



İÇ ÇATLAKLAR İÇEREN SANDVİÇ PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA PROBLEMİNİN FEM İLE İNCELENMESİ

Ayfer TEKİN*
Yıldız Teknik Üniversitesi,
İSTANBUL

Nazmiye YAHNIOĞLU†
Yıldız Teknik Üniversitesi,
İSTANBUL

ÖZET

Bu çalışmada, üç tabakadan oluşan ve tabakaları arasında iç çatlak bulunan dikdörtgen sandviç plağın delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir. Üç tabakalı sandviç plağı oluşturan her bir tabakanın malzemesinin homojen ve izotrop olduğu, dış tabakaların aynı malzemeden, çekirdek tabakasının farklı malzemeden yapıldığı ayrıca, ele alınan plağın bütün yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiği ve plağın tabakaları arasında bulunan çatlakların yüzeylerinin başlangıçta (yükleme yapılmadan önce) çok küçük ön eğriliğe sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan sandviç plağın delaminasyon burkulma probleminin incelenmesi; plağın karşılıklı iki yanal yüzeyinden etki eden statik dış basınç kuvveti etkisinde çatlak yüzeylerinde var olduğu kabul edilen bu çok küçük ön eğriliklerin gelişiminin incelenmesine dönüştürülmektedir. Probleminin matematiksel modeli; Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi çerçevesinde, parçalı homojen cisim modeli yardımıyla yapılmıştır. Elde edilen sınır değer problemlerinin çözümü için sınır tipli pertürbasyon tekniği ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır.

GİRİŞ

Kompozit yapı elemanların kullanımı esnasında kırılması, çeşitli mühendislik uygulamalarında karşılaşılan en önemli problemlerin başında gelmektedir [9]. Belirtilen kırılma olaylarının çoğunda, kompozit malzemenin yapısında mevcut olan çatlakların kırılmaya sebep olduğu görülmektedir. Çatlak içeren yapı elemanlarında kırılmanın oluşum mekanizması çeşitli şekillerde açıklanmaktadır. Bunlardan biri de çatlak ile serbest üst yüzey arasında kalan kısmın burkulması yani delaminasyon burkulma olayıdır.

Delaminasyon burkulma olayı; pek çok araştırmacı tarafından, yapı elemanları düzenlenirken çeşitli nedenlerle çok katlı kompozit malzemeyi oluşturan levhalar arasında kalan boşluk, çatlak vb. kusurların, bu boşluk/çatlak doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti etkisinde, yapı elemanında yerel stabilite kaybına sebep olması şeklinde açıklanmaktadır. Belirtilen problemlerin teorik incelenmesinde mevcut en gerçekçi yaklaşım, Lineer Olmayan Elastisite Teorisinin üç boyutlu kesin denklemlerinin lineerleştirilmesi ile elde edilen Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi (LEÜBST) çerçevesinde incelenmesidir. Belirtilen teorisin belirli açılardan geliştirilmesinde pek çok araştırmacının katkısı olmuştur [8,10,11,15,17]. Bu teorisin somut delaminasyon burkulma problemlerine uygulanmasına ait bazı çalışmalar [1,2,3,4,5,7,13] ile bu yayınların kaynaklarında yer alan diğer pek çok çalışma olarak verilebilir.

[7,13] çalışmalarında, iki boyutlu problem formülasyonu çerçevesinde anizotrop şerit-plak için delaminasyon burkulma problemi ele alınmıştır. [2,3,4,5] çalışmalarında ise kenar veya bant çatlak

* Arş. Gör. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: atekin@yildiz.edu.tr

† Prof. Dr., Matematik Müh. Böl., E-posta: nazmiye@yildiz.edu.tr

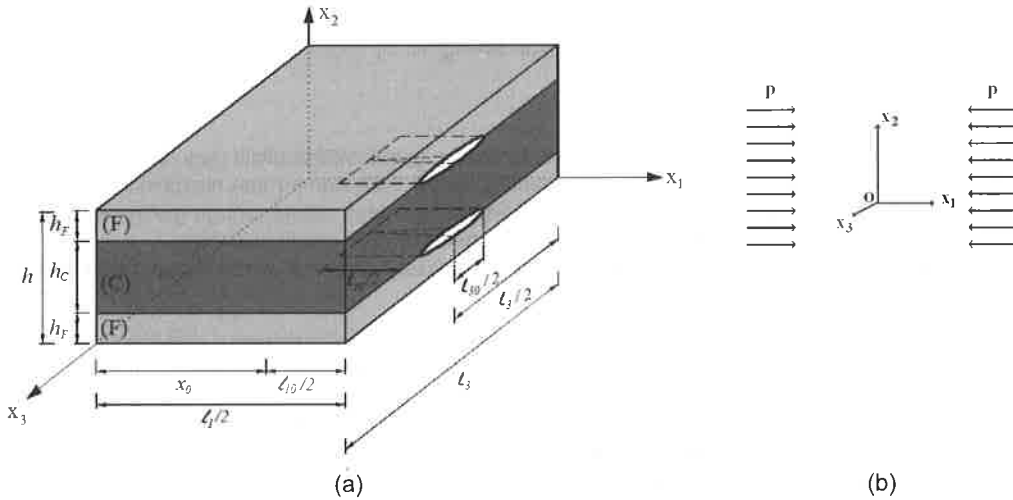
içeren üç katlı sandviç dikdörtgen plak veya anizotrop dikdörtgen plak için delaminasyon burkulma problemleri üç boyutlu olarak modellenmiştir. Ayrıca, literatürde delaminasyon burkulma olayının deneysel incelenmesine ait çalışmalar da mevcuttur [12].

Ele alınan çalışma, [2,3] çalışmalarında yapılan araştırmaların tabakaları arasında iç çatlak bulunan üç tabakalı dikdörtgen sandviç plaklar için delaminasyon burkulma probleminin incelenmesi yönünde geliştirilmesi olarak verilebilir. Buna göre dikdörtgen plağın orta (çekirdek) tabakası ile dış tabakaları arasında birbirine paralel ve eşit uzunlukta iki adet iç çatlağın bulunduğu ve çatlakların yüzeylerinin başlangıçta (yüklemeye yapılmadan önce) çok küçük ön eğriliğe sahip olduğu kabul edilmektedir. Çatlaklar doğrultusunda etkiyen statik dış basınç kuvveti etkisinde bu küçük eğriliklerin büyüyerek sonsuza gitmesinden (başlangıç eğinti kriteri [16]) yararlanılarak kritik delaminasyon burkulma kuvveti belirlenmektedir. Problemin matematiksel modeli LEÜBST çerçevesinde yapılmıştır. Problemin çözümünde sınır tipli pertürbasyon tekniği ve üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi kullanılmıştır. Çözümün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Bu çalışmada, dış tabakaları aynı malzemeden, çekirdek tabakası farklı malzemeden yapılmış olan üç tabakalı sandviç plağa ait delaminasyon burkulma problemi ele alınmıştır. Tabakaların malzemesinin her birinin homojen ve izotrop olduğu ve tabakalar arasında birbirine paralel ve eşit uzunlukta iki makro iç çatlak bulunduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, sandviç plağın bütün yanall yüzeylerinden basit mesnet ile tutturulduğu ve $x_1 = 0; \ell_1$ yüzeylerinden çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde olduğu kabul edilmiştir. Ele alınan dikdörtgen plağa ait delaminasyon burkulma problemi için matematiksel model, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde kurulmuştur.

Ele alınan plak geometrisi ve yükleme durumu Şekil 1'de verilmektedir. Plağa bağlı $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat takımı, plağın yüklemmeden önceki durumunu belirten Lagrange koordinatları ile ilişkilendirilmektedir.



Şekil 1. İç çatlaklar içeren sandviç plakta; a) yarım plak geometrisi b) tüm plak için yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi,

$$V' = V - \Omega_1 - \Omega_2 \quad (1)$$

olur. (1)'de,

$$V = V^{(\tau_1)} \cup V^{(\tau_2)} \cup V^{(\tau_3)},$$

$$V^{(\tau_1)} = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\},$$

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ V^{(3)} &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\}, \\ \Omega_2 &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2\} \end{aligned} \quad (3)$$

dir. Yukarıda verilen ifadelerde $V^{(k)}$ ($k=1,2,3$) sandviç plağın tabakalarını, Ω_i ($i=1,2$) sandviç plağın içerdiği iç çatlakların bulunduğu bölgeleri temsil etmektedir. Ayrıca, (3)'teki ℓ_{10} , ℓ_{30} iç çatlakların sırasıyla, Ox_1 , Ox_3 doğrultularındaki uzunluklarını göstermektedir. Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük ön eğrilığe sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_1 = \ell_1/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ düzlemleri ile $x_2 = h_F$ (alt çatlak için) ve $x_2 = h_F + h_C$ (üst çatlak için) düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Bu duruma uygun olarak alt ve üst çatlak yüzeylerinin denklemi,

$$\begin{aligned} x_2^\pm &= h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), \quad x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 &\leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, \quad (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde verilmektedir. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğrilğin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre, $f(x_1, x_3)$ çatlak yüzeylerindeki küçük eğrilğin formunu gösteren fonksiyondur. f fonksiyonunun üst indisinde bulunan '+' ('-'), göz önüne alınan çatlakın üst (alt) yüzeyini ifade etmektedir. $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitlikleri sağladığı kabul edilmiştir:

$$\begin{aligned} f^+((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} &= f^+((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0, \\ \frac{\partial f^+((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_1} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} &= \frac{\partial f^+((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{\partial x_1} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0, \\ f^\pm(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} &= f^\pm(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0, \\ \frac{\partial f^\pm(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2)}{\partial x_3} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} &= \frac{\partial f^\pm(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2)}{\partial x_3} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Ele alınan problemin matematiksel modeli, elastik cisim için üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan yönetici denklemler yardımıyla verilebilir. Buna göre; denge denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(n)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad (6)$$

geometrik ilişkiler

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n^{(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_n^{(n)}}{\partial x_j} \right), \quad (7)$$

bünye bağıntıları

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \lambda^{(n)} \theta^{(n)} \delta_i^n + 2\mu^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad \theta^{(n)} = \varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)} \quad i, j, n; k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

olarak yazılabilir. Denklemlerde kullanılan r_k üst indisi, sandviç plağın tabakalarına ait büyüklükleri (r_1 alt dış tabakaya, r_2 çekirdek tabakasına, r_3 üst dış tabakaya ait büyüklükleri) göstermektedir.

Ele alınan sandviç plağa ait sınır koşulları

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, \quad u_2^{(n)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \\ \left[\sigma_{1n}^{(n)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= p, \quad \left[\sigma_{1n}^{(n)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \end{aligned}$$

$$\left[\sigma_{3n}^{(r_1)} \left(\delta_1^n + \frac{\partial u_1^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{3n}^{(r_1)} \left(\delta_3^n + \frac{\partial u_3^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_3=0, \ell_3} = 0, \quad (9)$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_2=0} = 0, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{x_2=h} = 0, \quad (10)$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_1^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_1^+} n_j^+ = 0,$$

$$\left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_2^-} n_j^- = 0, \quad \left[\sigma_{jn}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{S_2^+} n_j^+ = 0,$$

$$S_1^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3); \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\},$$

$$S_2^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3); \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\} \quad (11)$$

olarak verilebilir. (9)-(11) eşitlikleri, sırasıyla dikdörtgen plağın yanal kenarlarındaki mesnet koşullarını, alt ve üst serbest yüzeyi ile çatlak yüzeylerindeki sınır koşullarını göstermektedir. (11) ifadesinde bulunan $n_j^\pm$, göz önüne alınan çatlak yüzeyine ait dış birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir. Sandviç plağın tabakaları arasında ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilirse, ara yüzeylerdeki temas koşulları

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\rho_1^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\rho_1^+}, \quad u_i^{(r_1)} \Big|_{\rho_2^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\rho_2^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_1^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_1^+}, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_2^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_2^+},$$

$$u_i^{(r_1)} \Big|_{\rho_3^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\rho_3^+}, \quad u_i^{(r_1)} \Big|_{\rho_4^-} = u_i^{(r_2)} \Big|_{\rho_4^+},$$

$$\left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_3^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_3^+}, \quad \left[\sigma_{2n}^{(r_2)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_2)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_4^-} = \left[\sigma_{2n}^{(r_1)} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(r_1)}}{\partial x_n} \right) \right]_{\rho_4^+},$$

$$\wp_1^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right); x_2^\pm = h_F \pm 0; x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\wp_2^\pm = \left\{ x_1 \in \left((0, (\ell_1 - \ell_{10})/2) \cup ((\ell_1 + \ell_{10})/2, \ell_1) \right); x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0; x_3 \in (0, \ell_3) \right\},$$

$$\wp_3^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F \pm 0; x_3 \in \left((0, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \cup ((\ell_3 + \ell_{30})/2, \ell_3) \right) \right\},$$

$$\wp_4^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right); x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0; x_3 \in \left((0, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \cup ((\ell_3 + \ell_{30})/2, \ell_3) \right) \right\} \quad (12)$$

olur. (6)-(12) ile verilen denklem ve bağıntılar geometrik doğrusal olmayan bir sınır değer problemini göstermektedir. Problemin çözümü, verilen matematiksel modelin doğrusallaştırılması ile elde edilen "Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilité Teorisi" denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu denklem takımının doğrusallaştırılması için boyutsuz küçük parametre olan ε 'dan yararlanılmıştır. Bu amaçla, öncelikle (4) ile verilen çatlak yüzeylerine ait denklemler kullanılarak, çatlak yüzeylerinin birim normal vektörünün bileşenleri için izleyen ifadeler elde edilir:

$$n_1^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \quad n_2^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}},$$

$$n_3^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \quad (13)$$

Burada, $\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial f^+(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^+(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right] \ll 1$ olduğu kabul edilerek, (13) ile verilen ifadeler ε

cinsinden kuvvet serisi ile temsil edilirse,

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_3^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{3k}^\pm(x_1, x_3) \quad (14)$$

yazılabilir. Diğer taraftan aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan ε 'na göre seri formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, u_i^{(n)}\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(n),q}, \varepsilon_{ij}^{(n),q}, u_i^{(n),q}\}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (15)$$

(15) ifadesi, (6)-(12)'de yerine yazılır ve ε 'nın kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş kapalı denklem sistemi, plak kenarlarında sınır koşulları, tabakalar arasında temas koşulları ve çatlak yüzeylerinde uygun sınır şartları elde edilir. ε 'nın kuvvetlerine göre elde edilen (örneğin, sıfıncı, birinci, vb. yaklaşım veya sınır değer problemi olarak adlandırılır) her bir sınır değer problemi, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. (6)-(12) doğrusal olmayan sınır değer probleminin çözümü, bu seri-sınır değer problemlerinin çözülmesi ile elde edilir. Ancak belirtilen seri-sınır değer problemlerinde, ikinci ve sonraki yaklaşımlara ait denklem ve ifadelerin sol tarafları, birinci yaklaşımla üst üste düşmekte, sadece bu denklem ve bağıntıların sağ tarafları (homojen olmayan kısımları) birbirinden farklılaşmaktadır. Aranan kritik delaminasyon burkulma kuvveti, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitliğinden belirlendiği için 2. ve sonraki yaklaşımlar kritik parametrenin değerini değiştirmemektedir. İkinci ve sonraki yaklaşımların göz önüne alınması, gerilme yayılımının hassaslaştırılmasında etkindir. Bu çalışmada amacımız kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerlerinin belirlenmesi olduğu için, hesaplamalar sıfıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde sınırlandırılmıştır.

Sıfıncı yaklaşım sonucunda elde edilen sınır değer problemi göz önüne alındığında, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu ile bilinen mekanik görüşler çerçevesinde $(\delta_i^n + \partial u_i^{(0)} / \partial x_n) \approx \delta_i^n$

kabulü yapılarak, sıfıncı yaklaşımın çözümü

$$\sigma_{11}^{(n),0} = p, \quad \sigma_{ij}^{(n),0} = 0 \quad (ij \neq 11) \quad (16)$$

olarak bulunur. Birinci yaklaşıma ait denklemler aşağıda verilmektedir: alan denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(n),1}}{\partial x_j} + \sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial^2 u_i^{(n),1}}{\partial x_1^2} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(n),1} = \lambda^{(n)} \theta^{(n),1} \delta_{ij}^j + 2\mu^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n),1}, \quad \varepsilon_{ij}^{(n),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(n),1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n),1}}{\partial x_i} \right), \quad (17)$$

plak kenarlarındaki sınır koşulları

$$u_2^{(n),1} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad u_2^{(n),1} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{11}^{(n),1} + \sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial u_1^{(n),1}}{\partial x_n} \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad \sigma_{13}^{(n),1} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad \sigma_{31}^{(n),1} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = \sigma_{33}^{(n),1} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad (18)$$

plağın alt ve üst serbest yüzeylerindeki sınır koşulları

$$\sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{x_2=0} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{x_2=h} = \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{x_2=h} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{x_2=h} = 0, \quad (19)$$

çatlak yüzeylerindeki sınır koşulları

$$\sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{S_1^-} = -\sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{S_1^-} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{S_1^-} = 0, \quad \sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{S_1^+} = -\sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{S_1^+} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{S_1^+} = 0, \\ \sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{S_2^-} = -\sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{S_2^-} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{S_2^-} = 0, \quad \sigma_{21}^{(n),1} \Big|_{S_2^+} = -\sigma_{11}^{(n),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^{(n),1} \Big|_{S_2^+} = \sigma_{23}^{(n),1} \Big|_{S_2^+} = 0,$$

$$S_1^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F \pm 0, \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\}, \\ S_2^\pm = \left\{ \left((\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2 \right), x_2^\pm = h_F + h_C \pm 0, \left((\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right) \right\}, \quad (20)$$

tabakalar arasındaki temas koşulları

$$\begin{aligned}
 u_i^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_1^-} &= u_i^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_1^+}, & u_i^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_2^-} &= u_i^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_2^+}, \\
 \left[\sigma_{21}^{(\tau_1),l} + \sigma_{11}^{(\tau_1),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_1),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^-} &= \left[\sigma_{21}^{(\tau_2),l} + \sigma_{11}^{(\tau_2),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_2),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_1^+}, & \sigma_{22}^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_1^-} &= \sigma_{22}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_1^+}, & \sigma_{23}^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_1^-} &= \sigma_{23}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_1^+}, \\
 \left[\sigma_{21}^{(\tau_2),l} + \sigma_{11}^{(\tau_2),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_2),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^-} &= \left[\sigma_{21}^{(\tau_3),l} + \sigma_{11}^{(\tau_3),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_3),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_2^+}, & \sigma_{22}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_2^-} &= \sigma_{22}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_2^+}, & \sigma_{23}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_2^-} &= \sigma_{23}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_2^+}, \\
 u_i^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_3^-} &= u_i^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_3^+}, & u_i^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_4^-} &= u_i^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_4^+}, \\
 \left[\sigma_{21}^{(\tau_1),l} + \sigma_{11}^{(\tau_1),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_1),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_3^-} &= \left[\sigma_{21}^{(\tau_3),l} + \sigma_{11}^{(\tau_3),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_3),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_3^+}, & \sigma_{22}^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_3^-} &= \sigma_{22}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_3^+}, & \sigma_{23}^{(\tau_1),l} \Big|_{\varphi_3^-} &= \sigma_{23}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_3^+}, \\
 \left[\sigma_{21}^{(\tau_2),l} + \sigma_{11}^{(\tau_2),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_2),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_4^-} &= \left[\sigma_{21}^{(\tau_3),l} + \sigma_{11}^{(\tau_3),0} \frac{\partial u_i^{(\tau_3),l}}{\partial x_1} \right] \Big|_{\varphi_4^+}, & \sigma_{22}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_4^-} &= \sigma_{22}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_4^+}, & \sigma_{23}^{(\tau_2),l} \Big|_{\varphi_4^-} &= \sigma_{23}^{(\tau_3),l} \Big|_{\varphi_4^+}
 \end{aligned} \quad (21)$$

Birinci yaklaşım için verilen ifadelerde, $\sigma_{jn}^{(\tau_k),0}$ sıfırcıncı yaklaşıma ait gerilmeleri göstermektedir.

Daha önce belirtildiği gibi, her bir yaklaşım, kendisinden önceki yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir.

SONLU ELEMENLER MODELİ

Birinci yaklaşıma ait (17)-(21) ile verilen sınır değer probleminin çözümü için kullanılan sonlu eleman formülasyonu, aşağıdaki fonksiyonel ve Ritz tekniği yardımıyla kurulmuştur.

$$\begin{aligned}
 II(u_1^{(\tau_1),l}, u_2^{(\tau_1),l}, u_3^{(\tau_1),l}) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{2} \iiint_{V'} \left(\left(\sigma_{11}^{(\tau_k),l} + \sigma_{11}^{(\tau_k),0} \frac{\partial u_1^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_1^{(\tau_k),l}}{\partial x_2} + \sigma_{13}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_1^{(\tau_k),l}}{\partial x_3} + \right. \right. \\
 &\quad \left(\sigma_{21}^{(\tau_k),l} + \sigma_{11}^{(\tau_k),0} \frac{\partial u_2^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_2^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_2^{(\tau_k),l}}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_2^{(\tau_k),l}}{\partial x_3} + \\
 &\quad \left. \left(\sigma_{31}^{(\tau_k),l} + \sigma_{11}^{(\tau_k),0} \frac{\partial u_3^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_3^{(\tau_k),l}}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_3^{(\tau_k),l}}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{(\tau_k),l} \frac{\partial u_3^{(\tau_k),l}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \Big] - \\
 &\quad \int_{(\ell_3-\ell_{30})/2}^{(\ell_3+\ell_{30})/2} \int_{(\ell_1-\ell_{10})/2}^{(\ell_1+\ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(\tau_1),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} u_1^{(\tau_1),l} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 dx_3 - \int_{(\ell_3-\ell_{30})/2}^{(\ell_3+\ell_{30})/2} \int_{(\ell_1-\ell_{10})/2}^{(\ell_1+\ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(\tau_2),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} u_1^{(\tau_2),l} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 dx_3 - \\
 &\quad \int_{(\ell_3-\ell_{30})/2}^{(\ell_3+\ell_{30})/2} \int_{(\ell_1-\ell_{10})/2}^{(\ell_1+\ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(\tau_2),0} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} u_1^{(\tau_2),l} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)-0} dx_1 dx_3 - \int_{(\ell_3-\ell_{30})/2}^{(\ell_3+\ell_{30})/2} \int_{(\ell_1-\ell_{10})/2}^{(\ell_1+\ell_{10})/2} \sigma_{11}^{(\tau_3),0} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} u_1^{(\tau_3),l} \Big|_{x_2=(h_F+h_C)+0} dx_1 dx_3
 \end{aligned} \quad (22)$$

Sonlu eleman çözümünde, çözüm bölgesi ve yükleme durumu göz önüne alındığında, $x_1 = \ell_1 / 2$, $x_2 = h / 2$ ve $x_3 = \ell_3 / 2$ düzlemlerine göre simetri özelliğinden yararlanılarak, plağın 1/8'lik parçası göz önüne alınmıştır. Buna göre, ele alınan plağın 1/8'lik parçası; Ox_1 doğrultusunda 20, Ox_2 doğrultusunda 12 ve Ox_3 doğrultusunda 20 adet olmak üzere sekiz düğüm noktalı, standart dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlara ($\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,4800$) ayrıştırılmıştır [14]. Dolayısıyla,

$$V' = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (23)$$

olur. [6] tarafından yapılan araştırmada, çatlak ucu civarında tekil sonlu eleman kullanılması, kritik değerleri değiştirmede tespit edilmiştir. Bu tespit göz önüne alınarak, ele alınan çalışmada çatlak bölgesi civarında sadece standart tipte sonlu elemanlar kullanılmıştır. Bu çalışmada yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından, her bir sonlu eleman için aranan yer değiştirme fonksiyonunun ifadesi polinom olarak seçilir. Bu fonksiyonun, şekil fonksiyonları ve düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeler kullanılarak ifadesi

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (24)$$

olarak yazılabilir. (24) ifadesi, (22) fonksiyoneliinde yerine yazılır ve bilinen işlemler yardımıyla $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r}$ (25)

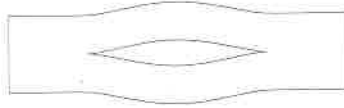
cebirsal denklem sistemi elde edilir [2,3]. Burada, $\mathbf{K}$ katsayılar (rijidlik) matrisini, $\mathbf{a}$ düğüm noktalarında bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerini içeren vektörü ve $\mathbf{r}$ düğüm noktalarına etki eden kuvvetleri içeren vektörü göstermektedir. Seçilen dış kuvvet için (25) cebrik denklem sisteminin çözülmesiyle, düğüm noktalarında aranan yer değiştirmeler elde edilir. Ele alınan plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış kuvvetin değeri, ardışık iterasyonlarla belirlenir. Buna göre (25) denklem sisteminin çözümünden elde edilen yer değiştirmelerin sonsuza gitmesine neden olan dış kuvvet değeri, kritik delaminasyon burkulma kuvveti olarak belirlenir.

SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Üç tabakadan oluşan sandviç plağın, çekirdek tabakasının elastisite modülü ve Poisson oranı sırasıyla $E^{(1)}$ ve $\nu^{(1)}$, dış tabakaların elastisite modülü ve Poisson oranı sırasıyla $E^{(2)}$ ve $\nu^{(2)}$ ile gösterilmektedir. Çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğriliğin sağlaması gereken koşullara uygun olarak, (5) ifadesinde verilen $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu

$$f^{\pm}(x_1, x_3) = \pm \ell_{10} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \times \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{30}} \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2} \right) \right) \quad (26)$$

şeklinde seçilmiştir. (26) fonksiyonu, çatlağın alt ve üst yüzeylerinin birbirine göre simetrik ama zıt yönde eğriliğe sahip olmasına karşı gelmektedir (Şekil 2).



Şekil 2. Ele alınan plakta, çatlak yüzeylerine başlangıçta verilen ön eğriliğin geometrik formu

Sayısal sonuçların elde edilmesinde, $h/\ell_1 = 0.15$, $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ değerleri sabit kalmak üzere, diğer malzeme ve geometrik parametrelerin değişiminin, kritik parametreler üzerindeki etkisi incelenmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir.

Çizelge 1. h_F/ℓ_1 ve $E^{(2)}/E^{(1)}$ değişiminin, $p_{kr}/E^{(1)}$ değerlerine etkisi ($\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$)

h_F/ℓ_1	$E^{(2)}/E^{(1)}$			
	1	2	5	10
0.01250	0.0111	0.0220	0.0535	0.1036
0.01875	0.0172	0.0338	0.0811	0.1554
0.02500	0.0251	0.0490	0.1167	0.2215
0.03125	0.0345	0.0671	0.1584	0.2986
0.03750	0.0451	0.0873	0.2051	0.3847
0.04375	0.0564	0.1091	0.2559	0.4790
0.05000	0.0684	0.1322	0.3103	0.5828
0.05625	0.0807	0.1563	0.3685	0.6956

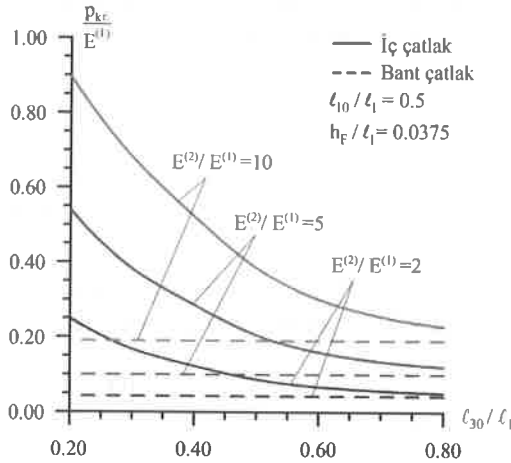
Çizelge 1'de, Ox_2 doğrultusundaki dış tabaka kalınlıkları (h_F/ℓ_1) ile $E^{(2)}/E^{(1)}$ elastisite modülü oranı değişimlerinin, $p_{kr}/E^{(1)}$ kritik burkulma kuvveti değerlerine etkisi, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$ değerleri için verilmiştir. Sayısal sonuçlar incelendiğinde, dış tabakaların kalınlığı ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir.

Şekil 3'te sandviç plağın iç çatlak içermesi durumunda, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğunun (ℓ_{30}/ℓ_1) farklı değerlerinde hesaplanan kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri verilmiştir. Ayrıca aynı şekil üzerinde, ele alınan sandviç plağın bant çatlak içermesi durumuna ait uygun kritik burkulma değerleri de gösterilmiştir [2].

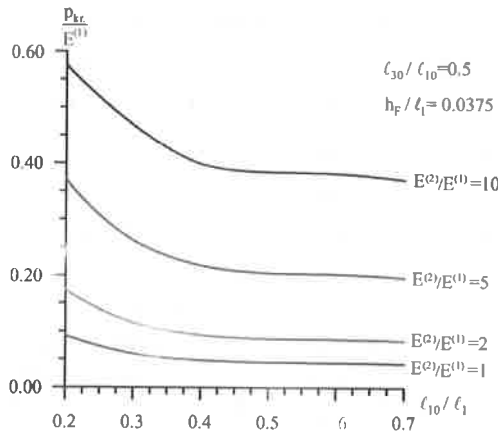
Şekil 3'te verilen grafiklerden; yapı elemanının iç çatlak içermesi durumuna ait sayısal sonuçlar incelendiğinde, Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerlerinin arttığı görülmektedir. Diğer taraftan iç çatlakların Ox_3 doğrultusundaki uzunluğu arttıkça yani, ℓ_{30}/ℓ_1 değeri büyüdükçe, elde edilen kritik burkulma kuvveti değerlerinin küçülerek, tabakalar arasında bant çatlak olması halinde elde edilen ve [2]'de verilen uygun kritik burkulma kuvveti değerlerine yaklaştığı görülmektedir. Bu sonuç, ele alınan problemin sayısal çözümünde kullanılan ve tarafımızdan yapılan algoritma ve programlara güveni sağlamaktadır. Belirtelim ki, [2] çalışmasında hesaplanmış olan $\delta_{kr.}$ ile bu çalışmada kullanılan $p_{kr.}$ büyüklükleri arasında

$$\delta_{kr.} = p_{kr.} h / (2E^{(2)}h_F + E^{(1)}h_C) \quad (27)$$

ilişkisi sağlanmaktadır.



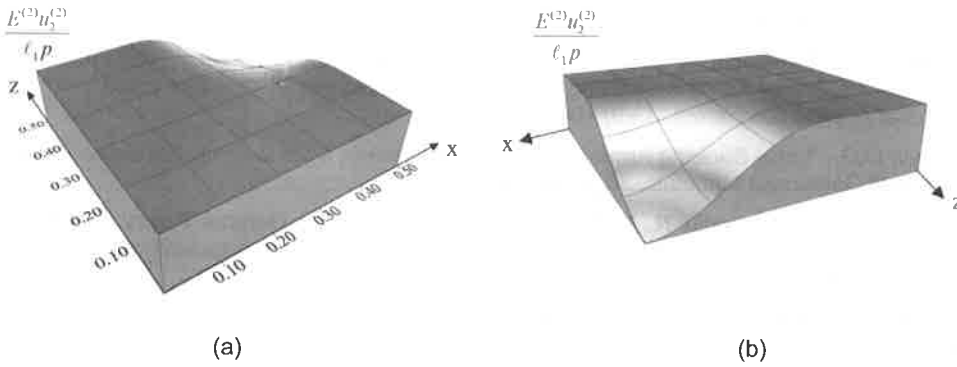
Şekil 3. Çeşitli ℓ_{30}/ℓ_1 ve $E^{(2)}/E^{(1)}$ değişiminin, $p_{kr.}/E^{(1)}$ değerlerine etkisi ($\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$)



Şekil 4. Çeşitli ℓ_{10}/ℓ_1 ve $E^{(2)}/E^{(1)}$ değişiminin, $p_{kr.}/E^{(1)}$ değerlerine etkisi

Şekil 4'te, Ox_1 doğrultusundaki iç çatlak uzunluğunun (ℓ_{10}/ℓ_1) değişiminin, $p_{kr}/E^{(1)}$ değerlerine etkisi grafik olarak verilmiştir. Şekil 4'teki grafiklerden görüldüğü üzere, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğu azaldıkça ve/veya dış tabakaların elastisite modülü arttıkça, kritik burkulma kuvveti değerleri artmaktadır.

Şekil 5'de $x_2 = h_F$ 'deki çatlakın alt yüzeyine ($x_2 = h_F - 0$, $\ell_3/2 \leq x_3 \leq \ell_3$, $0 \leq x_1 \leq \ell_1/2$) ait noktaların, düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin yüzey grafiği (burkulma modu), $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$, $\ell_{30}/\ell_{10} = 1.0$, $h_F/\ell_1 = 0.0375$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 10$ ve $(p_{kr0}/E^{(1)} - p/E^{(1)}) < 10^{-4}$ parametre değerleri için verilmiştir. Şekilde eksenler $x(=x_1)$ ve $z(=\ell_3 - x_3)$ ile gösterilmiştir. Şekil 5'ten görüldüğü üzere, ele alınan sandviç dikdörtgen plağın burkulma modu, ön eğriliğin formuna uygun düşmektedir. Belirtelim ki bu çalışmada, plağın delaminasyon burkulma modunun çatlak yüzeylerinde var olduğu kabul edilen ön eğriliğin formundan farklı bir formda oluştuğu durumlar da tespit edilmiştir [1]. Ancak bu durumlara burada yer verilmemiştir.



Şekil 5. Ele alınan sandviç plakta, $x_2 = h_F - 0$ yüzeyinin burkulma modu a) $x_3 = \ell_3$ düzleminden görünüm (ön yüz), b) $x_3 = \ell_3/2$ düzleminden görünüm (arka yüz)

Sonuç olarak, üç tabakadan oluşan ve tabakaları arasında paralel iki iç çatlak içeren sandviç dikdörtgen plağa ait delaminasyon burkulma probleminin çözülmesi ile aşağıdaki neticelere ulaşılmıştır;

1. Sandviç plağın dış tabakalarının çekirdek tabakasına göre elastisite modülü arttıkça veya dış tabaka kalınlıkları arttıkça, plağa ait kritik burkulma değerleri artmaktadır (Tablo 1).
2. Ele alınan sandviç plağın içerdiği iç çatlakın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğunun (ℓ_{30}) artırılmasıyla bulunan kritik burkulma kuvveti değerlerinin azalarak, yapı elemanının bant çatlak içermesi durumunda bulunan uygun kritik burkulma kuvveti değerlerine yaklaştığı tespit edilmiştir (Şekil 3).
3. Sandviç plağın içerdiği iç çatlakların Ox_3 (Ox_1) doğrultularındaki çatlak uzunluğu ℓ_{30} (ℓ_{10}) arttıkça, plağa ait kritik burkulma değeri azalmakta ve belirli bir asimtoda yaklaşmaktadır. (Şekil 3 ve Şekil 4).
4. Çatlak kenar uzunluklarının oranının (ℓ_{30}/ℓ_{10}) bazı değerleri için belirlenen plağın burkulma modu, başlangıç durumda çatlak yüzeylerinde olduğu kabul edilen eğriliğin formuyla uyum göstermektedir (Şekil 5). Bu duruma uymayan ℓ_{30}/ℓ_{10} oranları da mevcuttur.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde bizden yardımlarını esirgemeyen hocamız Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a teşekkür ederiz. Ayrıca, bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Araştırma Projesi kapsamında desteklenmiştir. Proje numarası: 2010-05-01-DOP01.

KAYNAKLAR

- [1] Tekin, A., "Çatlak İçeren Üç Katlı Elastik ve Viskoelastik Sandviç Kalın Plakların Delaminasyonu", Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2011.
- [2] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Tekin, A., "3D FEM Analyses of the Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Plate Containing Interface Rectangular Cracks and Made from Elastic and Viscoelastic Materials", Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES), 64(2):147-185, 2010.
- [3] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Tekin, A., "Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Thick Plate with Band Cracks", ASME2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Istanbul, Turkey, July 12-14, 2010.
- [4] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., "Delamination Buckling of a Rectangular Orthotropic Composite Plate Containing a Band Crack", Mechanics of Composite Materials 46(5):493-504, 2010.
- [5] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E.E., "Buckling Delamination of a Rectangular Plate Containing a Rectangular Crack and Made from Elastic and Viscoelastic Composite Materials", International Journal of Solids and Structures, 47(25-26):3426-3434, 2010.
- [6] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. ve Rzayev, O.G., "On the Influence of Singular-Type Finite Elements on the Critical Force in Studying the Buckling of a Circular Plate with a Crack", International Applied Mechanics, 43(9):1048-1056, 2007.
- [7] Rzayev, O.G., "Local Buckling Around an Interfacial Crack in a Viscoelastic Sandwich Plate", Mechanics of Composite Materials, 38 (3): 233-242, 2002.
- [8] Akbarov, S.D. ve Yahnioglu, N., "A Method of Investigation of the General Theory of Stability Problems of Structural Elements Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", Composites Part B: Engineering, 32(5):475-482, 2001.
- [9] Erdogan, F., "Fracture Mechanics", International Journal of Solids and Structures, 37: 171-183, 2000.
- [10] Akbarov, S.D., "On the Three Dimensional Stability Loss Problems of Elements of Constructions Fabricated from the Viscoelastic Composite Materials", Mech. Comp. Mater. 34(6):537-544, 1998.
- [11] Akbarov, S.D., Sisman, T. ve Yahnioglu, N., "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression", International Journal of Engineering Science, 35(12/13):1115-1136, 1997.
- [12] Evans, A.G. ve Hutchinson, J.W., "The Thermo Mechanical Integrity of Thin Films and Multilayers", Acta Metal. Mater., 43(7):2507-2530, 1995.
- [13] Kardomateas, G.A., Pelegri, A.A. ve Malik, B., "Growth of Internal Delaminations Under Cyclic Compression in Composite Plates", Journal of Mech. and Phys. of Solids, 43(6): 847-868, 1995.
- [14] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.
- [15] Babich, I.Yu ve Guz, A.N., "Stability of Bars, Plates and Shells of Composite Materials (Three-dimensional formulation)", Survey, Soviet Appl. Mech. (English translations of Prikladnaya Mekhanika), 10(19), 835-849, 1983.
- [16] Hoff, N.J., "Buckling and Stability", Journal of the Royal Aeron. Society, 58:3-52, 1954.
- [17] Biot, M.A., "Nonlinear Theory of Elasticity and the Linearized Case for a Body Under Initial Stress", Phill Mag. Sec Z, 27: 89-115: 468-489, 1939.