

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN TİTREŞİM
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Mehmet ÖZAKINCI

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : MAKİNA DİNAMİĞİ TİTREŞİM VE AKUSTİĞİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat KARADAĞ

KASIM 2006

**TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN TİTREŞİM
ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Mehmet ÖZAKINCI
(503031403)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Ekim 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Kasım 2006**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Vedat KARADAĞ

Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Hikmet KOCABAŞ (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Necati TAHRALI (Y.T.Ü.)

KASIM 2006

ÖNSÖZ

Günümüzde malzeme teknolojisi hızla gelişmektedir. Bu hızlı gelişim sebebiyle, önceleri çok kısıtlı alanlarda kullanılabilen kompozit malzemeler, hayatımızın her alanına girmeye başlamıştır. Kompozitler, havacılık ve uzay sanayisi, nükleer, petrol ve petro – kimya endüstrileri (basınçlı kaplar ve boru hatları gibi), kara ve deniz taşımacılığı (gemi yapımında), elektronik, ayrıca, yüksek atlama sıırıkları, bisiklet, tenis, sörf gibi çeşitli spor malzemeleri, tıp endüstrisi, biyomekanik, robot teknolojisi gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yaygın kullanımından dolayı, kompozit malzemelerin, mekanik ve dinamik davranışlarını belirlemek, mühendislik tasarımları açısından oldukça önemli hale gelmiştir. Bu çalışmada, düzlem gerilme durumunda olduğu kabul edilen simetrik tabakalı dikdörtgen kompozit plakların titreşim analizleri, mukayese fonksiyonu olarak trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak, Rayleigh – Ritz yöntemi ile yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Ansys sonlu elemanlar paket programı ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çalışmamın, bu konuyla ilgilenen teknik kişilere yararlı olmasını diler, öğrenim hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman benden esirgememiş olan aileme ve sürdürdüğüm tez çalışmamda sürekli yardımcı olan hocam Sn. Prof. Dr. Vedat Karadağ’a saygı ve sevgilerimi sunarım. Ayrıca çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen, Sn. Hasan Körük’e, Sn. Altuğ Bıçak’a, Sn. Onur Ozansoy’a ve Sn. ’Umut Kubat’a teşekkür ederim.

Kasım 2006

Mehmet ÖZAKINCI

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	x
SEMBOL LİSTESİ	xii
ÖZET	xiv
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
2. YER DEĞİŞTİRMELER, GENLEMELER VE GERİLMELER	3
2.1 Giriş	3
2.2 Genleme – Yer Değiştirme İlişkileri	4
2.3 Denklik Denklemleri	6
2.4 Gerilme – Genleme İlişkileri	8
2.4.1 Genel Anizotropik Malzemelerin Gerilme – Genleme İlişkileri	9
2.4.2 Ortotropik Malzemelerin Gerilme Genleme İlişkileri	12
2.5 Düzlem Gerilme Durumu	15
2.6 Gerilme – Genleme Dönüşümleri	16
2.6.1 Gerilme Dönüşümleri	18
2.6.2 Genleme Dönüşümleri	20
2.6.3 Katılık ve Esneklik Matrisi Dönüşümleri	22
2.7 Genleme Enerjisi	23
3. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLAR	25
3.1 Tabaka Kodlaması	25
3.2 Tabakalı Kompozit Plakların Katılık Matrisi	26
4. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ	33
4.1 Düzlem – Gerilme Durumundaki Plak İçin Genleme Enerjisi	33
4.2 Kenarlarından Basit Mesnetlenmiş Simetrik Katmanlı Dikdörtgen Levhanın Titreşim Analizi	34
4.3 Genel Sınır Şartları Altında Simetrik Katmanlı Dikdörtgen Levhanın Titreşim analizi	40
5. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	43
5.1 Tüm kenarlarından Basit Mesnetlenmiş Simetrik Katmanlı Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları	43
5.1.1 Plakanın katılık matrislerinin elde edilmesi	43
5.1.2 Dört kenarından basit mesnetlenmiş (BBBB) plakanın titreşim analizi sonuçları	46

5.2 Genel Sınır Şartları Altında Simetrik Katmanlı Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları	56
5.2.1 Dört kenarından ankastre (AAAA) plakanın titreşim analizi sonuçları	56
5.2.2 Üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş (AABA) plakanın titreşim analizi sonuçları	58
5.2.3 Karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş (BABA) plakanın titreşim analizi sonuçları	61
5.2.4 Komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş (ABBA) plakanın titreşim analizi sonuçları	63
5.2.5 Üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş (BBBA) plakanın titreşim analizi sonuçları	66
5.3 Elde Edilen Sonuçların Değerlendirilmesi	68
5.3.1 Kenar – kalınlık oranının etkisi	68
5.3.2 Malzeme anizotropisinin etkisi	69
5.3.3 Elyaf yönlenme açılarının etkisi	70
5.3.4 Kenar uzunlukları oranının etkisi	71
5.3.5 Kenar sınır şartlarının etkisi	72
5.3.6 Katman sayısının etkisi	73
6. DENEYSEL ÇALIŞMA	76
6.1 Deney Düzeneği	77
6.2 Deney Ölçüm Sonuçları	79
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	80
KAYNAKLAR	83
EKLER	85
ÖZGEÇMİŞ	87

KISALTMALAR

BBBB	: Dört kenarından basit mesnetlenmiş
AAAA	: Dört kenarından ankastre mesnetlenmiş
AABA	: Üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş
BABA	: Karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş
ABBA	: Komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş
BBBA	: Üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş
SSSS	: Dört kenarından serbest

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 2.1. Genel izotropik malzemenin, esneklik matrisi elemanları	11
Tablo 2.2. Ortotropik malzemenin, esneklik matrisi elemanları	12
Tablo 2.3. Ortotropik malzemelerin mühendislik sabitleri	13
Tablo 2.4. Mühendislik sabitlerine göre esneklik matrisinin elemanları	14
Tablo 4.1. Serbest titreşen bir çubuğun çeşitli sınır şartları altındaki yer değiştirme fonksiyonları	37
Tablo 4.2. $[G]$ matrisinin elemanları	39
Tablo 4.3. α katsayılarının gerçek değerleri	41
Tablo 4.4. α_1 ve α_4 katsayılarının yaklaşık değerleri	41
Tablo 4.5. α_3 ve α_5 katsayılarının yaklaşık değerleri	42
Tablo 5.1. $E_1/E_2=10$ (Malzeme 1) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri	43
Tablo 5.2. $E_1/E_2=20$ (Malzeme 2) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri	44
Tablo 5.3. $E_1/E_2=30$ (Malzeme 3) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri	44
Tablo 5.4. $E_1/E_2=40$ (Malzeme 4) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri	44
Tablo 5.5. Malzeme 1 ($L_x/L_y=50$) den modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın Hz biriminde elde edilmiş doğal frekansları	47
Tablo 5.6. Malzeme 1 den modellenmiş tek katmanlı (θ°) bir plakanın çeşitli elyaf yönlenme açılarında, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	48
Tablo 5.7. Malzeme 1 ($E_1/E_2=10$) den modellenmiş $(0/90)_s$ simetrik, dik katmanlı, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_x/L_y oranlarına göre, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	49
Tablo 5.8. Malzeme 2 ($E_1/E_2=20$) den modellenmiş $(0/90)_s$ simetrik, dik katmanlı, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_x/L_y oranlarına göre, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	50
Tablo 5.9. Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş $(\theta / - \theta)_s$ katman dizilimine sahip, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_x/h=10, 100$ oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	51
Tablo 5.10. Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş, simetrik dik katmanlı, farklı katman sayılarında, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_y/h=10, 100$ oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	52

Tablo 5.11.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş, simetrik, 45° açılı – katmanlı, farklı katman sayılarında, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_x/h=10, 100$ oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	53
Tablo 5.12.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_x/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	54
Tablo 5.13.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	54
Tablo 5.14.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	55
Tablo 5.15.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	55
Tablo 5.16.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	56
Tablo 5.17.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden edilmiş doğal frekansları	57
Tablo 5.18.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	57
Tablo 5.19.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş, dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	58
Tablo 5.20.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	59
Tablo 5.21.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	59
Tablo 5.22.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	60

Tablo 5.23.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.....	60
Tablo 5.24.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	61
Tablo 5.25.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	62
Tablo 5.26.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	62
Tablo 5.27.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	63
Tablo 5.28.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	64
Tablo 5.29.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	64
Tablo 5.30.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	65
Tablo 5.31.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	65
Tablo 5.32.	Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	66
Tablo 5.33.	Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	67
Tablo 5.34.	Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	67

Tablo 5.35.	Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları	68
Tablo 6.1.	Aramid/Epoxy Kevlar plakanın malzeme ve geometrik özellikleri	76
Tablo 6.2.	Aramid/Epoxy Kevlar plakanın deneysel sonuçları ile Ansys sonuçlarının karşılaştırılması	79

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1	Kompozit malzeme sistemleri 1
Şekil 1.2	Tabakalı kompozit plak 2
Şekil 2.1	Genel x, y, z ve lokal x_1, x_2, x_3 koordinat sistemleri ... 3
Şekil 2.2	Genel ve lokal koordinat sistemlerine karşılık gelen yer değiştirmeler 4
Şekil 2.3	Genel ve lokal koordinat sistemlerinde gerilmeler 4
Şekil 2.4	AB doğru parçasının yer değiştirmesi 5
Şekil 2.5	ABC parçasındaki yer değiştirme 5
Şekil 2.6	$\Delta x \Delta y \Delta z$ kübik elemanındaki gerilmeler 7
Şekil 2.7	x eksenine paralel ve O merkezinden geçen eksene göre moment dengesi 8
Şekil 2.8	Genel izotropik malzeme örneği 9
Şekil 2.9	Düzlem gerilme durumunda gerilmeler 15
Şekil 2.10	Döndürülmüş eksen takımının temel koordinat sistemiyle yaptığı açılar 17
Şekil 2.11	p', q', r' koordinat sistemi elde edilene kadar p, q, r eksenlerinin döndürülmesi 18
Şekil 2.12	Koordinat ekseninin r – eksen etrafında döndürülmesi 20
Şekil 3.1	x, y, z plak koordinat sistemi, x_1, x_2, x_3 tabaka koordinat sistemi ve tabaka açısı 25
Şekil 3.2	$[45^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 60^\circ]$ şeklinde dizilmiş plağın gösterimi 25
Şekil 3.3	Simetrik plak örneği 26
Şekil 3.4	Koordinat sistemi ve orta düzlem 26
Şekil 3.5	Plağın $x - z$ düzlemindeki yer değiştirmesi 27
Şekil 3.6	Referans düzlemine etkiyen iç kuvvetler, momentler ve enine kayma kuvvetleri 29
Şekil 3.7	Tabakaların referans düzlemine olan mesafeleri 29
Şekil 4.1	Kenarlarından basit mesnetlenmiş dikdörtgen levha 34
Şekil 5.1	Dört kenarından ankastre mesnetlenmiş plaka 56
Şekil 5.2	Üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş plaka 58
Şekil 5.3	Karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş plaka 61
Şekil 5.4	Komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş plaka 63
Şekil 5.5	Üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş plaka 66

Şekil 5.6	L_y/h oranındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	69
Şekil 5.7	E_1/E_2 oranındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	70
Şekil 5.8	Elyaf yönlenme açılarındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	71
Şekil 5.9	Kenar uzunlukları oranlarındaki (L_x/L_y) değişimin, BBBB sınır şartlarında, malzeme 1 den modellenmiş, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	72
Şekil 5.10	0/90/90/0 katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, kenar sınır şartlarındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	73
Şekil 5.11	(45/-45...)s katman dizilimindeki simetrik, açılı katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	74
Şekil 5.12	(0/90...)s katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi	74
Şekil 5.13	(0/90...)s katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz ikinci mod frekans parametresine etkisi	75
Şekil 6.1	Deney numunesi	76
Şekil 6.2	Deney numunesinin yakından görünümü	77
Şekil 6.3	Kenar sınır şartları serbest plaka için, deney düzeneği	78
Şekil 6.4	Deney numunesinin dört kenarından serbest tutturulması ..	78
Şekil 6.5	Plakanın frekans cevabı (Bruel & Kjaer Pulse programı) ..	79
Şekil 6.6	Plakanın Ansys'te elde edilen mod şekilleri ve frekansları	80

SEMBOL LİSTESİ

u, v, w	: x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeler
u_1, u_2, u_3	: x_1, x_2, x_3 yönlerindeki yer değiştirmeler
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y, z koordinat sistemindeki normal gerilmeler
$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$	: x, y, z koordinat sistemindeki kayma gerilmeleri
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki normal gerilmeler
$\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki kayma gerilmeleri
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	: x, y, z koordinat sistemindeki normal genlemeler
$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	: x, y, z koordinat sistemindeki kayma genlemeleri
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki normal genlemeler
$\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki kayma genlemeleri
f_x, f_y, f_z	: Birim hacme düşen iç kuvvetler
p_x, p_y, p_z	: Birim alana etkiyen yüzey kuvvetleri
$[\bar{C}], \bar{C}_{ij}$	: x, y, z koordinat sistemindeki üç boyutlu katılık matrisi
$[C], C_{ij}$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki üç boyutlu katılık matrisi
$[\bar{S}], \bar{S}_{ij}$	: x, y, z koordinat sistemindeki üç boyutlu esneklik matrisi
$[S], S_{ij}$	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki üç boyutlu esneklik matrisi
E_1, E_2, E_3	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki elastisite modülleri
G_{23}, G_{13}, G_{12}	: x_1, x_2, x_3 koordinat sistemindeki kayma modülleri
ν_{12}	: Poisson oranı
$[\bar{Q}], \bar{Q}_{ij}$	: x, y koordinat sistemindeki iki boyutlu katılık matrisi
$[Q], Q_{ij}$	: x_1, x_2 , koordinat sistemindeki iki boyutlu katılık matrisi
$[\hat{T}_\sigma]$	: Üç boyutlu gerilme dönüşüm matrisi
$[T_\sigma]$	: İki boyutlu gerilme dönüşüm matrisi
$[\hat{T}_\epsilon]$	: Üç boyutlu genleme dönüşüm matrisi
$[T_\epsilon]$	: İki boyutlu genleme dönüşüm matrisi
U	: Genleme enerjisi
Ω	: Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi
π_p	: Toplam potansiyel enerji
Θ	: Elyaf yönlenme açısı
$[D], D_{ij}$	: Tabakanın eğilme katılık matrisi
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$	: Referans düzlemin eğrilięi
N_x, N_y, N_{xy}	: Tabakanın birim boyuna etkiyen düzlem içi kuvvetler

M_x, M_y, M_{xy}	: Tabakanın birim boyuna etkiyen düzlem içi momentler
V_x, V_y	: Enine kesme kuvvetleri
K	: Plakanın katman sayısı
z_k	: k. katmanın referans düzlemine mesafesi
w^0	: Referans düzlemdeki yer değiştirme
$\bar{w}^0$	: Mukayese fonksiyonu
ω	: Dairesel frekans
f, f_{ij}, f_i	: Frekans (Hz)
λ, λ_{ij}	: Öz değer
T	: Periyot
L_x, L_y	: Plakanın kenar uzunlukları
h	: Plak kalınlığı
h_t, h_b	: Plakanın üst ve alt yüzeylerinin referans düzleme olan uzaklıkları
ρ	: Yoğunluk

TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada, düzlem gerilme durumunda olduğu kabul edilen simetrik tabakalı dikdörtgen kompozit plakların titreşim analizleri, mukayese fonksiyonu olarak trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak, Rayleigh – Ritz yöntemi ile yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Ansys sonlu elemanlar paket programı ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Kenar – kalınlık oranı, malzeme anizotropisi, elyaf yönlenme açıları, kenar uzunlukları oranı, kenar sınır şartları ve katman sayısı gibi plaka parametrelerindeki değişimin, boyutsuz temel frekans parametreleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda kenar – kalınlık oranında ve malzeme anizotropisinde meydana gelen artış, frekans parametrelerinde de artışa sebep olmuştur. Ayrıca, elyaf yönlenme açısının artması ile de frekans parametresinin arttığı ve 45° de en yüksek değere ulaştığı tespit edilmiştir. Kenar sınır şartlarının durumunun frekans parametreleri üzerinde büyük etkisi olduğu gözlenmiştir. Kenar sınır şartlarında kısıtların artması ile, frekans parametrelerinde artış meydana gelmiştir. Kenar uzunluk oranlarının artmasının, frekans parametrelerinde düşüşe sebep olduğu belirlenmiştir. Simetrik dik katmanlı plakalarda katman sayısının artmasının temel frekans parametresi üzerinde etkisiz olduğu, ancak temel frekans harici diğer modlarda artışa neden olduğu saptanmıştır. Bu artışın dördün üzerindeki katman sayılarında önemsiz düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Bu çalışma kapsamında ayrıca, aramid / epoxy kevlar malzemeden imal edilmiş bir plakanın deneysel ortamda doğal frekansları ölçülmüştür. Deney numunesi Ansys programında modellenmiş ve titreşim analizi yapılmıştır. Deneysel ölçümlerden elde edilen doğal frekans değerleri ile Ansys programı ile bulunanlar karşılaştırılmıştır. Sonuçta bu programla bulunan sonuçların deneysel sonuçlarla tutarlı olduğu belirlenmiştir.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES

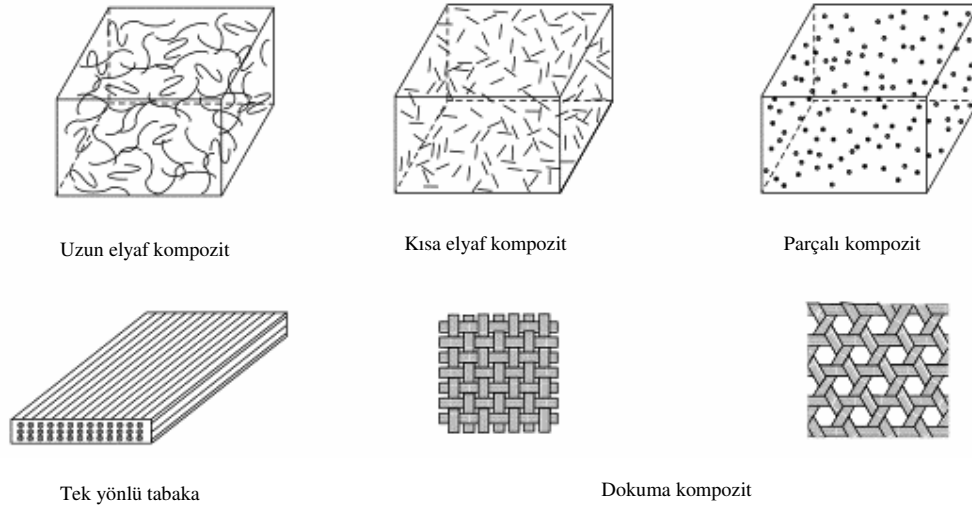
SUMMARY

In this study, vibration analysis of symmetric laminated, composite plates which are in plane stress condition are done by using trigonometric function as the admissible function, by Rayleigh – Ritz method. The results are compared with the ones obtained by Ansys finite element software. The effect of changes in plate parameters such as width-to-thickness ratio, material anisotropy, fibre orientation angle, aspect ratio, boundary conditions and number of layers upon non-dimensional frequency parameters are examined. After the examination, the frequency parameters are found to increase with increase in width to thickness ratio and material anisotropy. In addition frequency parameters are found to increase with increase in fibre orientation angle and have a maximum value at 45 degrees. The edge conditions of the plate play an important role in the frequency of vibration of the system. Frequency parameters increase with increase in constraints of edge conditions. It is found that the frequency parameters decrease with aspect ratio. The increase in number of layers in cross-ply laminates is determined to be ineffective on fundamental frequency parameters but other modes increased with increase in number of layers. The effect of number of layers is found to be insignificant beyond four layers.

In addition, in this research, natural frequencies of an aramid/epoxy kevlar plate are measured experimentally. This specimen is modeled by using Ansys software and frequencies of vibration and mode shapes are analysed. The natural frequencies, obtained by experimental measurements are compared with the ones obtained by Ansys software. Finally, it is determined that the results obtained by this program are coherent with the experimental results.

1. GİRİŞ

Mühendislik malzemeleri metaller, polimerler, seramikler ve kompozitler olmak üzere dört ana gruba ayrılabilirler. Kompozit malzemeler, yukarıda sayılan diğer üç malzemenin iki veya daha fazlasının makroskobik açıdan birleşmesinden oluşan malzemeler olarak tanımlanabilirler. Metal alaşımları da birkaç malzemeden meydana geldiği halde, mikroskobik düzeyde birleştiği için kompozit malzeme değildirler. Kompozit malzemeler cam boron ve grafit gibi yüksek dayanımlı ince elyafların epoxy reçine gibi bağlayıcı bir matris malzeme içine yerleştirilmesi ile, değişik üretim yöntemleri kullanılarak elde edilirler. Matris içinde elyaflar, “Şekil 1.1”de gösterildiği üzere, kısa-uzun, sürekli-sürekli ya da çok yönlü yerleşmiş olabilir.



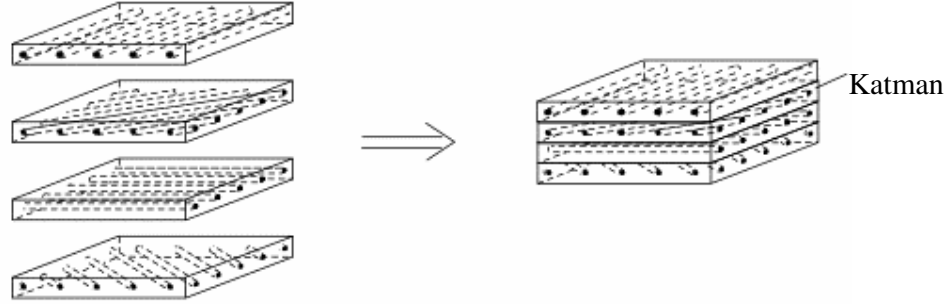
Şekil 1.1 : Kompozit malzeme sistemleri

İzotropik malzemelere kıyasla kompozit malzemeler, hafiftir, yüksek dayanımlıdır. Ayrıca yorulma mukavemeti ve korozyon dirençleri de daha iyidir. Elyafların çekme dayanımlarının yüksek olmasına rağmen birtakım dezavantajları da vardır. Basma türü zorlamaları taşıyamazlar ve düşey mekanik özellikleri kendi eksenleri doğrultusundaki özellikleri gibi iyi değildir. Bu nedenden dolayı bir araya getirilip bir matris malzeme ile desteklenmeleri gerekir. Düşey yönde dayanım artışı zorlanma durumuna göre elyafların uygun biçimde yönlendirilmesi ile elde edilir.

Günümüzde çok gelişmiş olan kompozit malzemeler; havacılık ve uzay sanayinde nükleer, petrol ve petro-kimya endüstrilerinde (basıncı kaplar ve boru hatları gibi),

kara ve deniz taşımacılığında (gemi yapımında), elektronikte, ayrıca, yüksek atlama sıırıkları, bisiklet, tenis, sörf gibi çeşitli spor malzemelerinde, tıp endüstrisinde, biyomekanikte, robot teknolojisi gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen uygulama alanlarında kullanılan kompozit malzemeler, genellikle kiriş, plak ve kabuk şeklindedirler. Bu yapıların farklı zorlama koşullarında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenli mühendislik tasarımları açısından çok önemlidir.



Şekil 1.2 : Tabakalı kompozit plak

Kompozit plaklar “Şekil 1.2”de görüldüğü gibi katman ya da tabaka denilen elemanların, bir araya getirilmesiyle oluşturulur. Bu çalışmada incelenecek olan katmanların, paralel ve sürekli elyaflardan meydana geldiği kabul edilecektir.

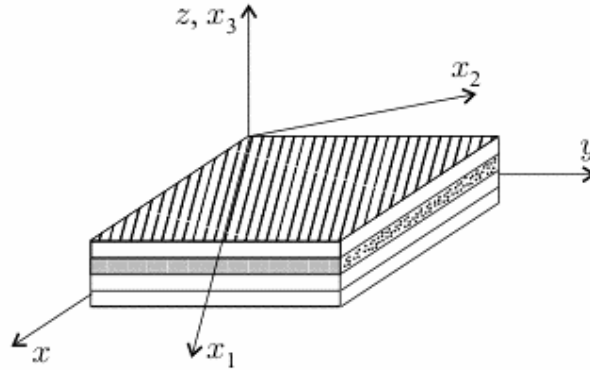
Bu çalışma kapsamında titreşim analizleri yapılan simetrik, dik ve açılı katmanlı plakaların, düşey yöndeki kayma deformasyonları dikkate almayan klasik plaka teorisine göre yapılmış ve sonlu elemanlar paket programı Ansys [1] de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların; kenar – kalınlık oranı, malzeme ortotropi derecesi, elyaf yönlenme açıları, kenar uzunlukları oranı, kenar sınır şartları ve katman sayısı gibi plaka parametrelerinin değişiminden, nasıl etkilendiği incelenmiştir. Ayrıca bulunan sonuçların doğruluğunu görmek amacı ile aramid/epoxy kevlar malzemeden imal edilmiş bir plakanın, deneysel olarak doğal frekansları bulunmuş ve Ansys sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

2. YER DEĞİŞTİRMELER, GENLEMELER VE GERİLMELER

2.1 Giriş

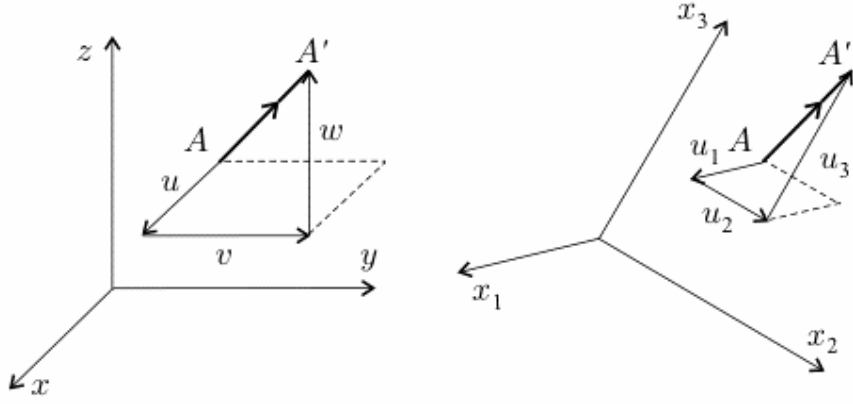
Bu bölümde kompozit malzemelerin yer değiştirme, genleme ve gerilme denklemleri elde edilecektir. Kompozit yapının, elastik bölgede kalacak şekilde ufak şekil değiştirmelerinden bahsedilecektir.

Tabakalı kompozit malzemeleri elyaf yönlenme açılarına göre yada simetri düzlemine göre tanımlamak oldukça kolaydır. “Şekil 2.1” de görüldüğü gibi iki koordinat sistemi kullanılır. Birincisi lokal koordinat sistemidir. Bu sistem simetri eksenine göre ya da fiber doğrultusuna göre bir noktaya hizalanır. İkincisi de bir referans noktasına göre yerleştirilmiş olan, genel koordinat sistemidir. Bu çalışmada lokal ve global kartezyen koordinat sistemleri sırasıyla; x_1, x_2, x_3 ve x, y, z olarak gösterilmiştir. “Şekil 2.2” de görüldüğü gibi bir A noktasının, x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeleri u, v, w ve x_1, x_2, x_3 yönlerindeki yer değiştirmeleri de u_1, u_2, u_3 olarak gösterilir.



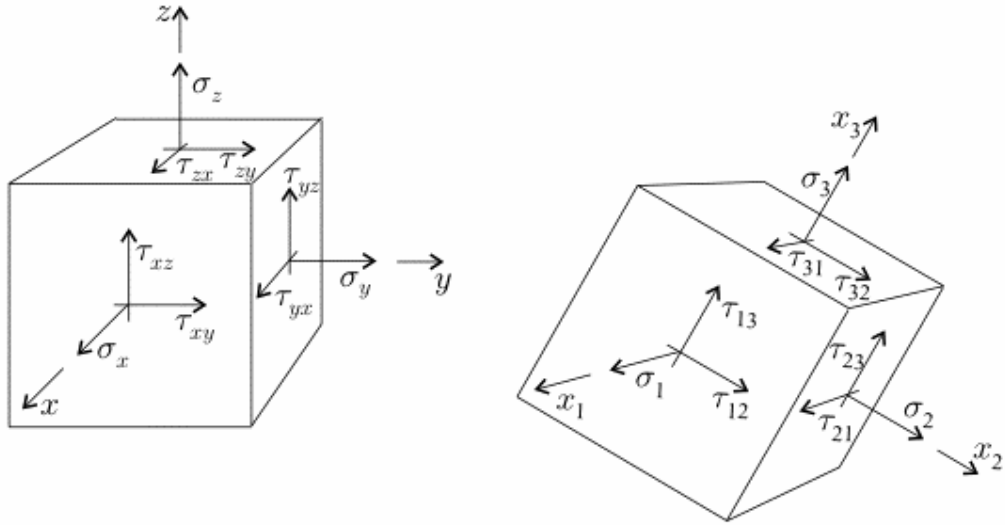
Şekil 2.1 : Genel x, y, z ve lokal x_1, x_2, x_3 koordinat sistemleri

“Şekil2.3” de görüldüğü üzere x, y, z koordinat sisteminde; normal gerilmeler $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ve kayma gerilmeleri $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ olarak gösterilirler. Bunlara ilişkin olarak normal genlemeler ve kayma genlemeleri de $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ve $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ şeklinde gösterilir.



Şekil 2.2 : Genel ve lokal koordinat sistemlerine karşılık gelen yer değiştirmeler

Aynı şekilde “Şekil2.3” de görüldüğü üzere x_1, x_2, x_3 koordinat sisteminde; normal gerilmeler $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ve kayma gerilmeleri $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$ olarak gösterilirler. Bunlara ilişkin olarak normal genlemeler ve kayma genlemeleri de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ve $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$ şeklinde gösterilir. γ sembolü mühendislik kayma genlemesini göstermekte olup tensörel kayma genlemesinin iki katıdır, $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$



Şekil 2.3 : Genel ve lokal koordinat sistemlerinde gerilmeler

2.2 Genleme – Yer Değiştirme İlişkileri

“Şekil 2.4” de görüldüğü gibi Δx uzunluğunda bir parçanın boyuna uzadığı ve yeni uzunluğunun $\Delta x'$ olduğu varsayılın.

$$u + \Delta x' = \Delta x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \quad (2.1)$$

burada u ve $u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$ ifadeleri A ve B noktalarının x yönündeki yer değiştirmeleridir. Bunlara bağlı olarak x yönündeki normal genleme aşağıdaki gibi olur [2].

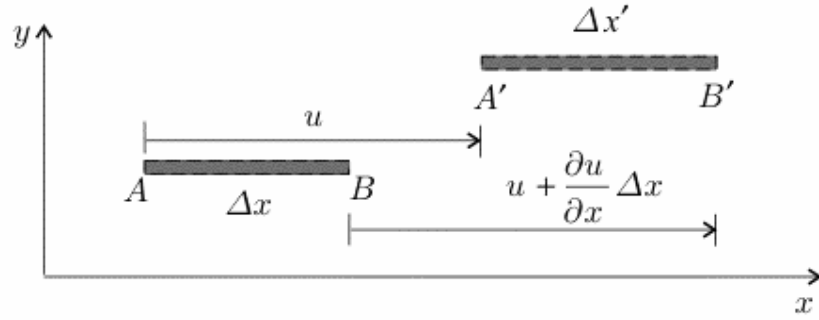
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

Benzer şekilde, y ve z yönündeki normal genlemeler de “denklem 2.3” de gösterilmiştir.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3)$$

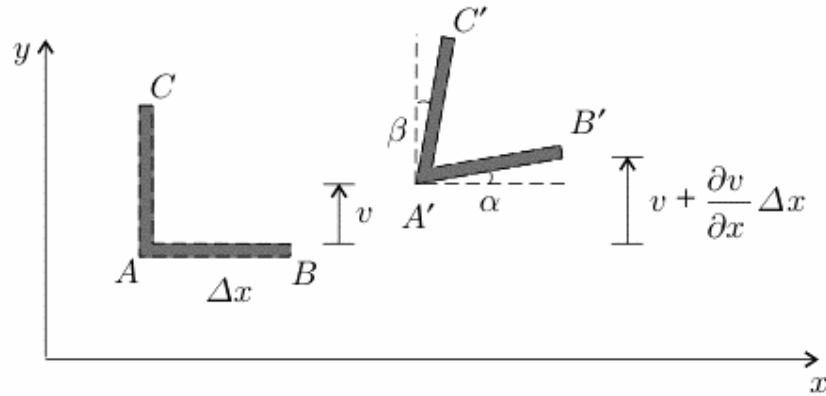
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4)$$

Yukarıdaki ifadede v ve w sembolleri y ve z yönlerindeki yer değiştirmelerdir.



Şekil 2.4 : AB doğru parçasının yer değiştirmesi

“Şekil 2.5” de yer alan birbirine dik iki doğrudan meydana gelen ABC parçası, açısal deformasyona uğrasın. Burada açıdaaki değişimin ortalaması, Tensörel kayma genlemesidir.



Şekil 2.5 : ABC parçasındaki yer değiştirme

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.5)$$

Açıların çok küçük olduğu varsayılırsa (ufak deformasyonlarda) aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.6)$$

Benzer şekilde $\beta = \partial u / \partial y$ şeklinde elde edilir. α ve β “denklem 2.5” de yerine konacak olursa;

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

elde edilir. Aynı şekilde ε_{yz} ve ε_{xz} ifadeleri de aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

Mühendislik kayma genlemesi, tensörel kayma genlemesinin iki katı idi. Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.9)$$

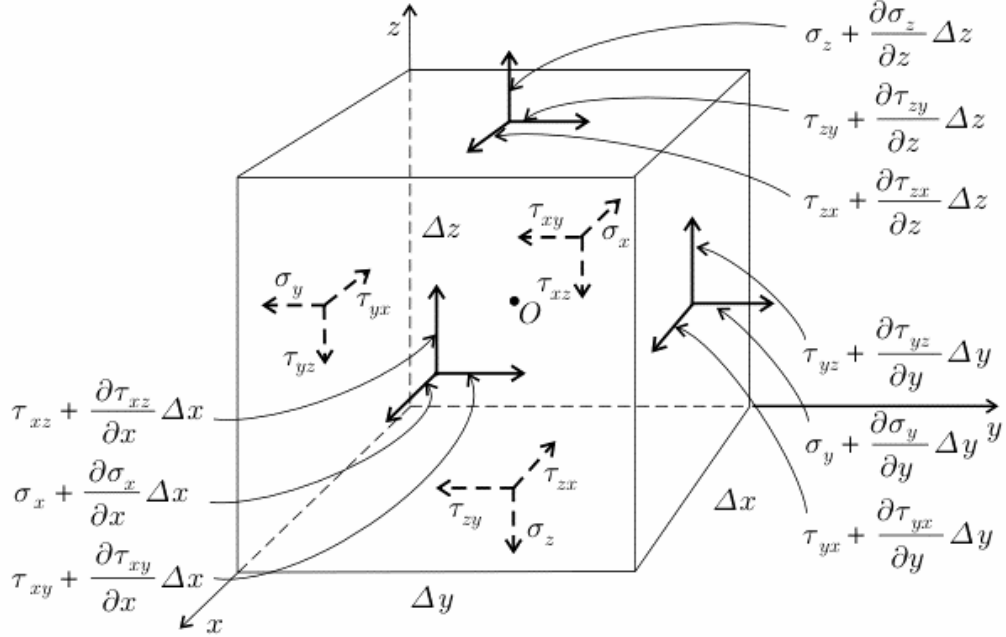
$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.11)$$

2.3 Denklik Denklemleri

“Şekil 2.6” da görüldüğü üzere O noktası merkez kabul edilerek, küçük bir $\Delta x \Delta y \Delta z$ kübik elemanı düşünülecek olursa; O noktasına göre kuvvet ve moment denklikleri elde edilebilir. Küpün bir yüzeyindeki gerilmeler ile o yüzeyin karşısındaki yüzey gerilmeleri Taylor serilerine göre ilişkilendirilebilir. Taylor serisinin ilk teriminin kullanılması ile x yönündeki kuvvet dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir [2].

$$\begin{aligned}
& -\sigma_x \Delta z \Delta y - \tau_{zx} \Delta x \Delta y - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta z \Delta y \\
& + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z + f_x \Delta x \Delta y \Delta z = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$



Şekil 2.6 : $\Delta x \Delta y \Delta z$ kübik elemanın gerilmeleri [2].

“Denklem 2.12” de yer alan f_x ifadesi; x yönündeki birim hacme düşen iç kuvveti göstermektedir. Sadeleştirmeden sonra “denklem 2.12” aşağıdaki hali alır.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \tag{2.13}$$

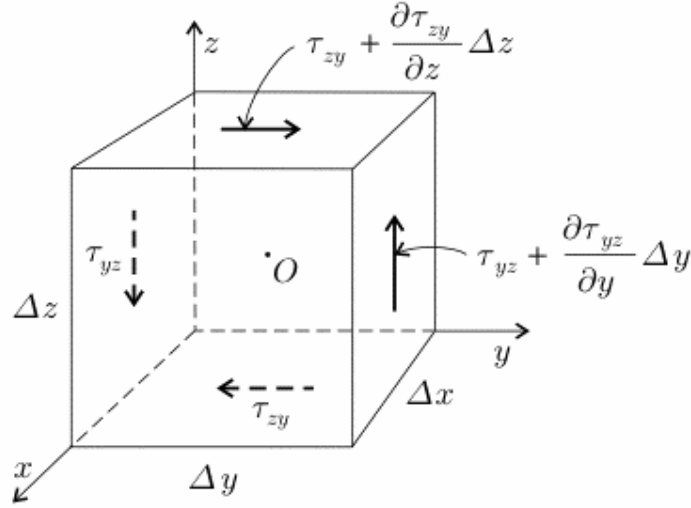
Benzer şekilde y ve z yönlerindeki denklik denklemleri de aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \tag{2.15}$$

x eksenine paralel ve O merkezinden geçen eksene göre moment dengesi ise “Şekil 2.7” de görüldüğü gibi; aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \tau_{yz} \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} - \tau_{zy} \Delta x \Delta y \frac{\Delta z}{2} \\ & + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \frac{\Delta z}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$



Şekil 2.7 : x eksenine paralel ve O merkezinden geçen eksene göre moment dengesi

“Denklem 2.16” da yüksek mertebeden terimler sadeleştirilirse ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$) ifade aşağıdaki hale gelir.

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.17)$$

Benzer şekilde aşağıdaki denklilikler de elde edilebilir.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.18)$$

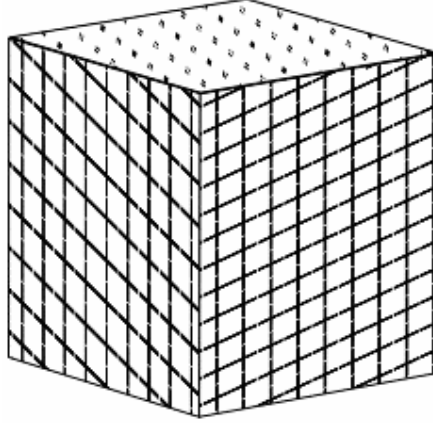
“Denklem 2.17 – 18” sayesinde, yukarıda verilen üç denklik denkleminde (2.13-2.15) üç normal gerilme ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) ve üç kayma gerilmesi ($\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$) olmak üzere; toplam altı bilinmeyen vardır, denilebilir.

2.4 Gerilme – Genleme İlişkileri

Kompozit malzemelerde elyaflar keyfi bir biçimde dizilmiş olabilir. Elyafların diziliş biçimine dayanarak, malzeme farklı doğrultularda farklı davranışlar gösterebilir. Davranış biçimine bağlı olarak ta kompozitler, genel anizotropik, monoklinik, ortotropik, enine izotropik ve izotropik olarak karakterize edilebilirler. Bu çalışma kapsamında ortotropik kompozitler üzerinde daha çok durulacaktır.

2.4.1 Genel Anizotropik Malzemelerin Gerilme – Genleme İlişkileri

“Şekil 2.8” de görüldüğü üzere kompozit malzemede elyaflar doğrultusunda simetri düzlemi mevcut değilse, bu tip malzemeler genel anizotropik olarak adlandırılır.



Şekil 2.8 : Genel izotropik malzeme örneği

Lineer elastik genel izotropik malzemenin, x , y , z genel koordinat sisteminde, gerilme – genleme ilişkileri “denklem 2.19” da verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \bar{C}_{11}\epsilon_x + \bar{C}_{12}\epsilon_y + \bar{C}_{13}\epsilon_z + \bar{C}_{14}\gamma_{yz} + \bar{C}_{15}\gamma_{xz} + \bar{C}_{16}\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \bar{C}_{21}\epsilon_x + \bar{C}_{22}\epsilon_y + \bar{C}_{23}\epsilon_z + \bar{C}_{24}\gamma_{yz} + \bar{C}_{25}\gamma_{xz} + \bar{C}_{26}\gamma_{xy} \\
 \sigma_z &= \bar{C}_{31}\epsilon_x + \bar{C}_{32}\epsilon_y + \bar{C}_{33}\epsilon_z + \bar{C}_{34}\gamma_{yz} + \bar{C}_{35}\gamma_{xz} + \bar{C}_{36}\gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= \bar{C}_{41}\epsilon_x + \bar{C}_{42}\epsilon_y + \bar{C}_{43}\epsilon_z + \bar{C}_{44}\gamma_{yz} + \bar{C}_{45}\gamma_{xz} + \bar{C}_{46}\gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= \bar{C}_{51}\epsilon_x + \bar{C}_{52}\epsilon_y + \bar{C}_{53}\epsilon_z + \bar{C}_{54}\gamma_{yz} + \bar{C}_{55}\gamma_{xz} + \bar{C}_{56}\gamma_{xy} \\
 \tau_{xy} &= \bar{C}_{61}\epsilon_x + \bar{C}_{62}\epsilon_y + \bar{C}_{63}\epsilon_z + \bar{C}_{64}\gamma_{yz} + \bar{C}_{65}\gamma_{xz} + \bar{C}_{66}\gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Denklem (2.19) aşağıdaki şekilde matris formunda yazılabilir [2-4].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{46} \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56} \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{64} & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Burada $\bar{C}_{ij}$ terimleri $[\bar{C}]$ katılık matrisinin x , y , z genel koordinat sistemindeki elemanlarıdır.

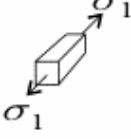
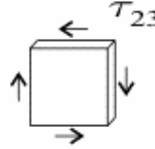
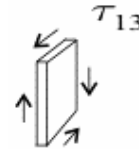
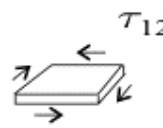
“Denklem 2.20” nin tersi alınacak olursa, sonuç olarak genleme – gerilme ilişkisi “denklem 2.21” de görüldüğü gibi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} & \bar{S}_{15} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} & \bar{S}_{25} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} & \bar{S}_{35} & \bar{S}_{36} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{46} \\ \bar{S}_{51} & \bar{S}_{52} & \bar{S}_{53} & \bar{S}_{54} & \bar{S}_{55} & \bar{S}_{56} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{63} & \bar{S}_{64} & \bar{S}_{65} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[\bar{S}] = [\bar{C}]^{-1} \quad [S] = [C]^{-1} \quad (2.22)$$

“Denklem 2.21” deki $\bar{S}_{ij}$ terimleri $[\bar{S}]$ esneklik matrisinin elemanları olup; x_1, x_2, x_3 lokal koordinat sistemi kullanılarak “tablo 2.1” de tanımlanmışlardır [2].

Tablo 2.1 : Genel izotropik malzemenin, esneklik matrisi elemanları

Test	Esneklik matrisinin elemanları	
	$\bar{S}_{11} = \epsilon_1 / \sigma_1$ $\bar{S}_{21} = \epsilon_2 / \sigma_1$ $\bar{S}_{31} = \epsilon_3 / \sigma_1$	$\bar{S}_{41} = \gamma_{23} / \sigma_1$ $\bar{S}_{51} = \gamma_{13} / \sigma_1$ $\bar{S}_{61} = \gamma_{12} / \sigma_1$
	$\bar{S}_{12} = \epsilon_1 / \sigma_2$ $\bar{S}_{22} = \epsilon_2 / \sigma_2$ $\bar{S}_{32} = \epsilon_3 / \sigma_2$	$\bar{S}_{42} = \gamma_{23} / \sigma_2$ $\bar{S}_{52} = \gamma_{13} / \sigma_2$ $\bar{S}_{62} = \gamma_{12} / \sigma_2$
	$\bar{S}_{13} = \epsilon_1 / \sigma_3$ $\bar{S}_{23} = \epsilon_2 / \sigma_3$ $\bar{S}_{33} = \epsilon_3 / \sigma_3$	$\bar{S}_{43} = \gamma_{23} / \sigma_3$ $\bar{S}_{53} = \gamma_{13} / \sigma_3$ $\bar{S}_{63} = \gamma_{12} / \sigma_3$
	$\bar{S}_{14} = \epsilon_1 / \tau_{23}$ $\bar{S}_{24} = \epsilon_2 / \tau_{23}$ $\bar{S}_{34} = \epsilon_3 / \tau_{23}$	$\bar{S}_{44} = \gamma_{23} / \tau_{23}$ $\bar{S}_{54} = \gamma_{13} / \tau_{23}$ $\bar{S}_{64} = \gamma_{12} / \tau_{23}$
	$\bar{S}_{15} = \epsilon_1 / \tau_{13}$ $\bar{S}_{25} = \epsilon_2 / \tau_{13}$ $\bar{S}_{35} = \epsilon_3 / \tau_{13}$	$\bar{S}_{45} = \gamma_{23} / \tau_{13}$ $\bar{S}_{55} = \gamma_{13} / \tau_{13}$ $\bar{S}_{65} = \gamma_{12} / \tau_{13}$
	$\bar{S}_{16} = \epsilon_1 / \tau_{12}$ $\bar{S}_{26} = \epsilon_2 / \tau_{12}$ $\bar{S}_{36} = \epsilon_3 / \tau_{12}$	$\bar{S}_{46} = \gamma_{23} / \tau_{12}$ $\bar{S}_{56} = \gamma_{13} / \tau_{12}$ $\bar{S}_{66} = \gamma_{12} / \tau_{12}$

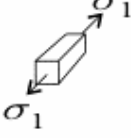
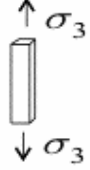
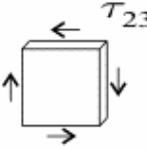
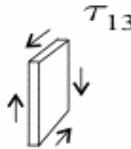
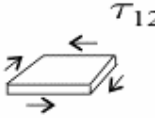
Yukarıda ki denklemlerde 1, 2, 3 yerine, sırasıyla x , y , z yazılarak denklemler genel koordinat sistemine uyarlanabilir. Ayrıca elastik malzemelerde katılık matrisi ve esneklik matrisi her iki koordinat sistemi içinde simetriktir.

$$\bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ji} \quad S_{ij} = S_{ji} \quad \bar{C}_{ij} = \bar{C}_{ji} \quad C_{ij} = C_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.23)$$

2.4.2 Ortotropik Malzemelerin Gerilme Genleme İlişkileri

Yapı içerisindeki elyaflara hizalanmış üç tane karşılıklı olarak birbirine dik simetri düzlemi varsa, bu tip malzemeler ortotropik malzeme olarak tanımlanır. Ortotropik malzemenin esneklik matrisinin elemanları “Tablo 2.2” de verilmiştir [2].

Tablo 2.2 : Ortotropik malzemenin, esneklik matrisi elemanları

Test	Esneklik matrisinin elemanları	
	$\bar{S}_{11} = \epsilon_1 / \sigma_1$ $\bar{S}_{21} = \epsilon_2 / \sigma_1$ $\bar{S}_{31} = \epsilon_3 / \sigma_1$	$\bar{S}_{41} = \gamma_{23} / \sigma_1 = 0$ $\bar{S}_{51} = \gamma_{13} / \sigma_1 = 0$ $\bar{S}_{61} = \gamma_{12} / \sigma_1 = 0$
	$\bar{S}_{12} = \epsilon_1 / \sigma_2$ $\bar{S}_{22} = \epsilon_2 / \sigma_2$ $\bar{S}_{32} = \epsilon_3 / \sigma_2$	$\bar{S}_{42} = \gamma_{23} / \sigma_2 = 0$ $\bar{S}_{52} = \gamma_{13} / \sigma_2 = 0$ $\bar{S}_{62} = \gamma_{12} / \sigma_2 = 0$
	$\bar{S}_{13} = \epsilon_1 / \sigma_3$ $\bar{S}_{23} = \epsilon_2 / \sigma_3$ $\bar{S}_{33} = \epsilon_3 / \sigma_3$	$\bar{S}_{43} = \gamma_{23} / \sigma_3 = 0$ $\bar{S}_{53} = \gamma_{13} / \sigma_3 = 0$ $\bar{S}_{63} = \gamma_{12} / \sigma_3 = 0$
	$\bar{S}_{14} = \epsilon_1 / \tau_{23} = 0$ $\bar{S}_{24} = \epsilon_2 / \tau_{23} = 0$ $\bar{S}_{34} = \epsilon_3 / \tau_{23} = 0$	$\bar{S}_{44} = \gamma_{23} / \tau_{23}$ $\bar{S}_{54} = \gamma_{13} / \tau_{23} = 0$ $\bar{S}_{64} = \gamma_{12} / \tau_{23} = 0$
	$\bar{S}_{15} = \epsilon_1 / \tau_{13} = 0$ $\bar{S}_{25} = \epsilon_2 / \tau_{13} = 0$ $\bar{S}_{35} = \epsilon_3 / \tau_{13} = 0$	$\bar{S}_{45} = \gamma_{23} / \tau_{13} = 0$ $\bar{S}_{55} = \gamma_{13} / \tau_{13}$ $\bar{S}_{65} = \gamma_{12} / \tau_{13} = 0$
	$\bar{S}_{16} = \epsilon_1 / \tau_{12} = 0$ $\bar{S}_{26} = \epsilon_2 / \tau_{12} = 0$ $\bar{S}_{36} = \epsilon_3 / \tau_{12} = 0$	$\bar{S}_{46} = \gamma_{23} / \tau_{12} = 0$ $\bar{S}_{56} = \gamma_{13} / \tau_{12} = 0$ $\bar{S}_{66} = \gamma_{12} / \tau_{12}$

Sonuç olarak ortotropik malzemenin esneklik matrisi aşağıdaki ifadedeki gibi yazılabilir.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Şu ana kadar verilen katılık matrisi elemanları, deneylerle tespit edilen, mühendislik sabitleriyle belirlenir. Ortotropik bir malzeme için bu sabiteler “tablo 2.3” de verilmiştir [2].

Tablo 2.3 : Ortotropik malzemelerin mühendislik sabitleri

x_1 yönündeki Young modülü	$E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$
$x_1 - x_2$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{12} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1$
$x_1 - x_3$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{13} = -\varepsilon_3 / \varepsilon_1$
x_2 yönündeki Young modülü	$E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_2$
$x_2 - x_1$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{21} = -\varepsilon_1 / \varepsilon_2$
$x_2 - x_3$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{23} = -\varepsilon_3 / \varepsilon_2$
x_3 yönündeki Young modülü	$E_3 = \sigma_3 / \varepsilon_3$
$x_3 - x_1$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{31} = -\varepsilon_1 / \varepsilon_3$
$x_3 - x_2$ düzlemine göre Poisson oranı	$\nu_{32} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_3$
$x_2 - x_3$ düzlemine göre kayma modülü	$G_{23} = \tau_{23} / \gamma_{23}$
$x_1 - x_3$ düzlemine göre kayma modülü	$G_{13} = \tau_{13} / \gamma_{13}$
$x_1 - x_2$ düzlemine göre kayma modülü	$G_{12} = \tau_{12} / \gamma_{12}$
$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$	

Yukarıdaki tabloya göre esneklik matrisinin elemanları mühendislik sabitlerine göre tekrar yazılacak olursa; “tablo 2.4” de ki gibi elde edilebilirler [2].

Tablo 2.4 : Mühendislik sabitlerine göre esneklik matrisinin elemanları

$S_{11} = \varepsilon_1 / \sigma_1 = \varepsilon_1 / (E_1 \varepsilon_1) = \frac{1}{E_1}$	$S_{41} = 0$
$S_{21} = \varepsilon_2 / \sigma_1 = \varepsilon_2 / (E_1 \varepsilon_1) = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$	$S_{51} = 0$
$S_{31} = \varepsilon_3 / \sigma_1 = \varepsilon_3 / (E_1 \varepsilon_1) = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$	$S_{61} = 0$
$S_{12} = \varepsilon_1 / \sigma_2 = \varepsilon_1 / (E_2 \varepsilon_2) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}$	$S_{42} = 0$
$S_{22} = \varepsilon_2 / \sigma_2 = \varepsilon_2 / (E_2 \varepsilon_2) = \frac{1}{E_2}$	$S_{52} = 0$
$S_{32} = \varepsilon_3 / \sigma_2 = \varepsilon_3 / (E_2 \varepsilon_2) = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$	$S_{62} = 0$
$S_{13} = \varepsilon_1 / \sigma_3 = \varepsilon_1 / (E_3 \varepsilon_3) = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$	$S_{43} = 0$
$S_{23} = \varepsilon_2 / \sigma_3 = \varepsilon_2 / (E_3 \varepsilon_3) = -\frac{\nu_{32}}{E_3}$	$S_{53} = 0$
$S_{33} = \varepsilon_3 / \sigma_3 = \varepsilon_3 / (E_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{E_3}$	$S_{63} = 0$
$S_{14} = 0$	$S_{44} = \gamma_{23} / \tau_{23} = \gamma_{23} / (G_{23} \gamma_{23}) = \frac{1}{G_{23}}$
$S_{24} = 0$	$S_{54} = 0$
$S_{34} = 0$	$S_{64} = 0$
$S_{15} = 0$	$S_{45} = 0$
$S_{25} = 0$	$S_{55} = \gamma_{13} / \tau_{13} = \gamma_{13} / (G_{13} \gamma_{13}) = \frac{1}{G_{13}}$
$S_{35} = 0$	$S_{65} = 0$
$S_{16} = 0$	$S_{46} = 0$
$S_{26} = 0$	$S_{56} = 0$
$S_{36} = 0$	$S_{66} = \gamma_{12} / \tau_{12} = \gamma_{12} / (G_{12} \gamma_{12}) = \frac{1}{G_{12}}$

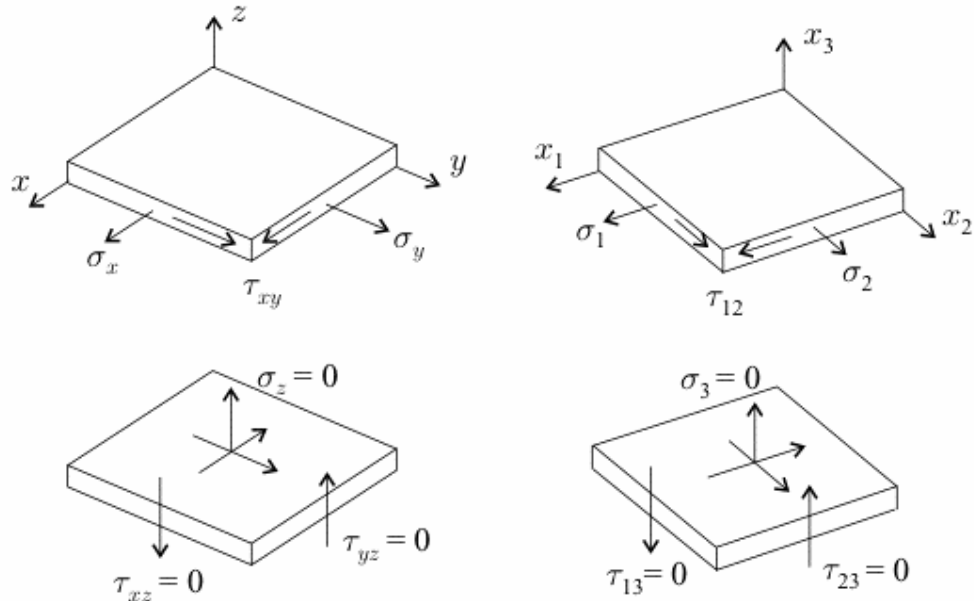
Yukarıdaki tabloya göre ortotropik malzemenin esneklik matrisi tekrar yazılacak olursa “denklem 2.25” deki gibi elde edilir [2,3].

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.5 Düzlem Gerilme Durumu

Düzlem gerilme durumunda, “şekil 2.9” da görüldüğü üzere, düzleme dik olan z (x_3) eksenindeki gerilmenin ve düzlem dışı kayma gerilmelerinin sıfır olduğu kabul edilir [2].

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (2.26)$$



Şekil 2.9 : Düzlem gerilme durumunda gerilmeler

Yukarıda verilen şartlara göre “denklem 2.13 – 15” de verilen denklik denklemleri aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0. \quad (2.28)$$

“Denklem 2.21” de verilen genleme – gerilme ilişkisi ise aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

Gerilme – genleme ilişkisi yukarıdaki denklemin tersi alınarak elde edilebilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

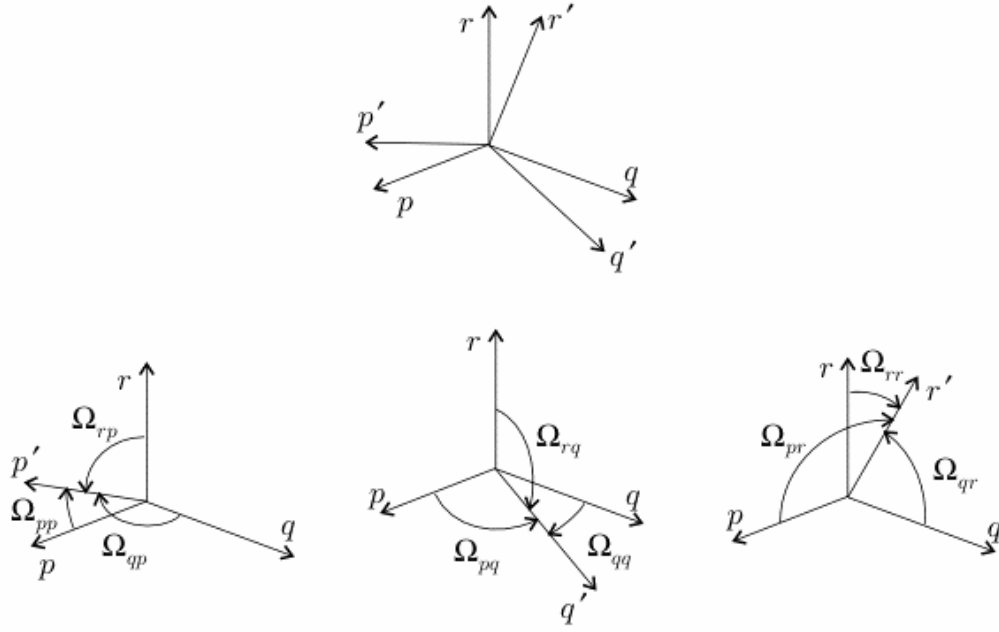
$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.31)$$

Ortotropik malzemeler için $\bar{S}_{16}$ ve $\bar{S}_{26}$ sıfır idi. Buna göre $[S]$ matrisinin elemanları “tablo 2.4” de verilen mühendislik sabitlerine göre yazılıp tersi alınacak olursa, ortotropik malzemeler için düzlem – gerilme durumunda katılık matrisi elde edilmiş olur [2,4-6]:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{D} & \frac{\nu_{12} E_2}{D} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{D} & \frac{E_2}{D} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{burada} \quad D = 1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2 = 1 - \nu_{12} \nu_{21}. \quad (2.32)$$

2.6 Gerilme – Genleme Dönüşümleri

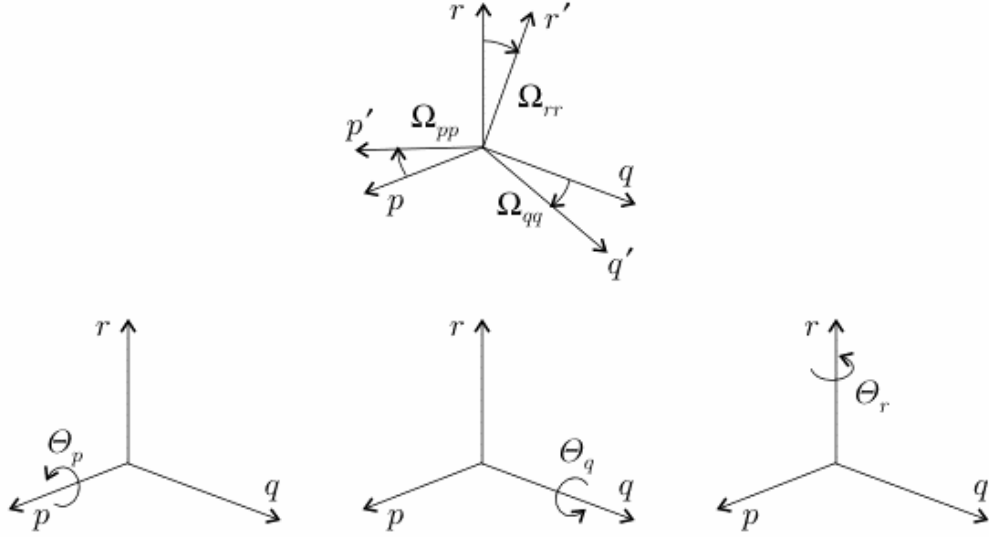
İki adet kartezyen p, q, r ve p', q', r' eksen takımı olduğu varsayalım. Üslü ifade ile gösterilen ikinci eksen takımı “şekil 2.10” da görüldüğü üzere, döndürülmüş eksen takımı olsun. Bu eksen takımı, döndürülmemiş eksene yaptığı açılarının kosinüsü ile aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.



Şekil 2.10 : Döndürülmüş eksen takımının temel koordinat sistemiyle yaptığı açılar

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \cos \Omega_{pp} & r_{12} &= \cos \Omega_{pq} & r_{13} &= \cos \Omega_{pr} \\
 r_{21} &= \cos \Omega_{qp} & r_{22} &= \cos \Omega_{qq} & r_{23} &= \cos \Omega_{qr} \\
 r_{31} &= \cos \Omega_{rp} & r_{32} &= \cos \Omega_{rq} & r_{33} &= \cos \Omega_{rr}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

p', q', r' koordinat sistemi “şekil 2.11” de gösterildiği gibi, $\Theta_p, \Theta_q, \Theta_r$ açıları ile de tanımlanabilir. Buna göre p', q', r' koordinat sistemi, p, q, r koordinat sisteminin eksenlerinin, “şekil 2.11” de görüldüğü üzere, bu açılar kadar burulması ile meydana gelmiştir. Bu açılar, saatin tersi yönünde pozitif tanımlanmıştır.



Şekil 2.11 : p', q', r' koordinat sistemi elde edilene kadar p, q, r eksenlerinin döndürülmesi.

$\Theta_p, \Theta_q, \Theta_r$ açılarının “denklem 2.33” de verilen r_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) eksen bileşenleri cinsinden değeri, aşağıdaki denklemlerde verilmiştir [2]:

$$\begin{aligned}\Theta_q &= A \tan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \Theta_r &= A \tan 2(r_{21}/\cos \Theta_q, r_{11}/\cos \Theta_q) . \\ \Theta_p &= A \tan 2(r_{32}/\cos \Theta_q, r_{33}/\cos \Theta_q)\end{aligned}\quad (2.33)$$

Yukarıdaki denklemde $A \tan 2(y, x)$ ifadesi iki değişkenli ark tanjant ifadesi olup aşağıda tanımlanmıştır:

$$A \tan 2(y, x) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.34)$$

2.6.1 Gerilme Dönüşümleri

Döndürülmüş koordinat sisteminde gerilmeler, döndürülmemiş sistemdeki gerilmelerin, dönüşüm matrisi ile çarpımı ile elde edilebilirler [2,4]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_p \\ \sigma'_q \\ \sigma'_r \\ \tau'_{qr} \\ \tau'_{pr} \\ \tau'_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\sigma 11} & T_{\sigma 12} & T_{\sigma 13} & T_{\sigma 14} & T_{\sigma 15} & T_{\sigma 16} \\ T_{\sigma 21} & T_{\sigma 22} & T_{\sigma 23} & T_{\sigma 24} & T_{\sigma 25} & T_{\sigma 26} \\ T_{\sigma 31} & T_{\sigma 32} & T_{\sigma 33} & T_{\sigma 34} & T_{\sigma 35} & T_{\sigma 36} \\ T_{\sigma 41} & T_{\sigma 42} & T_{\sigma 43} & T_{\sigma 44} & T_{\sigma 45} & T_{\sigma 46} \\ T_{\sigma 51} & T_{\sigma 52} & T_{\sigma 53} & T_{\sigma 54} & T_{\sigma 55} & T_{\sigma 56} \\ T_{\sigma 61} & T_{\sigma 62} & T_{\sigma 63} & T_{\sigma 64} & T_{\sigma 65} & T_{\sigma 66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_r \\ \tau_{qr} \\ \tau_{pr} \\ \tau_{pq} \end{Bmatrix} . \quad (2.35)$$

Yukarıdaki denklem aşağıdaki formda da yazılabilir:

$$\{\sigma'\} = [\hat{T}_\sigma] \{\sigma\} \quad (2.36)$$

Bu denklemde $[\hat{T}_\sigma]$ ifadesi transformasyon matrisi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[\hat{T}_\sigma] = [\hat{T}_\sigma^p] [\hat{T}_\sigma^q] [\hat{T}_\sigma^r]. \quad (2.37)$$

Yukarıdaki denklemde $[\hat{T}_\sigma^p]$, $[\hat{T}_\sigma^q]$ ve $[\hat{T}_\sigma^r]$ ifadeleri p , q ve r eksenlerine göre transformasyon matrisleri olup, aşağıda formüle edilmişlerdir [2]:

$$[\hat{T}_\sigma^p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p^2 & s_p^2 & 2c_p s_p & 0 & 0 \\ 0 & s_p^2 & c_p^2 & -2c_p s_p & 0 & 0 \\ 0 & -c_p s_p & c_p s_p & c_p^2 - s_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p & -s_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_p & c_p \end{bmatrix}$$

$$c_p = \cos \Theta_p$$

$$s_p = \sin \Theta_p \quad (2.38)$$

$$[\hat{T}_\sigma^q] = \begin{bmatrix} c_q^2 & 0 & s_q^2 & 0 & 2c_q s_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_q^2 & 0 & c_q^2 & 0 & -2c_q s_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_q & 0 & -s_q \\ -c_q s_q & 0 & c_q s_q & 0 & c_q^2 - s_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & c_q \end{bmatrix}$$

$$c_q = \cos \Theta_q$$

$$s_q = \sin \Theta_q \quad (2.39)$$

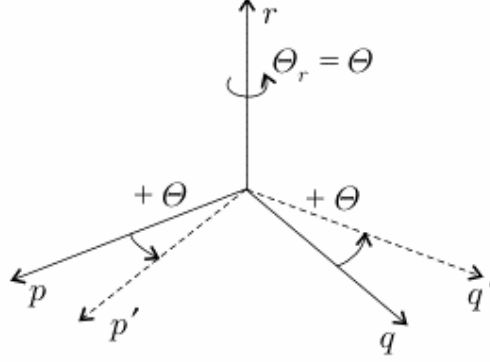
$$[\hat{T}_\sigma^r] = \begin{bmatrix} c_r^2 & s_r^2 & 0 & 0 & 0 & 2c_r s_r \\ s_r^2 & c_r^2 & 0 & 0 & 0 & -2c_r s_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_r & -s_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_r & c_r & 0 \\ -c_r s_r & c_r s_r & 0 & 0 & 0 & c_r^2 - s_r^2 \end{bmatrix}$$

$$c_r = \cos \Theta_r$$

$$s_r = \sin \Theta_r \quad (2.40)$$

Düzlem gerilme durumu için gerilme dönüşüm formülleri:

Düzlem gerilme durumunda sadece $p - q$ ve $p' - q'$ düzlemleri ve bu düzlemlerdeki gerilmelerle çalışılır. Buna göre, döndürülmüş koordinat sistemindeki gerilmeler, asal eksen takımının “şekil 2.12” de görüldüğü üzere $r -$ eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilir.



Şekil 2.12 : Koordinat ekseninin $r -$ eksen etrafında döndürülmesi.

Gerilme dönüşümü aşağıdaki ifadedeki gibi olur [2]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_p \\ \sigma'_q \\ \tau'_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \tau_{pq} \end{Bmatrix}$$

$$c = \cos \Theta$$

$$s = \sin \Theta$$
(2.41)

2.6.2 Genleme Dönüşümleri

Döndürülmüş koordinat sisteminde genlemeler, tıpkı gerilmelerin dönüşümünde olduğu gibi döndürülmemiş sistemdeki genlemelerin, dönüşüm matrisi ile çarpımı ile elde edilebilirler. Denklem, kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\mathcal{E}'\} = [\hat{T}_\varepsilon] \{\mathcal{E}\}.$$
(2.42)

Burada $\mathcal{E}$ terimi mühendislik genlemesidir (tensörel genleme değil). Ayrıca $[\hat{T}_\varepsilon]$, genleme dönüşüm matrisi olup; gerilme dönüşüm matrisinden farklıdır.

Dönüşüm matrisi $[\hat{T}_\varepsilon]$ gerilme dönüşüm matrisine benzer şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[\hat{T}_\varepsilon] = [\hat{T}_\varepsilon^p] [\hat{T}_\varepsilon^q] [\hat{T}_\varepsilon^r].$$
(2.43)

Yukarıdaki denklemde $[\hat{T}_\varepsilon^p]$, $[\hat{T}_\varepsilon^q]$ ve $[\hat{T}_\varepsilon^r]$ ifadeleri p , q ve r eksenlerine göre transformasyon matrisleri olup, aşağıda formüle edilmişlerdir [2]:

$$[\hat{T}_\varepsilon^p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p^2 & s_p^2 & c_p s_p & 0 & 0 \\ 0 & s_p^2 & c_p^2 & -c_p s_p & 0 & 0 \\ 0 & -2c_p s_p & 2c_p s_p & c_p^2 - s_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p & -s_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_p & c_p \end{bmatrix}$$

$$c_p = \cos \Theta_p$$

$$s_p = \sin \Theta_p$$
(2.44)

$$[\hat{T}_\varepsilon^q] = \begin{bmatrix} c_q^2 & 0 & s_q^2 & 0 & c_q s_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_q^2 & 0 & c_q^2 & 0 & -c_q s_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_q & 0 & -s_q \\ -2c_q s_q & 0 & 2c_q s_q & 0 & c_q^2 - s_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & c_q \end{bmatrix}$$

$$c_q = \cos \Theta_q$$

$$s_q = \sin \Theta_q$$
(2.45)

$$[\hat{T}_\varepsilon^r] = \begin{bmatrix} c_r^2 & s_r^2 & 0 & 0 & 0 & c_r s_r \\ s_r^2 & c_r^2 & 0 & 0 & 0 & -c_r s_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_r & -s_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_r & c_r & 0 \\ -2c_r s_r & 2c_r s_r & 0 & 0 & 0 & c_r^2 - s_r^2 \end{bmatrix}$$

$$c_r = \cos \Theta_r$$

$$s_r = \sin \Theta_r$$
(2.46)

Düzlem gerilme durumu için genleme dönüşüm formülleri:

Düzlem genleme durumunda yine gerilmelerde olduğu gibi; sadece $p - q$ ve $p' - q'$ düzlemleri ve bu düzlemlerdeki genlemelerle çalışılır. Buna göre, döndürülmüş koordinat sistemindeki gerilmeler, asal eksen takımının “şekil 2.12” de görüldüğü üzere r – eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilir.

Genleme dönüşümü aşağıdaki ifadedeki gibi olur [2]:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}'_p \\ \mathcal{E}'_q \\ \gamma'_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_p \\ \mathcal{E}_q \\ \gamma_{pq} \end{Bmatrix}$$

$$c = \cos \Theta$$

$$s = \sin \Theta$$
(2.47)

2.6.3 Katılık ve Esneklik Matrisi Dönüşümleri

Döndürülmüş ve döndürülmemiş koordinat sistemlerine göre gerilme – genleme ilişkileri aşağıdaki gibidir:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad \{\sigma'\} = [C']\{\varepsilon'\}. \quad (2.48)$$

İki katılık matrisi arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek için döndürülmemiş gerilme – genleme denkleminin her iki tarafı, $[\hat{T}_\sigma]$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$[\hat{T}_\sigma]\{\sigma\} = [\hat{T}_\sigma][C]\{\varepsilon\}. \quad (2.49)$$

Ardından, eşitliğin sağ tarafı $[\hat{T}_\varepsilon]^{-1}[\hat{T}_\varepsilon]$ birim matrisi ile çarpılırsa sonuç olarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\underbrace{[\hat{T}_\sigma]\{\sigma\}}_{\{\sigma'\}} = \underbrace{[\hat{T}_\sigma][C]}_{[C']}\underbrace{[\hat{T}_\varepsilon]^{-1}[\hat{T}_\varepsilon]\{\varepsilon\}}_{\{\varepsilon'\}} \quad (2.50)$$

Yukarıda elde edilen ifadeye göre; döndürülmüş ve döndürülmemiş koordinat sistemlerine göre katılık matrisleri arasındaki ilişki “denklem 2.51” deki gibi elde edilmiş olur.

$$[C'] = [\hat{T}_\sigma][C][\hat{T}_\varepsilon]^{-1} \quad (2.51)$$

Yukarıdaki ifadenin tersi alınarak, esneklik matrisleri arasındaki ilişki de elde edilebilir [2]:

$$[S'] = [\hat{T}_\varepsilon][S][\hat{T}_\sigma]^{-1} \quad (2.52)$$

Düzlem gerilme durumu için dönüşüm formülleri:

Düzlem gerilme durumunda sadece $p - q$ ve $p' - q'$ düzlemleri ve bu düzlemlerdeki katılık ve esneklik matrisleri ile çalışılır. Bu durumda döndürülmüş ve döndürülmemiş eksen takımlarına göre katılık matrisinin elemanları Q'_{ij} ve Q_{ij} ($i, j=1,2,6$) şeklinde olur. Q'_{ij} ve Q_{ij} arasındaki ilişki “denklem 2.51” e göre aşağıdaki gibi yazılabilir [2]:

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} = [T_\sigma] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} [T_\epsilon]^{-1} \quad (2.53)$$

Burada $[T_\sigma]$ ve $[T_\epsilon]$ düzlem gerilme durumundaki dönüşüm matrisleri olup, “denklem 2.41 – 47” den aşağıdaki gibi yazılır:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad [T_\epsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

“Denklem 2.53” ün tersi alınarak düzlem gerilme durumunda esneklik matrislerinin dönüşüm ilişkileri de elde edilir.

$$\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} = [T_\epsilon] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} [T_\sigma]^{-1} \quad (2.55)$$

2.7 Genleme Enerjisi

Lineer elastik sistemler için V hacminin genleme enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır [2,3,7]:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV \quad (2.56)$$

Bu ifade aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} dV \quad (2.57)$$

Yukarıdaki denklemde, gerilme vektörünün yerine “denklem 2.20” deki ifade yazılacak olursa “denklem 2.57” aşağıdaki hale gelir:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} \left[\bar{C} \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} dV \quad (2.58)$$

Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılır [2]:

$$\Omega = - \iiint (f_x u + f_y v + f_z w) dV - \iint (p_x u + p_y v + p_z w) dA \quad (2.59)$$

f_x, f_y, f_z terimleri birim hacim başına düşen iç kuvvetleri, p_x, p_y, p_z terimleri de birim alana etkiyen, yüzey kuvvetlerini göstermektedir.

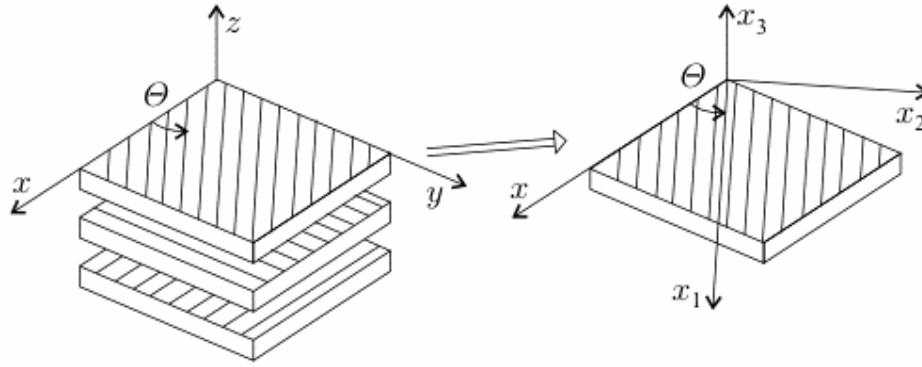
Sistemin toplam potansiyel enerjisi ise aşağıdaki gibi olur:

$$\pi_p = U + \Omega \quad (2.60)$$

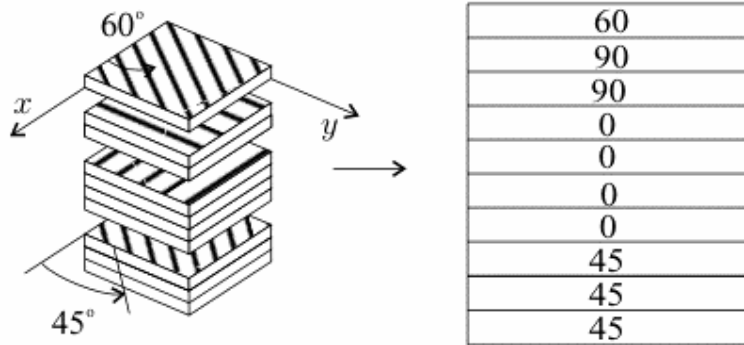
3. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLAR

3.1 Tabaka Kodlaması

Tabakalı kompozit plakların analizinde z ekseninin tabakaya dik olduğu bir x, y, z koordinat sistemi kullanılır. Sürekli ve tek yönlü olan tabakalar, “şekil 3.1” de görüldüğü gibi, x eksenine ile yaptığı Θ açısı ile tanımlanır. Bu çalışmada, Θ açısı saatin tersi yönünde pozitif kabul edilmiştir. Bir plaktaki tabakaların sayısı, verildiği açının yan tarafında küçük indislerle gösterilir. Örnek olarak “şekil 3.2” de verilen plak, $[45_3^0 / 0_4^0 / 90_2^0 / 60^0]$ şeklinde gösterilir.



Şekil 3.1 : x, y, z plak koordinat sistemi, x_1, x_2, x_3 tabaka koordinat sistemi ve tabaka açısı



Şekil 3.2 : $[45_3^0 / 0_4^0 / 90_2^0 / 60^0]$ şeklinde dizilmiş plağın gösterimi

Tabaka dizilişleri, plak orta düzlemine göre simetrikse eğer; bu tip plaklar simetrik plak adını alır. “Şekil 3.3” de simetrik plak örneği görülmektedir. Alt indis “s” işareti ile belirtilir.

-45	45
-45	-45
0	-45
0	45
0	45
0	-45
-45	-45
-45	45

$[-45_2/0_2]_s$ $[45/-45_2/45]_s$

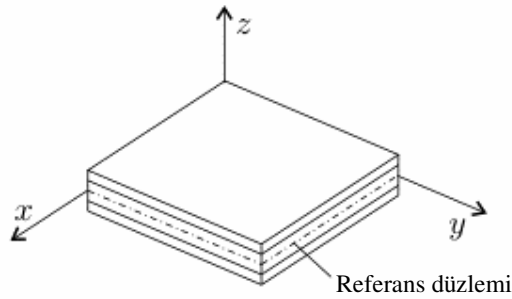
Şekil 3.3 : Simetrik plak örneği

3.2 Tabakalı Kompozit Plakların Katılık Matrisi

Tabakalı kompozit plakların katılık matrisi; $[A]$, $[B]$, $[D]$ matrisi olmak üzere, üç ayrı matristen oluşmaktadır. Bu kısımda bu matrisler plağın küçük deformasyonlara uğradığı kabul edilerek elde edilmiştir.

Bu çalışmada yapılan analizler klasik plak teorisine dayanmaktadır ve buna göre bazı kabuller yapılmıştır. Buna göre; genlemeler tabaka boyunda lineer değişmektedir. Düzlem dışı kayma deformasyonları ihmal edilebilecek kadar küçük kabul edilir. Plak düzlemine dik olan normal gerilme ve kayma gerilmeleri ($\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) diğer gerilmelere göre çok küçüktür kabulleri yapılacaktır. Bu kabullere göre de ikinci konuda bahsi geçen, düzlem – gerilme durumu, gerilme – genleme ilişkilerinde uygulanmıştır.

“Şekil 3.4” de görüldüğü gibi tabaka analizlerinde genellikle referans düzlemi, plağın orta düzleminde alınır. Tabakalar plak orta düzlemine göre simetrik olmadığı sürece, orta düzlem doğal düzlem olarak kabul edilmez. Çünkü referans düzlemindeki genlemeler eğilme durumunda sıfır olmaz. Referans düzlemindeki genlemeler aşağıdaki gibi olur:

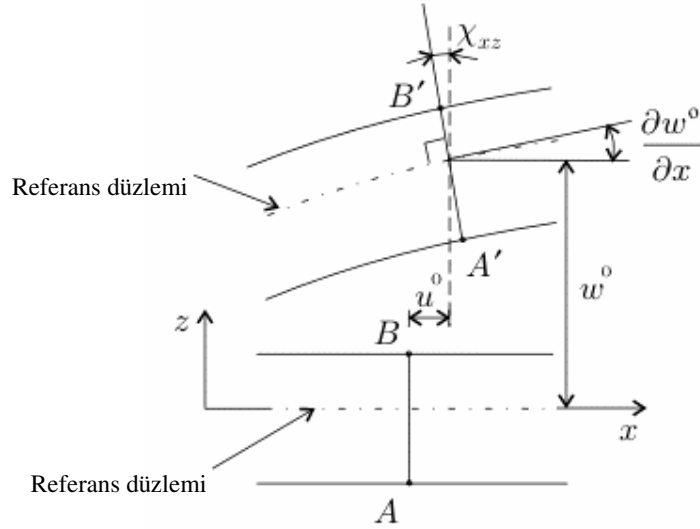


Şekil 3.4 : Koordinat sistemi ve orta düzlem

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (3.1)$$

“Denklem 3.1” de ki üst indis “0” ifadelerin referans düzlemine göre olduğunu gösterir.

Ayrıca bu çalışmada analizler Kirchhoff hipotezine göre yapılmıştır. Bu hipoteze göre; “şekil 3.5” de görüldüğü üzere deformasyondan önce plak orta düzlemine dik olan doğrultular; deformasyondan sonra şekil değiştirmez, doğru kalırlar ve deforme olmuş yüzeye teğet olacak şekilde dönerler [2]. Plâğın küçük yer değiştirmelerine göre, referans düzlemine dik olan bir AB doğrusunun dönmesi (χ_{xz}) aşağıda verilmiştir:



Şekil 3.5 : Plâğın $x - z$ düzlemindeki yer değiştirmesi

$$\chi_{xz} = \frac{\partial w^0}{\partial x}. \quad (3.2)$$

x yönündeki toplam yer değiştirme “şekil 3.4” e göre aşağıdaki gibidir [2]:

$$u = u^0 - z\chi_{xz} = u^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Benzer şekilde y yönündeki toplam yer değiştirme de aşağıdaki gibi olur:

$$v = v^0 - z \frac{\partial w^0}{\partial y}. \quad (3.4)$$

“Denklem 2.2 – 2.3 ve 2.11” de verilen genleme denklemlerini tekrar yazılırsa:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

“Denklem 3.3 ve 3.4” ün yukarıda ki denklemde yerine konması ile aşağıdaki genleme ifadeleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Yukarıdaki ifadeler aşağıdaki şekilde de yazılabilirler:

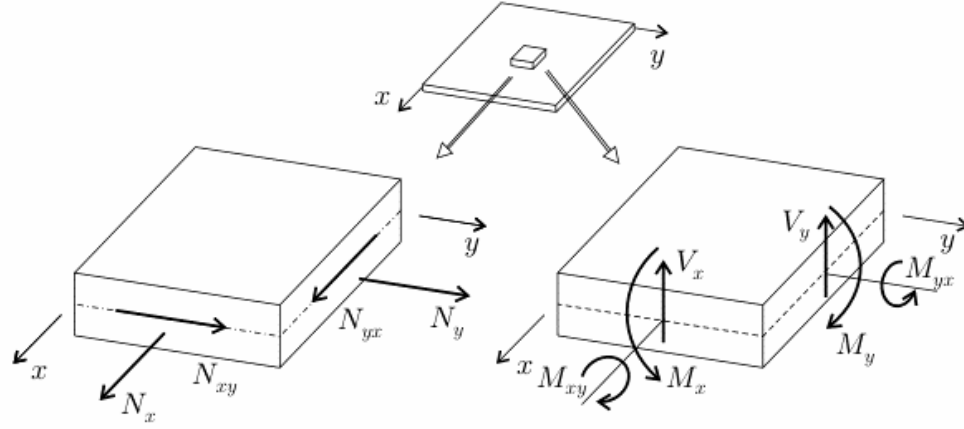
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Yukarıdaki denklemde κ_x , κ_y ve κ_{xy} terimleri, referans düzleminin eğriliğini göstermektedir ve aşağıdaki gibidirler [2,4,8]:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \quad (3.8)$$

“Şekil 3.6” da görüldüğü gibi, plak üzerinde küçük bir diferansiyel eleman üzerine etkiyen iç kuvvetler ve momentler aşağıdaki gibidir [2-4]:

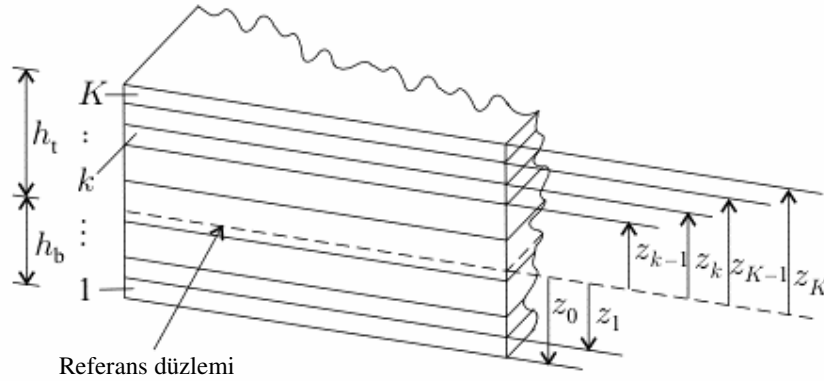
$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h_b}^{h_t} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_x dz & M_y &= \int_{-h_b}^{h_t} z \sigma_y dz & M_{xy} &= \int_{-h_b}^{h_t} z \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (3.9)$$



Şekil 3.6 : Referans düzlemine etkiyen iç kuvvetler, momentler ve enine kayma kuvvetleri.

“Denklem 3.9” da N birim uzunluktaki iç kuvvetleri, M ise birim uzunluktaki iç kuvvetleri temsil etmektedir. h_t ve h_b terimleri de “şekil 3.7” de görüldüğü üzere, referans düzlemi ile plak alt ve üst yüzeyleri arası mesafeyi temsil etmektedir. “Şekil 3.6” da görülen enine kesme kuvvetleri de (V) aşağıdaki gibidir:

$$V_x = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{xz} dz \quad V_y = \int_{-h_b}^{h_t} \tau_{yz} dz \quad (3.10)$$



Şekil 3.7 : Tabakaların referans düzlemine olan mesafeleri

“Denklem 2.30” da ki bir tabaka için, düzlem – gerilme durumunda, gerilme – genleme ilişkisi tekrar yazılacak olursa:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\overline{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Bu denklemde $[\bar{Q}]$, $x-y$ koordinat sisteminde tabakanın katılık matrisidir. $[\bar{Q}]$ katılık matrisinin elemanları, “denklem 2.53” de verilen dönüşüm matrisi ile elde edilir. “Denklem 2.53” de bulunan $[Q]$ ve $[Q']$, $[\bar{Q}]$ ve $[Q]$ ile yer değiştirirse aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T_\sigma] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} [T_\varepsilon]^{-1} \quad (3.12)$$

$[T_\sigma]$ ve $[T_\varepsilon]$ “denklem 2.54” de verilmişlerdir. $[\bar{Q}]$ matrisinin elemanları, yukarıdaki denkleme göre aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{12} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (c^4 + s^4) Q_{12} \\ \bar{Q}_{66} &= c^2 s^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (c^2 - s^2) Q_{66} \\ \bar{Q}_{16} &= cs(c^2 Q_{11} - s^2 Q_{22} - (c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66})) \\ \bar{Q}_{26} &= cs(s^2 Q_{11} - c^2 Q_{22} + (c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66})) \end{aligned} \quad (3.13)$$

“Denklem 3.7” ve “denklem 3.11” in, “denklem 3.9” da yerine konması ile kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki forma dönüşürler [2,4]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h_b}^{h_t} \left\{ [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}] z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\ &= \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} [\bar{Q}] dz}_{[A]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z [\bar{Q}] dz}_{[B]} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h_b}^{h_t} z \left\{ [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}] z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} dz \\ &= \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z [\bar{Q}] dz}_{[B]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-h_b}^{h_t} z^2 [\bar{Q}] dz}_{[D]} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Böylece tabakalı kompozit plağın katılık matrisleri ortaya çıkar [2-4]:

$$\begin{aligned}
[A] &= \int_{-h_b}^{h_t} [\overline{Q}] dz \\
[B] &= \int_{-h_b}^{h_t} z [\overline{Q}] dz \\
[D] &= \int_{-h_b}^{h_t} z^2 [\overline{Q}] dz
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Yukarıdaki matrislerin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$A_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} Q_{ij} dz \quad B_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} z Q_{ij} dz \quad D_{ij} = \int_{-h_b}^{h_t} z^2 Q_{ij} dz \tag{3.17}$$

$[A]$, $[B]$ ve $[D]$ matrisleri plağın katılık matrisleri olup, $[\overline{Q}]$ matrisi de tabakaların katılık matrisidir. “Denklemler 3.17” deki integraller aşağıdaki gibi toplamalar şeklinde de ifade edilebilirler [2,4]:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Yukarıdaki denklemde K toplam katman sayısını; z_k da “şekil 3.7” de görüldüğü üzere, k inci katmanın referans düzlemine mesafesidir. $(Q_{ij})_k$ ise, k inci katmanın katılık matrisinin elemanlarıdır.

Katılık matrislerinin “denklemler 3.18” deki ifadesiyle, “denklemler 3.14 ve 3.15” deki ifadeleri birlikte yazılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Yukarıdaki denklemde sol taraftaki vektör genelleştirilmiş kuvvetleri, sağ taraftaki de genlemeleri temsil etmektedir.

“Denklem 3.19” un tersi alınarak genlemeler ve eğriliklerin, kuvvetler ve momentler cinsinden ifadesi de bulunabilir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

$[\alpha]$, $[\beta]$ ve $[\delta]$ matrisleri ile $[A]$, $[B]$ ve $[D]$ matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{Bmatrix}^{-1} \quad (3.21)$$

4. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ

4.1 Düzlem – Gerilme Durumundaki Plak İçin Genleme Enerjisi

Bu çalışmada plak problemlerinin çözümünde, enerji yöntemi kullanılmıştır. Bu bölümde enerji yöntemi için gerekli olan genleme enerjisi; düzlem – gerilme durumundaki plak için elde edilmiştir. Lineer elastik malzemeler için genleme enerjisi “denklem 2.56” da yazılmıştı. Düzlem – gerilme durumu için σ_z , τ_{xz} ve τ_{yz} bileşenlerinin sıfır olduğu daha önceden belirtilmişti. Bu bilgiler ışığında genleme enerjisi ifadesi aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-h_b}^{h_t} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dz dy dx \quad (4.1)$$

Yukarıdaki ifadede h_t ve h_b bileşenleri, plak üst ve alt yüzeylerinin referans düzlemine olan uzaklıklarıdır.

“Denklem 3.7” de verilen genleme bileşenlerinin, “denklem 3.11” de verilen gerilme ifadesinde yerine konması ile elde edilen ifade aşağıdaki gibidir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Yukarıdaki ifade “denklem 4.1” de verilen enerji denkleminde yerine konarak, “denklem 3.16” da verilen $[A]$, $[B]$, $[D]$ matrisleri cinsinden tekrar yazılacak olursa, genleme enerjisi ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} dy dx \quad (4.3)$$

4.2 Kenarlarından Basit Mesnetlenmiş Simetrik Katmanlı Dikdörtgen Levhanın Titreşim Analizi

Bir plağın serbest, sönümsüz titreşimi esnasında, yer değiştirmesi t zamanına bağlı olarak sinüzoidal şekilde meydana gelir [2].

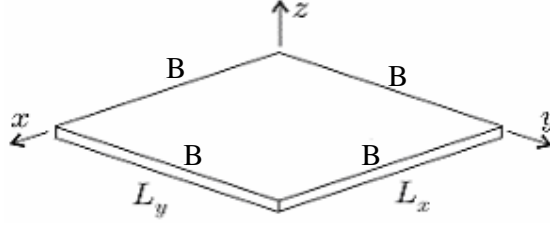
$$w^0 = \bar{w}^0 \sin(\omega t) = \bar{w}^0 \sin(2\pi f t) \quad (4.4)$$

Yukarıdaki denklemde ω dairesel frekansı, f ise Hz cinsinden frekansı ifade etmektedir. Titreşim periyodu T aşağıdaki gibidir:

$$T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (4.5)$$

Ayrıca $\bar{w}^0$ da $t = T/4$ anındaki maksimum genliği ifade etmektedir.

“Şekil 4.1” de görüldüğü gibi boyutları L_x ve L_y olan, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş, bir dikdörtgen levha üzerinde denklemler elde edilmiştir. Levha kütlelerinin düzgün dağıldığı kabul edilecektir.



Şekil 4.1 : Kenarlarından basit mesnetlenmiş dikdörtgen levha

Levhanın katman dizilimi simetriktir. Bu durumda “denklem 3.16” da, $h_t = h_b = z$ olacağı için, katılık matrisinin B elemanı için integral alınırsa sonuç sıfır elde edilir. Yani simetrik levhalar için $[B] = 0$ dır.

Simetrik bir levhada “denklem 4.3” de verilen enerji denkleminde görülen genleme ifadeleri orta düzleme göre sıfırdır. Bu durumda ε_x^0 , ε_y^0 ve γ_{xy}^0 terimlerinin ortadan kalkması ile genleme enerjisi aşağıdaki gibi elde edilir [2]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \begin{matrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{matrix} \right\} dy dx \quad (4.6)$$

Yukarıdaki ifadede “denklem 3.8” de verilen eğrilik terimleri dahil edilip matris çarpımlarının yapılması ile enerji denklemi aşağıdaki hale gelir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \frac{2\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] dy dx \quad (4.7)$$

“Denklem 4.4” de verilen plağın titreşimi esnasında meydana gelen yer değiştirme terimi yukarıdaki enerji ifadesinde yerine yazılacak olursa:

$$U = \bar{U} \sin^2(2\pi ft) \quad (4.8)$$

burada $\bar{U}$ aşağıdaki gibi olur:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{2\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x^2} \frac{2\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \bar{w}^0}{\partial y^2} \frac{2\partial^2 \bar{w}^0}{\partial x \partial y} \right) \right] dy dx \quad (4.9)$$

Plağın kinetik enerjisi aşağıdaki gibidir [2,7]:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho \left(\frac{dw^0}{dt} \right)^2 dy dx \quad (4.10)$$

“Denklem 4.4” de verilen yer değiştirme ifadesi “denklem 4.10” da yerine konacak olursa kinetik enerji ifadesi aşağıdaki hali alır:

$$K = \frac{1}{2} (2\pi f)^2 \cos^2(2\pi ft) \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho (\bar{w}^0)^2 dy dx \quad (4.11)$$

Enerjinin korunumu yasasına göre; $t=0$ anından, t anına kadar genleme enerjisindeki değişim, bu zaman zarfındaki kinetik enerjinin değişimine eşittir [2].

$$(U_t - U_{t=0}) = -(K_t - K_{t=0}) \quad (4.12)$$

“Denklem 4.8” deki genleme enerjisi ifadesinde görüldüğü üzere; $t=0$ anında genleme enerjisi sıfırdır. Aynı şekilde “denklem 4.11” e göre de $t = \frac{1}{4f}$ anında

kinetik enerji sıfırdır.

$$U_{t=\frac{1}{4f}} = K_{t=0} \quad (4.13)$$

“Denklem 4.8 ve 4.11” deki enerji denklemleri, “denklem 4.13” de yerlerine konacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{2}(2\pi f)^2 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(\bar{w}^0)^2 dydx = \bar{U} \quad (4.14)$$

Yukarıdaki denklem düzenlenecek olursa:

$$(2\pi f)^2 = \frac{\bar{U}}{\frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(\bar{w}^0)^2 dydx} \quad (4.15)$$

Dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plak için geometrik sınır şartları aşağıdaki gibidir:

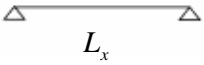
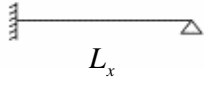
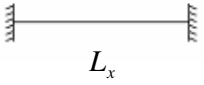
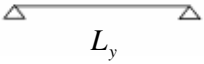
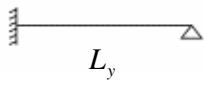
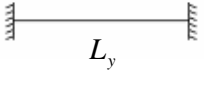
$$w^0 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{lll} x = 0 & \text{ve} & 0 \leq y \leq L_y \\ x = L_x & \text{ve} & 0 \leq y \leq L_y \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{ve} & y = 0 \\ 0 \leq x \leq L_x & \text{ve} & y = L_y \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Doğal frekansların elde edilmesi için Rayleigh – Ritz metodu kullanılmıştır. Metodun uygulanabilmesi için verilen sınır şartlarını sağlayan bir mukayese fonksiyonuna ihtiyaç vardır. Dikdörtgen plak için uygulanacak mukayese fonksiyonu genel haliyle aşağıdaki gibidir [2,7,11]:

$$\bar{w}^0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (4.17)$$

Bu denklemde w_{ij} değerleri bilinmeyen katsayılardır ve temel frekanslar civarındaki genlik değerlerini gösterir. I ve J terimleri ise keyfi olarak seçilmekte olup, sonsuz serbestlik dereceli sistemi I×J serbestlik dereceli bir sisteme dönüştürmektedir. X_i ve Y_j ifadeleri serbest titreşen bir çubuğun yer değiştirme fonksiyonları olarak kabul edilmişlerdir. Değişik sınır şartları altında X_i ve Y_j ifadelerinin alacağı değerler “tablo 4.1” de verilmiştir [2].

Tablo 4.1 : Serbest titreşen bir çubuğun çeşitli sınır şartları altındaki yer değiştirme fonksiyonları. ($\xi = x/L_x$, $\eta = y/L_y$)

	$X_i = \sin(i\pi\xi)$
	$X_i = \gamma_i \cos(\mu_i \xi) - \gamma_i \cosh(\mu_i \xi) + \sin(\mu_i \xi) - \sinh(\mu_i \xi)$ $\tan \mu_i - \tanh \mu_i = 0$ (Gerçek değer) $\mu_i \approx (i + 0.25)\pi$ (Yaklaşık değer) $\gamma_i = \frac{\sin \mu_i - \sinh \mu_i}{\cosh \mu_i - \cos \mu_i}$
	$X_i = \gamma_i \cos(\mu_i \xi) - \gamma_i \cosh(\mu_i \xi) + \sin(\mu_i \xi) - \sinh(\mu_i \xi)$ $\cos \mu_i \cosh \mu_i = 1$ (Gerçek değer) $\mu_i \approx (i + 0.5)\pi$ (Gerçek değer) $\gamma_i = \frac{\cos \mu_i - \cosh \mu_i}{\sin \mu_i + \sinh \mu_i}$
	$Y_j = \sin(j\pi\eta)$
	$Y_j = \gamma_j \cos(\mu_j \eta) - \gamma_j \cosh(\mu_j \eta) + \sin(\mu_j \eta) - \sinh(\mu_j \eta)$ $\tan \mu_j - \tanh \mu_j = 0$ (Gerçek değer) $\mu_j \approx (j + 0.25)\pi$ (Yaklaşık değer) $\gamma_j = \frac{\sin \mu_j - \sinh \mu_j}{\cosh \mu_j - \cos \mu_j}$
	$Y_j = \gamma_j \cos(\mu_j \eta) - \gamma_j \cosh(\mu_j \eta) + \sin(\mu_j \eta) - \sinh(\mu_j \eta)$ $\cos \mu_j \cosh \mu_j = 1$ (Gerçek değer) $\mu_j \approx (j + 0.5)\pi$ (Yaklaşık değer) $\gamma_j = \frac{\cos \mu_j - \cosh \mu_j}{\sin \mu_j + \sinh \mu_j}$

Rayleigh prensibine göre enerji korunumlu bir sistemin doğal frekansı, temel modlar civarında extremum bir değere sahiptir [2,7,9-11].

$$\frac{\partial f}{\partial w_{ij}} = 0 \quad (4.18)$$

Buna göre “denklem 4.15” de ki ifadeden “ f ” çekilerek, “denklem 4.17” mukayese fonksiyonunda bulunan w_{ij} katsayılarına göre “denklem 4.18” de görüldüğü üzere kısmi türevi alınacak olursa aşağıdaki gibi bir denklem takımı elde edilir [2].

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (G_{mnij} - \lambda \delta_{mnij}) w_{ij} = 0 \quad \begin{cases} i, m = 1, 2, 3, \dots, I \\ j, n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \quad (4.19)$$

λ terimi aşağıda tanımlanmıştır:

$$\lambda = \frac{1}{4} (2\pi f)^2 \rho L_x L_y \quad (4.20)$$

Yukarıdaki denklemin daha sade biçimde yazılabilmesi için, aşağıdaki gibi; k ve l terimleri tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} k &= (i-1)J + j & \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, I \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \\ l &= (m-1)J + n & \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, I \\ n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Bu durumda “denklem 4.19” aşağıdaki gibi yazılabilir [2]:

$$\sum_{k=1}^{I \times J} G_{kl} w_k = \lambda \sum_{k=1}^{I \times J} \delta_{kl} w_k \quad k, l = 1, 2, 3, \dots, I \times J \quad (4.22)$$

Yukarıdaki denklemde $G_{kl} (= G_{lk})$ ve δ_{kl} ifadeleri “tablo 4.2” de verilmiştir [2].

Tablo 4.2 : $[G]$ matrisinin elemanları.

$$\begin{aligned}
 G_{lk} &= \frac{1}{4} L_x L_y \pi^4 \left[D_{11} \left(\frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i}{L_x} \right)^2 \left(\frac{i}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{i}{L_y} \right)^4 \right] \delta_{lk} \\
 &\quad - 2L_x L_y \pi^4 D_{16} \left[\left(\frac{i}{L_x} \right)^2 \left(\frac{m}{L_x} \right) \left(\frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 \left(\frac{i}{L_x} \right) \left(\frac{i}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \\
 &\quad - 2L_x L_y \pi^4 D_{26} \left[\left(\frac{i}{L_y} \right)^2 \left(\frac{m}{L_x} \right) \left(\frac{n}{L_y} \right) r_{im} r_{jn} + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \left(\frac{i}{L_x} \right) \left(\frac{i}{L_y} \right) r_{mi} r_{nj} \right] \\
 \delta_{lk} &= \begin{cases} 1 \rightarrow k = l \\ 0 \rightarrow k \neq l \end{cases} \quad r_{ij} = \begin{cases} \frac{2i}{i^2 - j^2} \frac{1}{\pi} & \rightarrow (i - j) = \text{tek} \\ 0 & \rightarrow (i - j) = \text{\textit{\c{c}ift}} \end{cases} \\
 k &= (i - 1)J + j \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, I \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases} \\
 l &= (m - 1)J + n \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, I \\ n = 1, 2, 3, \dots, J \end{cases}
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde, δ_{lk} ve r_{ij} terimleri “tablo 4.2” de verilmişlerdir. “Denklem 4.22” deki ifade açılarak matris formunda yazılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ G_{(I \times J)1} & & G_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1(I \times J)} \\ \vdots & \ddots & \\ \delta_{(I \times J)1} & & \delta_{(I \times J)(I \times J)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{(I \times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Yukarıdaki ifadeye göre w_{ij} yer değiştirme ifadelerinin sıfır olamayacağı düşünülürse, sol tarafta bulunan parantez içerisindeki matrisin determinanı sıfır olacak demektir. Bu durumda problemin çözümü sonucu $I \times J$ kadar λ öz değer terimi elde edilir. Doğal frekanslar “denklem 4.20” ye göre aşağıdaki şekilde elde edilebilirler:

$$f_{ij} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{ij}}{\rho L_x L_y}} \quad (4.24)$$

Ortotropik bir plak için $D_{16} = D_{26} = 0$ olması dolayısıyla, “tablo 4.2” de verilen G_{lk} matrisi sadeleşir. Sonuç olarak “denklem 4.26” da görülen λ terimleri aşağıdaki gibi basit bir şekilde hesaplanabilir [2]:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4} L_x L_y \pi^4 \left[D_{11} \left(\frac{i}{L_x} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{i}{L_x} \right)^2 \left(\frac{j}{L_y} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{j}{L_y} \right)^4 \right] \quad (4.25)$$

4.3 Genel Sınır Şartları Altında Simetrik Katmanlı Dikdörtgen Levhanın Titreşim analizi

Değişik sınır şartları altında ortotropik bir plakanın ($D_{16}=D_{26}=0$) doğal frekanslarının bulunmasında, “tablo 4.1” de verilen serbest titreşen çubuğun yer değiştirme fonksiyonlarının “denklem 4.17” de verilen ifadede yerine konmasıyla elde edilen mukayese fonksiyonu kullanılır. Mukayese fonksiyonu $\bar{w}^0$ “denklem 4.15” de yerine konarak, “denklem 4.18” deki diferansiyel denklem çözülecek olursa; λ öz değerleri aşağıdaki şekilde edilir [2]:

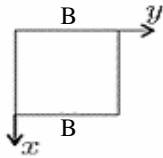
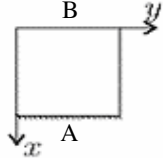
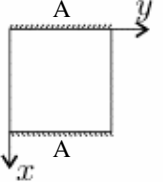
$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4} L_x L_y \left[D_{11} \frac{\alpha_1^4}{L_x^4} + D_{22} \frac{\alpha_3^4}{L_y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\alpha_2}{L_x^2 L_y^2} \right] \quad (4.26)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ değerleri “tablo 4.3” de verilmiştir. Ayrıca α parametrelerinin yaklaşık değerleri, “tablo 4.4 ve 4.5” de verilmiştir [2].

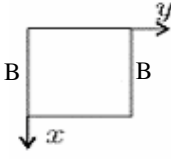
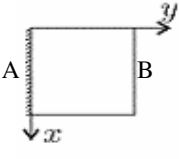
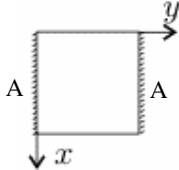
Tablo 4.3 : α katsayılarının gerçek değerleri

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \sqrt[4]{\frac{1}{c_x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi} & \alpha_3 &= \sqrt[4]{\frac{1}{c_y^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \eta^2} \right)^2 d\eta} \\
 \alpha_4 &= \frac{1}{c_x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi & \alpha_5 &= \frac{1}{c_y^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{c_x^2} \frac{1}{c_y^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \int_0^1 \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \\
 c_x &= \sqrt{\int_0^1 X_i^2 d\xi} & c_y &= \sqrt{\int_0^1 Y_i^2 d\eta}
 \end{aligned}$$

Tablo 4.4 : α_1 ve α_4 katsayılarının yaklaşık değerleri

	α_1	α_4	i
	$i\pi$	$i^2\pi^2$	1, 2, 3,....
	$(i + 0.25)\pi$	$\alpha_1(\alpha_1 - 1)$	1, 2, 3,....
	4.730 $(i + 0.5)\pi$	$\alpha_1(\alpha_1 - 2)$ $\alpha_1(\alpha_1 - 2)$	1 1, 2, 3,....

Tablo 4.5 : α_3 ve α_5 katsayılarının yaklaşık değerleri

	α_3	α_5	j
	$j\pi$	$j^2\pi^2$	1, 2, 3,....
	$(j + 0.25)\pi$	$\alpha_3(\alpha_3 - 1)$	1, 2, 3,....
	4.730 $(j + 0.5)\pi$	$\alpha_3(\alpha_3 - 2)$ $\alpha_3(\alpha_3 - 2)$	1 1, 2, 3,....

λ öz değeri “denklem 4.20” de tanımlandığı gibi aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4} (2\pi f_{ij})^2 \rho L_x L_y \quad (4.27)$$

Buna göre f_{ij} ifadesi yukarıdaki denklemden çekilecek olursa, doğal frekans değerleri Hz cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir [2]:

$$f_{ij} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{ij}}{\rho L_x L_y}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(D_{11} \frac{\alpha_1^4}{L_x^4} + D_{22} \frac{\alpha_3^4}{L_y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\alpha_2}{L_x^2 L_y^2} \right)} \quad (4.28)$$

$$\alpha_2 = \alpha_4 \alpha_5 \quad (4.29)$$

Bu çalışmada frekans değerleri boyutsuz parametreler şeklinde aşağıdaki gibi yazılmıştır [12]:

$$\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (4.30)$$

Yukarıdaki denklemde f_i , Hz boyutunda elde edilen i inci doğal frekans değeridir.

5. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu kısımda çeşitli tabaka dizilimlerinde ve değişik sınır şartlarında bir plakanın titreşim analizi, dördüncü bölümde anlatılan Rayleigh – Ritz yöntemiyle yapılmıştır. Öz değer problemi Mathcad [13] programı yardımı ile çözülmüştür. Ayrıca bulunan sonuçlar Ansys sonlu elemanlar paket programında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

5.1 Tüm Kenarlarından Basit Mesnetlenmiş Simetrik Katmanlı Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları

Bu kısımda örnek olması amacı ile simetrik dik katmanlı $(0^\circ/90^\circ)_s$ plakanın öncelikle farklı E_1/E_2 oranlarına göre katılık matrisleri elde edilmiştir. Daha sonra farklı L_x/L_y kenar – uzunluk oranlarına göre ve L_y/h kenar – kalınlık oranlarına göre doğal frekanslar bulunup karşılaştırmalar yapılmıştır.

5.1.1 Plakanın Katılık Matrislerinin Elde Edilmesi

Malzeme özellikleri “tablo 5.1” de verilen, $(0^\circ/90^\circ)_s$ katman dizilimine sahip plakanın katılık matrisi örnek olması bakımından aşağıda elde edilmiştir:

Tablo 5.1 : $E_1/E_2=10$ (Malzeme 1) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri.

$E_1 = 38 GPa$	$G_{12} = 1.9 GPa$	$\nu_{12} = 0.25$
$E_2 = 3.8 GPa$	$G_{13} = 1.9 GPa$	$\nu_{23} = 0.25$
$E_3 = 3.8 GPa$	$G_{23} = 0.76 GPa$	$\rho = 1295 kg/m^3$
$h = 0.004 m$	$L_x = 0.2 m$	$L_y = 0.2 m$
$E_1/E_2 = 10$	$G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2$	$G_{23} = 0.2 E_2$

Tablo 5.2 : $E_1/E_2=20$ (Malzeme 2) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri.

$E_1 = 76 GPa$	$G_{12} = 1.9 GPa$	$\nu_{12} = 0.25$
$E_2 = 3.8 GPa$	$G_{13} = 1.9 GPa$	$\nu_{23} = 0.25$
$E_3 = 3.8 GPa$	$G_{23} = 0.76 GPa$	$\rho = 1295 kg/m^3$
$h = 0.004 m$	$L_x = 0.2 m$	$L_y = 0.2 m$
$E_1/E_2 = 20$	$G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2$	$G_{23} = 0.2 E_2$

Tablo 5.3 : $E_1/E_2=30$ (Malzeme 3) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri.

$E_1 = 114 GPa$	$G_{12} = 1.9 GPa$	$\nu_{12} = 0.25$
$E_2 = 3.8 GPa$	$G_{13} = 1.9 GPa$	$\nu_{23} = 0.25$
$E_3 = 3.8 GPa$	$G_{23} = 0.76 GPa$	$\rho = 1295 kg/m^3$
$h = 0.004 m$	$L_x = 0.2 m$	$L_y = 0.2 m$
$E_1/E_2 = 30$	$G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2$	$G_{23} = 0.2 E_2$

Tablo 5.4 : $E_1/E_2=40$ (Malzeme 4) oranına sahip ortotropik bir plakanın malzeme özellikleri.

$E_1 = 152 GPa$	$G_{12} = 1.9 GPa$	$\nu_{12} = 0.25$
$E_2 = 3.8 GPa$	$G_{13} = 1.9 GPa$	$\nu_{23} = 0.25$
$E_3 = 3.8 GPa$	$G_{23} = 0.76 GPa$	$\rho = 1295 kg/m^3$
$h = 0.004 m$	$L_x = 0.2 m$	$L_y = 0.2 m$
$E_1/E_2 = 40$	$G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2$	$G_{23} = 0.2 E_2$

“Denklem 4.6” da verilmiş olan, düzlem gerilme durumundaki simetrik plakanın $[D]$ katılık matrisinin elde edilebilmesi için öncelikle (0°) elyaf yönlenme açılı tek bir katmana ait $[Q]$ katılık matrisinin belirlenmesi gerekir, “Denklem 2.32” de verilen ortotropik bir katmanın düzlem – gerilme durumunda ki ifadesi tekrar yazılacak olursa:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{D} & \frac{\nu_{12}E_2}{D} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{D} & \frac{E_2}{D} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{burada} \quad D = 1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2 = 1 - \nu_{12}\nu_{21}. \quad (5.1)$$

“Tablo 5.1” deki malzeme özellikleri yukarıda ki denklemde yerine konacak olursa malzeme 1 için $[Q]$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 38.24 & 0.956 & 0 \\ 0.956 & 3.824 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad (5.2)$$

(90°) elyaf yönlenme açılı katmanın katılık matrisini elde etmek için “denklem 2.53” tekrar yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} = [T_\sigma] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} [T_\epsilon]^{-1} \quad (5.3)$$

Burada dönüşüm matrisleri olan $[T_\sigma]$ ve $[T_\epsilon]^{-1}$, (90°) ye göre “denklem 2.54” e göre yazılacak olursa:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} (\cos 90)^\circ & (\sin 90)^\circ & 2 \cos 90 \sin 90 \\ (\sin 90)^\circ & (\cos 90)^\circ & -2 \cos 90 \sin 90 \\ -\cos 90 \sin 90 & \cos 90 \sin 90 & (\cos 90)^\circ - (\sin 90)^\circ \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$[T_\epsilon] = \begin{bmatrix} (\cos 90)^\circ & (\sin 90)^\circ & \cos 90 \sin 90 \\ (\sin 90)^\circ & (\cos 90)^\circ & -\cos 90 \sin 90 \\ -2 \cos 90 \sin 90 & 2 \cos 90 \sin 90 & (\cos 90)^\circ - (\sin 90)^\circ \end{bmatrix}$$

“Denklem 5.3” de $[Q]$, $[T_\sigma]$ ve $[T_\epsilon]^{-1}$ değerleri yerlerine yazılacak olursa (90°) elyaf yönlenme açılı katmanın katılık matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$[Q^{90}] = \begin{bmatrix} 3.824 & 0.956 & 0 \\ 0.956 & 38.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad (5.5)$$

$(0^\circ/90^\circ)_s$ plakanın katılık matrisi $[D]$ katılık matrisini elde edebilmek için, yukarıda bulunan katman katılık matrisleri “denklem 3.18” de yerlerine konur. Katman kalınlıkları eşit kabul edilmiştir.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5.6)$$

$$[D] = [Q] \frac{0.002^3 - 0.001^3}{3} + [Q^{90}] \frac{0.001^3 - 0^3}{3} + [Q^{90}] \frac{0^3 - (-0.001)^3}{3} + [Q] \frac{(-0.001)^3 - (-0.002)^3}{3} \quad (5.7)$$

“Denklem 5.7” de ki işlemler yapılacak olursa $[D]$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[D] = \begin{bmatrix} 180.998 & 5.099 & 0 \\ 5.099 & 43.338 & 0 \\ 0 & 0 & 10.133 \end{bmatrix} N.m \quad (5.8)$$

Değişik elyaf yönlenme açılarında ve kenar – kalınlık oranlarına göre plakanın katılık matrisleri yukarıdaki örnekteki gibi elde edilmiştir.

5.1.2 Dört Kenarından Basit Mesnetlenmiş (BBBB) Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları

“Tablo 5.5” de görüldüğü üzere $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plaka için yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar, kaynak [4], sf 284’deki sonuçlarla aynıdır. Bu çalışmada elde edilen frekans değerleri, ayrıca sonlu elemanlar paket programı olan Ansys’de bulunan sonuçlara da oldukça yakındır (yüksek kenar – kalınlık oranlarında). Ansys de elde edilen sonuçları kesin değerlere daha yakın olduğunu kabul edersek Rayleigh – Ritz yöntemiyle bulunan sonuçların daha yüksek çıkması beklenen bir sonuçtur.

Tablo 5.5 : Malzeme 1 ($L_y/h = 50$) den modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı,tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın Hz biriminde elde edilmiş doğal frekansları.

Malzeme 1 BBBB $I \times J = 7 \times 7$ $(0/90)_s$	Modlar (Hz)						
	1	2	3	4	5	6	7
Ritz Metodu	286	566	967	1111	1145	1566	1897
Reddy [4]	286	566	967	1111	1145	1566	1897
Ansys	283	560	945	1102	1117	1533	1895

“Tablo 5.6” da malzeme 1 kullanılarak tek katmanlı bir plakanın farklı elyaf yönlenme açılarında ve kenar – kalınlık oranlarında titreşim analizleri yapılmıştır ($L_y = 0,2$ sabit alınmıştır). Elde edilen sonuçlara göre ilk mod frekansı, elyaf yönlenme açısının 45° olması durumunda en yüksek değeri almıştır.

Tablo 5.6 : Malzeme 1 den modellenmiş tek katmanlı (0°) bir plakanın çeşitli elyaf yönlenme açılarında, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

(θ°)	Malzeme 1 BBBB $I \times J = 7 \times 7$	L_y/h	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
0°	Ritz Metodu	10	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
		100	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
	Ansys	10	1,494	2,36	3,93	4,419	4,913	5,935	5,957
		100	1,658	2,709	4,834	5,896	6,62	8,056	8,22
15°	Ritz Metodu	10	1,702	2,943	5,117	5,728	6,839	7,937	9,171
		100	1,702	2,943	5,117	5,728	6,839	7,937	9,171
	Ansys	10	1,484	2,447	4,026	4,274	4,936	5,728	6,105
		100	1,67	2,884	5,067	5,663	6,713	7,916	9,119
30°	Ritz Metodu	10	1,788	3,348	5,302	5,557	7,469	8,245	10,731
		100	1,788	3,348	5,302	5,557	7,469	8,245	10,731
	Ansys	10	1,469	2,653	3,935	4,151	5,191	5,692	6,078
		100	1,716	3,234	5,161	5,394	7,227	8,044	10,59
45°	Ritz Metodu	10	1,843	3,531	5,112	5,751	8,068	8,396	9,894
		100	1,843	3,531	5,112	5,751	8,068	8,396	9,894
	Ansys	10	1,466	2,792	3,716	4,177	5,616	5,709	6,065
		100	1,74	3,398	4,904	5,499	7,846	8,114	9,586
60°	Ritz Metodu	10	1,788	3,348	5,302	5,557	7,469	8,245	10,731
		100	1,788	3,348	5,302	5,557	7,469	8,245	10,731
	Ansys	10	1,469	2,653	3,935	4,151	5,191	5,692	6,078
		100	1,716	3,234	5,161	5,394	7,227	8,044	10,59
75°	Ritz Metodu	10	1,702	2,943	5,117	5,728	6,839	7,937	9,171
		100	1,702	2,943	5,117	5,728	6,839	7,937	9,171
	Ansys	10	1,484	2,447	4,026	4,274	4,936	5,728	6,105
		100	1,67	2,884	5,067	5,663	6,713	7,916	9,119
90°	Ritz Metodu	10	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
		100	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
	Ansys	10	1,494	2,36	3,93	4,419	4,913	5,935	5,957
		100	1,658	2,709	4,834	5,896	6,62	8,056	8,22

“Tablo 5.7” de ve “tablo 5.8” de sırası ile malzeme 1 ve malzeme 2 kullanılarak modellenmiş $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip bir plakanın farklı L_x ve L_y kenar uzunlukları oranlarına göre yapılan analizlerin sonuçları verilmiştir ($L_y=0,2$ sabit alınmıştır). Buna göre en yüksek frekans değeri plakanın kare olması durumunda

elde edilmiştir. Kenar – kalınlık oranının artması ile boyutsuz frekans değerlerinin düştüğü gözlenmiştir.

Tablo 5.7 : Malzeme 1 ($E_1/E_2=10$) den modellenmiş $(0/90)_s$ simetrik, dik katmanlı, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_x/L_y oranlarına göre, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

L_x/L_y	Malzeme 1 BBBB	L_y/h	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
1,0	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
		100	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys I×J=7×7	10	1,478	2,857	3,987	4,796	5,162	6,531	6,908
		100	1,66	3,292	5,593	6,48	6,608	9,083	11,208
1,2	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,297	3,058	4,005	5,189	6,302	7,915	8,683
		100	1,297	3,058	4,005	5,189	6,302	7,915	8,683
	Ansys I×J=9×7	10	1,182	2,683	3,068	4,022	5,048	5,428	5,957
		100	1,296	3,047	3,97	5,149	6,305	7,881	8,558
1,4	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,086	2,926	3,023	4,346	6,201	6,444	7,261
		100	1,086	2,926	3,023	4,346	6,201	6,444	7,261
	Ansys I×J=10×7	10	1,008	2,451	2,587	3,538	4,397	4,985	5,162
		100	1,086	2,919	3,001	4,32	6,211	6,375	7,239
1,6	Ritz Metodu I×J=7×7	10	0,96	2,393	2,849	3,839	4,995	6,08	6,14
		100	0,96	2,393	2,849	3,839	4,995	6,08	6,14
	Ansys I×J=11×7	10	1,107	2,446	2,99	3,762	4,191	5,114	5,642
		100	1,203	3,187	3,526	4,787	6,76	7,647	7,823
1,8	Ritz Metodu I×J=7×7	10	0,879	1,968	2,801	3,518	4,005	5,189	6,101
		100	0,879	1,968	2,801	3,518	4,005	5,189	6,101
	Ansys I×J=12×7	10	0,831	1,712	2,495	3,011	3,073	4,032	4,629
		100	0,876	1,961	2,79	3,503	3,97	5,149	6,106
2,0	Ritz Metodu I×J=7×7	10	0,827	1,671	2,768	3,301	3,306	4,579	5,646
		100	0,827	1,671	2,768	3,301	3,306	4,579	5,646
	Ansys I×J=14×7	10	0,786	1,484	2,471	2,635	2,866	3,682	3,993
		100	0,786	1,484	2,471	2,635	2,866	3,682	3,993

Tablo 5.8 : Malzeme 2 ($E_1/E_2=20$) den modellenmiş $(0/90)_s$ simetrik, dik katmanlı, tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_x/L_y oranlarına göre, boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

L_x/L_y	Malzeme 2 BBBB	L_y/h	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
1,0	Ritz Metodu I×J=7×7	10	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
		100	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys I×J=7×7	10	1,82	3,359	4,55	5,415	5,867	7,277	7,469
		100	2,187	4,075	7,647	8,009	8,64	11,384	13,87
1,2	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,675	3,784	5,493	6,701	7,833	9,864	12,08
		100	1,675	3,784	5,493	6,701	7,833	9,864	12,08
	Ansys I×J=9×7	10	1,461	3,161	3,593	4,619	5,747	6,005	6,696
		100	1,67	3,771	5,417	6,608	7,811	9,784	11,734
1,4	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,38	3,624	4,109	5,521	7,726	8,928	8,999
		100	1,38	3,624	4,109	5,521	7,726	8,928	8,999
	Ansys I×J=10×7	10	1,243	2,926	3,053	4,105	4,967	5,68	5,781
		100	1,378	3,608	4,063	5,464	7,706	8,733	8,943
1,6	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,205	3,221	3,535	4,82	6,887	7,665	7,956
		100	1,205	3,221	3,535	4,82	6,887	7,665	7,956
	Ansys I×J=11×7	10	1,107	2,446	2,99	3,762	4,191	5,114	5,642
		100	1,203	3,187	3,526	4,787	6,76	7,647	7,823
1,8	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,096	2,621	3,481	4,384	5,493	6,701	7,626
		100	1,096	2,621	3,481	4,384	5,493	6,701	7,626
	Ansys I×J=12×7	10	1,019	2,091	2,95	3,528	3,595	4,623	5,201
		100	1,097	2,604	3,468	4,355	5,417	6,608	7,612
2,0	Ritz Metodu I×J=7×7	10	1,026	2,201	3,447	4,103	4,501	5,846	7,601
		100	1,026	2,201	3,447	4,103	4,501	5,846	7,601
	Ansys I×J=14×7	10	0,961	1,825	2,925	3,126	3,365	4,257	4,555
		100	1,034	2,183	3,433	4,086	4,448	5,779	7,589

“Tablo 5.9“ da, malzeme 1 den modellenmiş, $(\theta / - \theta)_s$ katman diziliminde, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın θ açısı değerinin 0, 15, 30 ve 45 derece olması durumunda, farklı kenar – kalınlık oranlarında analiz sonuçları yer almaktadır. En yüksek frekans değerlerinin elyaf yönlenme açısının 45 derece olması durumunda ortaya çıktığı gözlenmiştir. Kenar – kalınlık oranının artması ile bu çalışmada elde sonuçların Ansys programında elde edilen sonuçlara yaklaştığı görülmektedir.

Tablo 5.9 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş $(\theta / - \theta)_s$ katman dizilimine sahip, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_y/h=10, 100$ oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\theta / - \theta / - \theta / \theta$ θ	Malzeme 1 BBBB	$\frac{L_y}{h}$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
0	Ritz Metodu	10	1,67	2,73	4,84	5,95	6,68	7,95	8,27
		100	1,67	2,73	4,84	5,95	6,68	7,95	8,27
	Ansys	10	1,49	2,36	3,93	4,42	4,91	5,94	5,957
		100	1,66	2,71	4,83	5,9	6,62	8,06	8,22
15	Ritz Metodu	10	1,75	3,05	5,3	5,79	7,00	8,33	9,31
		100	1,75	3,05	5,3	5,79	7,00	8,33	9,31
	Ansys	10	1,51	2,52	4,15	4,27	4,96	6,03	6,382
		100	1,72	3	5,25	5,72	6,88	8,34	9,224
30	Ritz Metodu	10	1,91	3,71	5,43	6,32	7,83	9,59	11,08
		100	1,91	3,71	5,43	6,32	7,83	9,59	11,08
	Ansys	10	1,55	2,87	3,93	4,64	5,18	6,45	6,832
		100	1,85	3,61	5,3	6,18	7,58	9,42	10,87
45	Ritz Metodu	10	1,99	4,1	5,19	6,91	8,68	9,85	10,38
		100	1,99	4,1	5,19	6,91	8,68	9,85	10,38
	Ansys	10	1,57	3,15	3,64	4,83	5,79	6,03	6,75
		100	1,92	3,98	5,01	6,69	8,48	9,53	10,09

“Tablo 5.10” da, malzeme 1’den modellenmiş, simetrik dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, farklı katman sayılarında ve kenar – kalınlık oranlarında yapılan analiz sonuçları boyutsuz frekans parametreleri cinsinden verilmiştir. Katman sayısının artması ile birinci mod frekans parametreleri değişmemiştir. Ancak diğer mod frekanslarında katman sayısının artması ile frekans parametrelerinde artış meydana geldiği gözlenmiştir.

Tablo 5.10 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş, simetrik dik katmanlı, farklı katman sayılarında, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_y/h=10$, 100 oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

(0/90...)s Katman sayısı	Malzeme 1 I×J=7×7 BBBB	$\frac{L_y}{h}$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
(0/0) 2 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
		100	1,671	2,727	4,844	5,947	6,682	7,954	8,27
	Ansys	10	1,494	2,36	3,93	4,419	4,913	5,935	5,957
		100	1,658	2,709	4,834	5,896	6,62	8,056	8,22
(0/90)s 4 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
		100	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	10	1,478	2,857	3,987	4,796	5,162	6,531	6,908
		100	1,658	3,292	5,593	6,48	6,608	9,083	11,208
(0/90/0)s 6 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,671	3,831	5,304	6,682	7,879	9,989	11,568
		100	1,671	3,831	5,304	6,682	7,879	9,989	11,568
	Ansys	10	1,501	3,15	3,986	4,96	5,588	6,844	7,057
		100	1,658	3,806	5,254	6,62	7,834	9,912	11,43
(0/90/0/90)s 8 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,671	4,021	5,162	6,682	8,368	10,306	11,22
		100	1,671	4,021	5,162	6,682	8,368	10,306	11,22
	Ansys	10	1,499	3,316	3,831	4,943	5,961	6,706	7,062
		100	1,658	3,993	5,114	6,62	8,336	10,239	11,08
(0/90/0/90/0)s 10 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,671	4,156	5,054	6,682	8,712	10,536	10,954
		100	1,671	4,156	5,054	6,682	8,712	10,536	10,954
	Ansys	10	1,505	3,349	3,852	4,98	5,944	6,821	7,055
		100	1,658	4,133	5,02	6,62	8,663	10,461	10,846

“Tablo 5.11” de, malzeme 1 den modellenmiş, simetrik açılı – katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, farklı katman sayılarında ve kenar – kalınlık oranlarında yapılan analiz sonuçları boyutsuz frekans parametreleri cinsinden verilmiştir. Dik katmanlı plakadan farklı olarak, açılı – katmanlı plakadan elde edilen sonuçlara göre; katman sayısının artması ile temel frekans parametrelerinin de diğer mod frekansları gibi arttığı gözlenmiştir.

Tablo 5.11 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş, simetrik, 45° açılı – katmanlı, farklı katman sayılarında, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın, $L_y/h=10, 100$ oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

(45/-45...)s Katman sayısı	Malzeme 1 I×J=7×7 BBBB	$\frac{L_y}{h}$	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
			1	2	3	4	5	6	7
(45/45) 2 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,843	3,531	5,112	5,751	8,068	8,396	9,894
		100	1,843	3,531	5,112	5,751	8,068	8,396	9,894
	Ansys	10	1,466	2,792	3,716	4,177	5,616	5,709	6,065
		100	1,74	3,398	4,904	5,499	7,846	8,114	9,586
(45/-45)s 4 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,992	4,094	5,19	6,909	8,679	9,849	10,38
		100	1,992	4,094	5,19	6,909	8,679	9,849	10,38
	Ansys	10	1,567	3,15	3,644	4,834	5,793	6,026	6,75
		100	1,915	3,981	5,009	6,69	8,476	9,527	10,088
(45/-45/45)s 6 Katmanlı	Ritz Metodu	10	2,08	4,496	5,168	7,748	9,037	9,647	11,824
		100	2,08	4,496	5,168	7,748	9,037	9,647	11,824
	Ansys	10	1,632	3,36	3,719	5,12	6,019	6,204	7,088
		100	2,008	4,39	5,02	7,519	8,862	9,399	11,465
(45/-45/45/-45)s 8 Katmanlı	Ritz Metodu	10	2,102	4,621	5,138	8,01	9,125	9,544	12,283
		100	2,102	4,621	5,138	8,01	9,125	9,544	12,283
	Ansys	10	1,644	3,442	3,666	5,234	6,033	6,118	7,33
		100	2,043	4,518	4,997	7,776	8,943	9,305	11,909
(45/-45/45/-45/45)s 10 Katmanlı	Ritz Metodu	10	1,803	3,505	5,588	6,194	7,465	9,298	11,21
		100	1,803	3,505	5,588	6,194	7,465	9,298	11,21
	Ansys	10	1,653	3,469	3,685	5,26	6,07	6,169	7,324
		100	2,055	4,588	4,974	7,928	9,002	9,247	12,189

“Tablo 5.12 – 15” de malzeme 1, 2, 3 ve 4 den modellenmiş, (0/90)s katman dizilimine sahip, dört kenarından basit mesnetlenmiş plakaların, farklı L_x/h oranlarında yapılan analizlerinin sonuçları yer almaktadır.

Tablo 5.12 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 BBBB $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,479	2,856	3,987	4,797	5,162	6,532	6,908
20	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,607	3,159	5,041	5,971	6,075	8,168	9,965
30	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,629	3,216	5,326	6,279	6,294	8,623	10,671
40	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,648	3,259	5,469	6,393	6,459	8,860	10,96
50	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,655	3,273	5,519	6,431	6,522	8,949	11,063
100	Ritz Metodu	1,671	3,306	5,646	6,487	6,682	9,139	11,074
	Ansys	1,659	3,286	5,589	6,481	6,613	9,081	11,203

Tablo 5.13 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_x}{h}$	Malzeme 2 BBBB $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	1,82	3,359	4,55	5,415	5,867	7,277	7,469
20	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	2,076	3,86	6,389	7,302	7,323	9,751	11,935
30	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	2,129	3,966	7,037	7,671	7,988	10,571	12,941
40	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	2,162	4,03	7,346	7,86	8,318	10,98	13,422
50	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	2,172	4,051	7,472	7,922	8,447	11,144	13,608
100	Ritz Metodu	2,201	4,103	7,805	8,041	8,805	11,536	13,787
	Ansys	2,183	4,075	7,647	8,009	8,64	11,384	13,870

Tablo 5.14 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 BBBB $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,046	3,716	4,829	5,776	6,333	7,718	7,74
20	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,427	4,416	7,217	8,216	8,239	10,872	13,024
30	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,516	4,579	8,205	8,786	9,205	12,049	14,698
40	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,57	4,665	8,70	9,055	9,707	12,638	15,391
50	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,583	4,693	8,907	9,151	9,916	12,885	15,668
100	Ritz Metodu	2,629	4,772	9,346	9,491	10,516	13,524	16,06
	Ansys	2,604	4,736	9,215	9,286	10,231	13,25	16,069

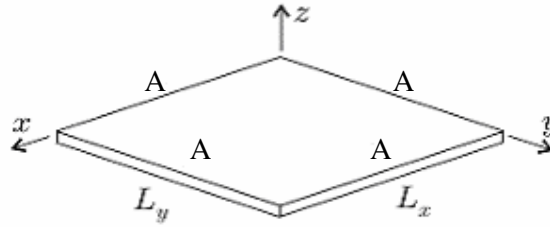
Tablo 5.15 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş $(0/90)_s$ dik katmanlı, dört kenarından basit mesnetlenmiş bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 BBBB $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,204	3,976	4,98	6,004	6,644	7,83	8,03
20	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,705	4,868	7,77	8,847	8,976	11,70	13,639
30	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,834	5,091	9,069	9,705	10,129	13,209	16,098
40	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,906	5,211	9,735	10,059	10,799	13,989	17,007
50	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,931	5,251	10,039	10,196	11,096	14,324	17,387
100	Ritz Metodu	2,993	5,352	10,482	10,909	11,972	15,24	18,033
	Ansys	2,956	5,30	10,386	10,485	11,542	14,827	17,932

5.2 Genel Sınır Şartları Altında Simetrik Katmanlı Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları

Bu kısımda, simetrik katmanlı bir plakanın, beş farklı sınır şartı altında (AAAA, AABA, BABA, ABBA, BBBA), farklı E_1/E_2 oranlarında ve farklı L_y/h oranlarında titreşim analizi sonuçları, Ritz yöntemiyle ve sonlu elemanlar paket programı Ansys ile bulunmuş ve karşılaştırılmıştır.

5.2.1 Dört Kenarından Ankastre (AAAA) Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları



Şekil 5.1 : Dört kenarından ankastre mesnetlenmiş plaka.

“Şekil 5.1” de görüldüğü üzere dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, sırası ile “tablo 5.1-5.4” de özellikleri verilen, malzeme 1, 2, 3 ve 4 ile modellenmiş, $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip plakanın, bu çalışmada bulunan sonuçları ile Ansys paket programında bulunan sonuçları “tablo 5.16 – 19” da verilmiştir.

Tablo 5.16 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 AAAA $(0/90)_s$ $I \times J = 7 \times 7$	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	2,47	3,892	4,639	5,616	6,056	7,287	7,352
20	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	3,129	4,874	6,79	7,924	7,945	10,287	11,542
30	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	3,317	5,143	7,669	8,512	8,847	11,418	13,261
40	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	3,411	5,28	8,104	8,794	9,316	12,007	13,847
50	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	3,447	5,333	8,289	8,9	9,519	12,268	14,084
100	Ritz Metodu	3,517	5,441	8,776	9,057	10,006	12,714	14,183
	Ansys	3,492	5,408	8,561	9,065	9,841	12,739	14,456

Tablo 5.17 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenlenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 2 AAAA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	2,797	4,348	5,017	6,074	6,632	7,715	7,908
20	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	3,881	5,866	8,014	9,247	9,35	11,869	13,13
30	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	4,29	6,378	9,623	10,33	10,863	13,732	15,847
40	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	4,493	6,636	10,503	10,811	11,759	14,753	16,817
50	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	4,571	6,737	10,922	11,004	12,183	15,231	17,239
100	Ritz Metodu	4,775	6,982	11,384	12,189	13,427	16,451	17,758
	Ansys	4,694	6,889	11,302	11,57	12,855	16,03	17,875

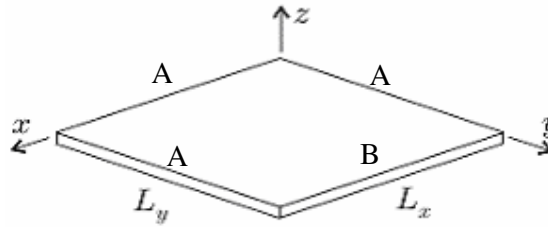
Tablo 5.18 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenlenmiş dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 AAAA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	2,981	4,626	5,217	6,34	6,986	7,926	8,245
20	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	4,353	6,556	8,665	10,031	10,328	12,887	13,931
30	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	4,959	7,3	10,785	11,699	12,148	15,325	17,743
40	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	5,271	7,675	12,048	12,38	13,41	16,724	19,094
50	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	5,409	7,834	12,678	12,692	14,051	17,421	19,703
100	Ritz Metodu	5,766	8,242	13,322	14,853	16,155	19,489	20,748
	Ansys	5,609	8,07	13,107	13,736	15,11	18,587	20,633

Tablo 5.19 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş, dört kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 AAAA $(0/90)_s$ $I \times J = 7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	3,094	4,8	5,327	6,497	7,201	8,023	8,444
20	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	4,676	7,057	9,055	10,544	11,03	13,579	14,378
30	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	5,451	8,014	11,543	12,761	13,037	16,477	19,119
40	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	5,872	8,507	13,123	13,645	14,603	18,216	20,884
50	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	6,06	8,726	13,969	14,043	15,438	19,112	21,688
100	Ritz Metodu	6,605	9,329	14,992	17,089	18,46	22,092	23,331
	Ansys	6,357	9,048	14,629	15,422	16,875	20,656	22,951

5.2.2 Üç Kenarından Ankastre, Bir Kenarından Basit Mesnetlenmiş (AABA) Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları



Şekil 5.2 : Üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş plaka.

“Şekil 5.2” de görüldüğü üzere üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, sırası ile “tablo 5.1-5.4” de özellikleri verilen, malzeme 1, 2,3 ve 4 ile modellenmiş, $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip plakanın, bu çalışmada bulunan sonuçları ile Ansys paket programında bulunan sonuçları “tablo 5.20 – 23” de verilmiştir.

Tablo 5.20 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 AABA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	2,303	3,568	4,556	5,407	5,719	7,088	7,239
20	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	2,947	4,369	6,705	7,212	7,615	9,729	11,211
30	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	3,137	4,589	7,585	7,627	8,517	10,75	12,11
40	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	3,23	4,706	7,84	8,021	8,972	11,284	12,555
50	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	3,265	4,747	7,921	8,202	9,168	11,521	12,73
100	Ritz Metodu	3,335	4,846	8,041	8,693	9,668	11,987	12,805
	Ansys	3,311	4,813	8,041	8,47	9,469	11,921	13,003

Tablo 5.21 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 2 AABA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	2,604	4,04	4,919	5,866	6,355	7,657	7,684
20	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	3,666	5,296	7,911	8,579	8,894	11,278	13,067
30	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	4,078	5,73	9,319	9,525	10,483	12,979	14,596
40	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	4,283	5,95	9,686	10,41	11,372	13,922	15,337
50	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	4,367	6,036	9,831	10,829	11,786	14,367	15,645
100	Ritz Metodu	4,565	6,258	10,123	12,107	13,053	15,575	16,019
	Ansys	4,483	6,165	10,041	11,477	12,446	15,108	16,112

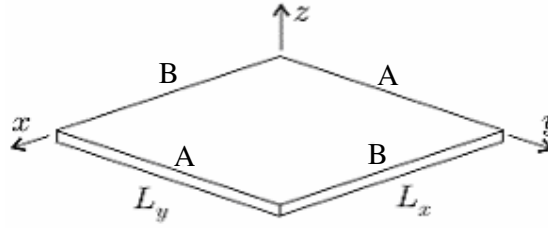
Tablo 5.22 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 AABA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	2,77	4,34	5,107	6,141	6,754	7,86	8,054
20	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	4,107	5,947	8,545	9,558	9,647	12,286	13,857
30	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	4,716	6,574	10,61	10,674	11,725	14,51	16,457
40	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	5,031	6,903	11,138	11,945	12,97	15,808	17,503
50	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	5,165	7,04	11,354	12,585	13,608	16,462	17,958
100	Ritz Metodu	5,538	7,412	11,848	14,752	15,725	18,487	18,702
	Ansys	5,366	7,24	11,676	13,636	14,652	17,557	18,644

Tablo 5.23 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş üç kenarından ankastre, bir kenarından basit mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 AABA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	2,871	4,537	5,208	6,312	7,006	7,952	8,282
20	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	4,402	6,426	8,92	10,138	10,28	12,988	14,296
30	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	5,18	7,236	11,415	11,632	12,569	15,624	17,892
40	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	5,601	7,661	12,318	13,005	14,121	17,231	19,239
50	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	5,796	7,851	12,615	13,853	14,951	18,072	19,847
100	Ritz Metodu	6,357	8,404	13,341	16,974	17,998	20,986	21,036
	Ansys	6,093	8,14	13,061	15,306	16,379	19,533	20,772

5.2.3 Karşılıklı Kenarlarından Basit ve Ankastre Mesnetlenmiş (BABA) Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları



Şekil 5.3 : Karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş plaka.

“Şekil 5.3” de görüldüğü üzere karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, sırası ile “tablo 5.1-5.4” de özellikleri verilen, malzeme 1, 2,3 ve 4 ile modellenmiş, $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip plakanın, bu çalışmada bulunan sonuçları ile Ansys paket programında bulunan sonuçları “tablo 5.24 – 27” de verilmiştir.

Tablo 5.24 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 BABA $(0/90)_s$ $I \times J = 7 \times 7$	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	2,188	3,249	4,498	5,209	5,364	6,816	7,202
20	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	2,833	3,93	6,506	6,648	7,361	9,212	10,356
30	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	3,024	4,125	6,807	7,529	8,253	10,158	11,004
40	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	3,117	4,23	6,971	7,965	8,705	10,653	11,334
50	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	3,154	4,268	7,03	8,148	8,896	10,869	11,459
100	Ritz Metodu	3,228	4,359	7,133	8,636	9,403	11,352	11,509
	Ansys	3,203	4,318	7,116	8,413	9,18	11,228	11,657

Tablo 5.25 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, (0/90)_s dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 2 BABA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	2,465	3,719	4,848	5,659	6,057	7,449	7,614
20	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	3,533	4,789	7,816	7,846	8,598	10,711	12,243
30	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	3,952	5,179	8,364	9,466	10,184	12,299	13,366
40	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	4,156	5,385	8,644	10,354	11,064	13,193	13,912
50	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	4,238	5,464	8,757	10,771	11,483	13,619	14,133
100	Ritz Metodu	4,448	5,674	8,99	12,049	12,761	14,396	14,828
	Ansys	4,355	5,581	8,92	11,419	12,142	14,302	14,466

Tablo 5.26 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, (0/90)_s dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

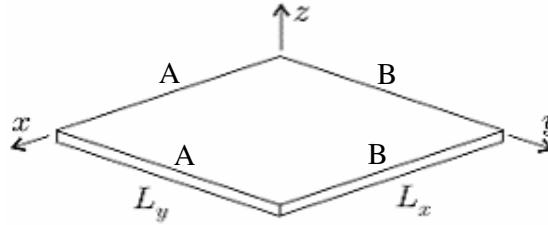
$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 BABA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	2,61	4,031	5,024	5,937	6,505	7,811	7,854
20	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	3,952	5,386	8,468	8,777	9,312	11,696	13,588
30	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	4,57	5,954	9,568	10,606	11,379	13,758	15,176
40	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	4,888	6,256	9,97	11,876	12,626	14,996	15,957
50	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	5,03	6,389	10,138	12,52	13,264	15,618	16,283
100	Ritz Metodu	5,394	6,739	10,531	14,695	15,411	16,813	17,643
	Ansys	5,237	6,582	10,388	13,579	14,309	16,655	16,77

Tablo 5.27 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş karşılıklı kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 BABA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\bar{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	2,696	4,248	5,119	6,116	6,798	7,896	8,112
20	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	4,227	5,832	8,83	9,511	9,772	12,394	14,24
30	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	5,018	6,555	10,538	11,341	12,184	14,821	16,6
40	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	5,442	6,955	11,063	12,932	13,738	16,346	17,621
50	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	5,639	7,133	11,286	13,787	14,571	17,156	18,055
100	Ritz Metodu	6,208	7,661	11,855	16,924	17,651	18,889	20,045
	Ansys	5,944	7,414	11,624	15,24	16	18,559	18,724

5.2.4 Komşu Kenarlarından Basit ve Ankastre Mesnetlenmiş (ABBA)

Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları



Şekil 5.4 : Komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş plaka.

“Şekil 5.4” de görüldüğü üzere komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, sırası ile “tablo 5.1-5.4” de özellikleri verilen, malzeme 1, 2,3 ve 4 ile modellenmiş, $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip plakanın, bu çalışmada bulunan sonuçları ile Ansys paket programında bulunan sonuçları “tablo 5.28 – 5.31” de verilmiştir.

Tablo 5.28 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 ABBA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	1,963	3,379	4,323	5,218	5,618	6,955	7,096
20	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	2,315	3,978	5,924	6,948	6,989	9,23	10,774
30	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	2,398	4,116	6,476	7,349	7,541	9,991	11,935
40	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	2,444	4,194	6,743	7,533	7,84	10,376	12,354
50	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	2,46	4,223	6,848	7,599	7,954	10,539	12,516
100	Ritz Metodu	2,502	4,285	7,125	7,694	8,248	10,84	12,565
	Ansys	2,477	4,26	7,001	7,694	8,132	10,799	12,747

Tablo 5.29 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 2 ABBA $(0/90)_s$ $I \times J=7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	2,299	3,866	4,786	5,757	6,258	7,584	7,605
20	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	2,938	4,836	7,227	8,301	8,318	10,832	12,563
30	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	3,13	5,106	8,34	8,953	9,427	12,149	14,366
40	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	3,227	5,24	8,906	9,266	10,008	12,829	15,071
50	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	3,263	5,289	9,159	9,381	10,269	13,129	15,359
100	Ritz Metodu	3,363	5,417	9,609	9,877	10,987	13,859	15,68
	Ansys	3,316	5,359	9,527	9,551	10,66	13,602	15,774

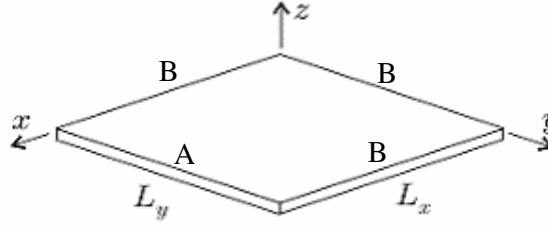
Tablo 5.30 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 ABBA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	2,497	4,184	5,021	6,073	6,665	7,813	8,003
20	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	3,36	5,472	7,967	9,149	9,284	11,911	13,479
30	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	3,665	5,877	9,525	10,2	10,695	13,702	16,201
40	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	3,818	6,078	10,377	10,646	11,55	14,669	17,194
50	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	3,878	6,153	10,782	10,825	11,955	15,117	17,621
100	Ritz Metodu	4,035	6,353	11,204	12,019	13,178	16,355	18,287
	Ansys	3,964	6,267	11,075	11,404	12,577	15,826	18,244

Tablo 5.31 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş komşu kenarlarından basit ve ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 ABBA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	2,627	4,399	5,15	6,264	6,923	7,916	8,246
20	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	3,669	5,961	8,434	9,719	10,009	12,674	14,002
30	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	4,081	6,501	10,346	11,203	11,612	14,875	17,625
40	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	4,286	6,77	11,452	11,789	12,714	16,109	18,902
50	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	4,376	6,877	12,004	12,029	13,259	16,701	19,475
100	Ritz Metodu	4,623	7,166	12,582	13,82	15,042	18,476	20,557
	Ansys	4,491	7,034	12,384	12,896	14,134	17,651	20,326

5.2.5 Üç Kenarından Basit, Bir Kenarından Ankastre Mesnetlenmiş (BBBA) Plakanın Titreşim Analizi Sonuçları



Şekil 5.5 : Üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş plaka.

“Şekil 5.5” de görüldüğü üzere üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, sırası ile “tablo 5.1-5.4” de özellikleri verilen, malzeme 1, 2,3 ve 4 ile modellenmiş, $(0/90)_s$ katman dizilimine sahip plakanın, bu çalışmada bulunan sonuçları ile Ansys paket programında bulunan sonuçları “tablo 5.32 – 35” de verilmiştir.

Tablo 5.32 : Malzeme 1 den ($E_1/E_2=10$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 1 BBBA $(0/90)_s$ $I \times J = 7 \times 7$	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	1,825	3,039	4,261	5,014	5,255	6,679	7,059
20	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	2,168	3,487	5,86	6,256	6,667	8,682	10,207
30	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	2,25	3,591	6,41	6,494	7,243	9,35	10,809
40	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	2,295	3,656	6,624	6,677	7,529	9,696	11,112
50	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	2,307	3,674	6,671	6,782	7,645	9,837	11,224
100	Ritz Metodu	2,353	3,732	6,745	7,05	7,942	10,138	11,253
	Ansys	2,328	3,707	6,737	6,927	7,81	10,056	11,385

Tablo 5.33 : Malzeme 2 den ($E_1/E_2=20$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 2 BBBA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	2,139	3,529	4,712	5,546	5,956	7,368	7,54
20	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	2,769	4,271	7,155	7,524	7,986	10,242	12,068
30	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	2,962	4,478	7,953	8,27	9,089	11,421	13,115
40	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	3,059	4,591	8,173	8,841	9,663	12,04	13,623
50	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	3,094	4,629	8,249	9,089	9,918	12,312	13,818
100	Ritz Metodu	3,187	4,729	8,406	9,807	10,636	13,03	14,022
	Ansys	3,141	4,682	8,36	9,457	10,298	12,738	14,104

Tablo 5.34 : Malzeme 3 den ($E_1/E_2=30$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 3 BBBA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	2,319	3,863	4,938	5,865	6,413	7,763	7,801
20	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	3,171	4,856	7,884	8,479	8,794	11,301	13,407
30	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	3,477	5,173	9,111	9,448	10,319	12,908	14,894
40	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	3,629	5,334	9,421	10,302	11,167	13,794	15,62
50	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	3,685	5,394	9,544	10,703	11,562	14,202	15,911
100	Ritz Metodu	3,849	5,566	9,802	11,948	12,792	15,396	16,341
	Ansys	3,778	5,48	9,716	11,333	12,191	14,838	16,341

Tablo 5.35 : Malzeme 4 den ($E_1/E_2=40$) modellenmiş üç kenarından basit, bir kenarından ankastre mesnetlenmiş, $(0/90)_s$ dik katmanlı bir plakanın farklı L_y/h oranlarında (L_y sabit alınmıştır) boyutsuz parametreler cinsinden elde edilmiş doğal frekansları.

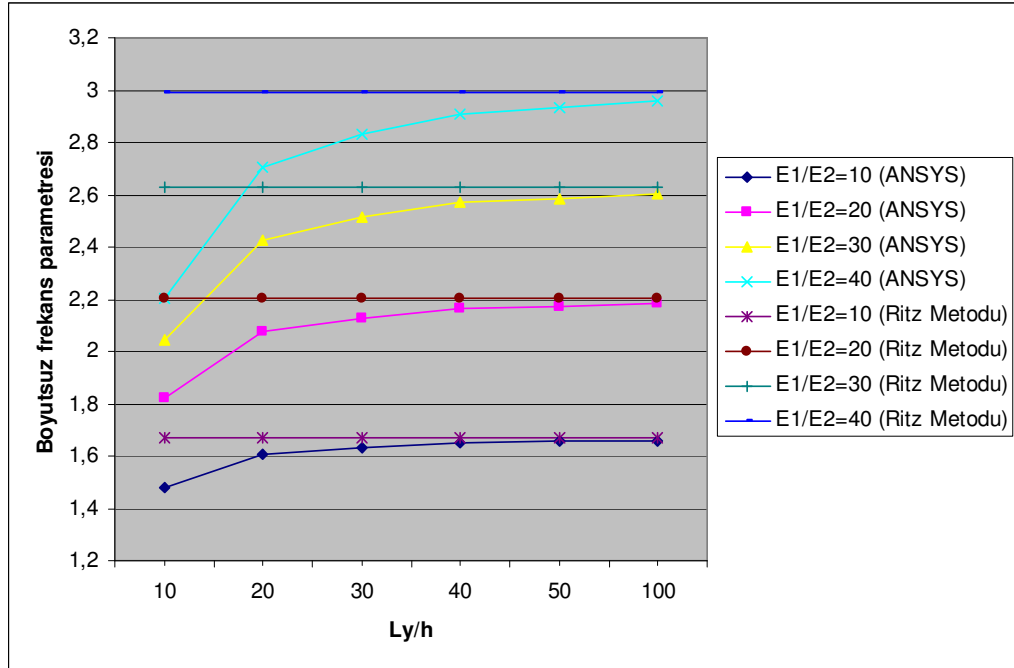
$\frac{L_y}{h}$	Malzeme 4 BBBA (0/90) _s I×J=7×7	Modlar $\tilde{f}_i = \frac{f_i L_y^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$						
		1	2	3	4	5	6	7
10	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	2,435	4,1	5,059	6,066	6,714	7,861	8,076
20	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	3,454	5,313	8,342	9,217	9,339	12,063	13,946
30	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	3,869	5,732	10,06	10,257	11,198	14,032	16,309
40	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	4,082	5,951	10,468	11,373	12,291	15,158	17,251
50	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	4,169	6,035	10,633	11,921	12,829	15,702	17,651
100	Ritz Metodu	4,409	6,274	10,997	13,738	14,613	17,42	18,361
	Ansys	4,293	6,159	10,865	12,813	13,705	16,578	18,245

5.3 Elde Edilen Sonuçların Değerlendirilmesi

Bu kısımda bölüm 5.1 ve 5.2 de elde edilen sonuçlar grafikler halinde gösterilecektir. Ayrıca, kenar – kalınlık oranı (L_y/h), malzeme anizotropisi (E_1/E_2), elyaf yönlenme açıları (θ°), kenar uzunlukları oranı (L_x/L_y), kenar sınır şartları ve katman sayısı gibi parametrelerin değişiminin, boyutsuz temel frekans parametresine etkileri [12,14]'de gerçekleştirilmiş analizler doğrultusunda incelenecektir.

5.3.1 Kenar – Kalınlık Oranının Etkisi

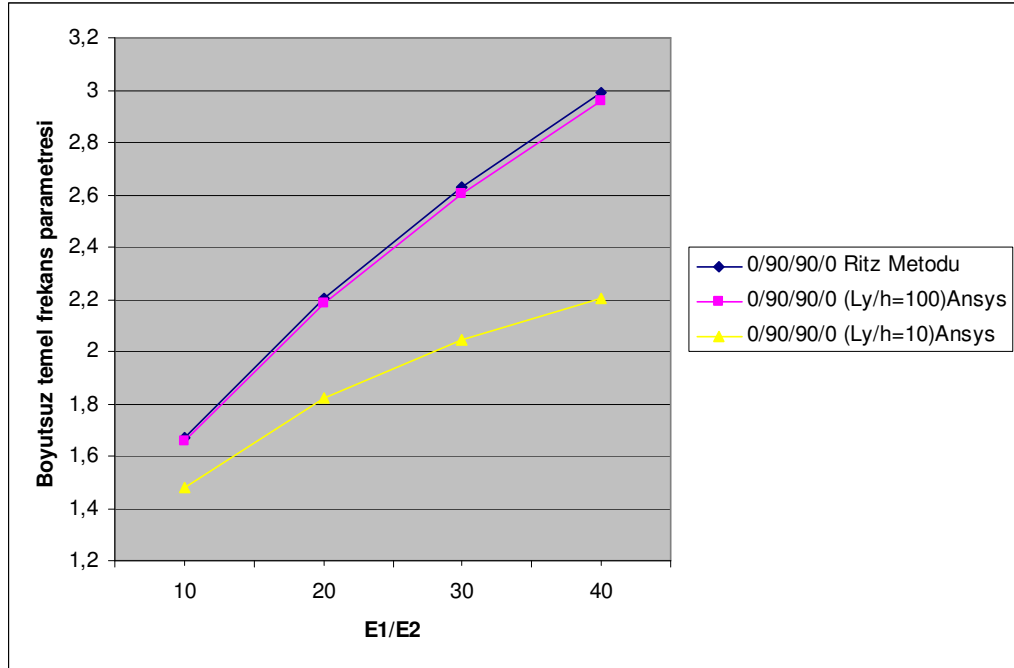
Dört kenarından basit mesnetlenmiş, 0/90/90/0 katman dizilimine sahip simetrik dik katmanlı, malzeme 1, 2, 3 ve 4 ile modellenmiş bir plakanın, L_y/h kenar – kalınlık oranının değişiminin (L_y sabit alınmıştır) etkisi “şekil 5.6” da grafik halinde verilmiştir. “Şekil 5.6” da görüldüğü üzere klasik plaka teorisine dayanan bu çalışmada elde edilen sonuçlar, kayma deformasyonlarının göz ardı edilmesinden dolayı kenar – kalınlık oranı değişiminden etkilenmemektedir. Ancak L_y/h oranının artması ile kayma deformasyonlarının önemi azalmakta ve sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlara yaklaşmaktadırlar. L_y/h oranının 100 olduğu durumda hata değeri %0.7 ye kadar düşmektedir.



Şekil 5.6 : L_y/h oranındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.

5.3.2 Malzeme Anizotropisinin Etkisi

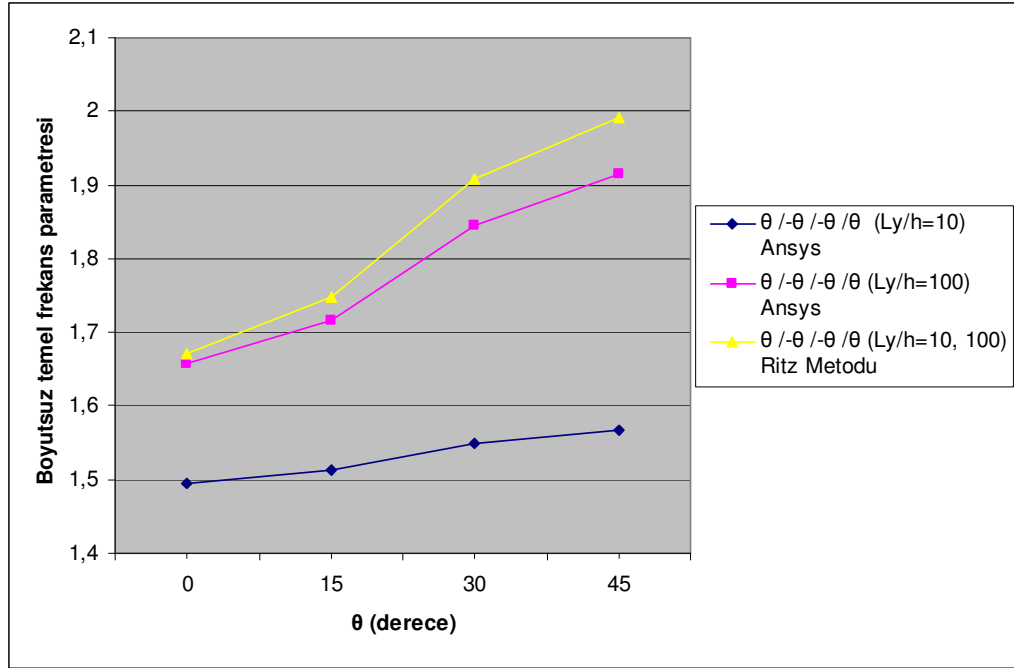
0/90/90/0 katman dizilimine sahip, dört kenarından basit mesnetlenmiş, $L_y/h=10$ ve 100 olan bir plakanın, E_1/E_2 oranındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametrelerine etkisi incelenmiştir. “Şekil 5.7” de görüldüğü üzere anizotropinin artması, frekans parametresinin de artmasına neden olmuştur. E_2 değeri sabit alınarak, E_1/E_2 oranının artması, frekans değerlerinde de artışa neden olmaktadır. Bu artışın nedeni, E_1 değerinin yükselmesi ile sistemin katılık matrisinin değerinin artmasıdır. Ayrıca frekans parametresindeki artışın, plakanın incilmesi ile yükseldiği de gözlenmiştir.



Şekil 5.7 : E_1/E_2 oranındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.

5.3.3 Elyaf Yönlenme Açılarının Etkisi

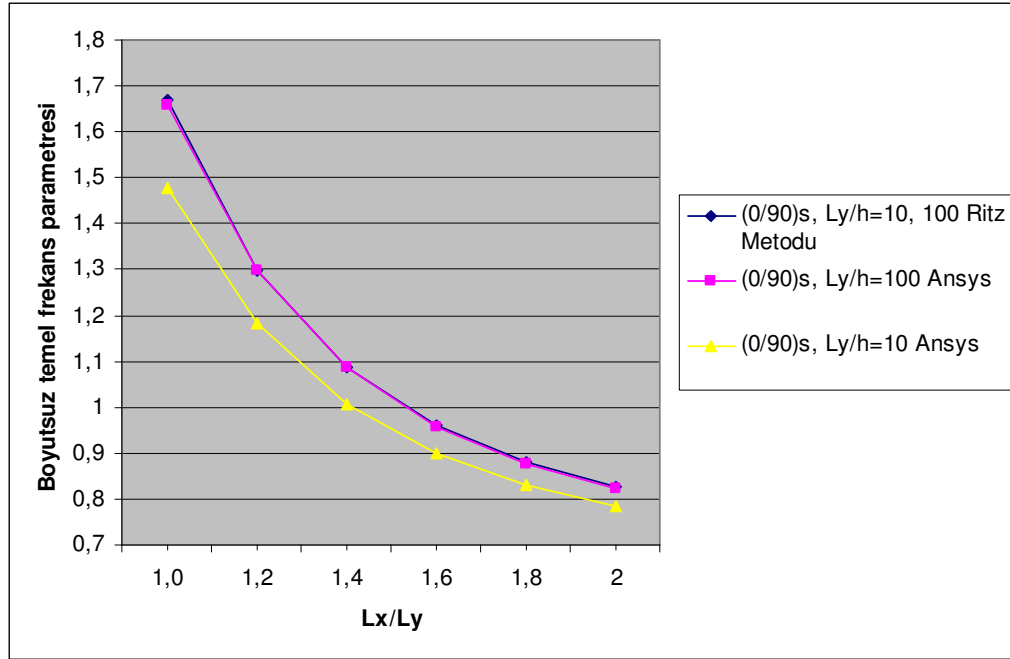
Tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş, simetrik dört katmanlı ($\theta/\theta/\theta/\theta$) plakanın, elyaf yönlenme açılarına 0° ile 45° arasında değerler verilerek, farklı kenar – kalınlık oranlarında yapılmış analiz sonuçları “şekil 5.8” de grafik halinde verilmiştir. Bulunan sonuçlara göre boyutsuz temel frekans değeri 45° de en yüksek değerini almaktadır. Ayrıca, elyaf yönlenme açısının artması ile, farklı kenar – kalınlık oranlarında elde edilen frekans parametreleri arasındaki farkında arttığı “şekil 5.8” de görülmektedir.



Şekil 5.8 : Elyaf yönlenme açılarındaki değişimin, BBBB sınır şartlarında, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.

5.3.4 Kenar Uzunlukları Oranının Etkisi

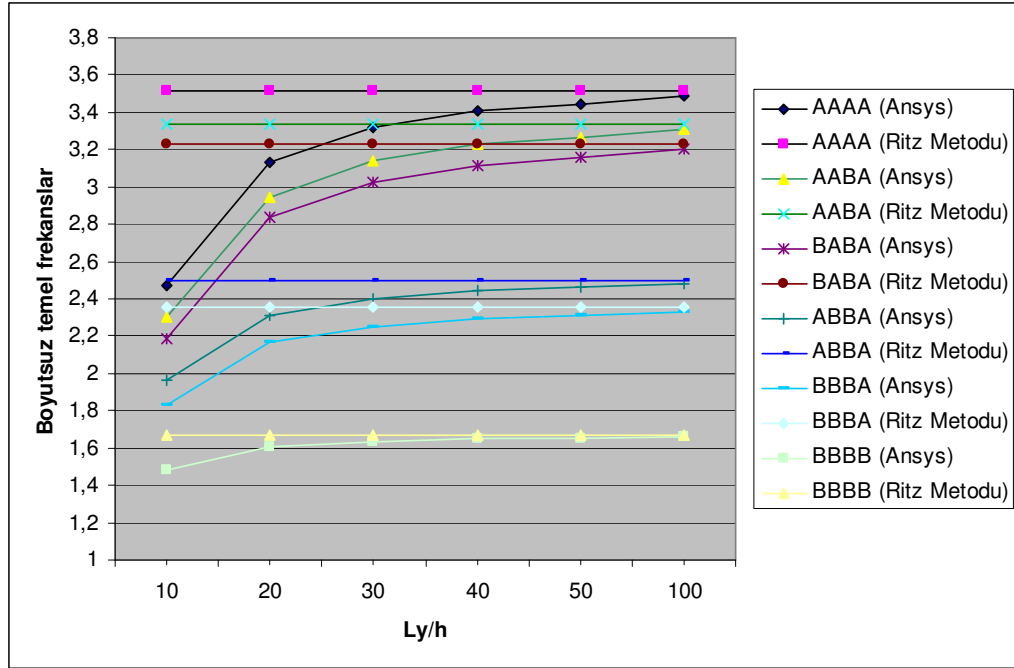
Tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş, simetrik dik katmanlı $(0/90)_s$, plakanın, farklı kenar – kalınlık oranlarında ve farklı kenar uzunlukları oranlarında titreşim analizi sonuçları “Şekil 5.9” da verilmiştir. Bu oranlar hesaplanırken, L_y uzunluğu sabit alınmıştır. “Şekil 5.9” a göre; L_x/L_y oranının artması ile, kalın plakanın da, ince plakanın da temel frekans parametrelerinin düştüğü gözlenmiştir.



Şekil 5.9 : Kenar uzunlukları oranlarındaki (L_x/L_y) değişimin, BBBB sınır şartlarında, malzeme 1 den modellenmiş, 0/90/90/0 katman dizilimindeki plakanın, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.

5.3.5 Kenar Sınır Şartlarının Etkisi

Simetrik, dik katmanlı bir malzeme 1 den modellenmiş plakanın (0/90/90/0), çeşitli kenar sınır şartları altında, farklı kenar – kalınlık oranlarında yapılan analizleri sonucu, elde edilen boyutsuz temel frekans parametreleri “şekil 5.11” de grafik halinde verilmiştir. Buna göre; plakadaki kısıtların artması ile temel frekans parametresinde de artış gözlenmiştir. Plakanın tüm kenarlarından ankastre olması durumunda en yüksek, tüm kenarlarından basit mesnet olması durumunda en düşük frekans değerleri elde edilmiştir. Yine bu şekilde de görüldüğü üzere, bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Ansys’te elde edilen sonuçlara -kayma deformasyonlarının değerinin, kenar – kalınlık oranının artması neticesinde önemini kaybetmesi ile yaklaşmaktadır.

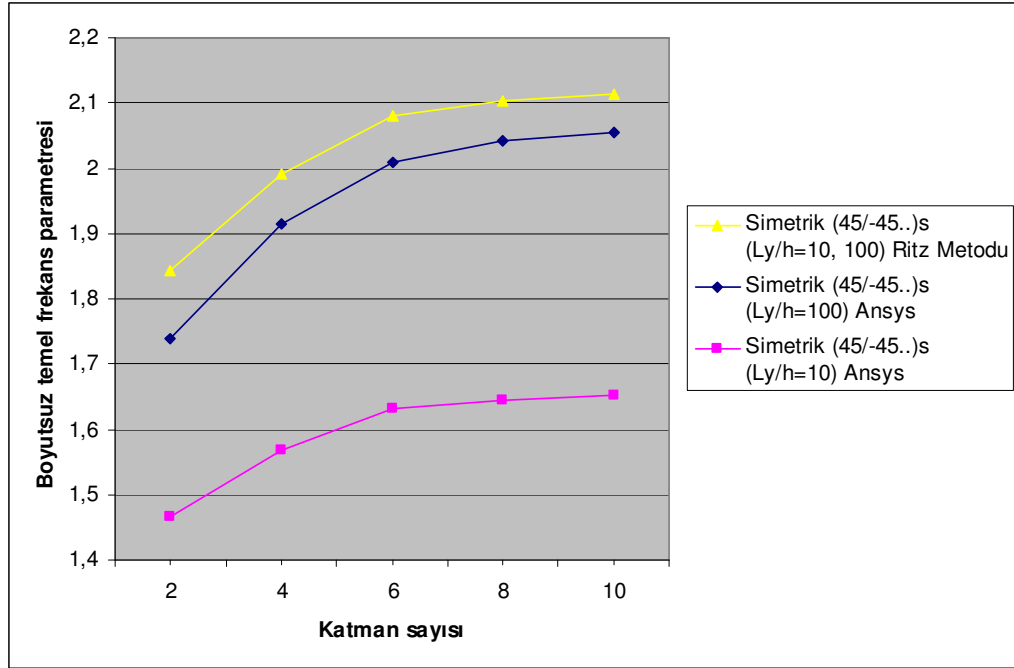


Şekil 5.10 : Malzeme 1 den modellenmiş, 0/90/90/0 katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, kenar sınır şartlarındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.

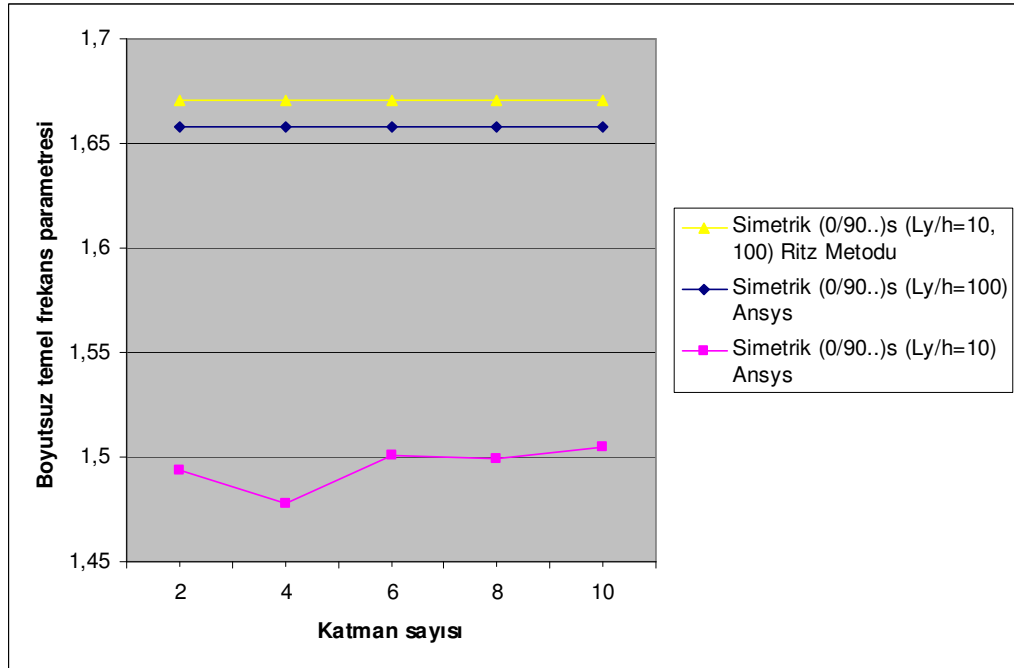
5.3.6 Katman Sayısının Etkisi

“Şekil 5.11” de tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş, simetrik açılı katmanlı, malzeme 1 den modellenmiş bir plakanın, farklı katman sayılarında ve farklı kenar – kalınlık oranlarında elde edilen analiz sonuçları grafik halinde verilmiştir. Buna göre katman sayısının artması ile temel frekans parametresinin değeri de artmaktadır. Ancak katman sayısının artması ile frekans parametresi değerlerindeki artış miktarının azaldığı görülmektedir.

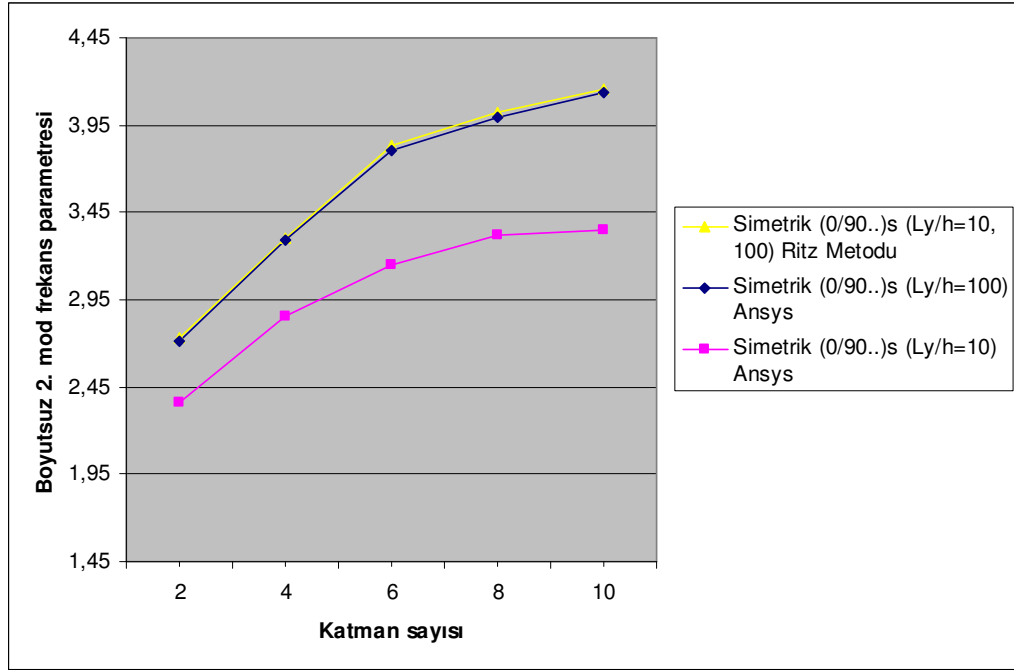
“Şekil 5.12” de tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş, simetrik dik katmanlı malzeme 1 den modellenmiş bir plakanın, temel frekans parametrelerinin, katman sayısına bağlı olarak nasıl değiştiği görülmektedir. Buna göre; dik katmanlı plakada kenar – kalınlık oranının düşük olması durumunda; yani plakanın kalın olması durumunda, temel frekans parametrelerinin katman sayısından etkilenmediği gözlenmiştir. Ancak temel frekans haricinde diğer mod frekanslarının katman sayısına bağlı olarak arttığı, “şekil 5.13” de verilen ikinci mod frekanslarına göre çizilen grafikte görülmektedir.



Şekil 5.11 : $(45/-45\ldots)_s$ katman dizilimindeki simetrik, açılı katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.



Şekil 5.12 : $(0/90\ldots)_s$ katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz temel frekans parametresine etkisi.



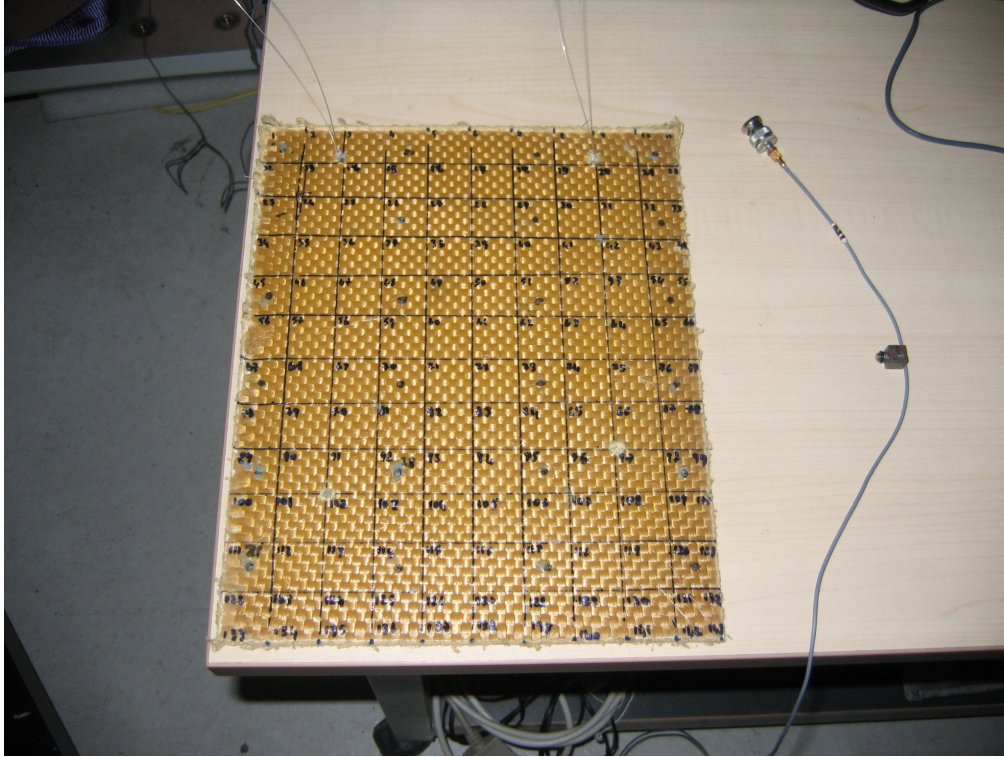
Şekil 5.13 : $(0/90\dots)_s$ katman dizilimindeki simetrik, dik katmanlı plakanın, katman sayısındaki değişimin, boyutsuz ikinci mod frekans parametresine etkisi.

6. DENEYSEL ÇALIŞMA

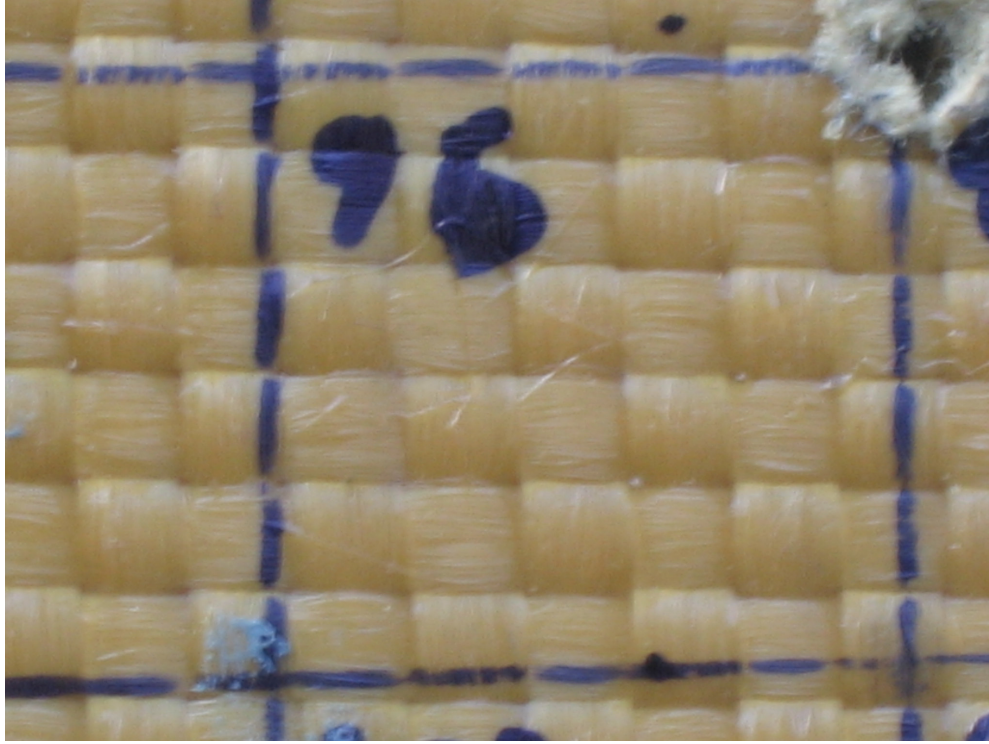
Bu çalışma kapsamında, “tablo 6.1” de özellikleri verilen, aramid/epoxy kevlardan imal edilmiş bir plakanın deneysel olarak doğal frekansları elde edilmiş ve Ansys paket programında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. “Şekil 6.1” de numune parçanın uzaktan çekilen, “şekil 6.2” de ise yakından çekilen fotoğrafı yer almaktadır. “Şekil 6.2” de elyaf yönlenme açıları net olarak görünmektedir. Plaka anti – simetrik (0/90/0/90/0/90) tabaka dizilimine sahiptir.

Tablo 6.1 : Aramid/Epoxy Kevlar plakanın malzeme ve geometrik özellikleri.

$E_1 = 76 GPa$	$G_{12} = 2.3 GPa$	$\nu_{12} = 0.34$
$E_2 = 5.5 GPa$	$G_{13} = 2.3 GPa$	$\nu_{23} = 0.37$
$E_3 = 5.5 GPa$	$G_{23} = 2 GPa$	$\rho = 1295 kg/m^3$
$h = 0.0035 m$	$L_x = 0.3 m$	$L_y = 0.25 m$



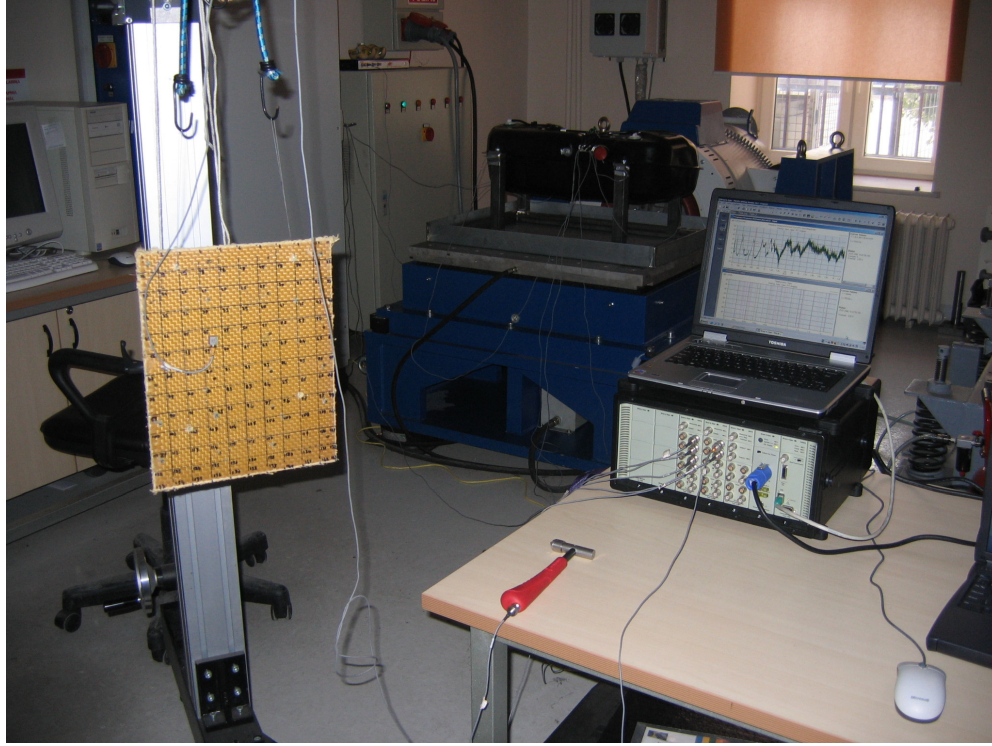
Şekil 6.1 : Deney numunesi.



Şekil 6.2 : Deney numunesinin yakından görünümü.

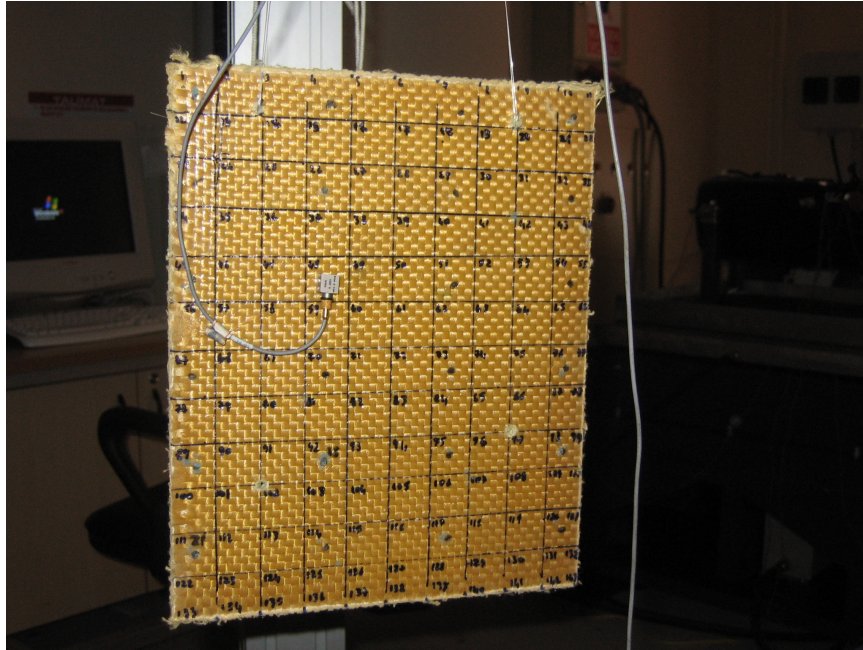
6.1 Deney Düzenegi

Deney düzenegi “şekil 6.3” de görüldüğü gibidir. Analizörden gelen verileri değerlendirmek için Bruel & Kjaer – Pulse LabShop programı kullanılmıştır. Buna göre numuneye deneysel çekiçle bir uyarı verilmiş ve ivme ölçer ile tüm doğal frekansları yakalayabilmek amacı ile, plakanın çeşitli noktalarından ölçümler alınmıştır.



Şekil 6.3 : Kenar sınır şartları serbest plaka için, deney düzeneği.

“Şekil 6.4” de görüldüğü gibi, plakanın dört kenarından serbest sınır şartını sağlamak amacı ile, misina ipi ile üst kısmından iki noktadan havada asılı kalmak kaydı ile tutturulmuştur.

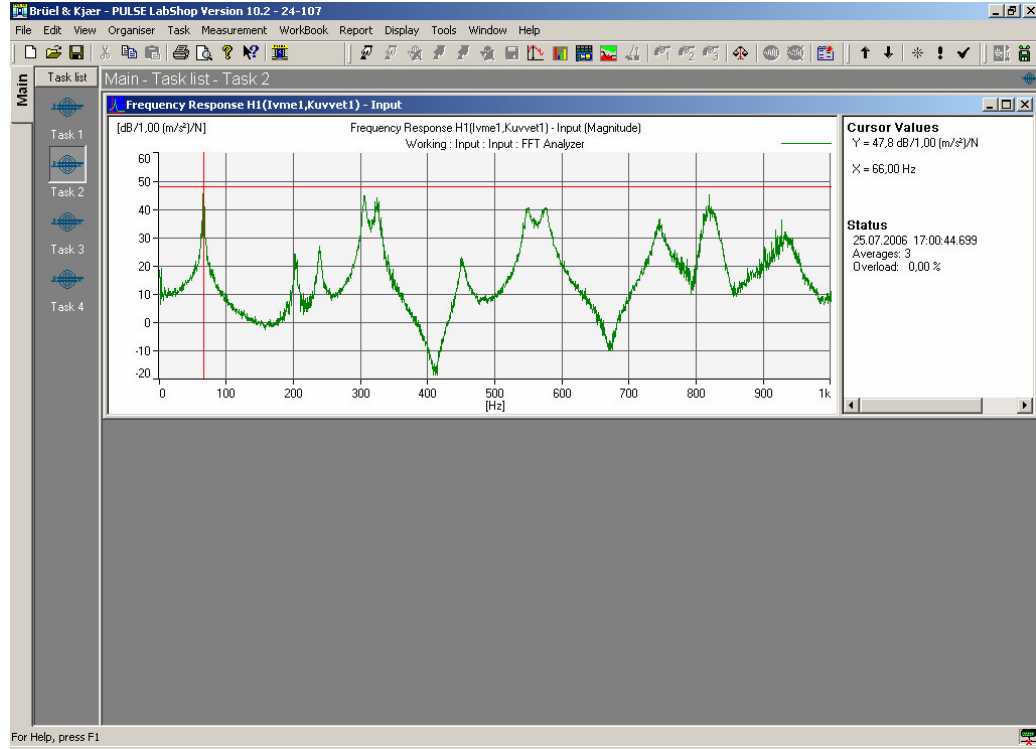


Şekil 6.4 : Deney numunesinin dört kenarından serbest tutturulması.

6.2 Deney Ölçüm Sonuçları

Pulse programında, plakanın frekans cevabı “şekil 6.5” deki gibi elde edilmiştir. “Şekil 6.5” e göre plakanın doğal frekansları grafiğin tepe yaptığı noktalardır. Ansys programında ve deneysel çalışmada elde edilen ilk 6 mod frekansı “tablo 6.2” de karşılaştırılmıştır. Tablodaki farklar “denklem 6.1” de ki gibi hesaplanmıştır. Ayrıca “şekil 6.6” da Ansys programında elde edilen ilk 6 mod şekli yer almaktadır.

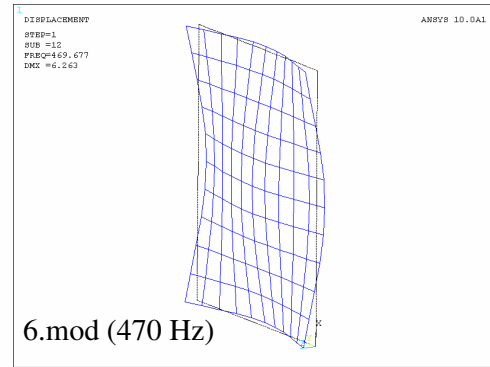
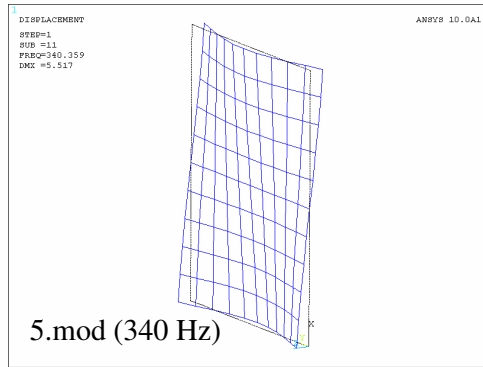
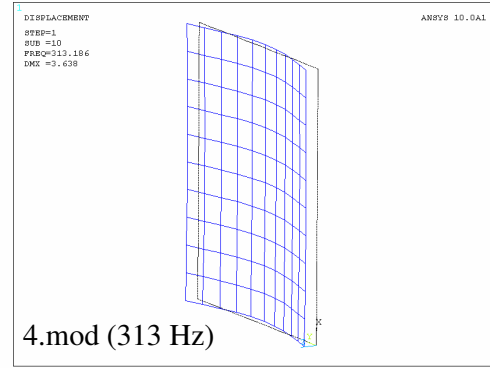
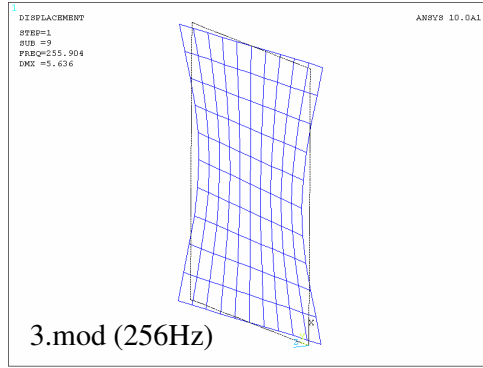
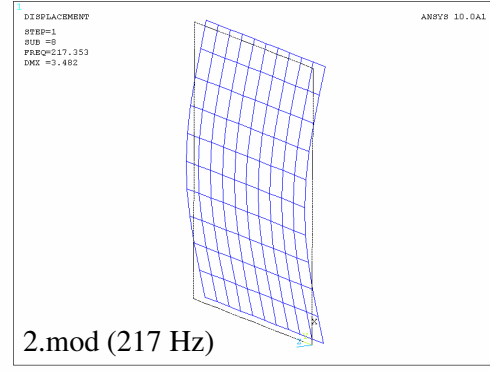
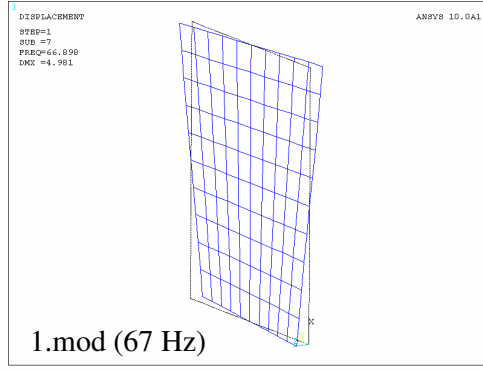
$$Fark = \frac{(Deneyssel - Ansys)}{Deneyssel} \times 100 \quad (6.1)$$



Şekil 6.5 : Plakanın frekans cevabı (Brüel & Kjaer Pulse programı).

Tablo 6.2 : Aramid/Epoxy Kevlar plakanın deneysel sonuçları ile Ansys sonuçlarının karşılaştırılması.

Mod	Deneyssel (Hz)	Ansys (Hz)	Fark (%)
1	66	67	-1,5
2	202	217	-7,4
3	234	256	-9,4
4	305	313	-2,6
5	325	340	-4,6
6	449	470	-4,7



Şekil 6.6 : Plakanın Ansys'te elde edilen mod şekilleri ve frekansları.

Bu kısımda yapılan analizlerin Ansys kodları ekte verilmiştir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, düzlem gerilme durumunda olduğu kabul edilen simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit plakların titreşim analizleri, mukayese fonksiyonları olarak trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak, Rayleigh – Ritz yöntemi ile yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Ansys sonlu elemanlar paket programı ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yapılan kabullere göre Ritz yöntemi ile elde edilen Hz boyutundaki frekans değerleri, plakanın kenar – kalınlık oranının artması ile doğru orantılı olarak azalmıştır. Frekans değerleri boyutsuzlaştırıldığında ise formülasyondan dolayı, boyutsuz frekans parametresi ($\bar{f}_i$) sabit kalmıştır. Kenar – kalınlık oranının (L_y/h) 100 olması durumunda, Ansys de elde edilen sonuçlarla, klasik plak teorisi çerçevesinde, Ritz yöntemi ile elde edilen sonuçlar arasındaki farkın %0.7 ye kadar düştüğü gözlenmiştir.

Kenar – kalınlık oranı (L_y/h), malzeme anizotropisi (E_1/E_2), elyaf yönlenme açıları (θ°), kenar uzunlukları oranı (L_x/L_y), kenar sınır şartları ve katman sayısı gibi plaka parametrelerindeki değişimin, boyutsuz temel frekans parametreleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Kenar – kalınlık oranının ve malzeme anizotropisinin artması, frekans parametrelerinin de artmasına sebep olmuştur. Ayrıca, elyaf yönlenme açısının artması ile de frekans parametresinin arttığı ve 45° de en yüksek değere ulaştığı tespit edilmiştir. Kenar sınır şartlarının durumunun frekans parametreleri üzerinde büyük etkisi olduğu gözlenmiştir. Kenar sınır şartlarında kısıtların artması ile, frekans parametrelerinde artış meydana gelmiştir. Kenar uzunluk oranlarının artmasının, frekans parametrelerinde düşüşe sebep olduğu belirlenmiştir. Simetrik dik katmanlı plakalarda, kalınlığı sabit alarak, katman sayısındaki artışın temel frekans parametresi üzerinde etkisiz olduğu, ancak temel frekans harici diğer modlarda artışa neden olduğu saptanmıştır. Ancak bu artışın 4'ün üzerindeki katman sayılarında oldukça yavaş olduğu belirlenmiştir.

Bu çalışma kapsamında ayrıca, aramid/epoxy kevlar malzemeden imal edilmiş bir plakanın deneysel ortamda doğal frekansları ölçülmüştür. Deney numunesi Ansys programında modellenmiş ve titreşim analizi yapılmıştır. Elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılmış ve sonlu elemanlar programında bulunan sonuçların tutarlı olduğu teyit edilmiştir.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda;

- Plakanın titreşim analizi, kayma deformasyon teorileri çerçevesinde incelenebilir ve plaka kalınlığının artması ile de daha gerçekçi sonuçlar elde edilebilir.
- Antisimetrik tabaka dizilimine sahip plakaların titreşim analizleri yapılabilir.
- Deneysel sonuçlara daha da yaklaşmak amacı ile sönüm etkileri dahil edilebilir ve nonlinear analizler yapılabilir.
- Plaka geometrisinde değişikliğe gidilerek, farklı sınır şartlarında da plakanın titreşim analizi yapılabilir.
- Aynı plaka içerisinde farklı malzemelerden modellenmiş katmanların kullanıldığı sandviç levhaların titreşim analizleri yapıp doğal frekanslardaki değişimler incelenebilir.

Bu çalışma, yukarıda bahsi geçen, daha sonra yapılabilecek çalışmalara temel oluşturacak ve elde edilen sonuçlar kıyaslama olanağı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Ansys**, Ansys, Inc., 2006, www.ansys.com
- [2] **Kollar, L.P. and Springer G.S.**, 2003. Mechanics of Composite Structures, Cambridge University Press, New York.
- [3] **Whitney, J.M.**, 1987. Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates, TECHNOMIC Publishing CO., INC., Lancaster, Basel.
- [4] **Reddy, J.N.**, 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells : Theory and Analysis, CRC Pres, Boca Raton London New York Washington, D.C.
- [5] **Chen, X.L., Liu, G.R., Lim, S.P.**, 2003. An Element Free Galerkin Method For The Free Vibration Analysis of Composite Laminates of Complicated Shape, *Composite Structures*, **59**, 279-289.
- [6] **Chen, W.Q., Lüe, C.F.**, 2005. 3D Free Vibration Analysis of Cross-ply Laminated Plates With One Pair of Opposite Edges Simply Supported, *Composite Structures*, **69**, 77-87.
- [7] **Aydoğdu, M. ve TIMARCI, T.**, 2004, Düzlem-İçi Yüklenmiş Basit Destekli Simetrik Katmanlı Dikdörtgen Kompozit İnce Plakların Burkulma ve Titreşimi, *Trakya Univ J Sci*, **5(2)**, 167-177.
- [8] **Khdeir, A.A., Reddy, J.N.**, 1999. Free Vibrations of Laminated Composite Plates Using Second-Order Shear Deformation Theory, *Computers & Structures*, **71**, 617-626.
- [9] **Meirovitch, L.**, 1997. Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- [10] **Ip, K.H., Tse P.C. and Lai T.C.**, 1998. Material Characterization For Orthotropic Shells Using Modal Analysis and Rayleigh-Ritz Models, *Composites Part B*, **29B**, 397-409.
- [11] **Bambill, D.V., Felix, D.H., Rossit, C.A.**, 2005. Natural Frequencies of Thin Rectangular Plates With Hole or Orthotropic “Patches” Carrying an Elastically Mounted Mass, *International Journal of Solids and Structures*, Article in Press.
- [12] **Latheswary, S., Valsarajan, K.V., Rao, Y.V.K.S.**, 2004. Free Vibration Analysis of Laminated Plates Using Higher-Order Shear Deformation Theory, *IE(I) Journal-AS*, **85**, 18-24.
- [13] **MathCad**, Mathsoft Engineering & Education, Inc., 2006, www.mathcad.com

- [14] **Manna, M.C.**, 2005. Free Vibration Analysis of Isotropic Rectangular Plates Using a High-Order Triangular Finite Element with Shear, *Journal of Sound and Vibration*, **281**, 235-259.

EKLER

ANSYS KODLARI

```
/BATCH
/COM,ANSYS RELEASE 10.0A1 UP20060105
!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
/COM,
/COM,Preferences for GUI filtering have been set to display:
/COM, Structural
!*
/PREP7
!*
ET,1,SHELL99
!*
RECTNG,0,0.3,0,0.25,
FLST,5,4,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-4
CM,_Y,LINE
LSEL,, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,10, , , , ,1
!*
MSHKEY,0
CM,_Y,AREA
ASEL,, , , , 1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,76e9
MPDATA,EY,1,,5.5e9
MPDATA,EZ,1,,5.5e9
```

```

MPDATA,PRXY,1,,0.34
MPDATA,PRYZ,1,,
MPDATA,PRXZ,1,,
MPDATA,GXY,1,,2.3e9
MPDATA,GYZ,1,,2e9
MPDATA,GXZ,1,,2.3e9
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,1295
*SET,_RC_SET,1,
R,1
!*
RMODIF,1,1,6,0,0,0,0,0
!*
RMODIF,1,13,1,0,0.0035/6,1,90,0.0035/6,
RMODIF,1,19,1,0,0.0035/6,1,90,0.0035/6,
RMODIF,1,25,1,0,0.0035/6,1,90,0.0035/6,
!*
!*
FINISH
/SOL
!*
ANTYPE,2
!*
MSAVE,0
!*
MODOPT,LANB,15
EQSLV,SPAR
MXPAND,15,, ,0
LUMPM,0
PSTRES,0
!*
MODOPT,LANB,15,0,0,,OFF
FINISH
/SOLU
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST

```

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Antalya’da doğan Mehmet ÖZAKINCI, ilk, orta ve lise tahsilini Antalya’da yapmış, yükseköğretimini Ege Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümünde tamamlamıştır. 2003’de İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümünde Yüksek Lisans çalışmalarına başlamıştır.