TPM için kesin çözüm,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_2 &= \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \pi^2/t_1^2)} \left(\lambda \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) + \frac{\pi}{t_1} (e^{-\lambda t} - \cos\left(\frac{\pi t}{t_1}\right)) \right) \\ t < t_1 &\Rightarrow u_b = q_0 \tilde{T}_1 \left(\frac{1}{E_1} \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) + \frac{1}{E_2} \tilde{T}_2 \right) \\ t > t_1 &\Rightarrow u_b = q_0 \tilde{T}_1 \frac{e^{-\lambda t}}{E_2} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \pi^2/t_1^2)} \frac{\pi}{t_1} (e^{\lambda t_1} + 1)\end{aligned}\quad (8.11)$$

şeklinde elde edilmiştir. İki ucu ankastre kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin değişimi Şekil 8.28'de kesin çözümlerle birlikte verilmiştir. Bu örnekte seçilen parametrelerle Durbin iyi sonuçlar vermiştir. Dubner ve MDOP metodlarında dalgalanma görülmüştür. Bu neden ile bu metodların sonuçları şekil ile verilmemiştir.



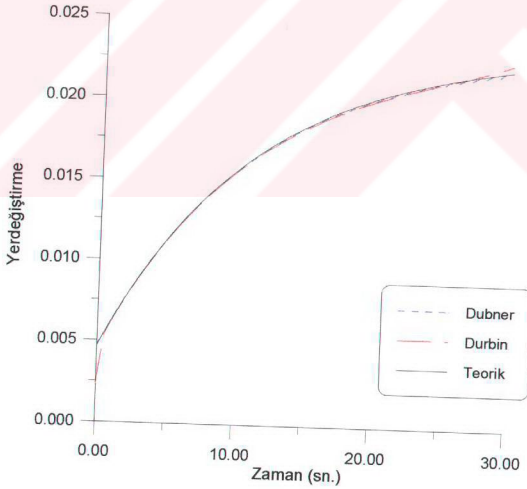
Şekil 8.28 Yayılı yükleme Şekil 8.10 için kirişin ortasındaki yerdeğiştirme diyagramı

8.2.4. Örnek-14: Sabit Yüklü

Burada da bir önceki örnekte verilen aynı geometrik ve malzeme özellikteki problem Şekil 8.1'deki yayılı yük için çözülmüştür. (8.7)'den yararlanarak TPM için kesin çözüm,

$$u_b = q_0 \tilde{T}_1 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\lambda t}) \right) \quad (8.12)$$

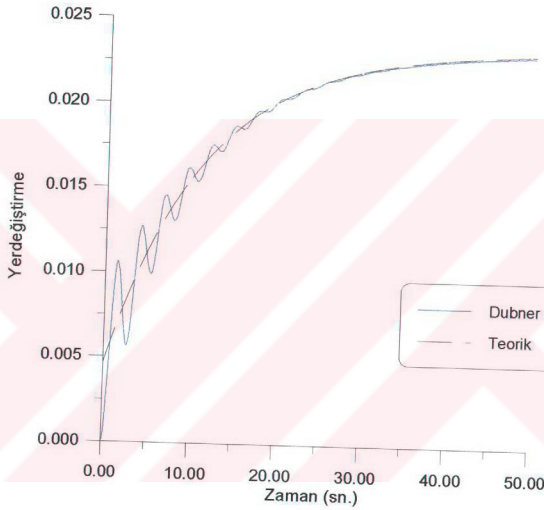
şeklinde elde edilmiştir. Sonuçlar Şekil 8.29 ile kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi kesin çözümlerle beraber verilmiştir. Bu örnekte Dubner, Durbin, MDOP ve Shapery metotları kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar birbirlerine benzemektedir. Bu nedenle metotlardaki farkı görmek için şekillerde çizilen eğriler arasındaki farkı görmek çok zor olduğundan sadece bir metodun sonuçları verilmiştir. Hepsi üst üste düşmektedir.



Şekil 8.29 MDOP, Dubner, Durbin metodlarını kullanarak Şekil 8.1'de verilen yüklemeye için kirişin ortasındaki yerdeğiştirmenin değişimi

8.2.5. Örnek-15: Sabit Yüklü Dinamik Analiz

Burada bir önceki örneğin aynısı alınarak dinamik davranış incelenmiştir. Problem Dubner metodu kullanılarak şiddeti $q_0 = 10\delta(t)$ N/m olan Şekil 8.1'deki gibi sabit yayılı yük için çözülmüştür. Malzeme yoğunluğu $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır. Sonuçlar TPM için kirişin ortasındaki yerdeğiştirme Şekil 8.30 ile grafik olarak verilmiştir. Seçilen malzeme için $t > 25$ s. zamanından sonra viskoelastik kirişin dinamik davranışı görülmemektedir.

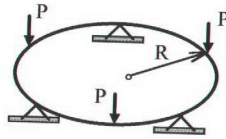


Şekil 8.30 TPM için kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı

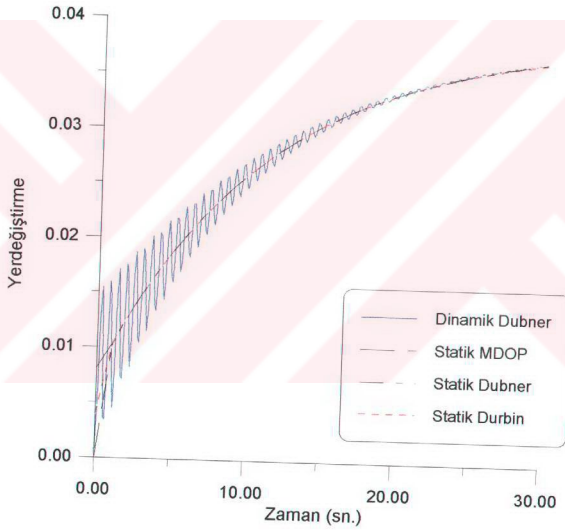
8.2.6. Örnek-16: Tekil Yüklü Dairesel Çember

Burada üç basit mesnet üzerine oturan dairesel kiriş ele alınarak tekil yükler etkisindeki davranışı incelenmiştir. Tekil yükler simetrik olarak Şekil 8.31'deki gibi yüklenmiştir. Geometri ve malzeme özellikleri olarak da $R = 5 \text{ m}$, $E_1 = 9.8 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $E_2 = 2.45 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 2.744 \times 10^8 \text{ Ns/m}^2$, $b = 1 \text{ m}$, $h = 0.5 \text{ m}$, $P = 1000\delta(t) \text{ N}$ alınmıştır. Verilen yükleme altında kuazi-statik ve dinamik durumlar için ortadaki

yerdeğiştirmenin zamanla değişimi şekil 8.32’de verilmiştir. Seçilen TPM malzemesi için $t > 25$ s. zamanından sonra viskoelastik kirişin dinamik davranışı görülmemektedir

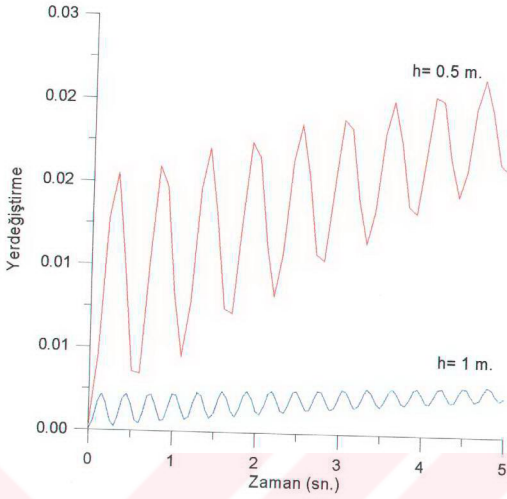


şekil 8.31 Tekil dış yüklerle yüklü daireSEL kiriş

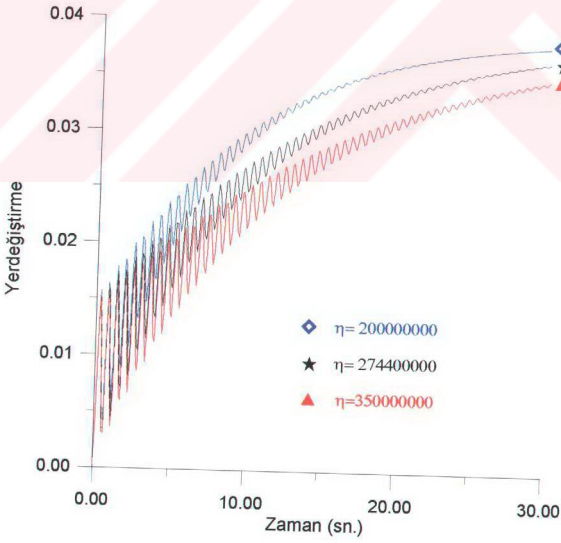


şekil 8.32 Yük altındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı

Frekans ve genlik üzerinde kirişin kalınlığının etkisi şekil 8.33’de görülmektedir. Beklendiği gibi kalınlık arttığı zaman frekans da artmaktadır. Titreşim üzerinde viskozite katsayısının etkisi de şekil 8.34 ile verilmiştir. Görüldüğü gibi viskozite katsayısı arttığında yerdeğiştirme azalmaktadır. Dinamik davranış zmlerinde Dubner ters Laplace dönüşümü iyi sonuçlar vermektedir.



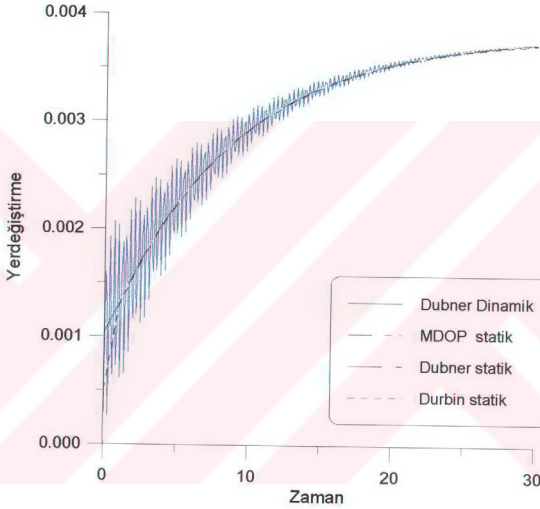
Şekil 8.33 Kiriş kalınlığının frekans ve yerdeğiştirme üzerindeki etkisi



Şekil 8.34 Yerdeğiştirme üzerinde viskozite katsayısının etkisi

8.2.7. Örnek-17: Tekil Yüklü Elastik Zemine Oturan Dairesel Çember

Bir önceki örnekte verilen kirişi ele alarak elastik zemin üzerinde olması durumunda dinamik davranış incelenmiştir. Malzeme yoğunluğu $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ alınmıştır. Elastik zemin olarak da Winkler zemin tipi ele alınmıştır ve Winkler zemin katsayısı $k=20 \text{ kN/m}$ seçilmiştir. Verilen yükleme altında kuazi-statik ve dinamik olarak kirişin yerdeğiştirmesi Şekil 8.35 ile verilmiştir. Titreşimde, zeminin etkisi kirişe tesir ettiği görülmektedir.



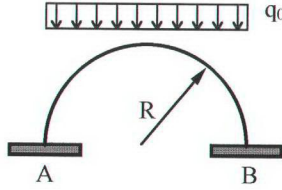
Şekil 8.35 Elastik zemin üzerinde yük altındaki yerdeğiştirmenin kuazi-statik ve dinamik davranışı

8.3. Düzlemi İçindeki Yüklemlerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Bütün örneklerde kesit büyüklükleri $R= 10 \text{ m.}$, $b= 1 \text{ m.}$ ve $h= 1 \text{ m.}$ olarak alınmış ve örnekler 20 elemana bölünerek hesaplanmıştır.

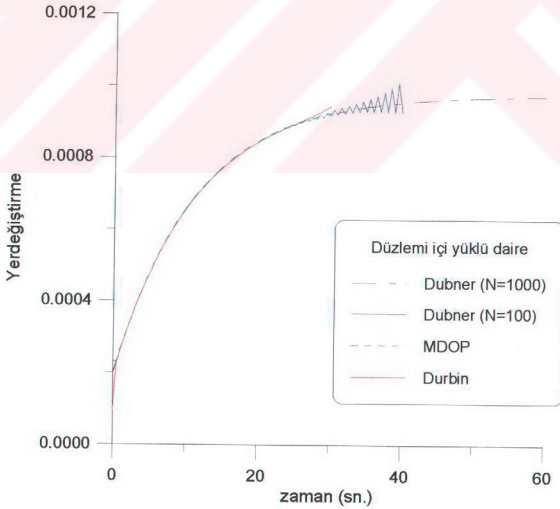
8.3.1.Örnek-18: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz

Şekil 8.36'da gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 100 \text{ N/m}$ olan sabit yayılı yüklü iki ucu ankastre kiriş incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1'de çizilmiştir. Kuazi-statik analiz yapılmıştır.



Şekil 8.36 İki ucu ankastre dairesel kiriş

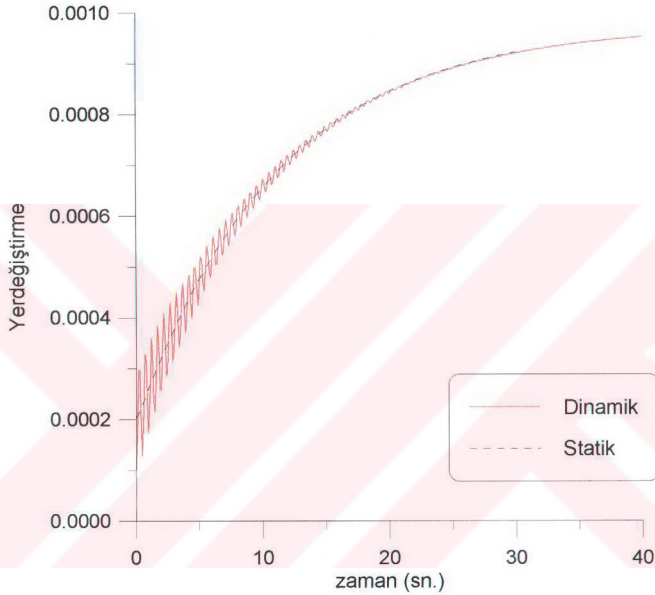
Bu örnekte de dairesel kirişin orta noktasındaki yerdeğiştirmenin çözümü üç parametrel malzeme alınarak hesaplanmıştır. Sonuçlar Şekil 8.37'de verilmiştir.



Şekil 8.37 Yerdeğiştirmenin kuazi-statik davranışı

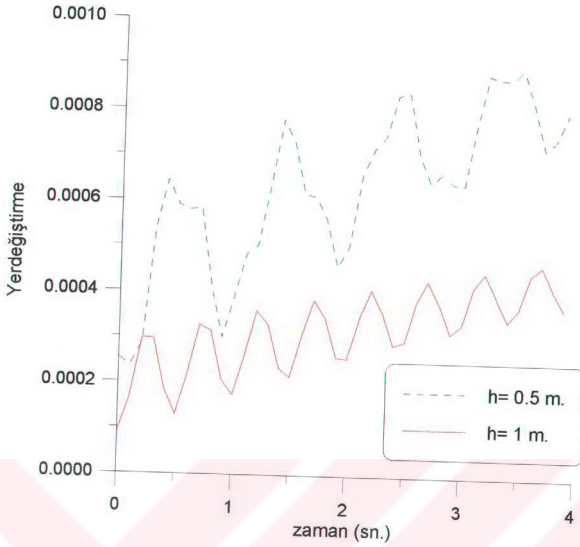
8.3.2. Örnek-19: Sabit Yüklü Dinamik Analiz

Şekil 8.36’da gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 100$ N/m olan sabit yayılı yüklü iki ucu ankastre kiriş incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1’de çizilmiştir. Üç parametrelili malzeme için dinamik analiz yapılmıştır. Elde edilen dinamik sonuçlar Şekil 8.38’de hesaplanan kuazi-statik sonuçlarla beraber verilmiştir.



Şekil 8.38 Yerdeğiştirmenin dinamik davranışı

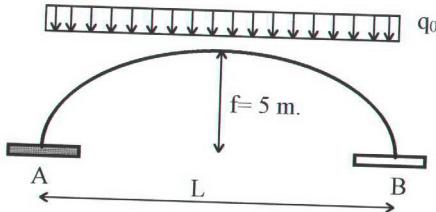
Ayrıca dinamik analizde aynı problem ele alınarak h en kesit yüksekliğinin frekansa etkisi incelenmiştir. Sonuçlar Şekil 8.39’da verilmiştir.



Şekil 8.39 Yerdeğiştirmenin dinamik davranışı

8.4. Düzlemi İçinde Yükleyle Yüklü Parabolik Eksenli Çubuklar

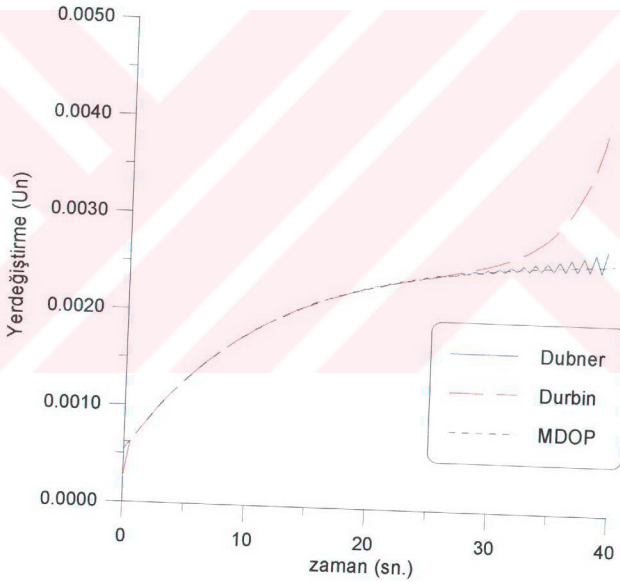
Bütün örneklerde kesit büyüklükleri $L = 10$ m., $b = 0.2$ m. ve $h = 0.5$ m. olarak alınmış ve örnekler 20 elemana bölünerek hesaplanmıştır. Şekil 8.40'da ele alınan parabolik çubuk gösterilmiştir. A mesnedi $u_t = u_n = M_b = 0$ olmak üzere ankastre iken B mesnetindeki sınır koşulları $u_t = \Omega_b = T_n = 0$ olarak alınmıştır.



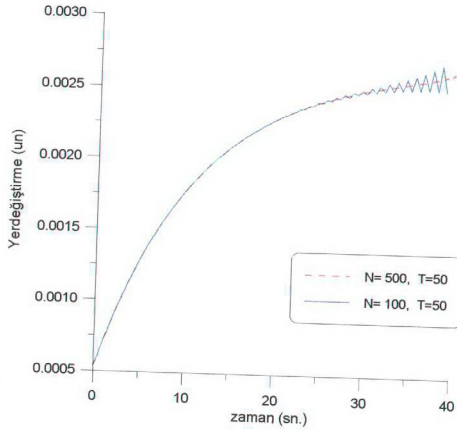
Şekil 8.40 Bir ucu ankastre parabolik çubuk

8.4.1. Örnek-20: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz

Şekil 8.40’da gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 100$ N/m olan sabit yayılı yüklü bir ucu ankastre çubuk incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1’de gösterilmiştir. Bu örnekte parabolik çubukta orta noktadaki yerdeğiştirmenin çözümü üçparametrel malzeme alınarak hesaplanmıştır. Kuazi-statik analiz yapılarak sonuçlar grafik halinde Şekil 8.41’de verilmiştir. Burada da zamanın belli bir değerinden sonra salınım görülmektedir. Bu salınımın yeri seçilen parametrelere bağlıdır. Bu parametrelerden Dubner metodu ele alınarak N ’nin etkisi incelenmiş ve sonuçları Şekil 8.42’de bulunmaktadır. Görüldüğü gibi N parametresi büyüdükçe salınım büyük zamanlarda ortaya çıkmaktadır.



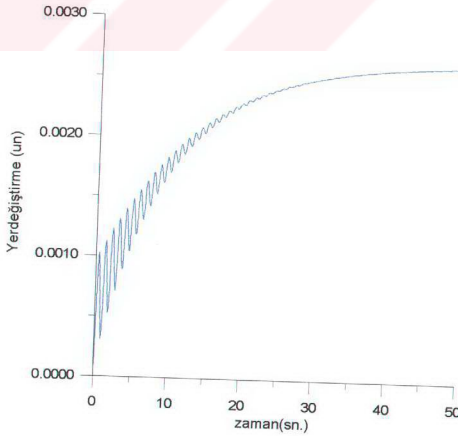
Şekil 8.41 Bir ucu ankastre parabolik çubukta orta noktadaki yerdeğiştirme diyagramı



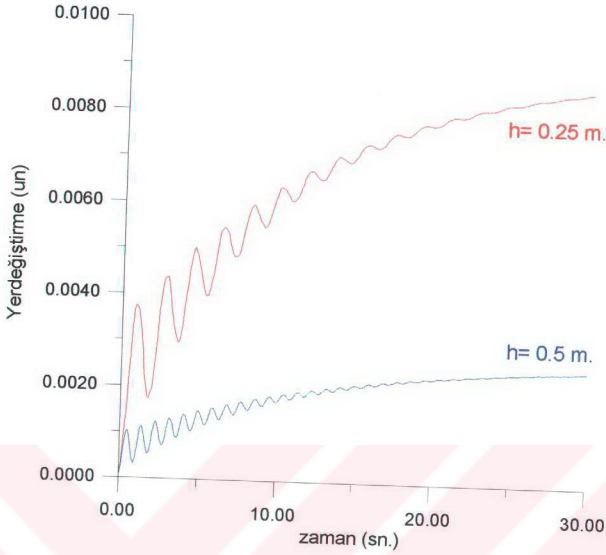
Şekil 8.42 Parabolik çubukta Dubner metodundaki N parametresinin etkisi

8.4.2.Örnek-21: Sabit Yüklü Dinamik Analiz

Şekil 8.40'da gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 100$ N/m olan sabit yayılı yüklü bir ucu ankastre parabolik çubuk ele alınarak incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1'de çizilmiştir. Üç parametrelili malzeme için dinamik analiz yapılmıştır. Sonuçlar Şekil 8.43'de verilmiştir. Ayrıca h kesit yüksekliğinin frekansa etkisi incelenerek sonuçlar Şekil 8.44'de gösterilmiştir.



Şekil 8.43 Parabolik çubukta dinamik analiz



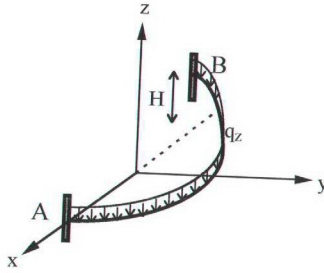
Şekil 8.44 Parabolik çubukda dinamik analizde h değişiminin etkisi

8.5. Helisel Çubuklar

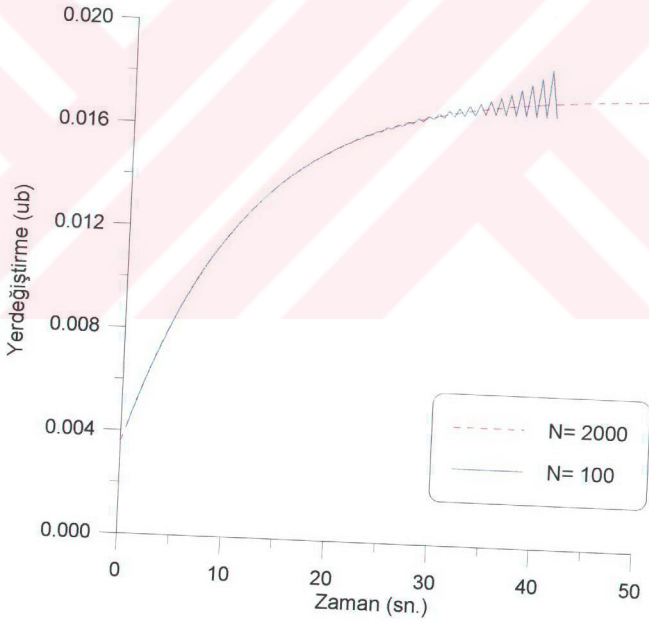
Bütün örneklerde kesit büyüklükleri $H = 608.555$ cm., $R = 3.1$ m., $b = 1.5$ m. ve $h = 0.15$ m. olarak alınmış ve örnekler 20 elemana bölünerek hesaplanmıştır. Üçparametrelili malzeme alınarak hesaplanmıştır. Yayılı yük z eksenine doğrultusunda alınmıştır.

8.5.1. Örnek-22: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz

Şiddeti $q_0 = 100$ N/m olan sabit yayılı yüklü iki ucu ankastre helisel çubuk incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1'de çizilmiştir. Burada ele alınan problem Şekil 8.45'de gösterilmiş ve orta noktadaki binormal yöndeki yerdeğiştirmenin kuazi-statik sonuçları Şekil 8.46'da verilmiştir. Bu problemin elastik olarak teorik çözümü, Cinemre [63] tarafından başlangıç değerler yöntemi kullanılarak yapılmıştır.



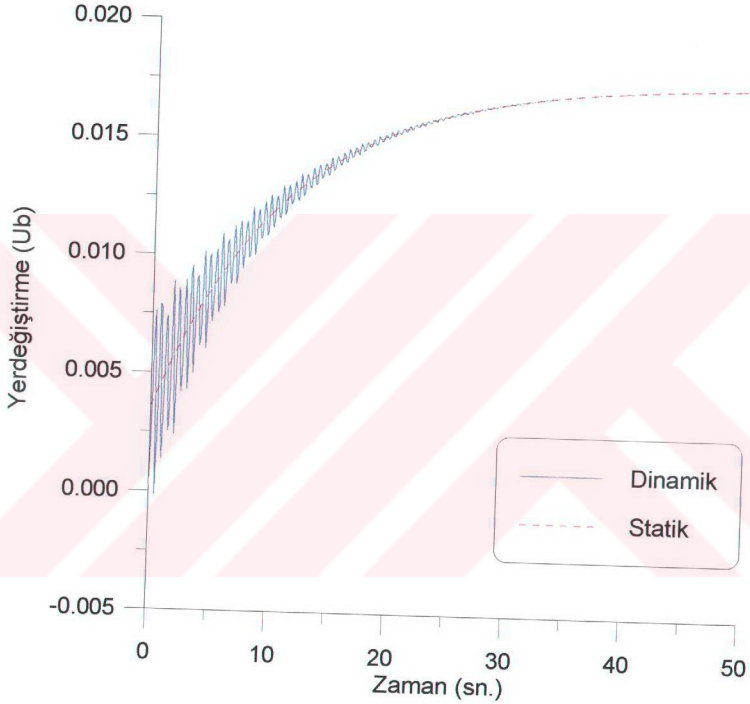
Şekil 8.45 İki ucu ankastre helisel merdiven



Şekil 8.46 İki ucu ankastre helisel merdivenin orta noktasındaki yerdeğiştirmesi

8.5.2. Örnek-23: Sabit Yüklü Dinamik Analiz

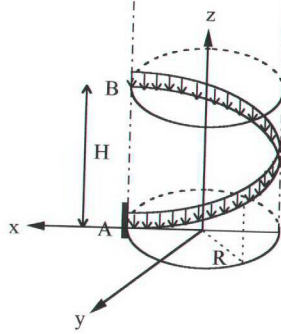
Şekil 8.45’de gösterildiği gibi şiddeti $q_0 = 100$ N/m olan sabit yayılı yüklü iki ucu ankastre helisel çubuk incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1’de çizilmiştir. Üç parametrelili malzeme için dinamik analiz yapılmıştır. Sonuçları grafik olarak Şekil 8.47’de verilmiştir.



Şekil 8.47 Helisel merdivendeki orta noktanın yerdeğiştirmesinin dinamik analizi

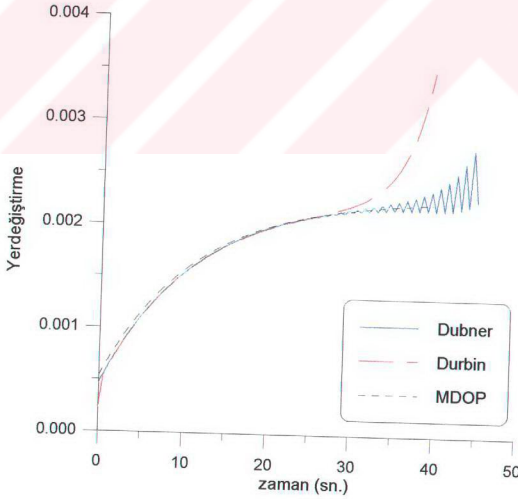
8.5.3. Örnek-24: Sabit Yüklü Kuazi-Statik Analiz

Şiddeti $q_0 = 0.01$ N/m olan z yönünde sabit yayılı yüklü bir ucu ankastre diğer ucu boş olan helisel çubuk incelenmiştir. Sabit yayılı yükün zamanla değişimi Şekil 8.1’de verilmiştir. Burada ele alınan problem Şekil 8.48’de gösterilmiştir.

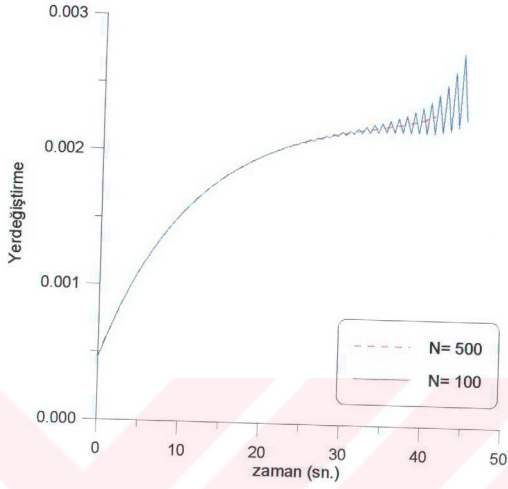


Şekil 8.48 Helisel çubuk problemi

Malzeme ve kesit özellikleri $R= 3.1\text{m}$, $H= 1217.11\text{ cm}$, $b=60\text{ cm}$ ve $h=15\text{ cm}$ alınarak 30 elemana bölünerek, boş uç daki binormal yöndeki yerdeğiştirmenin kuazi-statik sonuçları Şekil 8.49'da verilmiştir. Şekil 8.50'de de seçilen N parametresinin etkisi incelenmiştir.



Şekil 8.49 Helisel çubukdaki boş ucun binormal yönündeki yerdeğiştirme diyagramı



Şekil 8.50 Helisel çubukdaki boş ucun binormal yönündeki yerdeğiştirmeye N etkisi

9. SONUÇLAR

Bu çalışmada, kuazi-statik ve dinamik yüklemeler altındaki üç boyutta eksen herhangi bir geometriye sahip olan viskoelastik çubuklar için sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Viskoelastik davranışını temsil etmek için integral formda birbirinden farklı olabilen, biri çekme diğeri kaymaya karşı iki bünye bağıntısı düşünülmüştür. Sınır koşullarından ve alan denklemlerindeki zamana göre türevi kaldırmak için Laplace-Carson dönüşümü kullanılmıştır. Laplace-Carson uzayında Gâteaux diferansiyelini kullanarak sistematik olarak matematiksel işlemlerden sonra çeşitli eğriliklere sahip viskoelastik çubuklar için yeni fonksiyoneller elde edilmiştir. Sonra dönüşmüş uzayda karışık sonlu eleman formülasyonu yapılarak viskoelastik çubuklara ait eleman denklemleri bulunmuş ve herbirine ait bilgisayar programları geliştirilmiştir. Denklemlerin çözümünden gerçek zaman uzayındaki sonuçlara ulaşabilmek için sayısal ters Laplace dönüşümünden yararlanılmıştır. Sayısal ters dönüşüm için literatürde mevcut olan çeşitli metodlardan Schapery kollokasyon, MDOP, Dubner ve Durbin metodları kullanılmıştır. Geliştirdiğimiz yöntemin performansını görmek için çeşitli kuazi-statik ve dinamik problemler test edilmiştir.

Yapılan çalışmadaki formülasyonun özellikleri kısaca özetlenecek olursa:

- Viskoelastik çubuklar için yeni fonksiyoneller dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte Laplace-Carson uzayında elde edilmiştir.
- Viskoelastik çubuklar, gevşeme fonksiyonlarının genel formlarının kullanılması ile kuazi-statik ve dinamik yükleme altındaki davranış karışık sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir. Kullanılan normal ve kayma gerilmeleri için gevşeme modüllerinin farklı farklı da alınabilmesi mümkündür.
- Değişken kesitli çubuklar için kapalı çözümün yapılması zor olduğundan çubuk kesitlerinin değişkenliğini eleman denklemlerine ait matrislerin kurulmasında gözönüne alan ayrı bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir.

- Formülasyonlar için fortran dilinde bilgisayar programı geliştirilmiştir. Programın akış diyagramı Ek-A'da verilmiştir. Geliştirilen bilgisayar programı ile hertürlü zamana bağlı dış yük ve sınır koşulları için yeteri derecede yakın sonuç elde edilmiştir.
- Geliştirilen formülasyonda kayma etkileri de dikkate alınmıştır.
- Bu formülasyonda kayma kilitlenmesi gözlenmemektedir.
- Yapılan çalışma ile viskoelastik çubukların elastik zemin üzerinde olması durumunda da sonuç alınabilmektedir.
- Sayısal çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek üzere örneklerdeki viskoelastik kapalı çözümler bu çalışma çerçevesi içinde elde edilmiştir.
- Sayısal ters dönüşüm metodları ile gerçek zaman uzayındaki çözümler elde edilmiştir. Sayısal ters dönüşüm için Schapery kollokasyon, MDOP, Dubner ve Durbin metodları kullanılmıştır.
- Seçilen p Laplace parametreleri Schapery kollokasyon metodunda reel olarak kullanılırken MDOP, Dubner ve Durbin metodlarında kompleks değerler alınarak kullanılmıştır.
- Schapery kollokasyon metodunda kullanılan reel p Laplace parametrelerinin seçimi incelenmiştir. İnceleme sonucunda büyük zamanlarda küçük p değerlerinin alınmasının uygun olduğu görülmüştür. p Laplace parametresinin sonuçlara etkisi, Bölüm 8.1.2'de ele alınarak grafik halinde verilmiştir.
- Schapery kollokasyon metodu, zamana göre sabit yükleme altındaki kuazi-statik problemler için uygundur.
- Zamana göre değişken yükler altındaki kuazi-statik ve dinamik problemler için Fourier dönüşümüne dayanan metodlar iyi sonuçlar vermektedir.
- MDOP metodu başlangıçta yani zamanın sıfır olduğu andaki problemin sonuçlarını vermemektedir.

- Dinamik problemlerde Dubner ve Durbin metodları iyi sonuç vermektedir.
- Dubner ve Durbin metodlarında $aT=10$, $N=100$ ile 2000 arasındaki değerleri almak yeterli olmaktadır.
- Kirişin rijitliği arttığı zaman titreşimin frekansıda artmaktadır.
- Serbest titreşim analizinde titreşimin zamanla sönüdüğü görülmektedir. Sönüm zamanı viskozite katsayısı ile doğru orantılıdır.
- Titreşimde kirişin yüksekliğinin etkisi incelenmiştir ve titreşimin frekansının kirişin yüksekliği ile doğru orantılı olduğu görülmüştür.
- Bu geliştirilen formülasyon plaklar, kabuklar gibi diğer taşıyıcı sistemlerde uygundur. Çalışmalar devam etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Flügge, W., 1975. *Viscoelasticity*, 2nd., Springer-Verlag, New York.
- [2] Findley, W.N., Lai, J.S. ve Onaran, K., 1976. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, Noth-Holland, New York.
- [3] Rabbatnow, Yu.N., 1980. *Element of Hereditary Solid Mechanics*, Mir Publishers-Moscow.
- [4] Christensen, R.M., 1982. *Theory of Viscoelasticity*, 2nd ed., Academic Press, New York.
- [5] Freudenthal, A.M., 1950. *The Inelastic Behaviour of Engineering Material and Structures*, John Wiley and Sond, New York.
- [6] Alfrey, T., 1948. *Mechanical Behaviour of High Polymers*, Interscience, New York.
- [7] Lee, E.H., 1955. Stress Analysis in Viscoelastic Bodies, *Q.Appl.Maths.*, **13**, 183.
- [8] Newman, M.K., 1959. Viscous Damping in Flexural Vibrations of Bars, *Journal of Applied Mechanics*, 367-376.
- [9] Lee, H.C., 1960. Forced Lateral Vibration of a Uniform Cantilever Beam With Internal and External Damping, *Journal of Applied Mechanics*, 551-556.
- [10] Bland, D.R., 1960. *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon, Oxford.
- [11] Flaherty, F.T., 1963. Viscoelastic Timoshenko beam Vibration, thesis presented to New York University, at New York, N.Y., in June, inpartial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- [12] Pan, H.H., 1966. Vibration of A Viscoelastic Timoshenko Beam, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **92**, no.EM2, 213-234.
- [13] Halpin, J.C. ve Pagano, N.J., 1968. Observations on Linear Anisotropic Viscoelasticity, *J.Composite Materials*, **2**, no.1, pp.68-80.
- [14] Zienkiewicz, C.O., Waston, M. ve King, I.P., 1968. A numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis, *Int.J.Mech.Sci.*, **10**, pp.807-827.
- [15] Berger, B.S., 1968. The Inversion of the Laplace Transform With Applications to the Vibrations of Continuous Elastic Bodies, *Journal of Applied Mechanics*, 837-839.

- [16] Taylor, R.T., Pister, K.S. ve Goudreau, G.L., 1970. Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 2, 45-59.
- [17] Huang, T.C. ve Huang, C.C., 1971. Free Vibrations of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Journal of Applied Mechanics*, 515-521.
- [18] Rizzo, F.J. ve Shippy, D.J., 1971. An Application of The Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory, *SIAM J.Appl.Math.*, 21, no.2, 321-330.
- [19] Aboudi, J., 1972. Propagation of Transsient Pulses From A Spherical Cavity in A Viscoelastic Medium, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 4, 289-299.
- [20] Carpenter, W.C., 1972. Viscoelastic Stress Analysis, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 4, 357-366.
- [21] Adey, R.A. ve Brebbia, C.A., 1973. Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 99, no.EM6, 1119-1127.
- [22] Warzée, G., 1974. Finite Element Method and Laplace Transform-Comparative Solutions of Transient Heat Conduction Problems, *Computer and Structures*, 4, 979-991.
- [23] Yamada, Y., Takabatake, H. ve Sato, T., 1974. Effect of Time-Dependent Material Properties on Dynamic Response, *Int. Journal for Numerical Methods in Eng.*, 8, 403-414.
- [24] Holzlöhner, U., 1974. A Finite Element Analysis For Time-Dependent problems, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 8, 55-69.
- [25] Kırıl, E., Tokdemir, T. ve Ural, S., 1976. Transient Response of An Elastic or/and Viscoelastic Curved Rod Under Arbitrary Time Dependent Loading, *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, 9, no.1, 63-86.
- [26] Piessens, R. ve Dang, N.D.P., 1976. A Bibliography on Numerical Inversion of the Laplace Transform and Applications: a supplement, *J.Comp.Appl. Math.*, 2, pp.225-228.
- [27] Huang, C.C., 1977. Traveling Loads on A viscoelastic Timoshenko Beam, *Journal of Applied Mechanics*, 183-184.
- [28] Yagawa, G., Miyazaki, N. ve Ando, Y., 1977. Superposition Method of Finite Element and Analytical Solutions for Transient Creep Analysis, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1107-1115.
- [29] Aral, M. ve Gülçat, Ü., 1977. A Finite Element Laplace Transform Solution Technique For The Wave Equation", *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1719-1732.

- [30] Krings, W. ve Waller, H., 1979. Contribution to The Numerical Treatment of Partial Differential Equations With The Laplace Transformation-An Application of The Algorithm of The Fast Fourier Transformation, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, **14**, 1183-1196.
- [31] Manolis, G.D. ve Beskos, D.E., 1981. Dynamic Strees Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, **17**, 573-599.
- [32] Narayanan, G.V. ve Beskos, D.E., 1982. Numerical Operational Methods For Time-Dependent Linear Problems, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, **18**, 1829-1854.
- [33] Podhorecki, A., 1986. The Viscoelastic Space-Time Element, *Computers and Structures*, **23**, no.4, 535-544.
- [34] White, J.L., 1986. Finite Element in Linear Viscoelasticity, *Proc. 2nd. Conf. on Matrix Method in structural Mechanics*, AFFDL-TR-68-150, 489-516.
- [35] Chen, H.T., Chen, T.M. ve Chen, C.K., 1987. Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method For One-Dimensional Transient Heat Conduction Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, **63**, 83-95.
- [36] Sim, W.J. ve Kwak, B.M., 1988. Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method, *Computers & Structures*, **29**, no.4, 531-539.
- [37] Rencis, J.J., Saigal, S. ve Jong, K.Y., 1990. Dynamic Viscoelastic Beam Model for Finite Element Method, *J.Aerosp.Engrg., ASCE*, **3**, no.1, 19-29.
- [38] Lubliner, J. ve Panoskaltis, V.P., 1992. The Modified Kuhn Model of Linear Viscoelasticity, *Int.J.Solids Structures*, **29**, no.4, 3099-3112.
- [39] Lee, S.S., 1995. Boundary Element Analysis of Linear Viscoelastic Problems Using Realistic Relaxation Functions, *Computers and Structures*, **55**, no.6, 1027-1036.
- [40] Chen, T.M., 1995. The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to The Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 509-522.
- [41] Johnson, A.R., Tessler, A. ve Dambach, M., 1997. Dynamics of Thick Viscoelastic Beams, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **119**, 273-278.
- [42] Wang, C.M., Yang, T.Q. ve Lam, K.Y., 1997. Viscoelastic Timoshenko Beam Solutions From Euler-Bernoulli Solutions, *Journal of Engineering Mechanics*, **123**, no.7, 746-748.

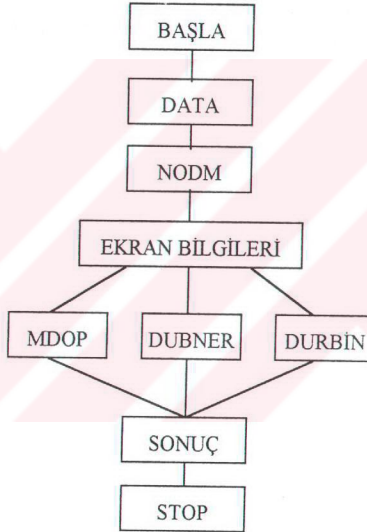
- [43] Aköz, Y. ve Kadioğlu, F., 1999. The Mixed Finite Element Method For The Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams *Int. Journal for Numerical Methods in Eng.*, **44**, 1909-1932.
- [44] Sokolnikoff, I.S. ve Redefffer, R.M., 1958. *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw-Hill, Tokyo.
- [45] İnan, M., 1988. *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Yayınları, 6. Baskı.
- [46] İnan, M., 1966. *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İTÜ Yayınları.
- [47] Aköz, A.Y., Omurtag, M. ve Doğruoğlu, A.N., 1991. The Mixed Finite Element Formulation For Three-Dimensional Bars, *Int. J. Solids Structures*, **28**, No.2, 225-234.
- [48] Oden, J., ve Reddy, J.N., 1976. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer, Berlin.
- [49] Reddy, J. N., 1986. *Applied Functional Analysis and Variational Method in Engineering*, Mc.Graw-Hill.
- [50] Kadioğlu, F. ve Aköz, A.Y., 1997. Doğru eksenli viskoelastik kirişlerin sonlu eleman formülasyonu, *X. Ulusal Mekanik Kongresi*, 265-275.
- [51] Huebner, K.H., 1975. *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley and Sons, 124.
- [52] Krylov, V.I. ve Skoblya, N.S., 1969. *Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms*, Israel Program for Scientific Translations, Wiener Bindery Ltd, Jerusalem.
- [53] Schapery, R.A., 1962. Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, *Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, **2**, Pergamon Press Oxford, London, New York, Paris, June 18-21, 1075-1085.
- [54] Cost, T.L. ve Becker, E.B., 1970. A Multidata Method of Approximate Laplace Transform Inversion, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, **2**, 207-219.
- [55] Papoulis, A., 1955. A New Method of Inversion of The Laplace Transform, **14**, no.4, 405-414.
- [56] Bellman, R.E., Kalaba, R.E. ve Lockett, J.A., 1966. *Numerical Inversion of The Laplace Transform*", Elsevier, New York.
- [57] Weeks, W.T., 1966. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions, *Journal of Association for Computing Machinery*, **13**, no.3, 419-426.

- [58] **Dubner, H. ve Abate, J.**, 1968. Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform, *Journal of Association for Computing Machinery*, **15**, No.1, January, 115-123.
- [59] **Durbin, F.**, 1974. Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and abate's method, *The Computer Journal*, **17**, No.4, 371-376.
- [60] **Duffy, D.G.**, 1993. On The Numerical Inversion of Laplace Transforms: Comparison of Three New Methods on Characteristic Problems From Applications, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **19**, no.3, 333-359.
- [61] **Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. ve Too, J.**, 1971. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, **3**, 275-290.
- [62] **Pawsey, S.E. ve Clough, R.W.**, 1971. Improved Numerical Integration of Thick Finite Elements, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, **3**, 545-586.
- [63] **Cinemre, V.**, 1960. Başlangıç Değerleri Metodu ile Helisel Çubukların Statik Hesabı, İTÜ İnşaat Fakültesi, *Doktora Tezi*.

EKLER

Ek-A: Bilgisayar Programı

Viskoelastik çubuklar için geliştirilen fortran dilindeki bilgisayar programının akış diyagramı Şekil A.1'de verilmiştir.



Şekil A.1 Akış diyagramı

Program çalıştırıldığında alt programlarla yönlendirilmektedir. Çağrılan alt programlarla ilgili kısa açıklamalar aşağıda verilmiştir.

DATA alt programı: Sistemin kesit özellikleri ve malzeme özelliklerinin dosyadan okunmasını sağlayan bir alt programdır.

NODM alt programı: Sonlu eleman ağını kurmaya yardımcı olan bir alt programdır.

EKRAN BİLGİLERİ: Ekrandan bilgi girişini sağlamaktadır. Problem hakkında bilgiler verilmektedir. Kuazi-statik veya dinamik oluşu, yükleme çeşiti gibi bilgilerle

aT, N, T parametreleri girilir. Ayrıca hangi ters dönüşüm yönteminin kullanılacağı da ekrandan girilmektedir.

MDOP alt programı: Ağırlık ve apsis değerlerini kullanarak istenilen bir t zamanı için sayısal ters dönüşüm yaparak o andaki çözümü veren bir alt programdır. Bu alt program FINVERS ve DENK adlı alt programları çağırarak çalışabilmektedir.

DUBNER ve DURBİN alt programları: aT, N ve T parametrelerine bağlı olarak başlangıçtan herhangi bir ana kadar sayısal ters dönüşüm yaparak çözüm veren bir alt programdır. İstenilen zaman aralığında ki Δt sayısı kadar FINVERS ve DENK adlı alt programları çağırarak çalışabilmektedir.

FINVERS alt programı: Laplace-Carson uzayında problemin sınır koşullarına göre gerekli olan sonlu eleman denklemini kuran bir alt programdır. Bu alt program DENK adlı alt programı çağırarak çalışabilmektedir.

DENK alt programı: Dönüşmüş uzayda kurulan denklem takımını çözebilen bir alt programdır.

SONUÇ alt programı: Sonuçları dosya içine yazmasını sağlayan bir alt programdır.

Örnek bir DATA dosyası: Örnek-18'de verilen probleme ait bilgilerdir.

180.	1.	20	2
11	27440000.	24500000.	98000000.

Örnek bir SONUÇ dosyası: Örnek-18' de verilen probleme ait sonuçlardır.

<u>zaman</u>	<u>u_n (MDOP ile çözüm)</u>
0.50	0.0002293242
1.00	0.0002619332
1.50	0.0002931186
2.00	0.0003229423
2.50	0.0003514639
3.00	0.0003787403
3.50	0.0004048257
4.00	0.0004297722
4.50	0.0004536296
5.00	0.0004764453
5.50	0.0004982648
≈	≈
20.00	0.0008452444
20.50	0.0008509619
21.00	0.0008564297
21.50	0.0008616589
22.00	0.0008666597
22.50	0.0008714421
23.00	0.0008760158
23.50	0.0008803897
24.00	0.0008845727
24.50	0.0008885731
25.00	0.0008923988

ÖZGEÇMİŞ

Fethi KADIOĞLU, 1969 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimine İstanbul'da başlayarak 1986'da Kabataş Erkek Lisesini tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazandı. 1990'da mezun olduktan sonra hemen İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yapı programında Yüksek Lisansa başladı ve 1994'de Doktora'ya kayıt yaptırdı.

Halen İTÜ İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmakta olup İngilizce ve Fransızca bilmektedir.