

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TIMOSHENKO ÇUBUK KURAMINA GÖRE, DEĞİŞKEN  
KESİTLİ, SİLİNDİRİK OLMAYAN, HELİSEL ÇUBUKLARIN  
KARIŞIK SONLU ELEMANLAR METODU İLE STATİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İnş. Müh. Suat BAYAR**

**Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ**

**ŞUBAT 2007**

**TIMOSHENKO ÇUBUK KURAMINA GÖRE, DEĞİŞKEN  
KESİTLİ, SİLİNDİRİK OLMAYAN, HELİSEL ÇUBUKLARIN  
KARIŞIK SONLU ELEMANLAR METODU İLE STATİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İnş. Müh. Suat BAYAR  
(501031908)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2006  
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 2007**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet H. OMURTAG (İ.T.Ü.)  
Diğer Jüri Üyeleri : Y.Doç.Dr. Konuralp GİRGİN (İ.T.Ü.)  
Doç.Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN (İ.T.Ü.)**

**ŞUBAT 2007**

## ÖNSÖZ

Böyle bir çalışmayı gerçekleştirebilmem için bana fırsat tanıyan ve yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG'a,

Bu çalışma boyunca her türlü aşamada benden yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Konuralp GİRGİN'e,

aileme ve dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

*Aralık, 2006*

Suat BAYAR

## İÇİNDEKİLER

|                                                        |             |
|--------------------------------------------------------|-------------|
| <b>KISALTMALAR</b>                                     | <b>v</b>    |
| <b>TABLO LİSTESİ</b>                                   | <b>vi</b>   |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b>                                   | <b>vii</b>  |
| <b>SEMBOL LİSTESİ</b>                                  | <b>viii</b> |
| <b>ÖZET</b>                                            | <b>ix</b>   |
| <b>SUMMARY</b>                                         | <b>xii</b>  |
| <br>                                                   |             |
| <b>1. GİRİŞ</b>                                        | <b>1</b>    |
| 1.1. Konu                                              | 1           |
| 1.2. Helisel Çubuk Sistemler Üstüne Yapılan Çalışmalar | 1           |
| <br>                                                   |             |
| <b>2. ELASTİK HELİSEL ÇUBUK KURAMI</b>                 | <b>3</b>    |
| 2.1. Varsayımlar                                       | 3           |
| 2.2. Helis Geometrisi                                  | 3           |
| 2.3. Alan Denklemleri                                  | 5           |
| 2.3.1. Denge Denklemleri                               | 6           |
| 2.3.2. Kinematik Denklemler                            | 7           |
| 2.3.3. Bünye Bağlılıları                               | 8           |
| <br>                                                   |             |
| <b>3. HELİS FONKSİYONELİ</b>                           | <b>9</b>    |
| 3.1. Fonksiyonel                                       | 9           |
| <br>                                                   |             |
| <b>4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU</b>                    | <b>11</b>   |
| 4.1. Yaklaşım Fonksiyonları                            | 11          |
| 4.2. Eleman Matrisi                                    | 17          |
| <br>                                                   |             |
| <b>5. SAYISAL ÖRNEKLER</b>                             | <b>19</b>   |
| 5.1. Değişken Tavan Yarıçaplı Helis Problemi           | 19          |
| 5.1.1. Örnek-1: 20 Eleman                              | 19          |
| 5.1.2. Örnek-2: 50 Eleman                              | 23          |
| 5.1.3. Örnek-3: 100 Eleman                             | 27          |
| 5.2. Değişken Dairesel Kesit Problemi                  | 31          |
| 5.2.1. Örnek-4: Tur Sayısı 1                           | 31          |
| 5.2.2. Örnek-5: Tur Sayısı 5                           | 33          |
| 5.2.3. Örnek-5: Tur Sayısı 10                          | 35          |

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| <b>6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA</b> | <b>38</b> |
| <b>KAYNAKLAR</b>               | <b>39</b> |
| <b>EKLER</b>                   | <b>42</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                | <b>82</b> |

## KISALTMALAR

|             |                           |
|-------------|---------------------------|
| <b>FEM</b>  | : Sonlu Elemanlar Yöntemi |
| <b>Bkz.</b> | : Bakınız                 |
| <b>Örn.</b> | : Örnek                   |

## TABLO LİSTESİ

|                                                                                                 | <u>Sayfa No</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <b>Tablo 4.1.</b> Çeşitli Kesit Geometrileri İçin<br>Kayma Gerilmesi Katsayıları .....          | 12              |
| <b>Tablo 4.2.</b> Kesme Kuvveti Formülleri .....                                                | 13              |
| <b>Tablo 4.3.</b> Çeşitli Kesit Geometrileri İçin<br>Alan ve Atalet Momenti Değerleri.....      | 15              |
| <b>Tablo 5.1.</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 1) ..... | 20              |
| <b>Tablo 5.2.</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 1) ..... | 21              |
| <b>Tablo 5.3.</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 1) ..... | 21              |
| <b>Tablo 5.4.</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 1) ..... | 21              |
| <b>Tablo 5.5.</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 2) ..... | 24              |
| <b>Tablo 5.6.</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 2) ..... | 24              |
| <b>Tablo 5.7.</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 2) ..... | 24              |
| <b>Tablo 5.8.</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 2) ..... | 25              |
| <b>Tablo 5.9.</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 3) ..... | 27              |
| <b>Tablo 5.10</b> <i>A</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 3) ..... | 28              |
| <b>Tablo 5.11</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Kuvvet Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 3) ..... | 28              |
| <b>Tablo 5.12</b> <i>B</i> Mesnedi İçin Moment Değerlerinin<br>Karşılaştırılması (Örn. 3) ..... | 28              |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                   | <u>Sayfa No</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Şekil 2.1 : Helis Geometrisi .....                                                | 3               |
| Şekil 2.2 : Kesit Tesirleri.....                                                  | 6               |
| Şekil 2.3 : Şekil Değiştirmeler.....                                              | 7               |
| Şekil 3.1 : Değişkenler.....                                                      | 10              |
| Şekil 4.1 : İki Düğüm Noktalı Helis Çubuk Elemanı.....                            | 11              |
| Şekil 4.2 : Değişken Kesitte Eleman Rijitlik Matrisi.....                         | 18              |
| Şekil 5.1 : Statik Analiz (Örn. 1).....                                           | 19              |
| Şekil 5.2 : Örnek (1) İçin Silindirik ve Konik Helisler.....                      | 20              |
| Şekil 5.3 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 1) .....  | 22              |
| Şekil 5.4 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 1) .....  | 22              |
| Şekil 5.5 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 1) .....  | 23              |
| Şekil 5.6 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 2) .....  | 25              |
| Şekil 5.7 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 2) .....  | 26              |
| Şekil 5.8 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 2) .....  | 26              |
| Şekil 5.9 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3) .....  | 29              |
| Şekil 5.10 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3) ..... | 29              |
| Şekil 5.11 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3) ..... | 30              |
| Şekil 5.12 : Statik Analiz (Örn. 4) .....                                         | 31              |
| Şekil 5.13 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 4) ..... | 32              |
| Şekil 5.14 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 4) ..... | 32              |
| Şekil 5.15 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 4) ..... | 33              |
| Şekil 5.16 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 5) ..... | 34              |
| Şekil 5.17 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 5) ..... | 34              |
| Şekil 5.18 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 5) ..... | 35              |
| Şekil 5.19 : $M_t$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 6) ..... | 36              |
| Şekil 5.20 : $M_n$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 6) ..... | 36              |
| Şekil 5.21 : $M_b$ burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 6) ..... | 37              |

## SEMBOL LİSTESİ

|                                                  |                                                                      |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <b>T, M</b>                                      | : Kuvvet ve moment vektörleri                                        |
| <b>q, m</b>                                      | : Yayılı dış kuvvet ve yayılı dış kuvvet çifti                       |
| <b><math>\gamma, \omega</math></b>               | : Birim kayma açısı vektörü ve birim dönme vektörü                   |
| <b>u, <math>\Omega</math></b>                    | : Ötelenme vektörü ve dönme vektörü                                  |
| <b>s</b>                                         | : Yay boyunca ark uzunluğu                                           |
| <b>C, D</b>                                      | : Kayma rijitlik tansörü, dönme rijitlik tansörü                     |
| <b>t, n, b</b>                                   | : Frenet birim vektörleri                                            |
| <b>i, j, k</b>                                   | : Kartezyen birim vektörleri                                         |
| <b>r</b>                                         | : Yer vektörü                                                        |
| <b><math>u_t, u_n, u_b</math></b>                | : Frenet koordinatlarında yer değiştirmeler                          |
| <b><math>\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b</math></b> | : Frenet koordinatlarında dönmeler                                   |
| <b><math>T_t, T_n, T_b</math></b>                | : Frenet koordinatlarında kuvvetler                                  |
| <b><math>M_t, M_n, M_b</math></b>                | : Frenet koordinatlarında momentler                                  |
| <b><math>I_t, I_n, I_b</math></b>                | : Frenet koordinatlarında eksenlere göre eylemsizlik momentleri      |
| <b><math>\chi, \tau, p, \alpha</math></b>        | : Helisin eğriliği, burulması, birim açıda adımı ve eğimi            |
| <b><math>E, \nu, G</math></b>                    | : Elastisite modülü, poisson oranı, kayma modülü                     |
| <b><math>A, k'</math></b>                        | : Çubuk kesit alanı, kayma katsayısı                                 |
| <b><math>b, h, r</math></b>                      | : Dikdörtgen kesitin genişliği, yüksekliği ve daire kesitin yarıçapı |
| <b>H</b>                                         | : Helisin uç noktaları arasındaki düşey mesafe                       |
| <b><math>R_1, R_0</math></b>                     | : Helisin tavan yarıçapı, taban yarıçapı                             |
| <b><math>\varphi</math></b>                      | : Helisin yatayda taban açısı                                        |
| <b>n</b>                                         | : Helisin tur sayısı                                                 |
| <b><math>\Psi_i</math></b>                       | : Yaklaşım fonksiyonları                                             |
| <b>V</b>                                         | : Hacim                                                              |
| <b><math>[k]^e</math></b>                        | : Değişken kesitte sonlu eleman matrisi                              |
| <b>[K]</b>                                       | : Sistem matrisi                                                     |

## ÖZET

### Çubuk Geometrisi

Bu araştırmada ele alınacak problemler uzay çubuk ortamından oluşmaktadır. Silindirik helisel çubukta çubuk eksenine bağlı olarak hareketli  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  ile sabit takım  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  arasındaki dönüşüm bağıntıları:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

ya da,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

şeklinde. Burada  $R$  silindir yarıçapı,  $p$  birim açıda helisin adım yüksekliği,  $\varphi$   $x$  ekseninden ölçülen açı ve

$$c(\varphi) = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} \, d\varphi$$

dir. Eğer helisin eğimine  $\alpha$  dersek, helisin adımı,

$$p = R \tan(\alpha)$$

biçiminde ifade edilir.

### Alan Denklemleri ve Fonksiyonel

Bu araştırmada çubuk malzemesinin elastik, homojen ve izotrop olduğu; birinci mertebe kuramının geçerli olduğu; çubuk kesitinde kayma ve geometrik merkezlerin çakıştığı; kesitin asal eksenleri ile çubuk eksenine bağlı  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  eksenlerinin aynı olduğu varsayılmıştır. Böylece çubuk eksenini üzerindeki bir noktanın yer değiştirmesi ile buradaki kesit dönmesi,

$$\mathbf{u}(s) = u_t + u_n + u_b$$

$$\mathbf{\Omega}(s) = \mathbf{\Omega}_t + \mathbf{\Omega}_n + \mathbf{\Omega}_b$$

dir. Burada  $s$  yay boyunca ark uzunluğudur. Gerilme bileşkeleri,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= T_t + T_n + T_b \\ \mathbf{M}(s) &= M_t + M_n + M_b \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

olarak gösterilir. (A.3) de  $\mathbf{T}$  kuvvetleri,  $\mathbf{M}$  momentleri gösterir. Şu halde uzaysal çubuğa ait denge denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

dir. Kinematik denklemler,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

olup bünye bağıntıları,

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{T} + \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

dir. (A.6) da kaymaya ve dönmeye karşı gelen rijitliklerin tersi:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & I/EA \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

dir. Daha sonra yukarıdaki alan denklemleri ve fonksiyonel analizi yöntemi kullanılarak karışık sonlu eleman formülasyonu için uygun yapıdaki fonksiyonel:

$$I(\mathbf{y}) = - \left[ \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[ \frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] - \frac{1}{2} [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T}] + [\mathbf{q}, \mathbf{u}] + [\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}] + \left[ (\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u} \right]_{\sigma} + \left[ (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega} \right]_{\sigma} + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_{\varepsilon} + [\hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{M}]_{\varepsilon} \quad (A.8)$$

biçiminde elde edilmiştir. Denklem (A.8) de,  $\varepsilon$  ve  $\sigma$  alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını tanımlamaktadır.

### Sonlu Elemanlar Formülasyonu

$\mathbf{u}$  yerdeğiştirme,  $\mathbf{\Omega}$  dönme,  $\mathbf{M}$  moment ve  $\mathbf{T}$  kesme kuvveti değerleri bilinmeyenler olup üç boyutlu koordinat takımında her düğüm noktasında 12 adet bilinmeyen bulunmaktadır. Bunlar

$$u_i = \sum_{j=1}^2 \psi_i \psi_j, \dots,$$

olacak biçimde doğrusal verilmiş yaklaşım fonksiyonları kullanılarak,

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{L}(L - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{\xi}{L} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \xi \leq L) \quad (A.9)$$

ile ifade edilecektir. (A.9) da  $L$  sonlu çubuk elemanının boyunu ifade eder. Böylece çubuk elemanı içinde herhangi bir noktadaki değişkenler,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 \\ \mathbf{\Omega} &= \Omega_1 \psi_1 + \Omega_2 \psi_2 \\ \mathbf{T} &= T_1 \psi_1 + T_2 \psi_2 \\ \mathbf{M} &= M_1 \psi_1 + M_2 \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (A.10)$$

biçiminde tanımlanır..

## SUMMARY

### The Rod Geometry

The rod problems considered in this study are in the three dimensional space. The necessary transformations between unit vectors for Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  and Cartesian  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  system are:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

and the inverse transformations are:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

where  $R$  is the radius of base circle,  $p$  represents step for unit angle,  $\varphi$  shows the dynamic rotation angle. Hence

$$c(\varphi) = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} \, d\varphi$$

Since  $\alpha$  shows the slope of the helix,  $p$  is defined as

$$p = R \tan(\alpha)$$

### Field Equations and Functional

In this study several assumptions are made such as the rod material is ideally elastic, homogeneous and isotropic; there is one-to-one relationship between the state of stress and state of strain; the primary axis of the cross section of the rod coincides with the  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  coordinate axis. With these approaches, displacement and rotation of any point on the rod axis can be defined as:

$$\mathbf{u}(s) = u_t + u_n + u_b$$

$$\mathbf{\Omega}(s) = \Omega_t + \Omega_n + \Omega_b$$

where  $s$  is the arc length along the curve. Similarly, force and moment resultants can be written as:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= T_t + T_n + T_b \\ \mathbf{M}(s) &= M_t + M_n + M_b \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

where  $\mathbf{T}$  shows the force vector and  $\mathbf{M}$  shows the moment vector. At this point equations of equilibrium of the space rod is defined as:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Kinematical Equations are written as:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \gamma &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

and Constitutive Equations are written as:

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{T} + \mathbf{C}\gamma &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

In (A.6) the inverses of shearing and rotating rigidities are defined as:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & I/EA \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

Afterwards, by using the field equations (A.4), (A.5), (A.6) and functional analysis method the following functional has been obtained:

$$\left. \begin{aligned} I(\mathbf{y}) &= - \left[ \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[ \frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T}] + [\mathbf{q}, \mathbf{u}] + [\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}] \\ &\quad + \left[ (\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u} \right]_{\sigma} + \left[ (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega} \right]_{\sigma} + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_{\varepsilon} + [\hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{M}]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

In equation (A.8), the suscripts  $\varepsilon$  and  $\sigma$  represent the geometric and dynamic boundary conditions.

### The Finite Element Formulation:

$\mathbf{u}$  displacement,  $\mathbf{\Omega}$  rotation,  $\mathbf{M}$  moment and  $\mathbf{T}$  internal force vectors are described as unknowns in (A.8) and the number of unknowns is 12 at each node of the rod in three dimensional coordinate system. These 12 unknowns are represented with interpolation functions like  $u_t = \sum_{i=1}^2 \psi_i \psi_j, \dots$ . For the finite element formulation linear interpolation functions are used:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{L}(L - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{\xi}{L} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \xi \leq L) \quad (\text{A.9})$$

where  $L$  is the rod finite element length. Thus, the variables at any point of the rod axis are expressed as:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 \\ \mathbf{\Omega} &= \Omega_1 \psi_1 + \Omega_2 \psi_2 \\ \mathbf{T} &= T_1 \psi_1 + T_2 \psi_2 \\ \mathbf{M} &= M_1 \psi_1 + M_2 \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

## **1. GİRİŞ**

### **1.1 Konu**

Mühendislik projelerinde, helisel taşıyıcı sistemler sıkça karşımıza çıkmaktadır. O nedenle, belirtilen taşıyıcıların davranışlarının basit ve doğru bir biçimde belirlenmesi çok önemlidir. Helisel çubuklara ait eleman matrislerinin elde edilebilmesi için yapılan çeşitli çalışmalar; enerji ( Castigliano teoremi, Virtüel iş ilkesi), sonlu elemanlar gibi yöntemlerden yararlanılır. Çalışmaların çoğunluğunda, düzlem içinde ve düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlem daire çubuklara ait sonlu eleman matrisi elde edilmiş; ya da esneklik matrisinden rijitlik matrisine geçilmiştir.

### **1.2 Helisel Çubuk Sistemler Üstüne Yapılan Çalışmalar**

HOLMES, (1957) tarafından, iki ucu ankastre, simetrik yüklü helisel çubuklar için genel denklemleri kullanarak bir çözüm önerilmiştir. Minimum şekil değiştirme enerjisi prensibinden hareketle iki ucu ankastre helisel çubuklarda, SCORDELIS, (1960) helis açıklığındaki bilinmeyenlerin hesaplanabilmesi için tablolar sunmuştur.

Taşıma matrisi yöntemiyle CİNEMRE, (1960) statik analiz, HAKTANIR ve KIRAL, (1990) hem statik hem de dinamik analiz için rijitlik matrisleri geliştirmişlerdir. ABDULBAKİ-SHUKAİR, (1973) ise bir yaklaşık çözüm yöntemi önermişlerdir. Virtüel iş prensibini kullanarak PANAYOTUNAKOS ve THEOCARİS, (1979) bir fleksibilite matrisi geliştirmişlerdir. STEFANOÜ, (1984) ise iki ucu ankastre ve düzgün yayılı yükleme altındaki betonarme helisel merdivenler için abaklar vermiştir. HAKTANIR ve KIRAL, (1989) helisel merdivenlerin statik davranışını rijitlik matrisi metodu ile incelemiş, daha sonra helisel merdivenlerin zorlanmış titreşim problemini, yayılı kütle halinde taşıma matrisi yöntemi ve Laplace dönüşümü; ayrıca toplanmış kütle varsayımı ile, sonlu eleman formülasyonu ve direk integrasyon yöntemleri kullanarak ayrı ayrı ele almışlardır (HAKTANIR ve KIRAL, 1990). OMURTAG-AKÖZ, (1992) ise helisel yayların statik hesabı için karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak başka bir modeli ortaya koymuşlardır. Helis eksenli merdivenlerin dinamik analizi ile ilgili çalışmalar az sayıda olmakla beraber, literatürde özellikle incelenen sistemle benzer geometriye sahip olan helisel yay elemanlarının dinamik davranışları ile ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır .

NAGAYA, TAKEDA ve NAKATA, (1986) tarafından yayların serbest titreşimleri ile ilgili bir araştırma yapılarak taşıma matrisi yöntemi ile bulunan sonuçlar yapılan deneylerle karşılaştırılmıştır. YILDIRIM, (1996) tarafından taşıma matrisi yöntemi kullanılarak yapılan çalışmada; helisin eğimi, sınır koşulları, tur sayısı, (silindir çapı / kesit çapı) gibi parametrelerdeki değişimlerin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkilerini incelenmiştir. Daha sonra YILDIRIM ve İnce (1997) aynı problemi silindirik olmayan sistemlerde rijitlik matrisi yöntemini kullanarak tekrar incelemiştir. YILDIRIM ve SANCAKTAR (2000) de yapmış olduğu çalışmada ise kompozit malzemeye sahip elemanların serbest titreşim frekansını analiz etmişlerdir. BECKER ve Ark., (2002) helisel yayların serbest titreşim frekansları ile ilgili bir başka çalışma sunarak serbest titreşim frekansına etki eden parametreleri analiz etmişlerdir. Son olarak YILDIRIM, (2004) kompozit yay elemanlarının davranışını değişik parametreler altında incelemiştir.

Pratik mühendislik uygulamalarında hesabı istenen kuvvet ve moment türü fiziksel büyüklüklerin, yer değiştirme türü elemanlarda bir geri yerleştirme işlemi sonucu yer değiştirmelerden türetiliyor olması, bu sonuçların hassasiyeti üzerinde belli ölçüde etkili olmaktadır. O nedenle karışık sonlu eleman modellemesi ile daha hassas kuvvet ve moment türü büyüklüklerin hesaplanması mümkün olabilmektedir. GATEAUX diferansiyelinin kullanılmasının sağladığı üstünlükler AKÖZ ve Ark., (1991), OMURTAG-AKÖZ, (1997) de geniş olarak bulunabilir. Bu çalışmada değişken kesitli, silindirik olmayan helisel çubukların karışık sonlu eleman yöntemiyle statik analizi yapılmıştır.

Boyutlandırmada, mühendisler açısından temel büyüklükler olan kuvvetler ve momentler doğruya en yakın bir biçimde belirlenmelidir. Karışık sonlu eleman yönteminin üstünlüğü işte bu noktada ortaya çıkmaktadır, çünkü yerdeğıştirmeler ile dönmelerin yanı sıra, kuvvetlerle momentler de elemandaki bilinmeyen büyüklüklerdir. Böylelikle yerdeğıştirmeler, dönmeler, kuvvetler ve momentler birbirlerine benzer yakınsaklıklarda elde edilir. Bu çalışmada, karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak helisel çubukların statik analizi yapılmıştır. Bunun için FORTRAN-90 dilinde yazılmış bir bilgisayar programı kullanılmıştır; programın doğruluğu ve hassasiyeti daha önceden bilinen sonuçlarla karşılaştırılarak kanıtlanmış olduğundan, burada doğrulama çalışması yapılmamıştır (OMURTAG ve AKÖZ, 1992).Kullanılan HL elemanı iki düğüm noktalı ve  $2 \times 12$  serbestlik dereceli olup, Timoshenko kiriş kuramına uygun yapıda kayma etkisi de gözönüne alınmıştır.

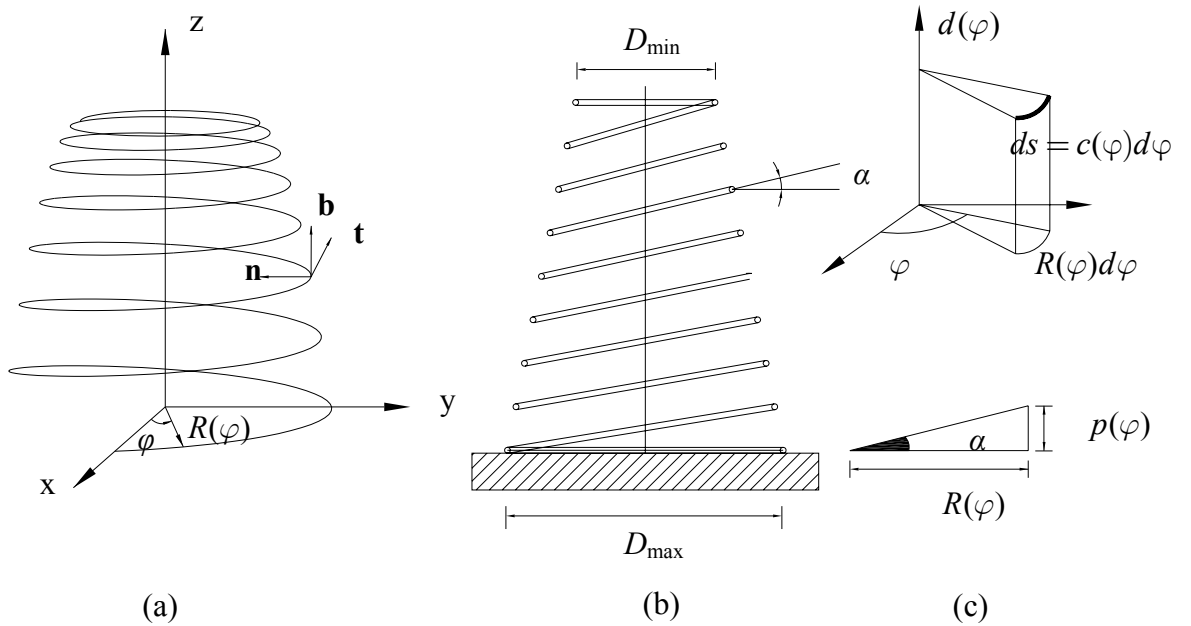
## 2. ELASTİK HELİSEL ÇUBUK KURAMI

### 2.1 Varsayımlar

Bu çalışmanın kapsamında elastik, homojen ve izotrop çubuklar incelenmiştir. Ayrıca yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu birinci mertbe kuramı içinde kalınmıştır.

Gerilme hesaplarını kolaylaştırmak amacı ile çubuk adını verdiğimiz cismin enine olan iki boyutunun da çubuk boyu ile eğrilikler yanında çok küçük olduğu varsayılarak hesaplamalar yapılmıştır.

### 2.2 Helis Geometrisi



Şekil 2.1 – Helis Geometrisi

Bu çalışmada merdiven ve benzeri tarzda konstrüksiyon için önemli olan değişken taban yarıçapına sahip helisel sistemlerin hesabı ele alınmıştır. Çubuk eksenini Şekil 2.1.a da verilen  $\varphi$  açısı boyunca değişen dairesel yarıçapa sahip helis olsun.

Taban dairesi üzerinden ölçülen ve  $x$  ekseninden itibaren sayılan  $\varphi$  açısı parametre olarak seçilirse helisin parametrik denklemi:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\varphi) \cos(\varphi) \\ y &= R(\varphi) \sin(\varphi) \\ z &= p(\varphi) \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

olarak bulunur. Burada  $R(\varphi)$  helisin sarıldığı silindirin yarıçapı,  $p(\varphi)$  ise uzunluk boyutunda olup helisin birim radyana karşı gelen yükselme değeridir ve  $R(\varphi)$  ile arasında,

$$p(\varphi) = R(\varphi) \tan(\alpha) \quad (2.2)$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Şekil 2.1.b-c). Burada  $\alpha$  helisin eğimidir.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vektörleri sırasıyla  $x, y$  ve  $z$  eksenleri üzerindeki birim vektörler olmak üzere helisel sistemdeki herhangi bir noktanın konumunu ifade eden  $\mathbf{r}$  vektörü şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.3)$$

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  Frenet birim vektörleri üçlüsü,  $\mathbf{r}$  yer vektörüne diferansiyel bağımlı, çubuk eksenini boyunca değişen hareketli bir dik takımdır ve aralarında şu ilişki mevcuttur:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ \mathbf{n} &= \frac{d\mathbf{t}/ds}{\|d\mathbf{t}/ds\|} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Burada  $ds$  sonsuz küçük bir diferansiyel yay elemanı olup,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d\varphi = c(\varphi) d\varphi \quad (2.5)$$

şeklinde hesaplanır (Şekil 2.1.c). Geometrik dönüşüm formülleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (İNAN, 1996):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \chi \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\chi \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Burada

$\chi$ : helisin eğriliği

$\tau$ : helisin burulma eğriliği

olarak adlandırılır. Bu büyüklükler konik heliste  $s$ 'ye bağlı olarak değişir.  $\chi$  eğriliği, çubuk eksenini düzlemi içinde doğrudan sapma miktarını,  $K$  eğriliği çubuk ekseninin düzlemden sapma miktarını gösterir. Silindirik helislerde ise  $R$  sabit olduğu için bu parametrelerde sabittir.  $\varphi$  ile aralarındaki ilişki ise:

$$\left. \begin{aligned} \chi(\varphi) &= \frac{R(\varphi)}{c^2(\varphi)} \\ \tau(\varphi) &= \frac{p(\varphi)}{c^2(\varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

şeklinde gösterilir.

Helisel çubuk kesit büyüklüklerinin fiziksel anlamının olduğu  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  hareketli takımı ile  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  sabit takımı arasında dönüşüm bağıntıları ise:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

ya da,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

şeklindedir (İNAN, 1996).

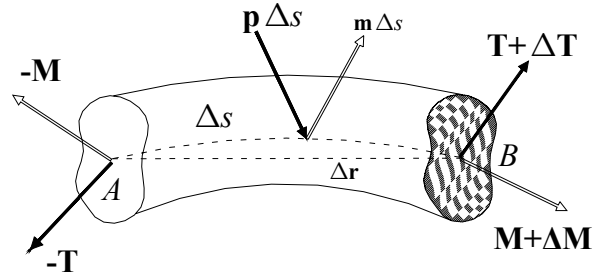
## 2.3 Alan Denklemleri

Bu çalışmada kullanılan denklemler için İNAN (1966) dan yararlanılmıştır.

### 2.3.1 Denge Denklemleri

Kesite tesir eden iç kuvvetlerin toplamı  $\mathbf{T}$  ile, bunların ağırlık merkezine taşınması durumunda katılması gereken kuvvet çifti  $\mathbf{M}$  ile gösterilir.

Bu fonksiyonların çubuk eksenini boyunca değişimi keyfi olmayıp dış kuvvetlere bağlıdır. Bunu elde etmek için  $\Delta s$  uzunluğunda bir çubuk elemanının üzerine ve kesit yüzlerine tesir eden kuvvetlerle dengede olduğu düşünülür (Bkz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2 – Kesit Tesirleri

Yay eksenini  $s$  boyunca yayılı dış kuvvetler  $\mathbf{p}$  ve yayılı dış momentler  $\mathbf{m}$  ise olmak üzere, denge denklemi ile A noktasına göre yazılacak moment denge denkleminde

$$\begin{aligned} -\mathbf{T} + \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} + \mathbf{p}\Delta s &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} + \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} + \mathbf{m}\Delta s + \Delta\mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemlerde gerekli kısaltmalar yapılarak limite geçilerek elastik çubuğun diferansiyel denge denklemleri:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

olarak elde edilir. Burada  $A$  çubuk kesit alanı,  $\mathbf{I}$  eylemsizlik momenti,  $\mathbf{u}$  dik kesitin ağırlık merkezindeki ötelenmesi,  $\mathbf{\Omega}$  ağırlık merkezi etrafındaki dönme vektörü olup, bunların açık halde gösterimi, Frenet koordinat takımında:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} \\ \mathbf{\Omega} &= \Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} \\ \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b} \\ \mathbf{M} &= M_t \mathbf{t} + M_n \mathbf{n} + M_b \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

dir.

### 2.3.2 Kinematik Denklemler:

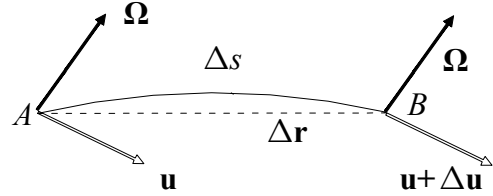
Kinematik denklemler yer ve şekil değiştirme için tarif edilen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\gamma$  ve  $\mathbf{\omega}$  gibi dört vektör fonksiyonu arasındaki bağıntıları ihtiva eder.  $\gamma$  birim kayma açısı vektörü ile  $\mathbf{u}$  ötelenme vektörü arasındaki ilişki:

$$\gamma = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \quad (2.12)$$

dir.  $\mathbf{\omega}$  birim dönme vektörü ile  $\mathbf{\Omega}$  dönme vektörü arasındaki ilişki ise:

$$\mathbf{\omega} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \quad (2.13)$$

biçimindedir. Çubuk ekseninde birbirine çok yakın iki nokta ele alalım (Şekil 2.3).  $B$  noktasının  $A$  noktasına göre yer değiştirmesini  $\Delta\mathbf{u}$  ile gösterelim. Bu durumda rölatif yerdeğiştirme  $\Delta\mathbf{u} = \gamma \Delta s + \mathbf{\Omega} \times \Delta\mathbf{r}$  bağıntısı ile tarif edilir. Taraflar  $\Delta s$  ile bölünüp limitler alınırsa



Şekil 2.3 – Şekil Değiştirmeler

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

den bağıntı,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \gamma + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{t} \Rightarrow \gamma = \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} \quad (2.14)$$

şeklini alır. (2.14) bağıntısı  $\mathbf{u}$  ile  $\mathbf{\Omega}$  arasındaki ilişkiyi göstermektedir ve *uygunluk şartı* olarak adlandırılır. (2.13) ve (2.14) denklemleri tekrar düzenlenirse kinematik bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{\omega} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \gamma &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Bünye Bağınıtları:

Bünye bağıntılarında; bir taraftan  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  kesit tesirleriyle, diğer taraftan  $\gamma$  ve  $\omega$  şekil değiştirmeyi tarif eden vektörler arasındaki ilişki kurulacaktır. Bu bağıntılar kurulurken çubuk deformasyonu sonucu meydana gelen yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu, kesit ağırlık ve kayma merkezlerinin çakıştığı, ayrıca çubuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu kabul edilecektir.

Hooke kanunu esasları kabul edilirse bünye bağıntıları,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} - \mathbf{C}\gamma &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M} - \mathbf{D}\omega &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. İstenirse yukarıdaki bağıntı küçük bir düzenlemeyle

$$\left. \begin{aligned}\gamma &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T} \\ \omega &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}\end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

yapısına getirilir.  $\mathbf{C}^{-1}$  kayma rijitliğinin,  $\mathbf{D}^{-1}$  ise dönme rijitlik tansörünün tersi olmak üzere, incelenecek çubuk elemanlarının malzeme özellikleri göz önünde tutularak şu şekilde hesaplanır:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EA \end{bmatrix} \\ \text{ve} \\ \mathbf{D}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix}\end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Burada  $E$  elastisite modülünü,  $G$  kayma modülünü,  $A$  kesit alanını,  $I$  eylemsizlik momentini ve  $k'$  kayma katsayısıdır.

### 3. HELİS FONKSİYONELİ

#### 3.1 Fonksiyonel

İNAN (1966) da verilmiş olan alan denklemleri ile değişkenler arasında gerçekleştirilecek iç çarpımı aşağıdaki yapıdadır:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \mathbf{p} &= \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \mathbf{u} \\ -\frac{d\mathbf{M}}{ds} - \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \mathbf{m} &= \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \mathbf{\Omega} \\ \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} &= \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \mathbf{M} \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{T} &= \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \mathbf{T} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

AKÖZ ve arkadaşları (1991) ile OMURTAG ve AKÖZ (1992) de belirtildiği gibi, Gateaux türevi ile potansiyel operatör kavramlarının (3.1) e uygulanması sonucunda, bazı varyasyonel işlemler gerçekleştirilir. Bunun nihayetinde helisel çubukların statik analizi amacıyla elde edilen fonksiyonel

$$\left. \begin{aligned} I(\mathbf{y}) = & -\left[ \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[ \frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] \\ & - \frac{1}{2} [\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}, \mathbf{T}] + [\mathbf{q}, \mathbf{u}] + [\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}] \\ & + \left[ (\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u} \right]_{\sigma} + \left[ (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega} \right]_{\sigma} + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_{\varepsilon} + [\hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{M}]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

biçiminde son şeklini alır (OMURTAG ve AKÖZ, 1992). (3.2) de “ $\sigma$ ” ve “ $\varepsilon$ ” alt indisli iç çarpımlar sınır koşullarını ifade etmektedir. Burada geometrik sınır koşulları için [...]  $\xi$  gösterimi, dinamik sınır koşulları için [...]  $\sigma$  gösterimi kullanılmıştır. Şapkalı terimler sınırdaki belli ise, denklemlere doğrudan girecek büyüklükler olacaktır. Eğer sınırlarda şapkalı terimler sıfır ise, ona ait sınır koşulları da düşecektir. Burada ki bilinmeyenler,

$$\text{ötelemeler} \quad \mathbf{u} = u_t + u_n + u_b$$

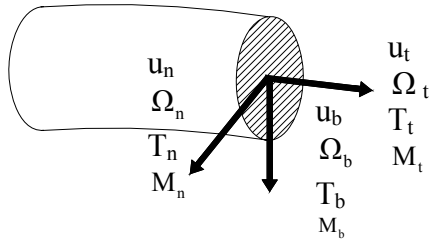
$$\text{dönmeler} \quad \mathbf{\Omega} = \Omega_t + \Omega_n + \Omega_b$$

kesme kuvvetleri  $\mathbf{T} = T_t + T_n + T_b$

momentler  $\mathbf{M} = M_t + M_n + M_b$

dir.

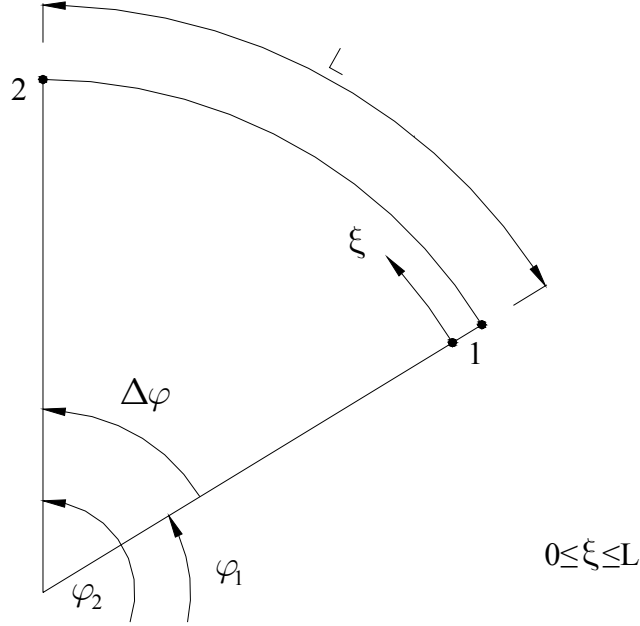
Geliştirilen helisel eleman iki düğüm noktalı ve  $2 \times 12$  serbestlik derecelidir. Yer değiştirme, dönme, kuvvet ve momentlerinin  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  eksen takımına göre pozitif yönleri Şekil (3.1) de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 - Değişkenler

## 4. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

### 4.1 Yaklaşım Fonksiyonları



Şekil 4.1 - İki Düğüm Noktalı Helis Çubuk Elemanı

Sonlu elemanlar formülasyonu için kullanılacak doğrusal yaklaşım fonksiyonları:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{L}(L - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{\xi}{L} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \xi \leq L) \quad (4.1)$$

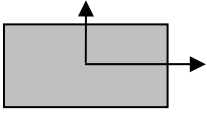
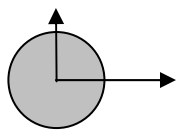
dır. (Bakınız Şekil 3.1). (4.1) de  $L$  çubuk sonlu elemanın yay boyunu ( $L = c\Delta\varphi$ ) ifade etmektedir. Burada  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  elemanın yaptığı merkez açı olup  $c$  'nin ve  $ds$  'in hesabı için (2.5) denkleminde yararlanılır (Bkz. Şekil 2.1.c). Böylece çubuk elemanı içinde herhangi bir noktadaki değişkenler:

$$\left. \begin{aligned} u^e &= u_1\psi_1 + u_2\psi_2 \\ \Omega^e &= \Omega_1\psi_1 + \Omega_2\psi_2 \\ T^e &= T_1\psi_1 + T_2\psi_2 \\ M^e &= M_1\psi_1 + M_2\psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

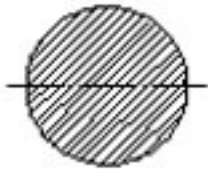
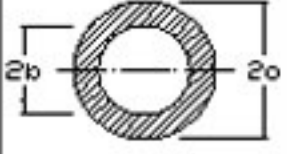
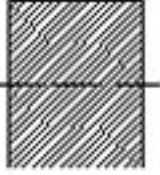
şeklinde tarif edilir. (4.3) de (...) <sup>e</sup> gösterimindeki “e” harfi eleman anlamında kullanılmıştır. Elemanlardaki değişken kesit özelliğini ifade etmek için yaklaşım fonksiyonları kullanılacak olursa :

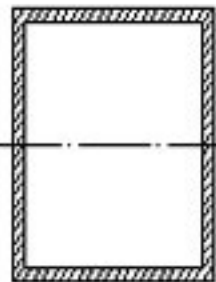
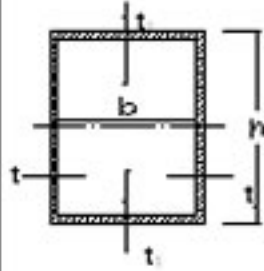
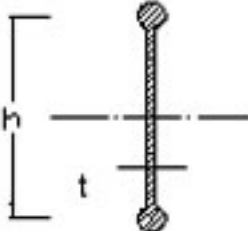
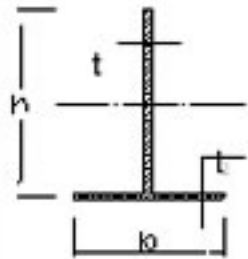
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{AE} &= \bar{A}_1\Psi_1 + \bar{A}_2\Psi_2 \\ \frac{k'}{GA} &= \bar{K}_1\Psi_1 + \bar{K}_2\Psi_2 \\ \frac{1}{GI_t} &= \bar{X}_1\Psi_1 + \bar{X}_2\Psi_2 \\ \frac{1}{EI_n} &= \bar{Y}_1\Psi_1 + \bar{Y}_2\Psi_2 \\ \frac{1}{EI_b} &= \bar{Z}_1\Psi_1 + \bar{Z}_2\Psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada  $k'$  kayma katsayısı (*Bakınız* Tablo 4.1),  $G$  kayma modülü,  $\nu$  poisson oranı olmak üzere  $G = E/[2(1+\nu)]$ ,  $\bar{A}_1 = (1/EA_1)$ ,  $\bar{A}_2 = (1/EA_2)$ ,  $\bar{K}_1 = (k'/GA_1)$ ,  $\bar{K}_2 = (k'/GA_2)$ ,  $\bar{X}_1 = (1/GI_{t1})$ ,  $\bar{X}_2 = (1/GI_{t2})$  ...v.s şeklinde tanımlanmaktadır. Kayma katsayısı hakkında daha hassas hesap yapılmak istendiğinde, Couper (1966) dan yararlanılabilir. Burada önerilen katsayılar için Tablo (4.2) ye bakınız.

| Tablo 4.1 – Çeşitli Kesit Geometrilere İçin Kayma Gerilmesi Katsayıları             |                |                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|
| Kesit                                                                               | $k_x$          | $k_y$          |
|  | $\frac{6}{5}$  | $\frac{6}{5}$  |
|  | $\frac{10}{9}$ | $\frac{10}{9}$ |

Tablo 4.2- Kesme Kuvveti Formülleri

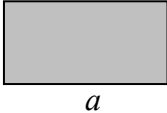
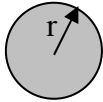
|                                                                                                                                                             |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>DAİRE</u></p> $K = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$                                                                                                           |    |
| <p><u>HALKA</u></p> $K = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$ $; m = \frac{b}{a}$                                                   |    |
| <p><u>DİKDÖRTGEN</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$                                                                                                   |   |
| <p><u>ELİPS</u></p> $K = \frac{12(1+\nu)a^3(3a^2+b^2)}{(40+37\nu)a^4 + (16+10\nu)a^2b^2 + \nu b^4}$ <p><math>a &gt; b</math> veya <math>a &lt; b</math></p> |  |
| <p><u>YARIM DAİRE</u></p> $K = \frac{1+\nu}{1.305+1.273\nu}$                                                                                                |  |
| <p><u>İNCE CİDARLI DAİRESEL TÜP</u></p> $K = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$                                                                                       |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>İNCE CİDARLI KARE TÜP</u></p> $K = \frac{20(1+\nu)}{48+39\nu}$                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
| <p><u>İNCE CİDARLI I-KESİT</u></p> $K = \frac{A}{B+C+D+E}$ <p>; <math>m = 2bt_f/h t_w</math>, <math>n = b/h</math>, <math>A = 10(1+\nu)(1+3m)^2</math>,<br/> <math>B = (12+72m+150m^2+90m^3)</math>, <math>C = \nu(11+66m+135m^2+90m^3)</math>,<br/> <math>D = 30n^2(m+m^3)</math>, <math>E = 5\nu n^2(8m+9m^3)</math></p>   |    |
| <p><u>İNCE CİDARLI KUTU KESİT</u></p> $K = \frac{A}{B+C+D}$ <p>; <math>m = bt/h t</math>, <math>n = b/h</math>, <math>A = 10(1+\nu)(1+3m)^2</math>,<br/> <math>B = (12+72m+150m^2+90m^3)</math>, <math>C = \nu(11+66m+135m^2+90m^3)</math><br/> <math>D = 10n^2((3+\nu)m+2m^3)</math></p>                                    |   |
| <p><u>DOLU GÖVDELİ ÇUBUK</u></p> $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3)}$ <p>; <math>m = 2A_c/h t</math>, <math>A_c = \text{Çubuk alanı}</math></p>                                                                                                                                  |  |
| <p><u>İNCE CİDARLI T-KESİT</u></p> $K = \frac{A}{B+C+D+E}$ <p>; <math>m = bt/h t</math>, <math>n = b/h</math>, <math>A = 10(1+\nu)(1+4m)^2</math>,<br/> <math>B = (12+96m+276m^2+192m^3)</math>, <math>C = \nu(11+88m+248m^2+216m^3)</math>,<br/> <math>D = 30n^2(m+m^3)</math>, <math>E = 10\nu n^2(4m+5m^2+m^3)</math></p> |  |

Kesit özelliklerini gösteren terimlerin hesabında kullanılan bağıntılar ise:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A dA, & \mathbf{I} &= I_{ij}, & I_{ij} &= \int_A x_i x_j dA \quad (i \neq j), \\ I_{nn} &= \int_A x_n^2 dA, & I_{bb} &= \int_A x_b^2 dA, & I_{tt} &= I_{nn} + I_{bb}, \end{aligned} \right\} (i, j = t, n, b) \quad (4.4)$$

şeklinde hesaplanmıştır.  $A$  ile  $\mathbf{I}$  'nın bileşenlerinin değişik kesit geometrileri için hesabı Tablo (4.3) de mevcuttur.

| Tablo 4.3 – Çeşitli Kesit Geometrileri İçin Alan ve Atalet Momenti Değerleri        |           |                   |               |                                |               |                  |       |       |       |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------|---------------|--------------------------------|---------------|------------------|-------|-------|-------|---------------|
| Kesit                                                                               | $A$       | $I_{tt}$          | $I_{nn}$      | $I_{bb}$                       | Açıklama      |                  |       |       |       |               |
|    | $ab$      | $\eta ab^3$       | $\frac{6}{5}$ | $\frac{6}{5}$                  | $a>b$         |                  |       |       |       |               |
|                                                                                     |           |                   |               |                                | $\frac{a}{b}$ | 1                | 2     | 4     | 8     | $\infty$      |
|                                                                                     |           |                   |               |                                | $\eta$        | $\frac{0.20}{8}$ | 0.246 | 0.282 | 0.307 | $\frac{1}{3}$ |
|  | $\pi r^2$ | $I_{nn} + I_{bb}$ | $I_{nn}$      | $\frac{1}{64} \frac{r^4}{\pi}$ |               |                  |       |       |       |               |

Eleman matrisi geliştirilirken kullanılacak alt matrisler,

$$\left. \begin{aligned} [k_A] &= \int_0^L \Psi_i \Psi_j ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L & \frac{1}{6}L \\ \frac{1}{6}L & \frac{1}{3}L \end{bmatrix} \\ [k_B] &= \int_0^L \Psi_i \Psi_j' ds = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ [k_C^d] &= \int_0^L (d_1 \Psi_i + d_2 \Psi_j) \Psi_i \Psi_j ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}Ld_1 + \frac{1}{12}Ld_2 & \frac{1}{2}L(d_1 + d_2) \\ \frac{1}{2}L(d_1 + d_2) & \frac{1}{4}Ld_1 + \frac{1}{12}Ld_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

dir. (4.5) de  $L$  sonlu elemanın yay boyunu ifade etmekle birlikte, bu denklemdeki eşitliklerinin terimleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$k_{A11} = \int_0^L \Psi_1 \Psi_1 \, ds = \int_0^L \left[ -\frac{I}{L}(s-L) \right]^2 \, ds = \frac{1}{L^2} \left( \frac{1}{3}s^3 - s^2L + sL^2 \right) \Big|_0^L = \frac{L}{3}$$

$$k_{A12} = \int_0^L \Psi_1 \Psi_2 \, ds = \int_0^L -\frac{s}{L^2}(s-L) \, ds = -\frac{I}{L^2} \left( \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2L \right) \Big|_0^L = \frac{L}{6}$$

$$k_{A21} = [k_A]_{1,2} = \frac{L}{6}$$

$$k_{A22} = \int_0^L \Psi_2 \Psi_2 \, ds = \int_0^L \frac{s^2}{L^2} \, ds = \frac{s^2}{3L^2} \Big|_0^L = \frac{L}{3}$$

$$k_{B11} = \int_0^L \Psi_1 \Psi_1' \, ds = \int_0^L \frac{I}{L^2}(s-L) \, ds = \frac{s^2}{2L^2} - \frac{s}{L} \Big|_0^L = -\frac{1}{2}$$

$$k_{B12} = \int_0^L \Psi_1 \Psi_2' \, ds = \int_0^L -\frac{I}{L^2}(s-L) \, ds = -\frac{s^2}{2L^2} + \frac{s}{L} \Big|_0^L = +\frac{1}{2}$$

$$k_{B21} = \int_0^L \Psi_2 \Psi_1' \, ds = \int_0^L \frac{s}{L} \left( -\frac{I}{L} \right) \, ds = -\frac{s^2}{2L^2} \Big|_0^L = -\frac{1}{2}$$

$$k_{B22} = \int_0^L \Psi_2 \Psi_2' \, ds = \int_0^L \frac{s}{L} \left( \frac{I}{L} \right) \, ds = \frac{s^2}{2L^2} \Big|_0^L = +\frac{1}{2}$$

(4.5) te  $[k_C^d]$  değişken kesitli çubuklar için kullanılmakla birlikte,  $d_1$  ve  $d_2$  elemanın 1 ve 2 uçlarındaki değişken kesit özelliklerine sahip terimlere karşılık gelmektedir. Bu eşitliğe ait terimler ise şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} k_{C11}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_1 + d_2 \Psi_1) \Psi_1 \Psi_1 \, ds = \int_0^L \frac{I}{L^3} (s^2 - 2sL + L^2) [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\ &= \frac{I}{L^3} \left[ \frac{1}{4} L^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} L^4 (3d_1 - 2d_2) + \frac{1}{2} L^4 (d_2 - 3d_1) + L^4 d_1 \right] \\ &= L \left[ \frac{1}{4} d_1 + \frac{1}{12} d_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{C12}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_1 + d_2 \Psi_2) \Psi_1 \Psi_2 \, ds = \int_0^L -\frac{I}{L^3} (s^2 - sL) [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\ &= -\frac{I}{L^3} \left[ \frac{1}{4} s^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} s^3 (-d_2 L + 2d_1) - \frac{1}{2} s^2 d_1 L^2 \right] \Big|_0^L \\ &= -L \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) d_2 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) d_1 \right] = \frac{1}{12} L [d_1 + d_2] \end{aligned}$$

$$k_{C21}^d = [k_C^d]_{1,2} = \int_0^L (d_1 \Psi_2 + d_2 \Psi_1) \Psi_2 \Psi_1 \, ds = \frac{1}{12} L [d_1 + d_2]$$

$$\begin{aligned}
k_{c22}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_2 + d_2 \Psi_2) \Psi_2 \Psi_2 \, ds = \int_0^L \frac{s^2}{L^3} [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\
&= \frac{L}{L^3} \left[ \frac{1}{4} L^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} L^4 d_1 \right] \\
&= L \left[ \frac{1}{4} d_1 + \frac{1}{12} d_2 \right]
\end{aligned}$$

## 4.2 Eleman Matrisi

Karışık sonlu eleman çubuk matrisi Şekil (4.2)' de verilmiştir.

$u_t$      $u_n$      $u_b$      $\Omega_t$      $\Omega_n$      $\Omega_b$      $T_t$      $T_n$      $T_b$      $M_t$      $M_n$      $M_b$

$\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$      $\downarrow$

$[k]^e =$

|  |  |  |  |  |  |              |              |             |              |              |             |                       |
|--|--|--|--|--|--|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-----------------------|
|  |  |  |  |  |  | $-[k_A]$     | $-\chi[k_B]$ |             |              |              |             | $\leftarrow u_t$      |
|  |  |  |  |  |  | $-\chi[k_B]$ | $-[k_A]$     | $\tau[k_B]$ |              |              |             | $\leftarrow u_n$      |
|  |  |  |  |  |  |              | $-\tau[k_B]$ | $-[k_A]$    |              |              |             | $\leftarrow u_b$      |
|  |  |  |  |  |  |              |              |             | $-[k_A]$     | $\chi[k_B]$  |             | $\leftarrow \Omega_t$ |
|  |  |  |  |  |  |              |              | $[k_B]$     | $-\chi[k_B]$ | $-[k_A]$     | $\tau[k_B]$ | $\leftarrow \Omega_n$ |
|  |  |  |  |  |  |              | $-[k_B]$     |             |              | $-\tau[k_B]$ | $-[k_A]$    | $\leftarrow \Omega_b$ |
|  |  |  |  |  |  | $-[k_C^A]$   |              |             |              |              |             | $\leftarrow T_t$      |
|  |  |  |  |  |  |              | $-[k_C^K]$   |             |              |              |             | $\leftarrow T_n$      |
|  |  |  |  |  |  |              |              | $-[k_C^K]$  |              |              |             | $\leftarrow T_b$      |
|  |  |  |  |  |  |              |              |             | $-[k_C^X]$   |              |             | $\leftarrow M_t$      |
|  |  |  |  |  |  |              |              |             |              | $-[k_C^Y]$   |             | $\leftarrow M_n$      |
|  |  |  |  |  |  |              |              |             |              |              | $-[k_C^Z]$  | $\leftarrow M_b$      |

S İ M E T R İ K

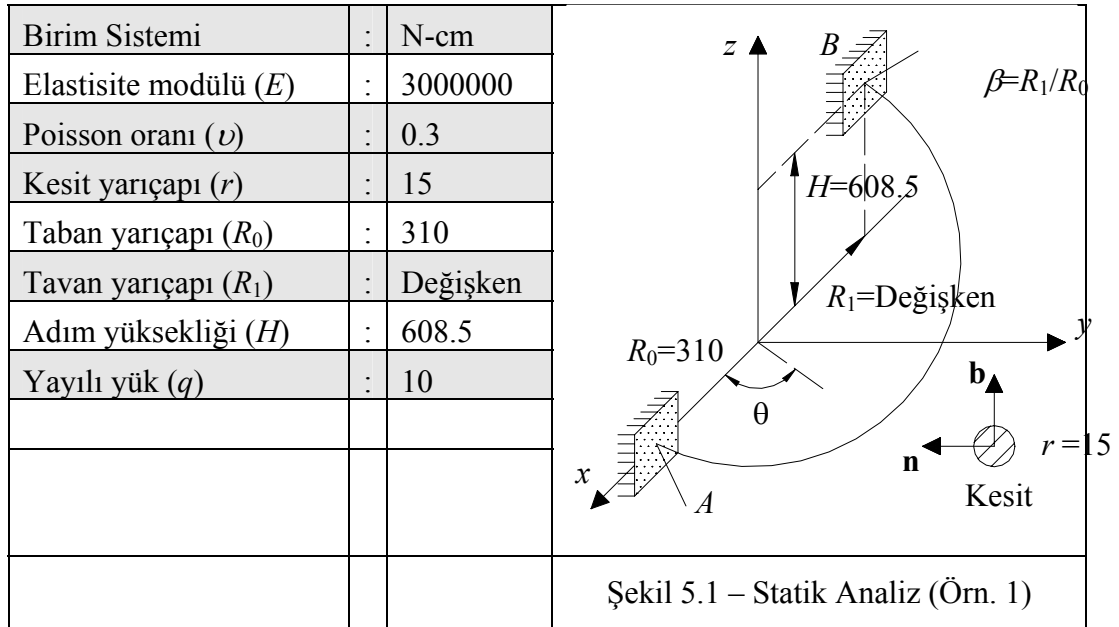
Şekil 4.2 – Değişken Kesitte Eleman Rijitlik Matrisi - Bkz. Denklem (4.5)

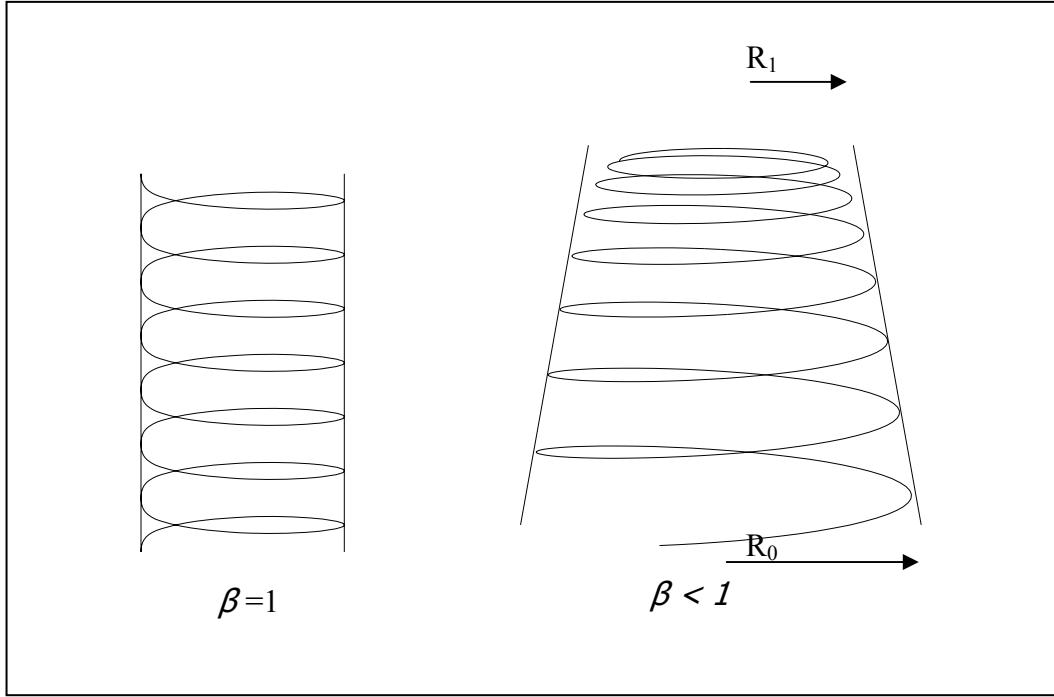
## 5. SAYISAL ÖRNEKLER

### 5.1 Değişken Tavan Yarıçaplı Helis Problemi

#### 5.1.1 Örnek-1: 20 Eleman

Şekil (5.1) de görülmekte olan helisel çubukta kesit sabit ve daire biçimindedir ve çözüm 20 eleman için tur sayısı  $n=\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olmak üzere yapılmıştır. Taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı Şekil (5.2) de görüldüğü gibi  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Tablo (5.1), Tablo (5.2), Tablo (5.3) ve Tablo (5.4) den de görülebileceği üzere, sonuçlar mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır. Şekil (5.3), Şekil (5.4) ve Şekil (5.5) da tur sayısı  $n=0.5$  dir. Tur sayısı  $n=\{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-A)





Şekil 5.2 – Örnek (1) İçin Silindirik ve Konik Helisler

Helis elemanına ait yukarıdaki veriler programa girildikten sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Tablo 5.1 (Örn. 1) için  $A$  mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma -Birimler: N-cm

| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |       | $T_n \times 10^3$ |      | $T_b \times 10^3$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL    |
| 1.00    | -3.78             | -3.79 | 0.07              | 0.12 | -4.36             | -4.41 |
| 0.80    | -3.71             | -3.72 | 0.07              | 0.12 | -4.02             | -4.04 |
| 0.60    | -3.69             | -3.63 | 0.17              | 0.14 | -3.74             | -3.69 |
| 0.40    | -                 | -3.52 | -                 | 0.17 | -                 | -3.37 |
| 0.20    | -                 | -3.38 | -                 | 0.22 | -                 | -3.08 |

Tablo 5.2 (Örn. 1) için  $A$  mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

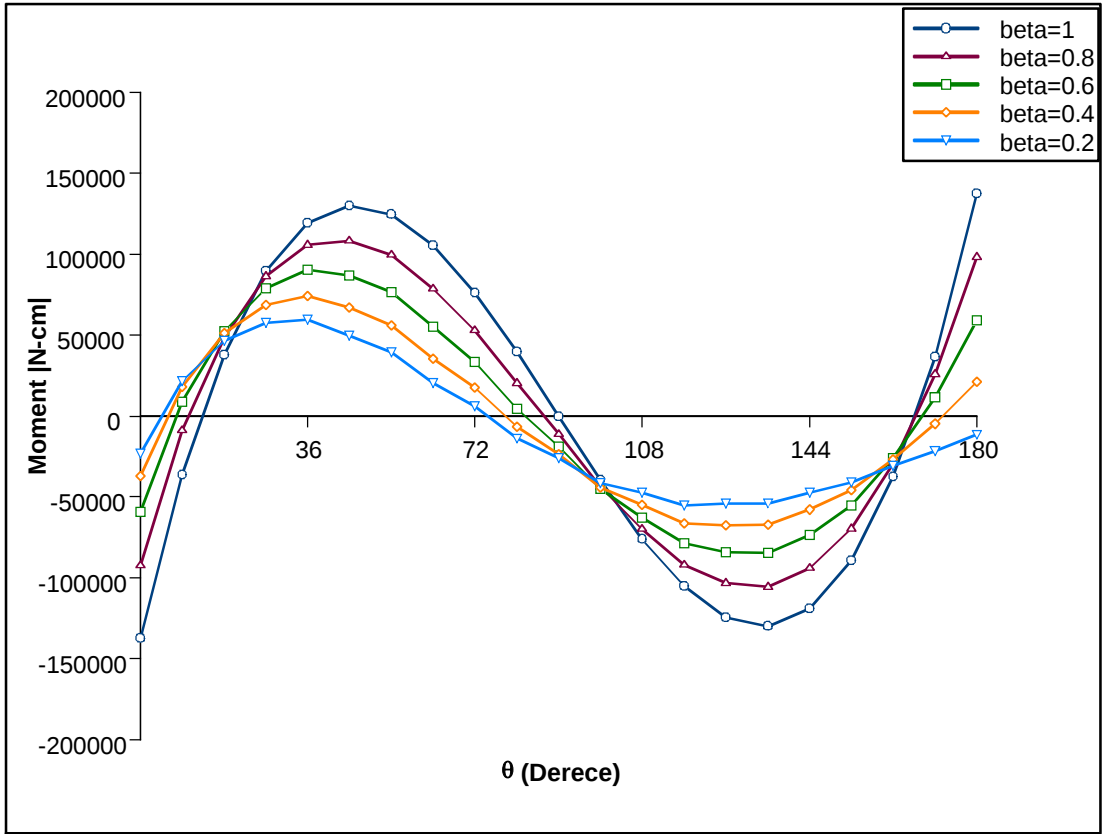
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |      |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | -1.36             | -1.37 | 8.33              | 8.40 | 3.97              | 4.06 |
| 0.80    | -0.94             | -0.92 | 6.98              | 6.93 | 3.25              | 3.21 |
| 0.60    | -0.64             | -0.59 | 5.92              | 5.67 | 2.73              | 2.50 |
| 0.40    | -                 | -0.37 | -                 | 4.61 | -                 | 1.93 |
| 0.20    | -                 | -0.23 | -                 | 3.77 | -                 | 1.52 |

Tablo 5.3 (Örn. 1) için  $B$  mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

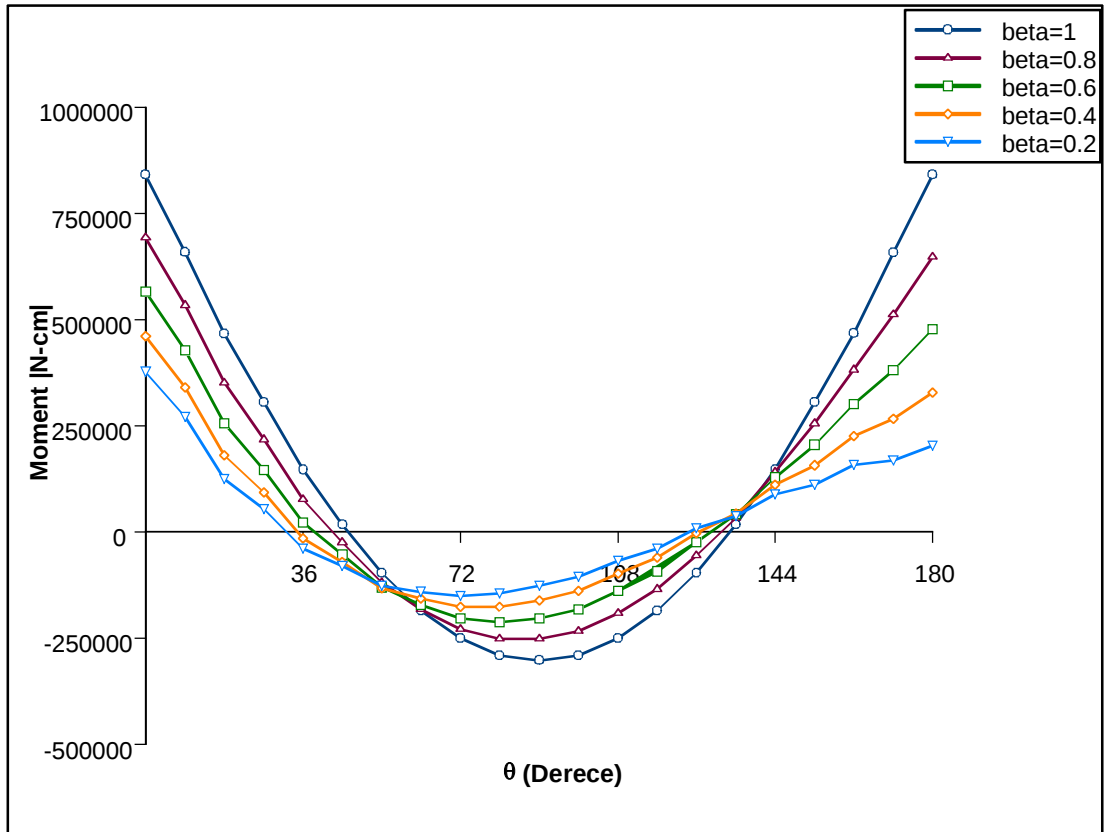
| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |      | $T_n \times 10^3$ |      | $T_b \times 10^3$ |      |
|---------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL   | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | 3.78              | 3.79 | 0.08              | 0.12 | 4.39              | 4.41 |
| 0.80    | 3.79              | 3.74 | 0.18              | 0.12 | 3.84              | 3.78 |
| 0.60    | 3.77              | 3.69 | 0.26              | 0.16 | 3.21              | 3.12 |
| 0.40    | -                 | 3.66 | -                 | 0.28 | -                 | 2.42 |
| 0.20    | -                 | 3.63 | -                 | 0.50 | -                 | 1.67 |

Tablo 5.4 (Örn. 1) için  $B$  mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

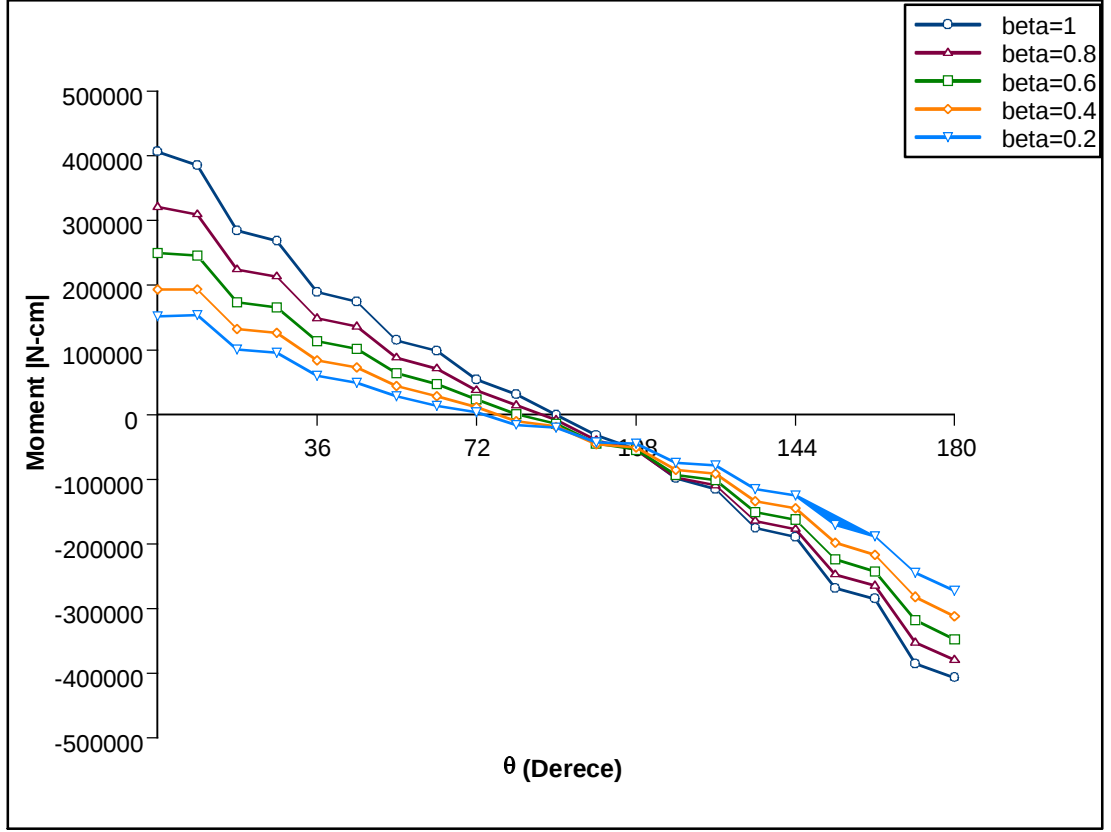
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL    |
| 1.00    | 1.36              | 1.37  | 8.33              | 8.40 | -3.98             | -4.06 |
| 0.80    | 1.01              | 0.98  | 6.63              | 6.48 | -3.92             | -3.79 |
| 0.60    | 0.63              | 0.59  | 4.99              | 4.77 | -3.83             | -3.48 |
| 0.40    | -                 | 0.21  | -                 | 3.28 | -                 | -3.12 |
| 0.20    | -                 | -0.12 | -                 | 2.04 | -                 | -2.72 |



Şekil 5.3 -  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 1)



Şekil 5.4 -  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 1)



Şekil 5.5 -  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi (Örn. 1)

### 5.1.2 Örnek-2: 50 Eleman

Şekil (5.1) de görülmekte olan helisel çubukta kesit sabit ve daire biçimindedir ve çözüm 50 eleman için tur sayısı  $n=\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olmak üzere yapılmıştır. Taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı Şekil (5.2) de görüldüğü gibi  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Tablo (5.5), Tablo (5.6), Tablo (5.7) ve Tablo (5.8) den de görülebileceği üzere, sonuçlar mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır. Şekil (5.6), Şekil (5.7) ve Şekil (5.8) da tur sayısı  $n=0.5$  dir. Tur sayısı  $n=\{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-B)

|                           |   |          |
|---------------------------|---|----------|
| Birim Sistemi             | : | N-cm     |
| Elastisite modülü ( $E$ ) | : | 3000000  |
| Poisson oranı ( $\nu$ )   | : | 0.3      |
| Kesit yarıçapı ( $r$ )    | : | 15       |
| Taban yarıçapı ( $R_0$ )  | : | 310      |
| Tavan yarıçapı ( $R_1$ )  | : | Değişken |
| Adım yüksekliği ( $H$ )   | : | 608.5    |
| Yayıllı yük ( $q$ )       | : | 10       |

Tablo 5.5 (Örn. 2) için *A* mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |       | $T_n \times 10^3$ |       | $T_b \times 10^3$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL    | [1]               | HL    |
| 1.00    | -3.78             | -3.83 | 0.07              | 0.02  | -4.36             | -4.38 |
| 0.80    | -3.71             | -3.65 | 0.07              | -0.01 | -4.02             | -3.98 |
| 0.60    | -3.69             | -3.45 | 0.17              | -0.02 | -3.74             | -3.61 |
| 0.40    | -                 | -3.23 | -                 | -0.01 | -                 | -3.27 |
| 0.20    | -                 | -3.01 | -                 | 0.02  | -                 | -2.97 |

Tablo 5.6 (Örn. 2) için *A* mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

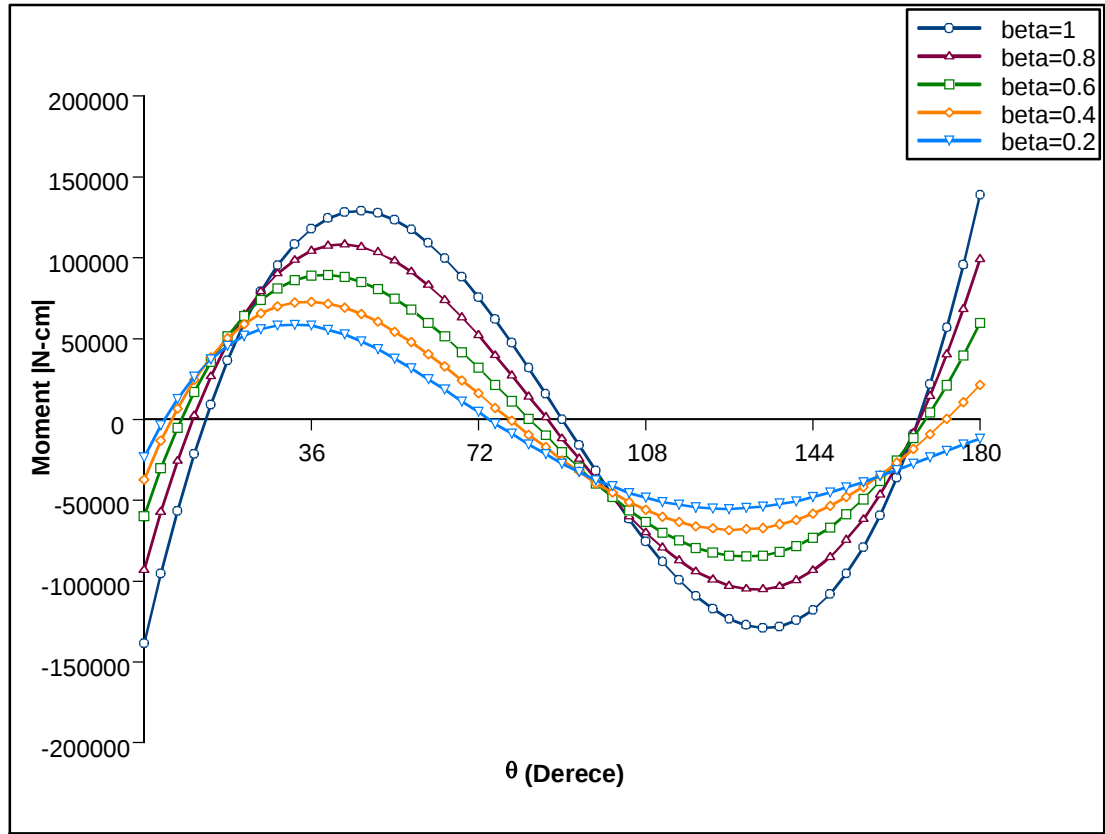
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |      |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | -1.36             | -1.39 | 8.33              | 8.46 | 3.97              | 4.27 |
| 0.80    | -0.94             | -0.93 | 6.98              | 7.04 | 3.25              | 3.40 |
| 0.60    | -0.64             | -0.60 | 5.92              | 5.80 | 2.73              | 2.67 |
| 0.40    | -                 | -0.37 | -                 | 4.77 | -                 | 2.10 |
| 0.20    | -                 | -0.23 | -                 | 3.94 | -                 | 1.67 |

Tablo 5.7 (Örn. 2) için *B* mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

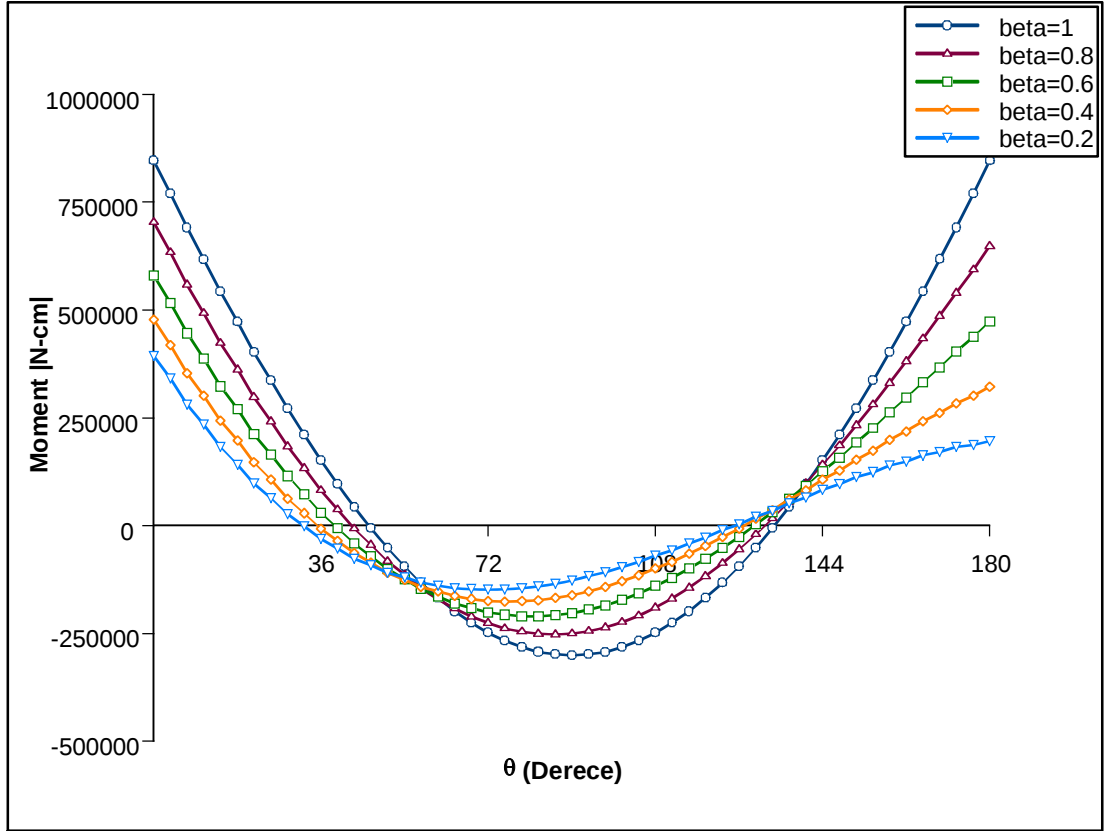
| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |      | $T_n \times 10^3$ |      | $T_b \times 10^3$ |      |
|---------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL   | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | 3.78              | 3.83 | 0.08              | 0.02 | 4.39              | 4.38 |
| 0.80    | 3.79              | 3.88 | 0.18              | 0.06 | 3.84              | 3.78 |
| 0.60    | 3.77              | 3.94 | 0.26              | 0.15 | 3.21              | 3.15 |
| 0.40    | -                 | 3.99 | -                 | 0.30 | -                 | 2.48 |
| 0.20    | -                 | 4.05 | -                 | 0.53 | -                 | 1.74 |

Tablo 5.8 (Örn. 2) için  $B$  mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

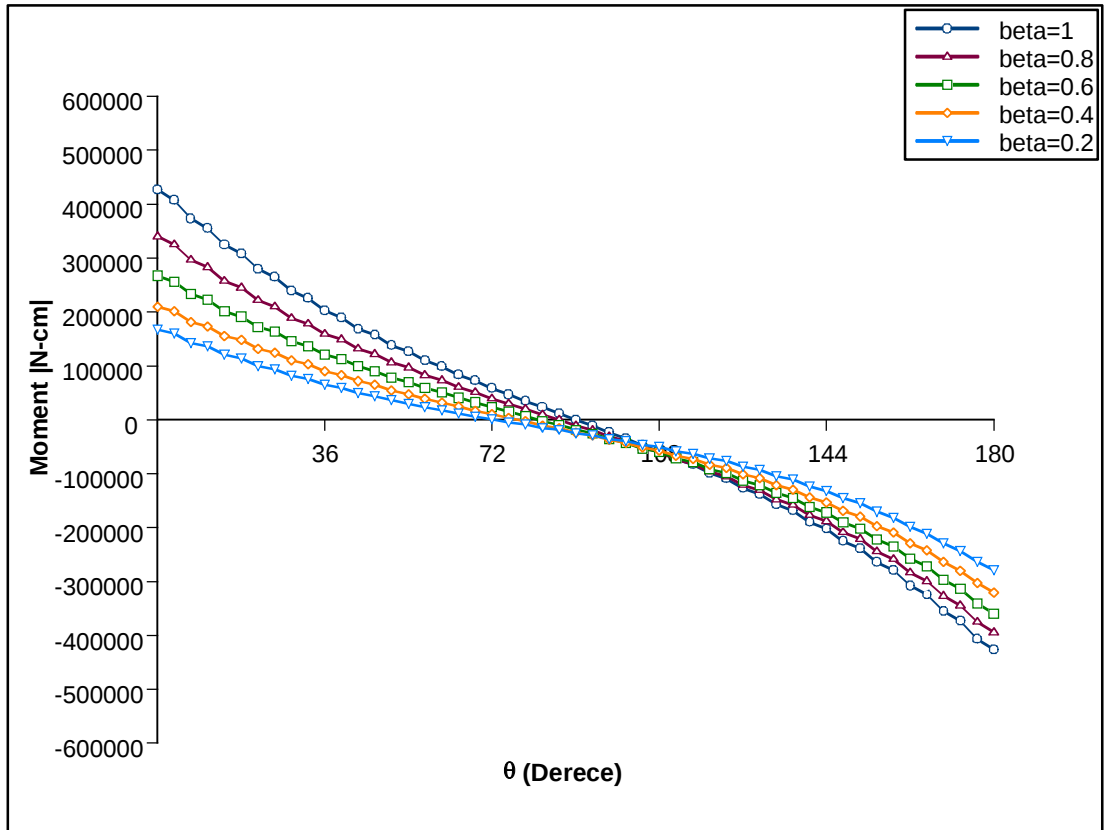
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL    |
| 1.00    | 1.36              | 1.39  | 8.33              | 8.46 | -3.98             | -4.27 |
| 0.80    | 1.01              | 0.99  | 6.63              | 6.48 | -3.92             | -3.95 |
| 0.60    | 0.63              | 0.60  | 4.99              | 4.73 | -3.83             | -3.60 |
| 0.40    | -                 | 0.21  | -                 | 3.22 | -                 | -3.21 |
| 0.20    | -                 | -0.12 | -                 | 1.96 | -                 | -2.79 |



Şekil 5.6 –  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 2)



Şekil 5.7 –  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 2)



Şekil 5.8 –  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 2)

### 5.1.3 Örnek-3: 100 Eleman

Şekil (5.1) de görülmekte olan helisel çubukta kesit sabit ve daire biçimindedir ve çözüm 100 eleman için tur sayısı  $n=\{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olmak üzere yapılmıştır. Taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı Şekil (5.2) de görüldüğü gibi  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Tablo (5.9), Tablo (5.10), Tablo (5.11) ve Tablo (5.12) den de görülebileceği üzere, sonuçlar mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır. Şekil (5.9), Şekil (5.10) ve Şekil (5.11) de tur sayısı  $n=0.5$  dir. Tur sayısı  $n=\{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-C)

|                           |   |          |
|---------------------------|---|----------|
| Birim Sistemi             | : | N-cm     |
| Elastisite modülü ( $E$ ) | : | 3000000  |
| Poisson oranı ( $\nu$ )   | : | 0.3      |
| Kesit yarıçapı ( $r$ )    | : | 15       |
| Taban yarıçapı ( $R_0$ )  | : | 310      |
| Tavan yarıçapı ( $R_1$ )  | : | Değişken |
| Adım yüksekliği ( $H$ )   | : | 608.5    |
| Yayıllı yük ( $q$ )       | : | 10       |

Tablo 5.9 (Örn. 3) için  $A$  mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması

[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma -Birimler: N-cm

| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |       | $T_n \times 10^3$ |       | $T_b \times 10^3$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL    | [1]               | HL    |
| 1.00    | -3.78             | -3.84 | 0.07              | 0.00  | -4.36             | -4.37 |
| 0.80    | -3.71             | -3.64 | 0.07              | -0.04 | -4.02             | -3.97 |
| 0.60    | -3.69             | -3.42 | 0.17              | -0.05 | -3.74             | -3.59 |
| 0.40    | -                 | -3.18 | -                 | -0.04 | -                 | -3.25 |
| 0.20    | -                 | -2.93 | -                 | -0.02 | -                 | -2.95 |

Tablo 5.10 (Örn. 3) için *A* mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

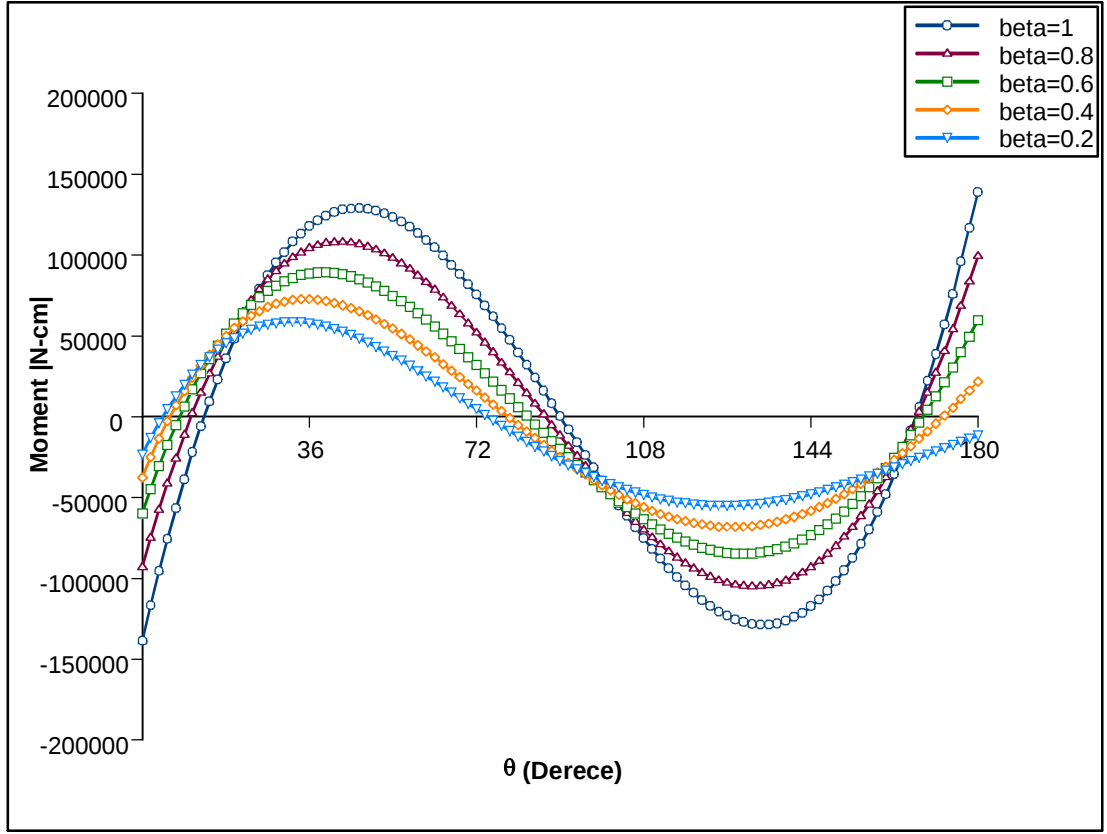
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |      |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | -1.36             | -1.39 | 8.33              | 8.47 | 3.97              | 4.31 |
| 0.80    | -0.94             | -0.93 | 6.98              | 7.06 | 3.25              | 3.44 |
| 0.60    | -0.64             | -0.60 | 5.92              | 5.83 | 2.73              | 2.71 |
| 0.40    | -                 | -0.37 | -                 | 4.80 | -                 | 2.13 |
| 0.20    | -                 | -0.23 | -                 | 3.97 | -                 | 1.70 |

Tablo 5.11 (Örn. 3) için *B* mesnedindeki kuvvet değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

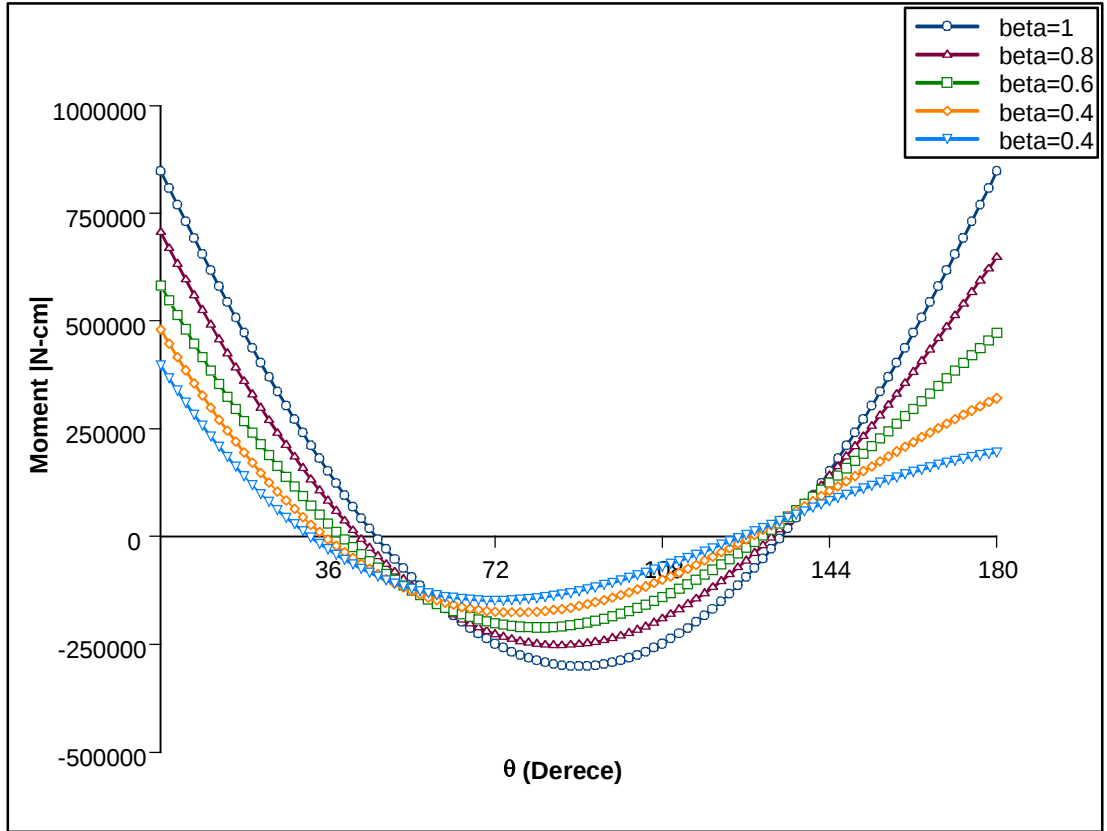
| $\beta$ | $T_t \times 10^3$ |      | $T_n \times 10^3$ |      | $T_b \times 10^3$ |      |
|---------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|
|         | [1]               | HL   | [1]               | HL   | [1]               | HL   |
| 1.00    | 3.78              | 3.84 | 0.08              | 0.00 | 4.39              | 4.37 |
| 0.80    | 3.79              | 3.91 | 0.18              | 0.06 | 3.84              | 3.78 |
| 0.60    | 3.77              | 3.99 | 0.26              | 0.15 | 3.21              | 3.17 |
| 0.40    | -                 | 4.07 | -                 | 0.31 | -                 | 2.49 |
| 0.20    | -                 | 4.14 | -                 | 0.54 | -                 | 1.75 |

Tablo 5.12 (Örn. 3) için *B* mesnedindeki moment değerlerinin karşılaştırılması  
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

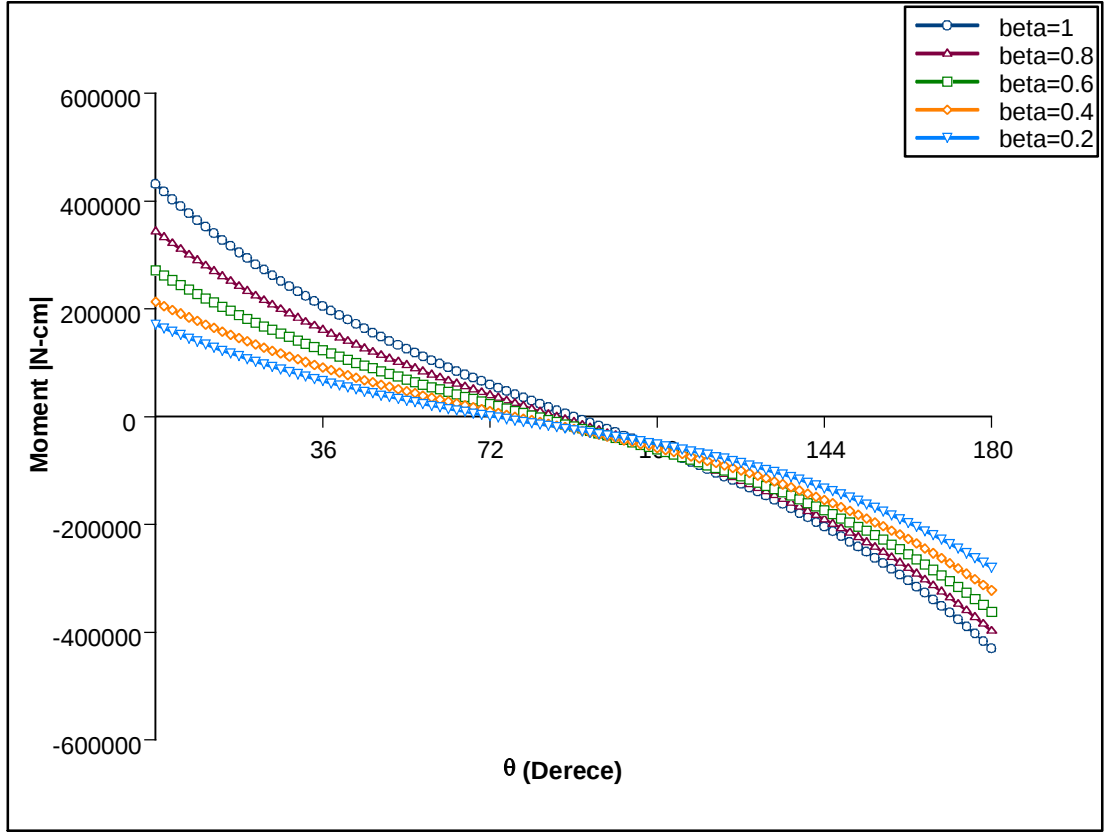
| $\beta$ | $M_t \times 10^5$ |       | $M_n \times 10^5$ |      | $M_b \times 10^5$ |       |
|---------|-------------------|-------|-------------------|------|-------------------|-------|
|         | [1]               | HL    | [1]               | HL   | [1]               | HL    |
| 1.00    | 1.36              | 1.39  | 8.33              | 8.47 | -3.98             | -4.31 |
| 0.80    | 1.01              | 0.99  | 6.63              | 6.48 | -3.92             | -3.98 |
| 0.60    | 0.63              | 0.60  | 4.99              | 4.72 | -3.83             | -3.62 |
| 0.40    | -                 | 0.21  | -                 | 3.21 | -                 | -3.23 |
| 0.20    | -                 | -0.12 | -                 | 1.95 | -                 | -2.81 |



Şekil 5.9 –  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 3)



Şekil 5.10 –  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 3)

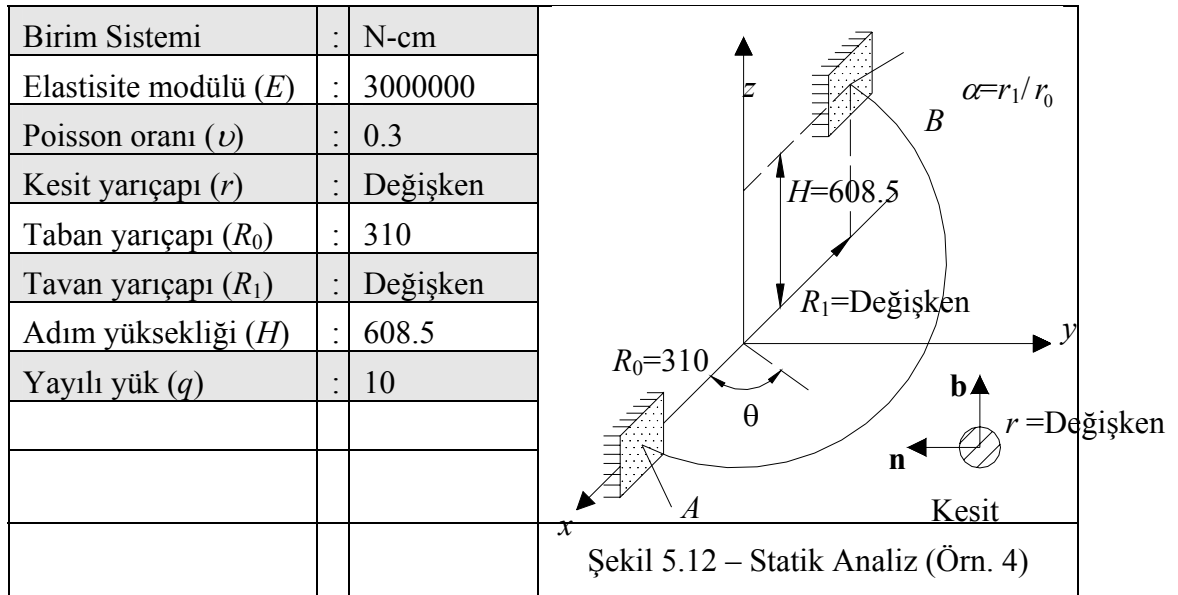


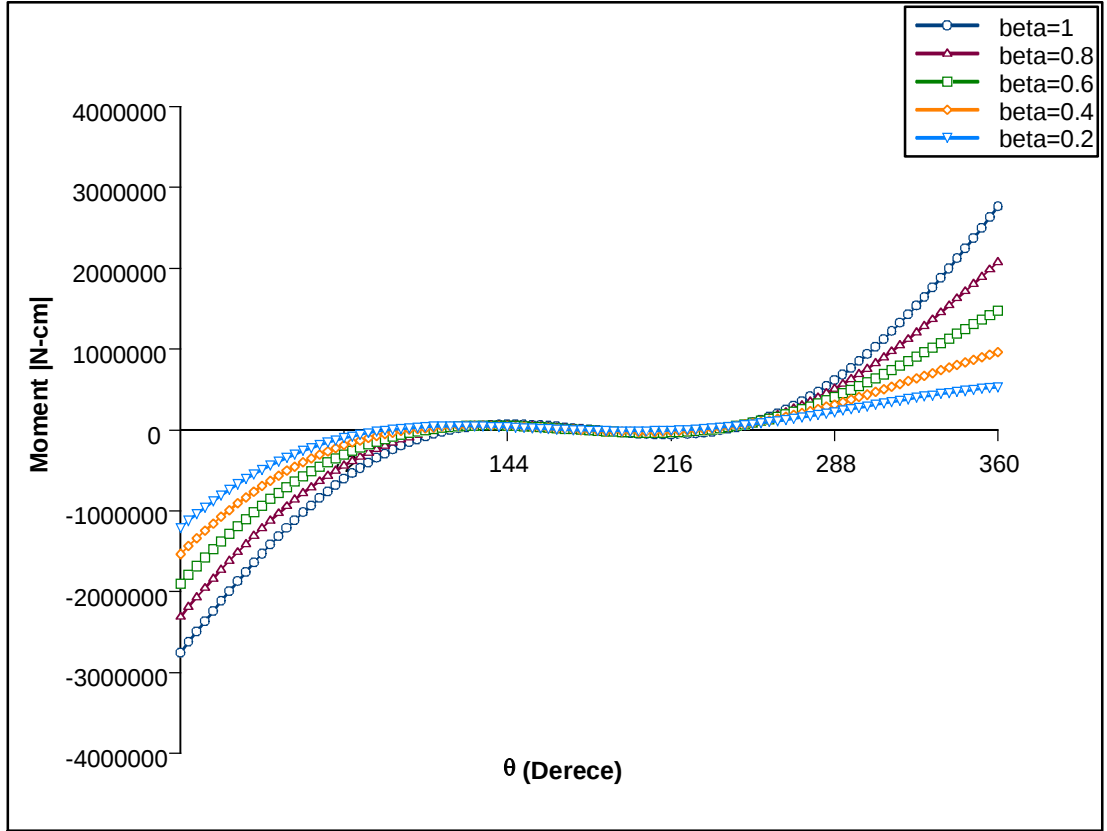
Şekil 5.11 –  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 3)

## 5.2 Değişken Dairesel Kesit Problemi

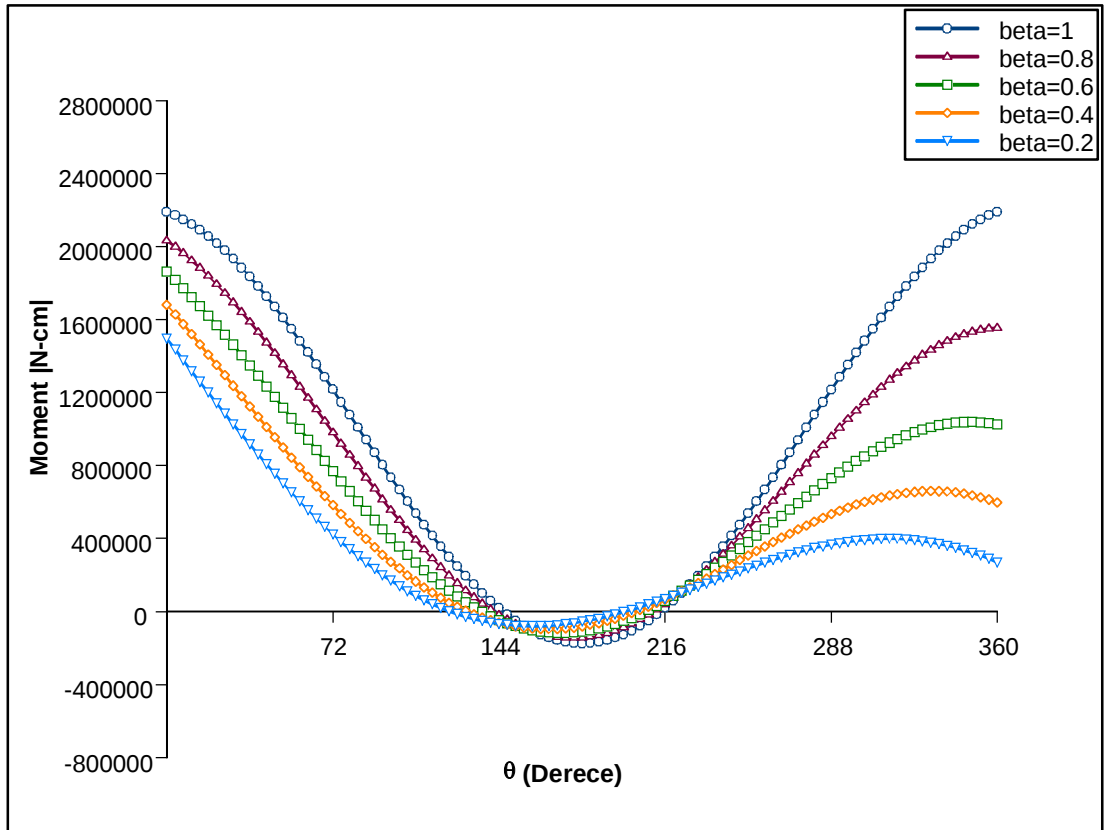
### 5.2.1 Örnek-4: Tur Sayısı 1

Bu örnekte kesit daire biçimindedir .Çözüm 100 eleman için yapılmıştır.  $r_1$   $A$  ve  $B$  noktalarındaki kesit yarıçapı,  $r_0$  helisin ortasındaki kesit yarıçapı olmak üzere  $\alpha=r_1/r_0=\{0.25, 0.50, 0.75, 1\}$  değerleri için, taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Şekil (5.13), Şekil (5.14) ve Şekil (5.15) de  $\alpha=r_1/r_0=0.25$  dir.  $\alpha=r_1/r_0=\{0.50, 0.75, 1\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-D)

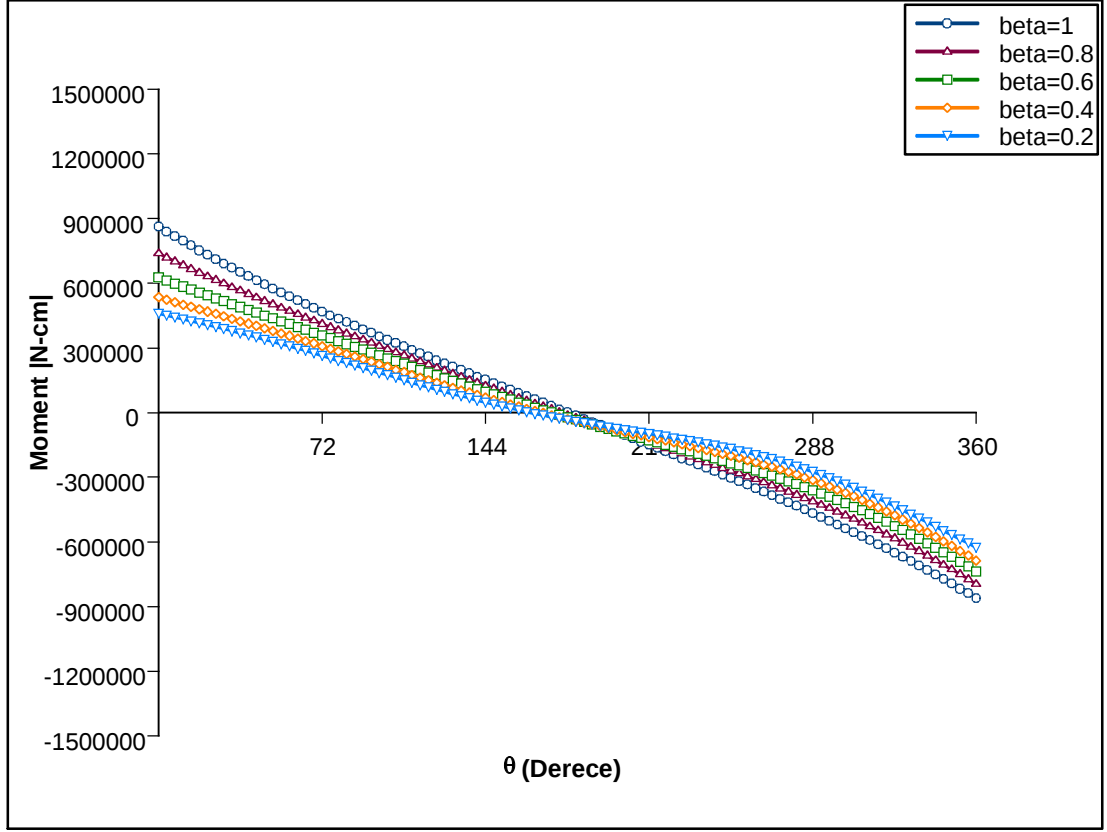




Şekil 5.13 –  $M_t$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 4)



Şekil 5.14 –  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 4)

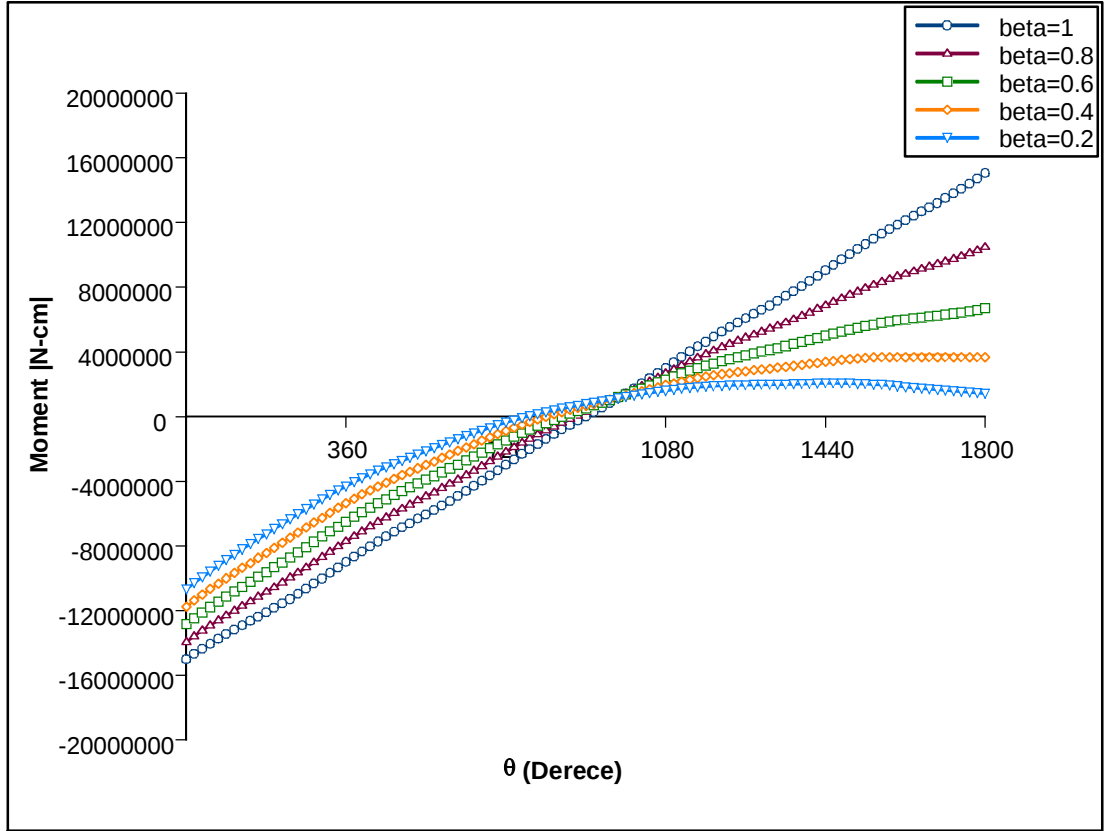


Şekil 5.15 –  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi (Örn. 4)

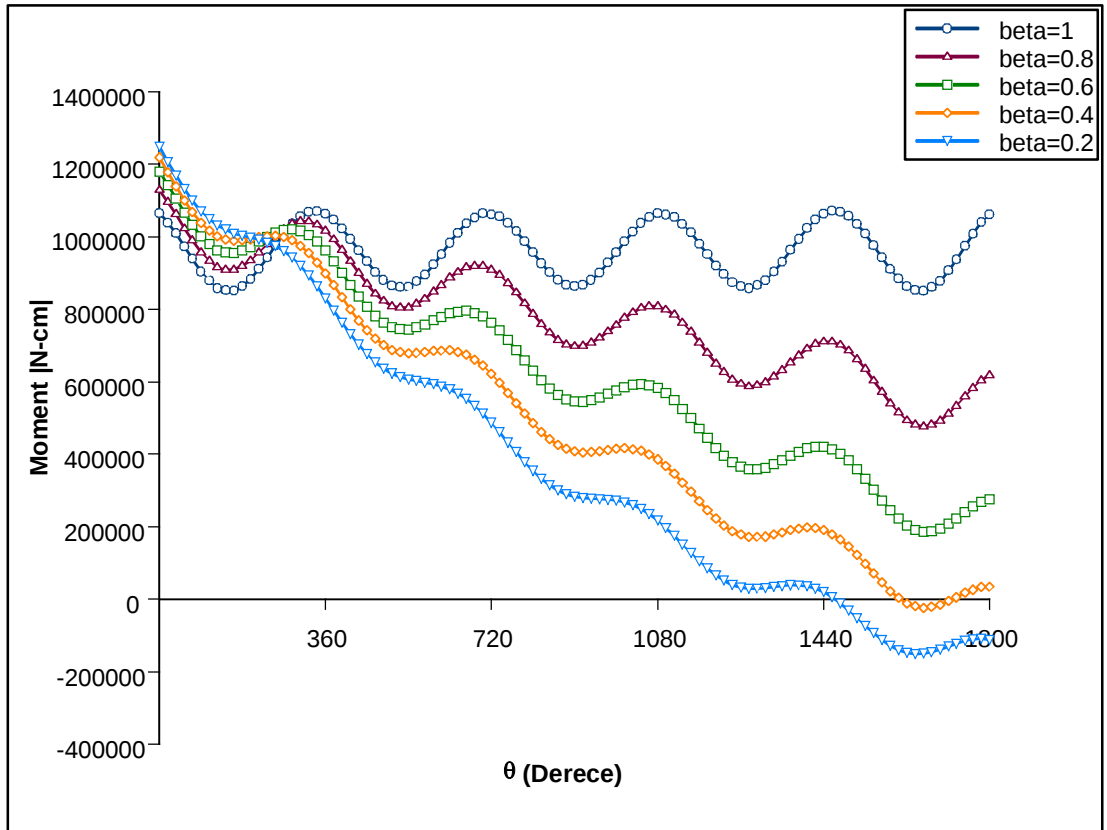
### 5.2.2 Örnek-5: Tur Sayısı 5

Bu örnekte kesit daire biçimindedir .Çözüm 100 eleman için yapılmıştır.  $r_1$   $A$  ve  $B$  noktalarındaki kesit yarıçapı,  $r_0$  helisin ortasındaki kesit yarıçapı olmak üzere  $\alpha=r_1/r_0=\{0.25, 0.50, 0.75, 1\}$  değerleri için, taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Şekil (5.16), Şekil (5.17) ve Şekil (5.18) de  $\alpha=r_1/r_0=0.25$  dir.  $\alpha=r_1/r_0=\{0.50, 0.75, 1\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-E)

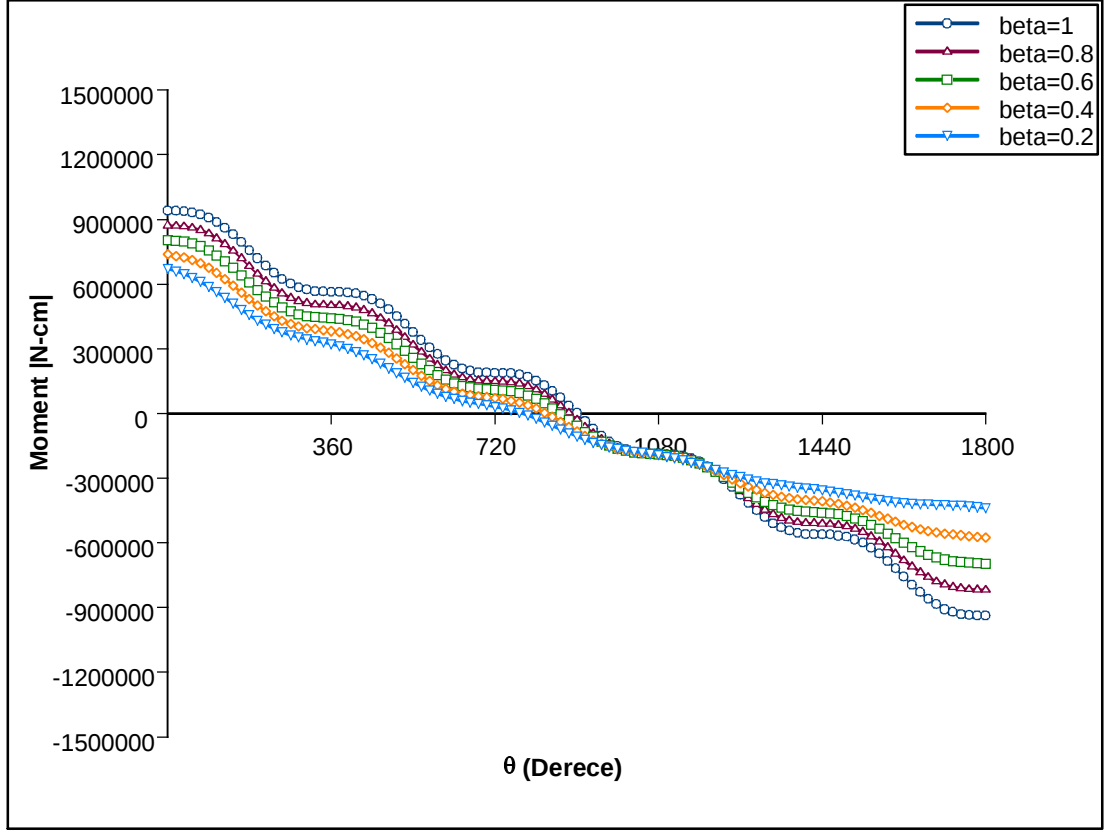
|                           |   |          |
|---------------------------|---|----------|
| Birim Sistemi             | : | N-cm     |
| Elastisite modülü ( $E$ ) | : | 3000000  |
| Poisson oranı ( $\nu$ )   | : | 0.3      |
| Kesit yarıçapı ( $r$ )    | : | Değişken |
| Taban yarıçapı ( $R_0$ )  | : | 310      |
| Tavan yarıçapı ( $R_1$ )  | : | Değişken |
| Adım yüksekliği ( $H$ )   | : | 608.5    |
| Yayıllı yük ( $q$ )       | : | 10       |



Şekil 5.16 –  $M_t$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 5)



Şekil 5.17 –  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 5)

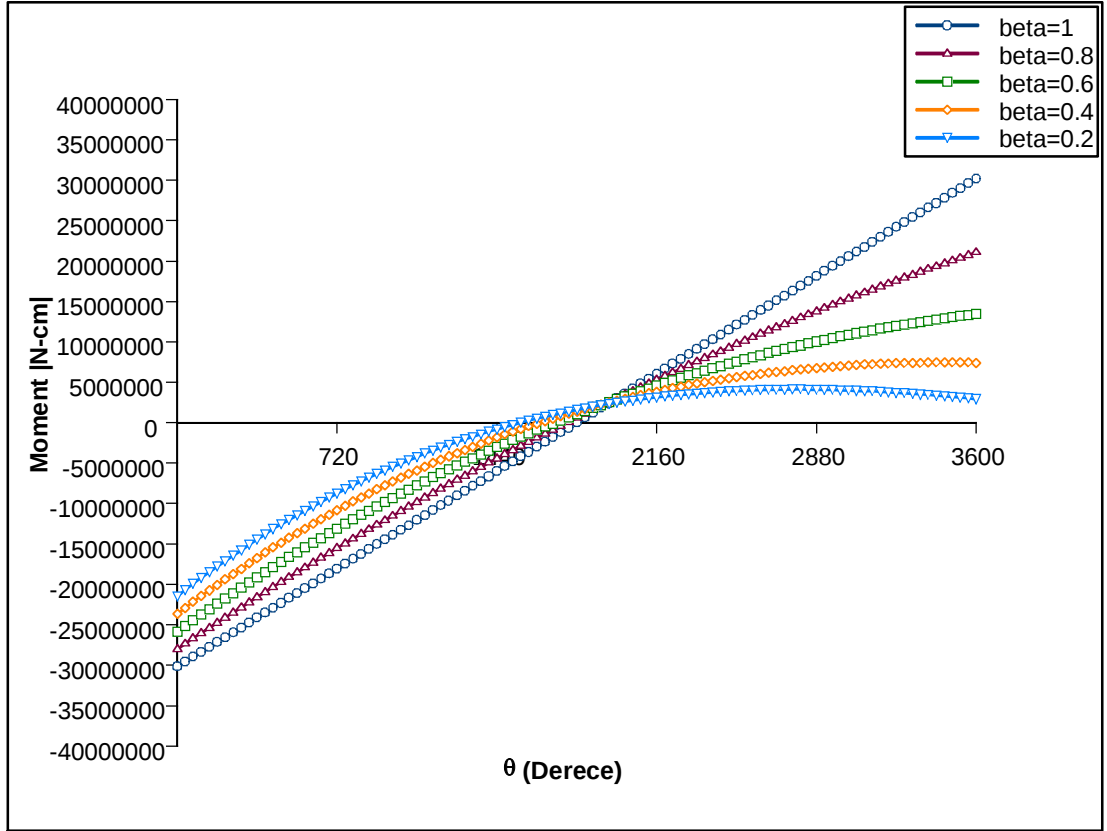


Şekil 5.18 –  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi (Örn. 5)

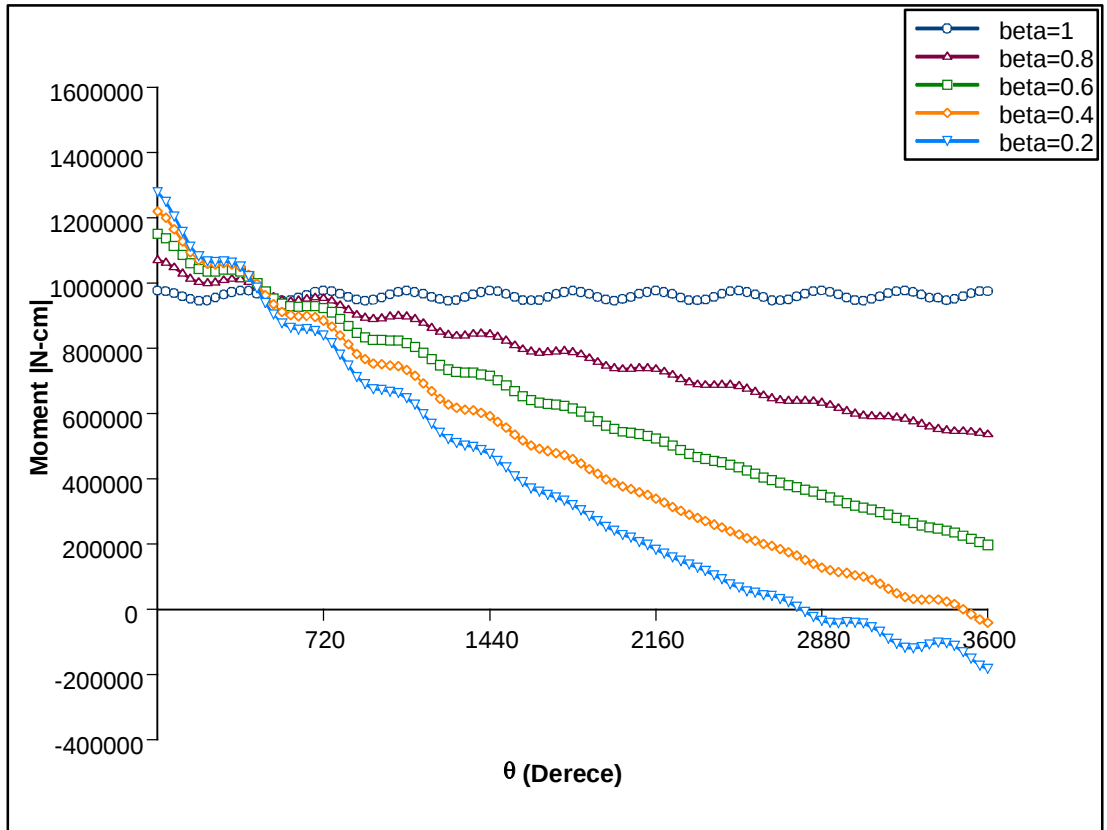
### 5.2.3 Örnek-6: Tur Sayısı 10

Bu örnekte kesit daire biçimindedir .Çözüm 100 eleman için yapılmıştır.  $r_1$   $A$  ve  $B$  noktalarındaki kesit yarıçapı,  $r_0$  helisin ortasındaki kesit yarıçapı olmak üzere  $\alpha=r_1/r_0=\{0.25, 0.50, 0.75, 1\}$  değerleri için, taban yarıçapı  $R_0=310$  alınmış olup ve tavan yarıçapı  $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$  olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Şekil (5.19), Şekil (5.20) ve Şekil (5.21) de  $\alpha=r_1/r_0=0.25$  dir.  $\alpha=r_1/r_0=\{0.50, 0.75, 1\}$  olduğunda  $M_t$ ,  $M_n$ ,  $M_b$  burulma ve eğilme momentlerinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimini gösteren grafikler için Bkz. (EK-F)

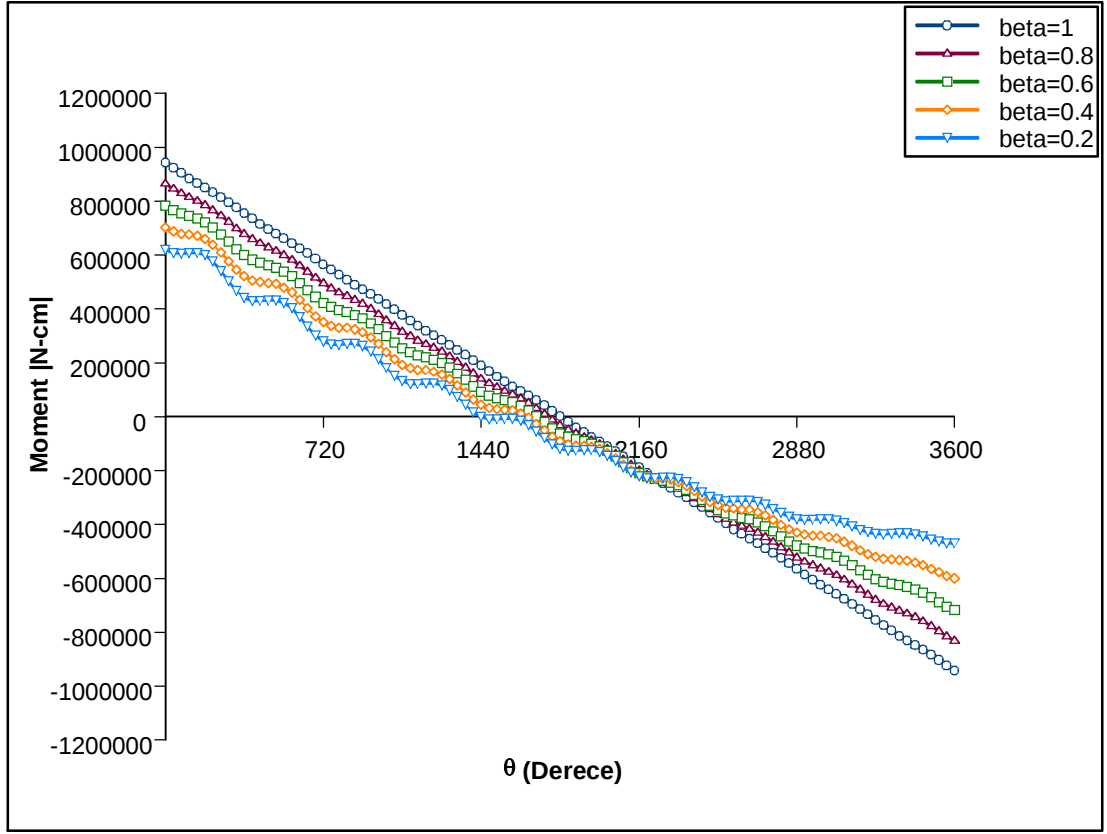
|                           |   |          |
|---------------------------|---|----------|
| Birim Sistemi             | : | N-cm     |
| Elastisite modülü ( $E$ ) | : | 3000000  |
| Poisson oranı ( $\nu$ )   | : | 0.3      |
| Kesit yarıçapı ( $r$ )    | : | Değişken |
| Taban yarıçapı ( $R_0$ )  | : | 310      |
| Tavan yarıçapı ( $R_1$ )  | : | Değişken |
| Adım yüksekliği ( $H$ )   | : | 608.5    |
| Yayıllı yük ( $q$ )       | : | 10       |



Şekil 5.19–  $M_t$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 6)



Şekil 5.20–  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi (Örn. 6)



Şekil 5.21–  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi (Örn. 6)

## 6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada Timoshenko çubuk kuramı ve karışık sonlu eleman formülasyonu göz önüne alınmak suretiyle silindirik ve konik helislerin statik analizi yapılmaktadır. Söz konusu helislerde değişken kesit özellikleride dikkate alınabilmektedir. Karışık sonlu elemanda kuvvetler, momentler, yerdeğiştirmeler ve dönmeler bağımsız bilinmeyenler olarak dikkate alınabilmekte ve doğrudan hesaplanabilmektedir. Karışık sonlu elemanın geliştirilmesinde esas alınan fonksiyonelde birinci mertebeden daha yüksekten türevlerin bulunmaması nedeniyle doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmaktadır.

Bu çalışmada üniform yayılı yük etkisindeki silindirik ve konik helislerin iç kuvvetleri ( $n$ ) tur sayısının yanı sıra yatay açı  $\theta$  ve değişken kesit özelliklerini ifade eden  $\alpha$  ve helisin tavan yarıçapının taban yarıçapına oranını temsil eden  $\beta^*$  nın çeşitli değerlerine karşı gelecek şekilde hesaplanarak ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlara göre eleman içerisinde oluşan kesit tesirleri  $\beta^*$  nın artan değerleri için artmakta azalan değerleri için azalmaktadır.

## KAYNAKLAR

- Abdülbaki, A. ve Shukair, A.**, (1973). "Continous helical girders", *Journal .of ASCE*, **99/ST 10**.
- Actis, R.L., Szabo B.A. ve Schwab, C.** (1997). "Hierarchic models for laminated plates and shells", *Comput. Meth.Apl. Mech. Engng*, **172**, 79-107.
- Akz, A.Y., Omurtag, M.H., ve Dođruođlu, A.N.**, (1991). "The Mixed Finite Element Formulation for Three Dimensional Bars", *Int. J. Solids Structures*, **28**, 225-234.
- Babuska, I., ve Suri, M.** (1994). "The p and hp versions of the finite element methods, Basic Principles and Properties", *SIAM, review*, **36**: 578-632
- Becker, L.E. ve Chassie, G.G. ve Cleghorn, W.L.**, (2002). "On the natural frequencies of helical compression springs", *Int. J. of Mechanical Sciences*, **44**, 825-841.
- Cinemre, V.**, (1960). "Başlangıç değerler metodu ile helisel çubukların statik hesabı". *DoktoraTezi İ.T..*
- Gerdes, K., Matache, A.M., Schwab C.**, (1998). Analysis of membrane locking in hp FEM for a cylindrical shell. *ZAMM*, **78**(10): 663-686
- Gerdes, K., ve Schwab, C.**, (1998). Hierarchic models of Helmholtz problems on thin domains – mathemaical models & methods, In *Applied Scieeces*, **8**: 1-35
- Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, (1989). "Helisel ubukların statik davranışının rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi.", *Çukurova Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi, Adana*.
- Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, (1990). "Helis eksenli merdivenlerin bilgisayarda dinamik hesabı", *İnş. Mühendisliđinde Bilgisayar Kullanımı İkinci Sempozyomu, İ.T.. İnşaat Fakültesi*.
- Holmes, M.C, ve Asce, J.M.**, (1957). "Analysis of helical beams under symmetric loading", *J.of Structural Division*, **83**, 1437.

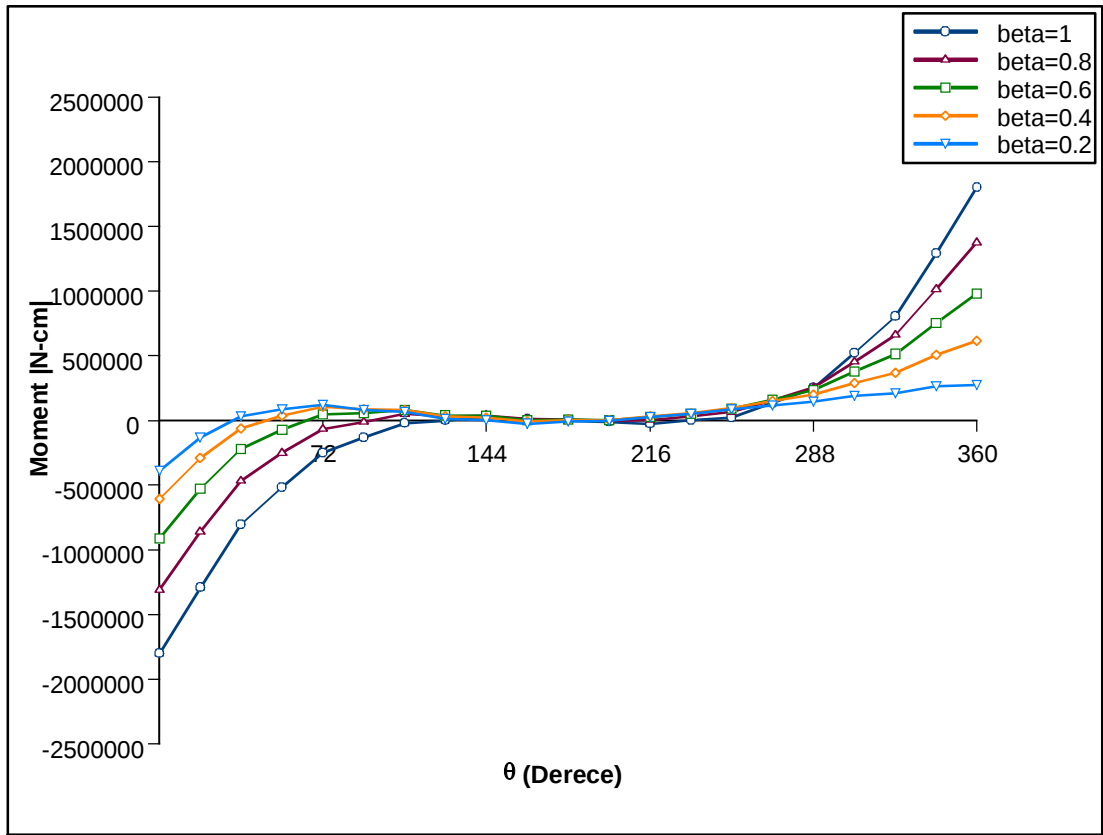
- İnan, M.**, (1966). “Elastik çubukların genel teorisi”, *İ.T.Ü. yayını*.
- Melenk, J.M., Gerdes, K. ve Schwab, C.**, (1999). “Fully discrete hp-finite elements: Fast quadrature”. In *SAM Research Reports*, 15, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich.
- Mottershead J.E.**, (1980). “Finite elements for dynamical analysis of helical rods”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **22**, 267–283.
- Nagaya K., Takeda S. ve Nakata Y.**, (1986). “Free vibration of coil springs of arbitrary shape”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **23**, 1081-1099.
- Omurtag, M.H. ve Aköz, A.Y.**, (1991). “The mixed finite element formulation for three dimensional bars”, *Int. J. Solids Structures*, **28**, 225-234.
- Omurtag, M.H. ve Aköz, A.Y.**, (1992). “The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading”, *Computers & Structures*, **43**, 325-331.
- Omurtag, M.H. ve Özütok, A. ve Aköz, A.Y.**, (1997). “Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential”, *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 295-317.
- Panayotunakos, D.E. ve Theocaris, P.S.**, (1979). “Flexibility matrix for skew-curved beams”, *Int. J. Solids Structures*, **15**, 783-794.
- Pearson, D.**, (1982). “The transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs.”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **24**, 163-171.
- Reddy, J.N.**, (1984). “Energy and variational methods in applied mechanics.”, *Wiley interscience publication*.
- Scordelis, A.C.**, (1960). “Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders.”, *J. of American Concrete Institute*.
- Stefanou, G.D.**, (1984). “Simplified discrete method for the design of helical rectangular beams of very large width”, *Computers & Structures*, **18**, 861-874.

- Swanobori, T. ve Fukushima Y.**, (1983). "Analysis of dynamic behaviours of coil spring", *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. (in Japanese)*, **49**, 422-428.
- Xiong Y. ve Tabarrok B.**, (1992). "A finite element method for the vibration of spatial rods under various applied loads.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 41-51.
- Yıldırım, V.**, (1996). "Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs", *Journal of Numerical Methods in Engineering*, **39**, 99-114.
- Yıldırım, V. ve İnce, N.**, (1997). "Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape", *Journal of Sound and Vibration*, **204**(2), 311-329.
- Yıldırım, V. ve Sancaktar, E.**, (2000). "Lineer free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs", *Int. J. of Mechanical Sciences*, **42**, 1153-1169.
- Yıldırım, V.**, (2004). "A parametric study on the natural frequencies of unidirectional composite conical springs.", *Commun. Numner. Meth. Engng.*, **20**, 207-227.

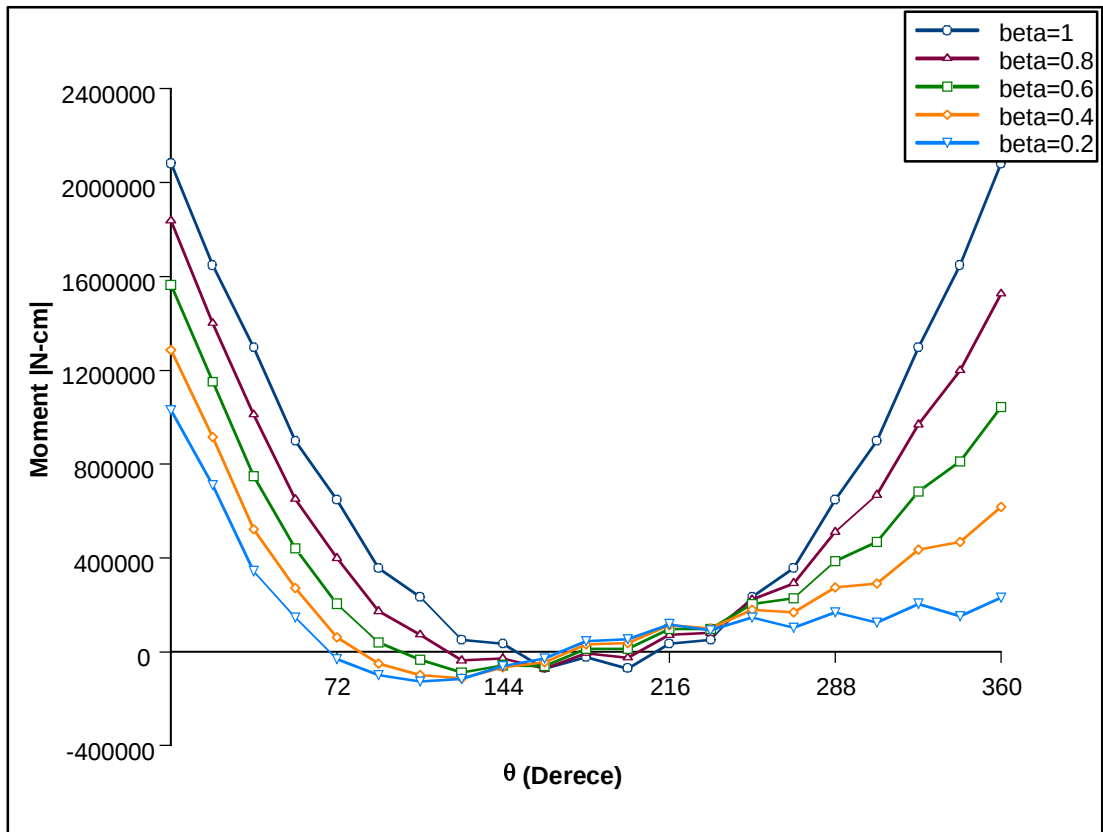
## EKLER

|             |                                                          | <b><u>Sayfa No</u></b> |
|-------------|----------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>EK-A</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 1).....  | 43                     |
| <b>EK-B</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 2) ..... | 51                     |
| <b>EK-C</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 3) ..... | 59                     |
| <b>EK-D</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 4) ..... | 67                     |
| <b>EK-E</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 5) ..... | 72                     |
| <b>EK-F</b> | Momentlerin $\beta=R_I/R_0$ ile değişimi (Örnek 6) ..... | 77                     |

## EK-A

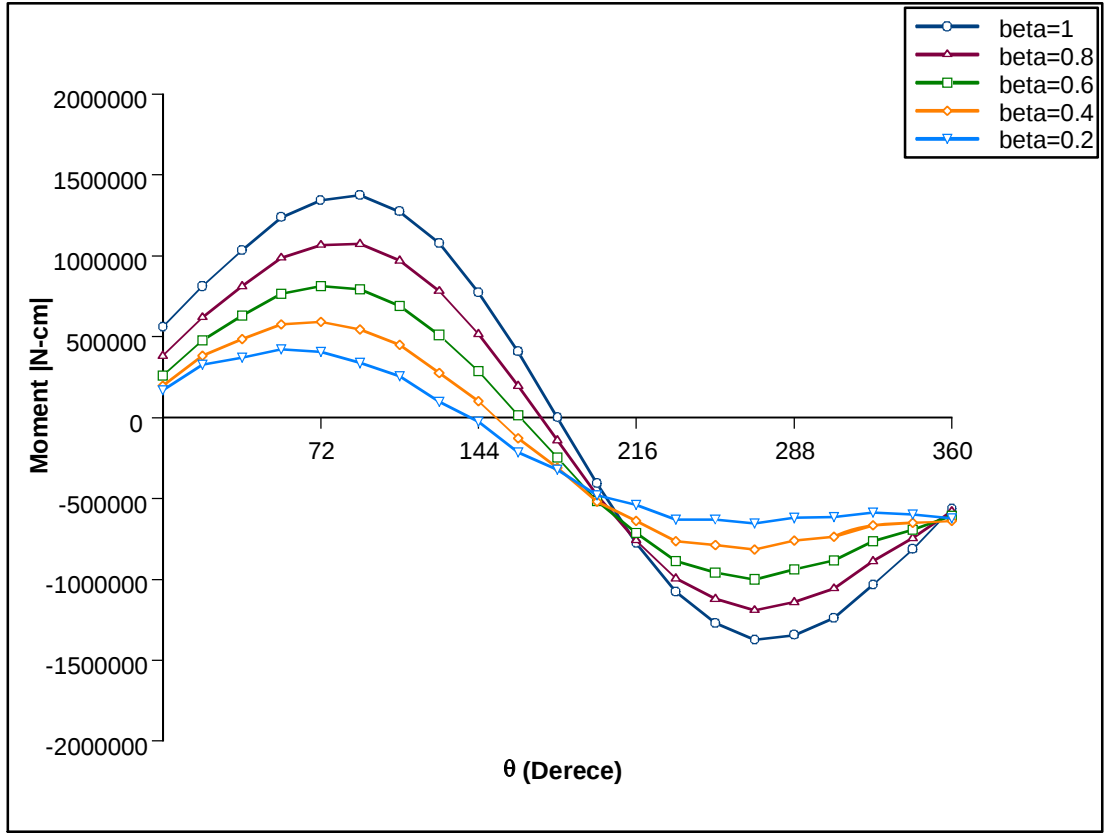


Şekil A.1 – Örnek 1’de  $n = 1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

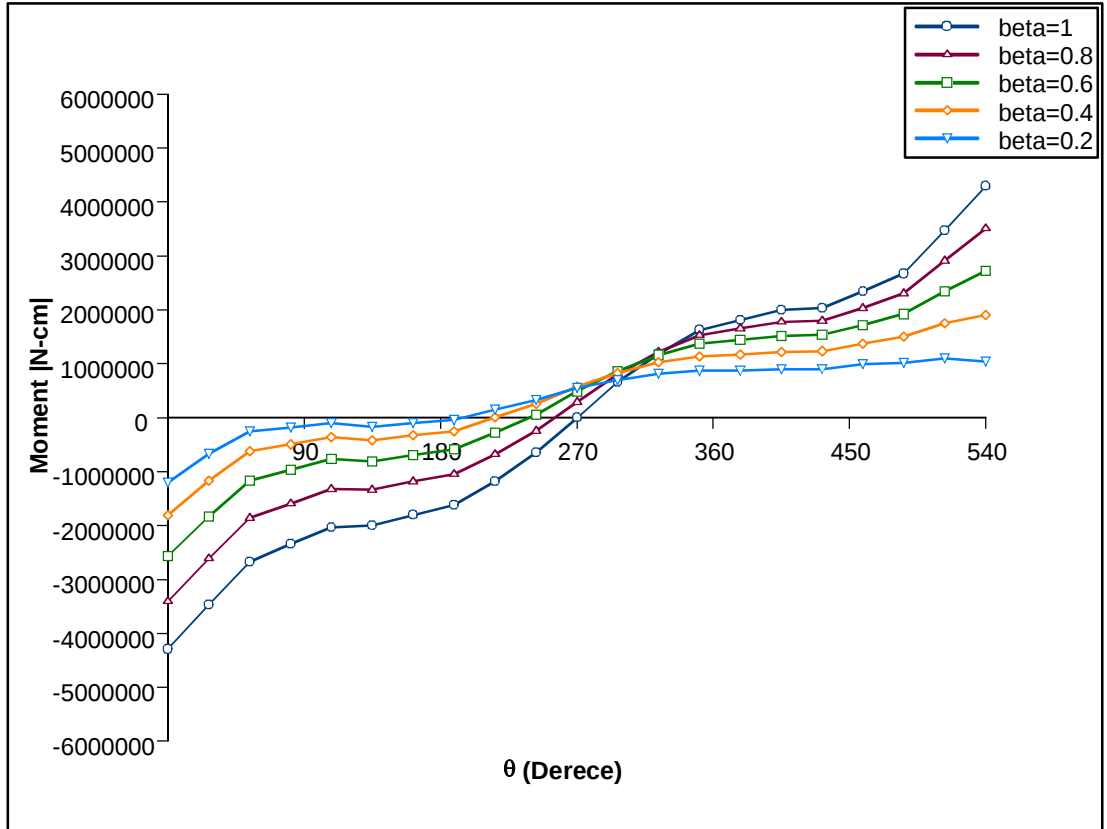


Şekil A.2 – Örnek 1’de  $n = 1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-A

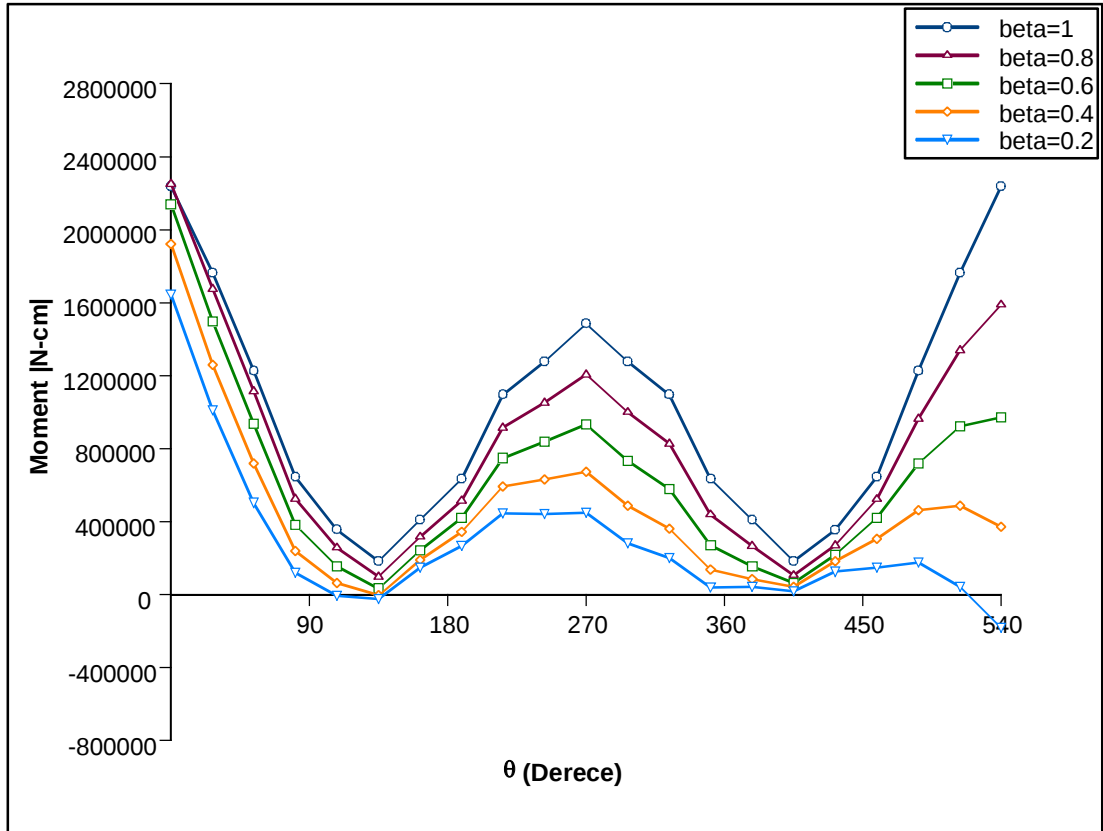


Şekil A.3 – Örnek 1’de  $n = 1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

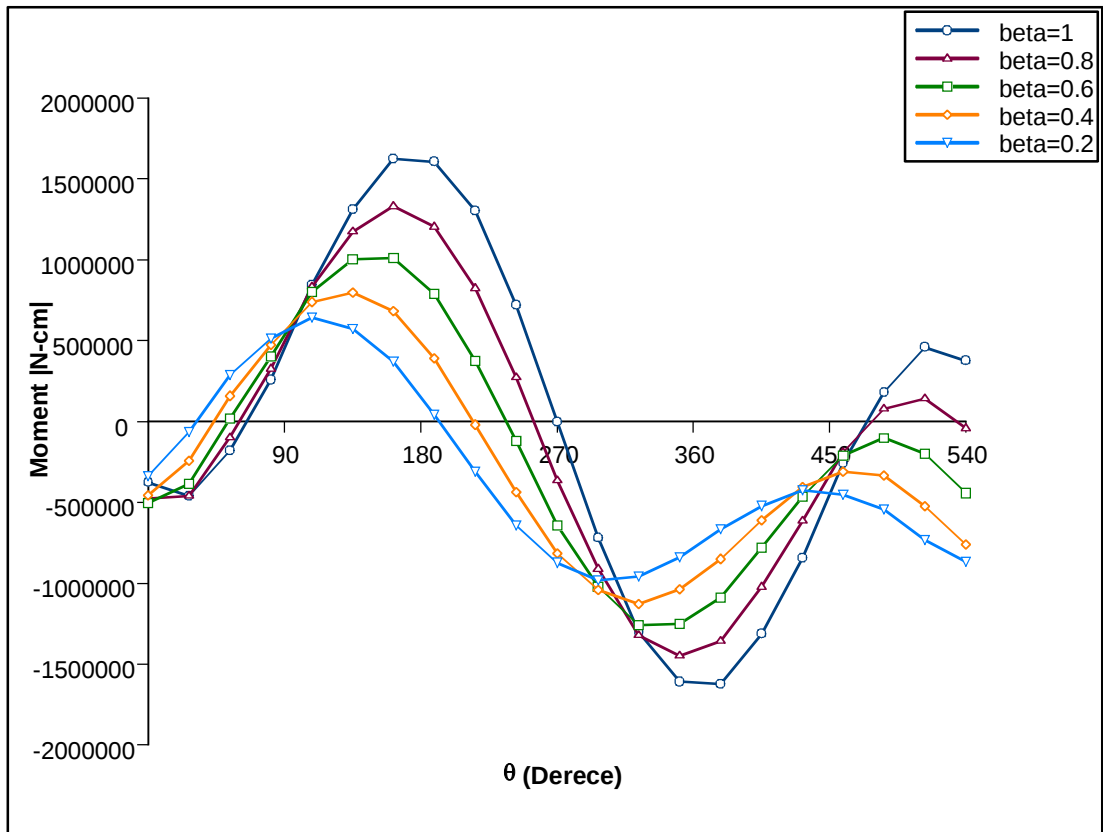


Şekil A.4 – Örnek 1’de  $n = 1.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-A

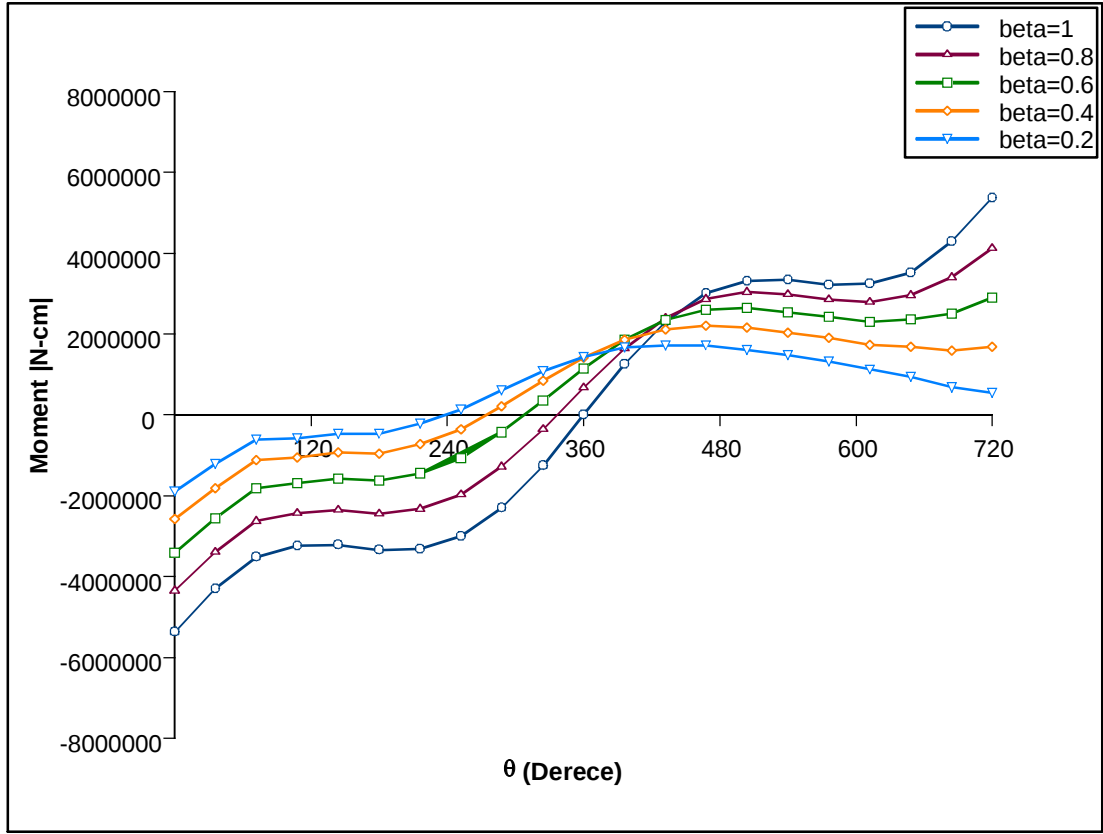


Şekil A.5 – Örnek 1’de  $n=1.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

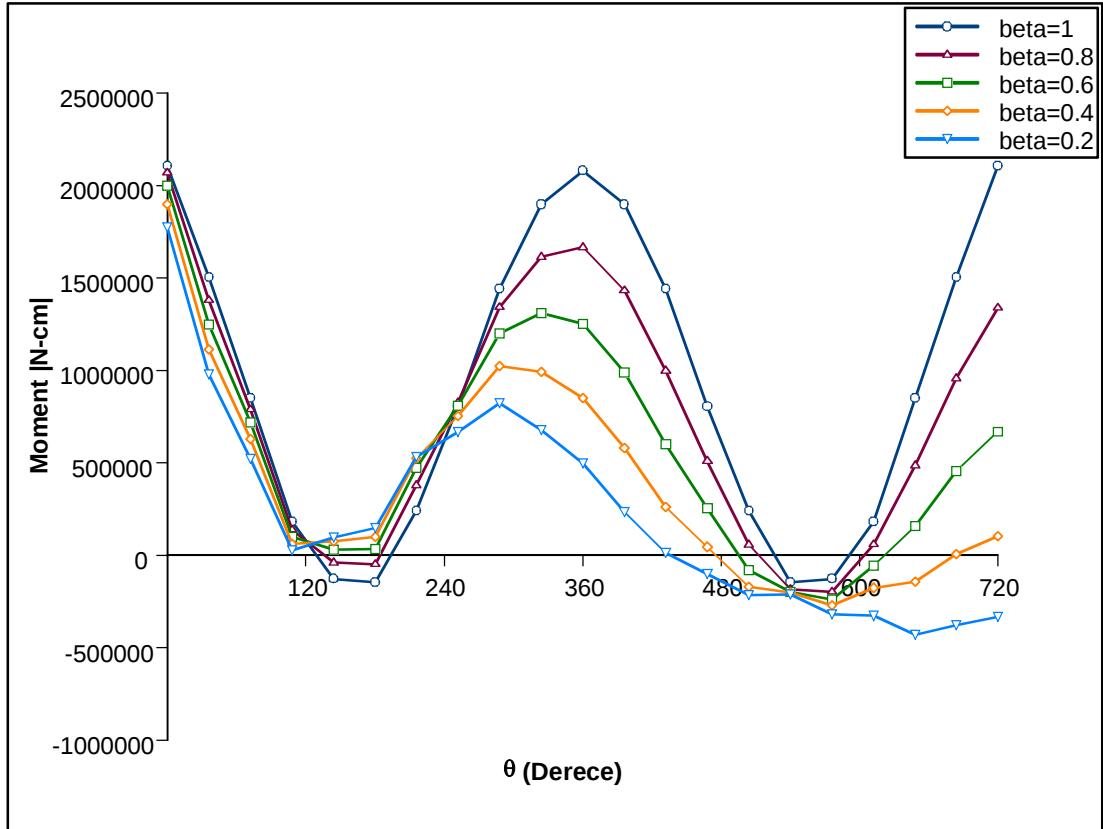


Şekil A.6 – Örnek 1’de  $n=1.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-A

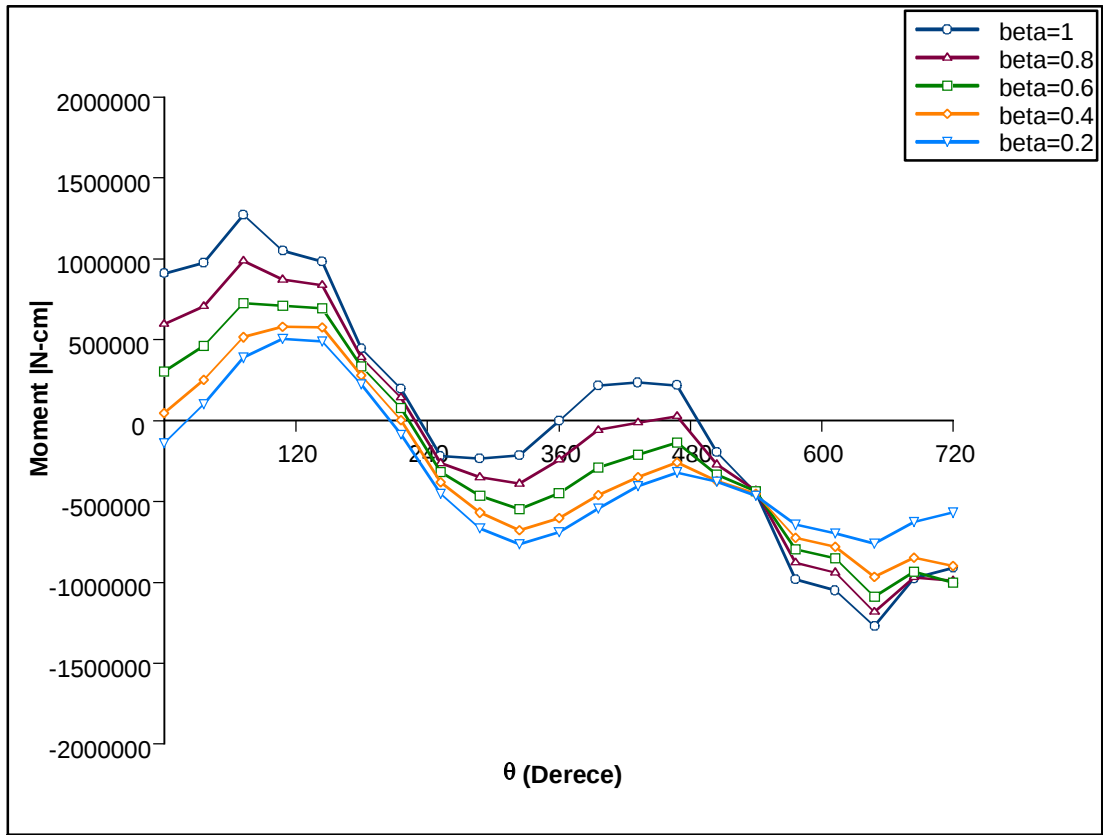


Şekil A.7 – Örnek 1’de  $n=2$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

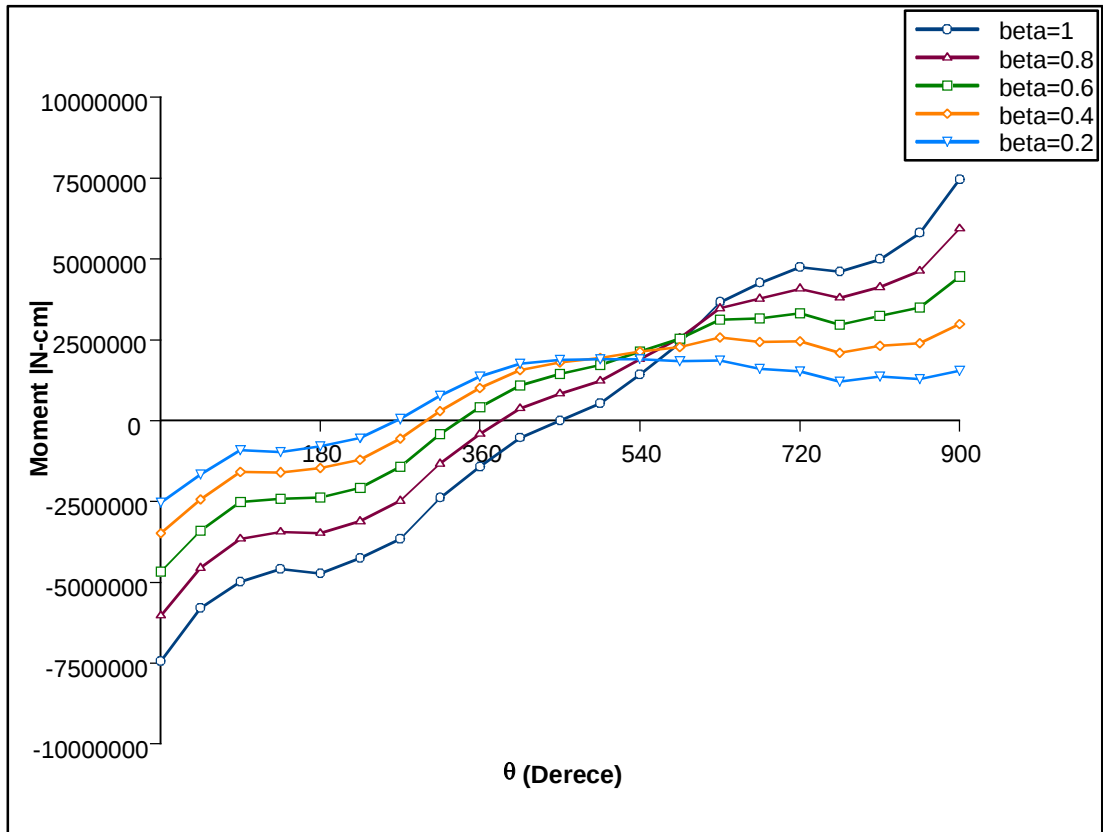


Şekil A.8 – Örnek 1’de  $n=2$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-A

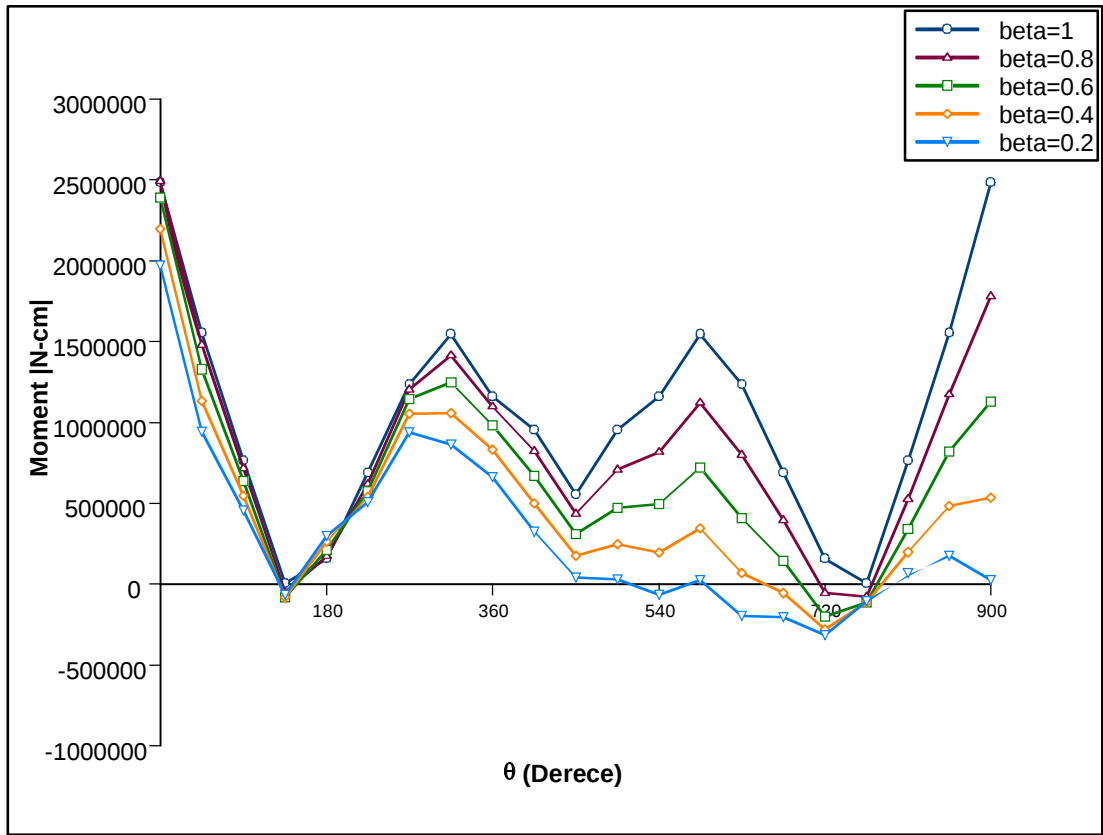


Şekil A.9 – Örnek 1’de  $n=2$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

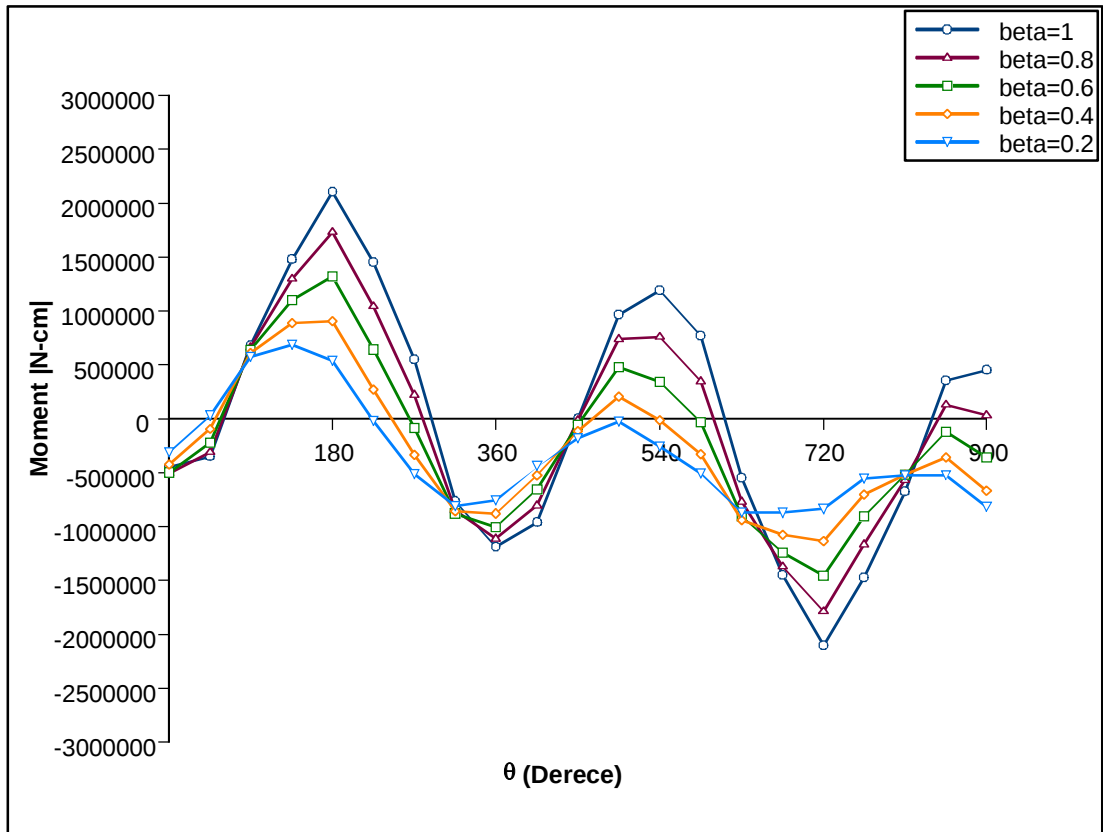


Şekil A.10 – Örnek 1’de  $n=2.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-A

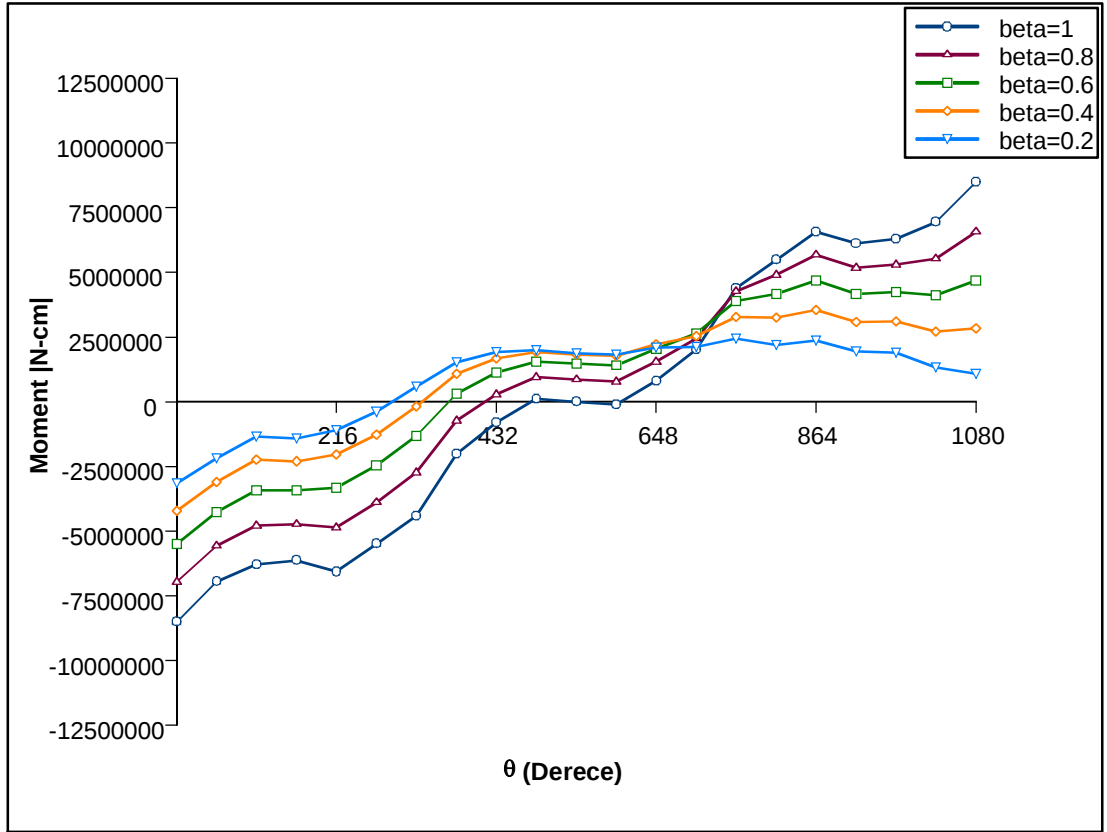


Şekil A.11 – Örnek 1’de  $n=2.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

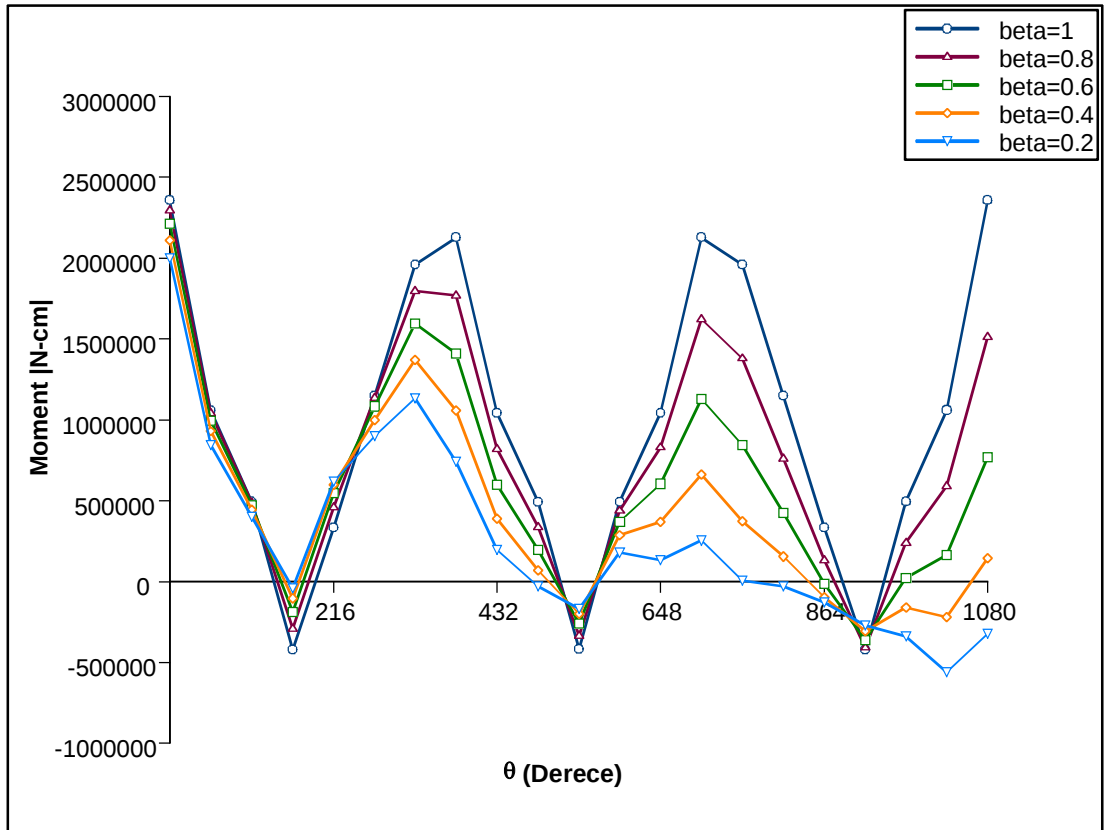


Şekil A.12 – Örnek 1’de  $n=2.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

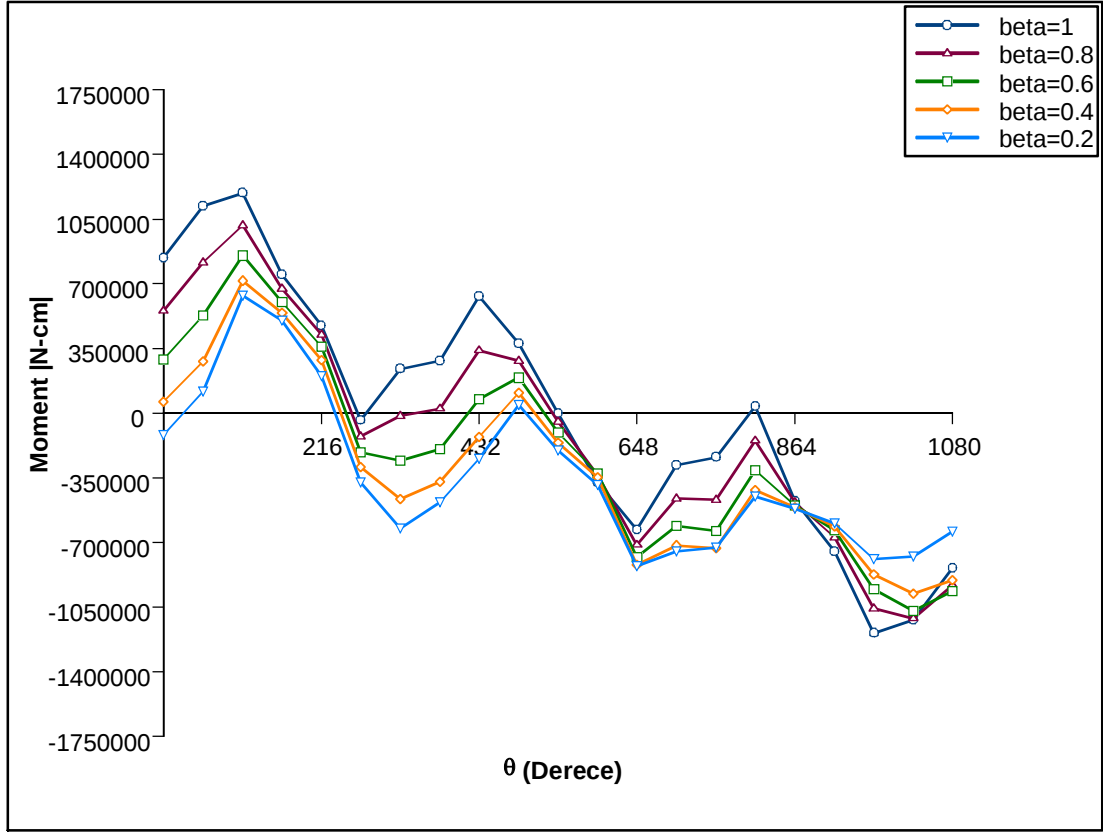
## EK-A



Şekil A.13 – Örnek 1’de  $n=3$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

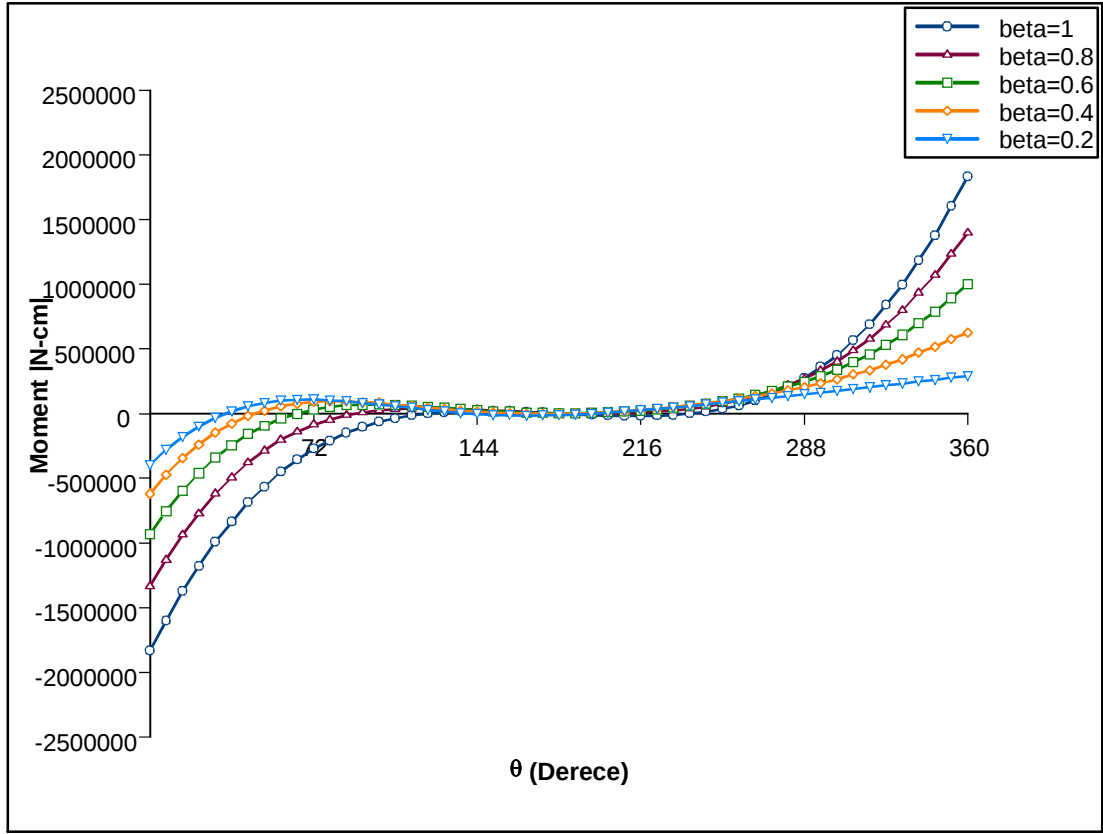


Şekil A.14 – Örnek 1’de  $n=3$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

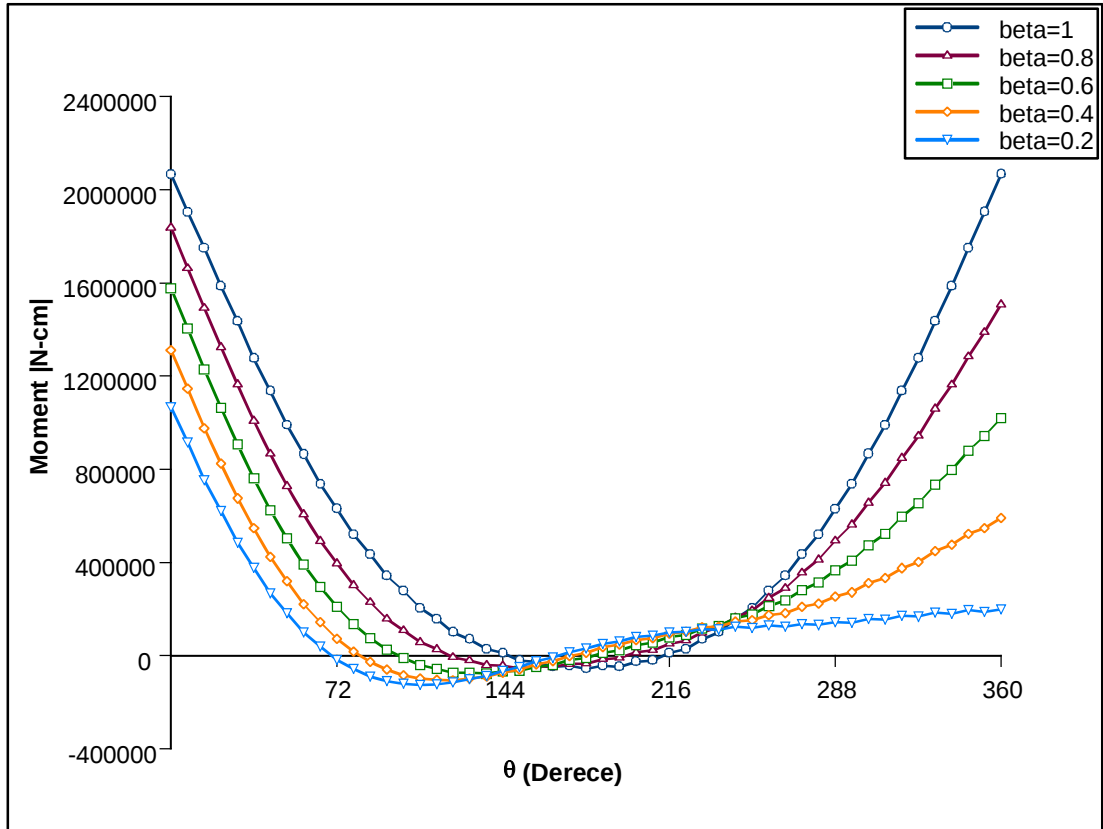


Şekil A.15 – Örnek 1’de  $n=3$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

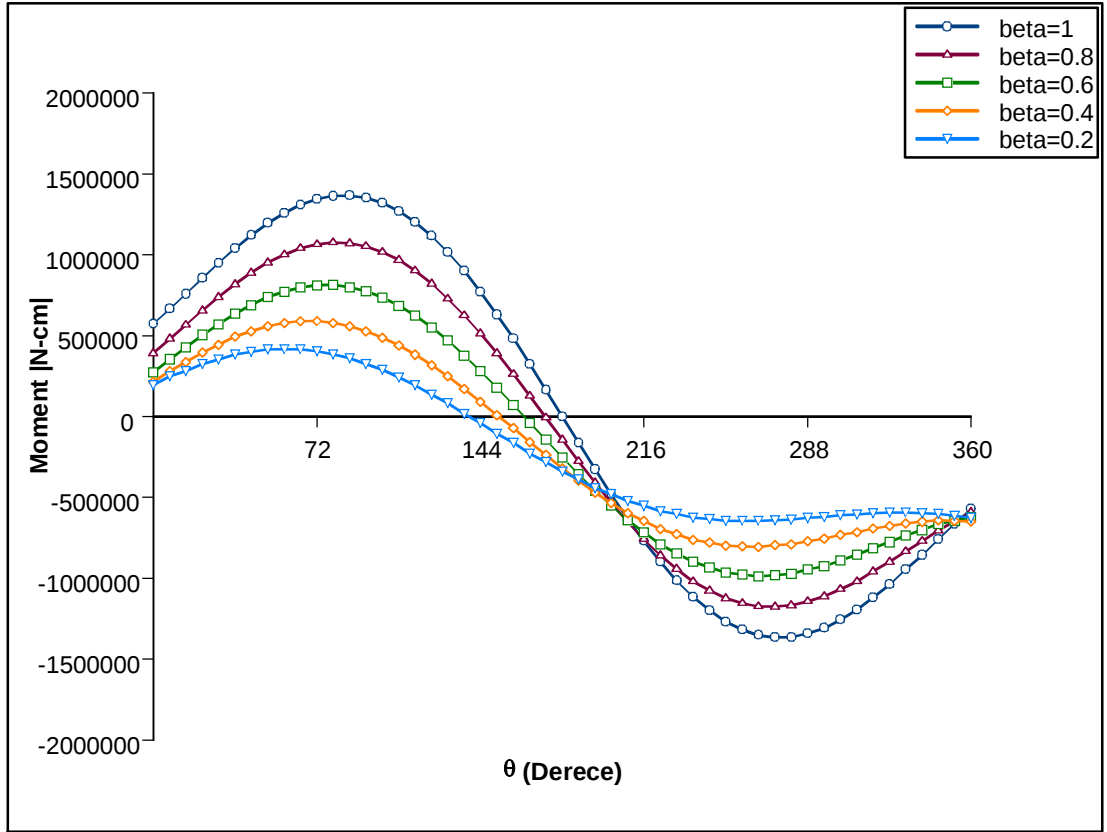


şekil B.1 – Örnek 2’de  $n = 1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

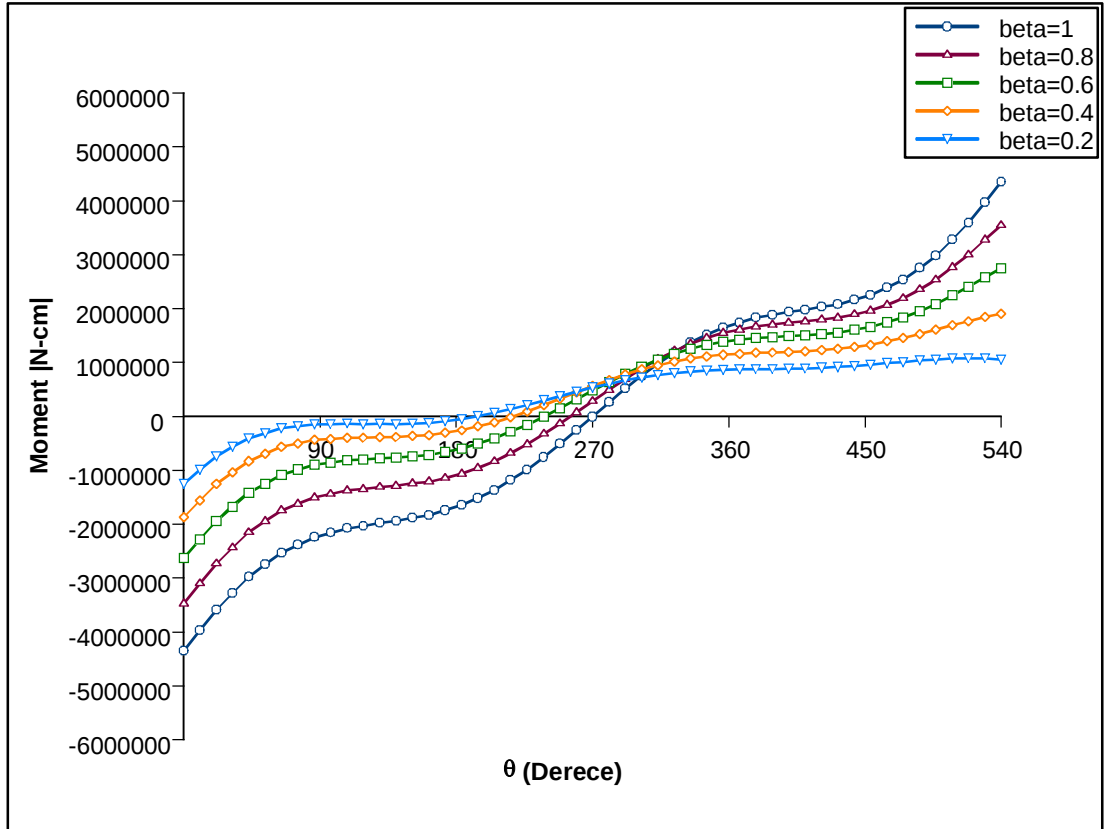


şekil B.2 – Örnek 2’de  $n = 1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

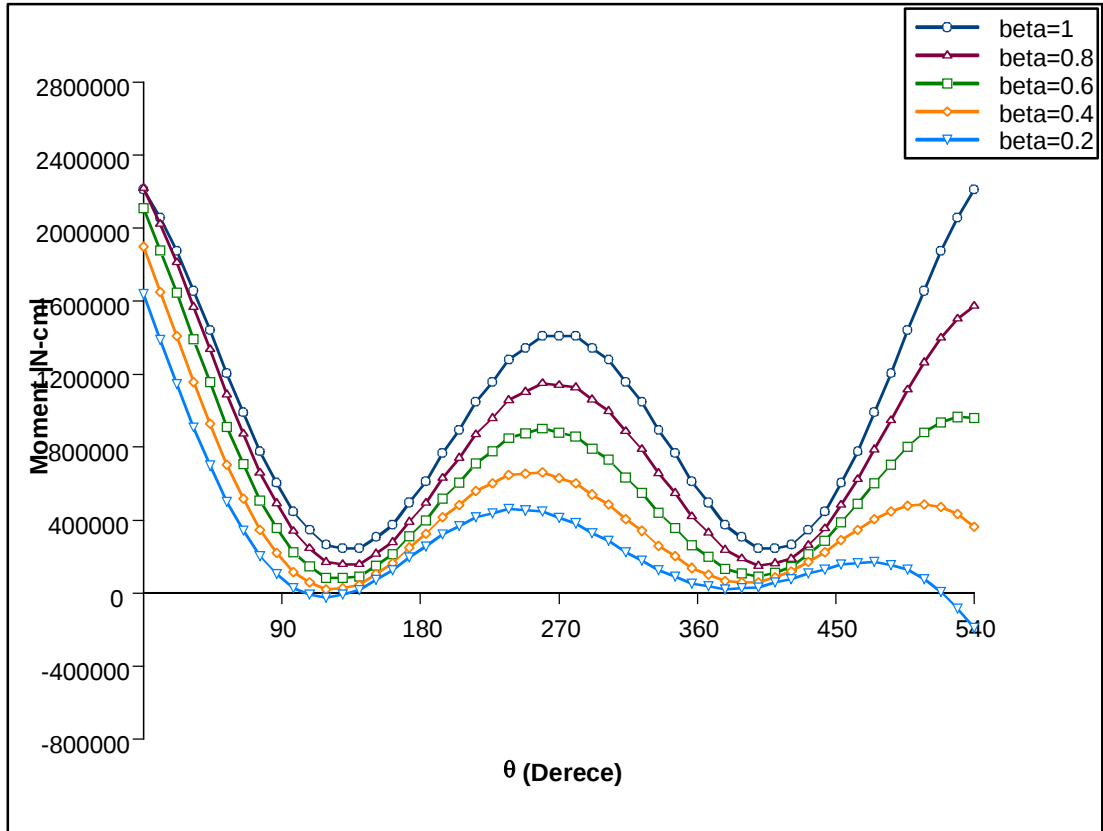


Şekil B.3 – Örnek 2’de  $n = 1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

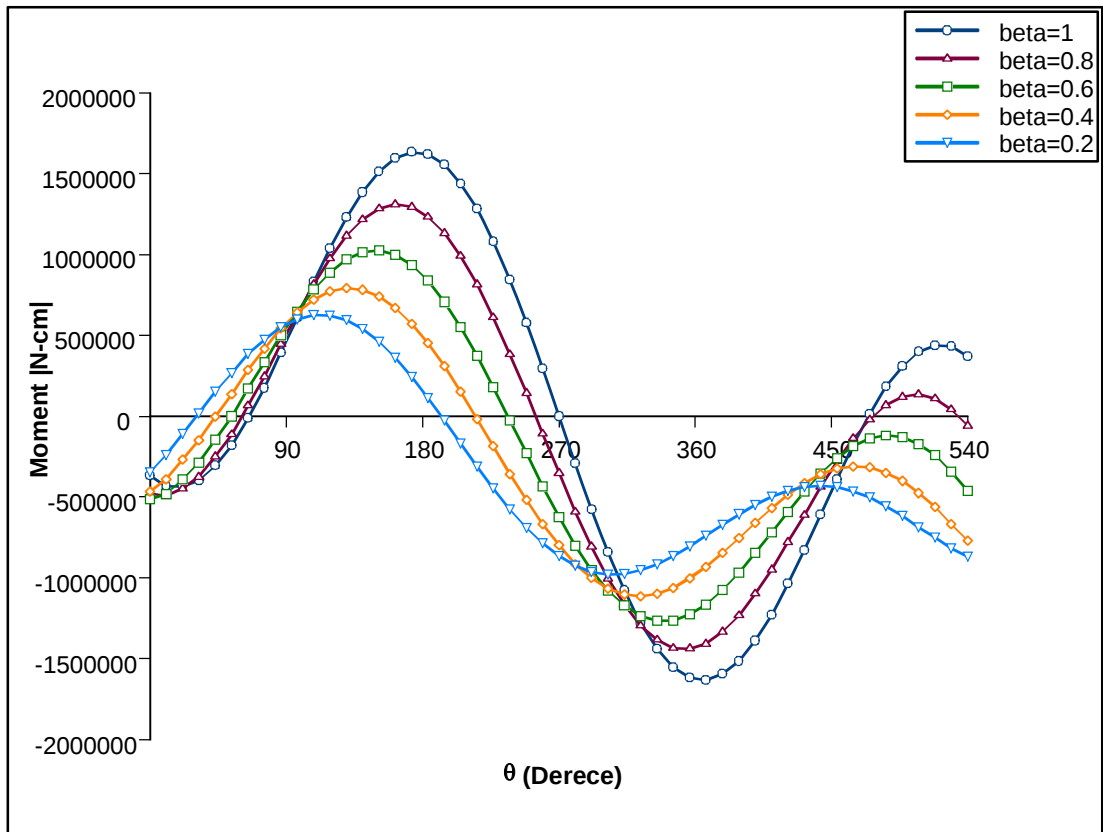


Şekil B.4 – Örnek 2’de  $n=1.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

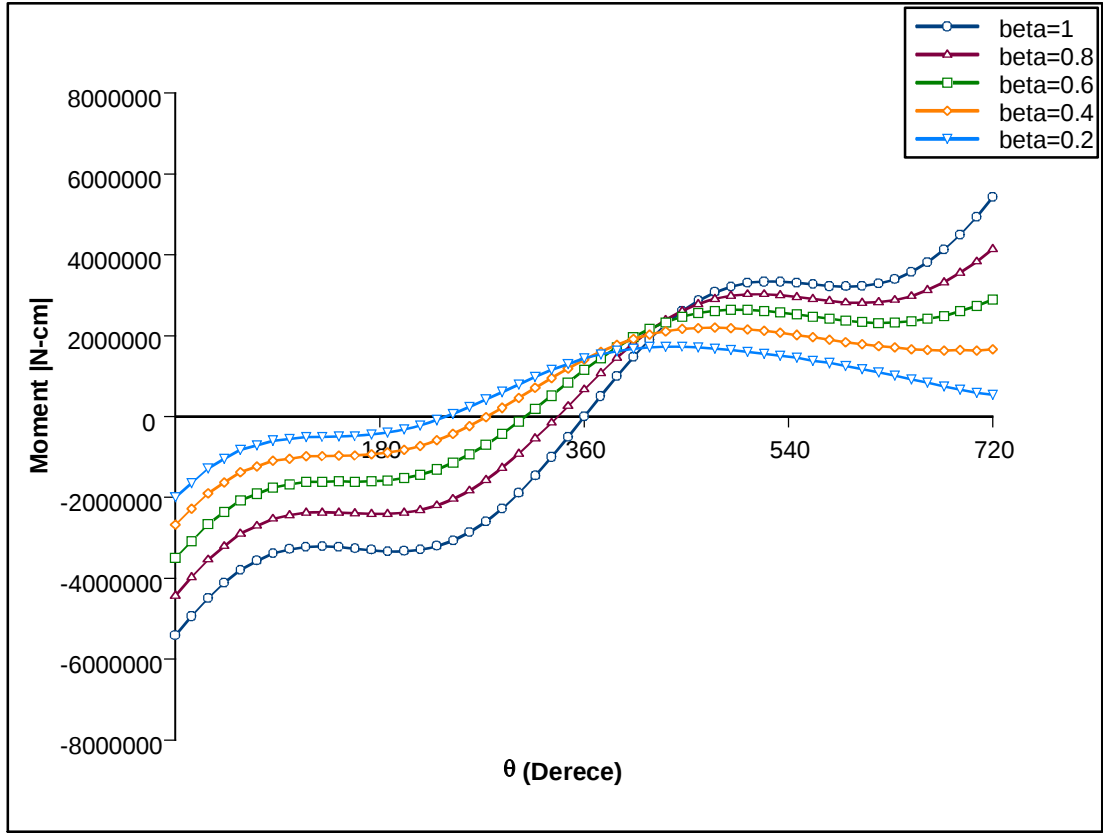


Şekil B.5 – Örnek 2’de  $n=1.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

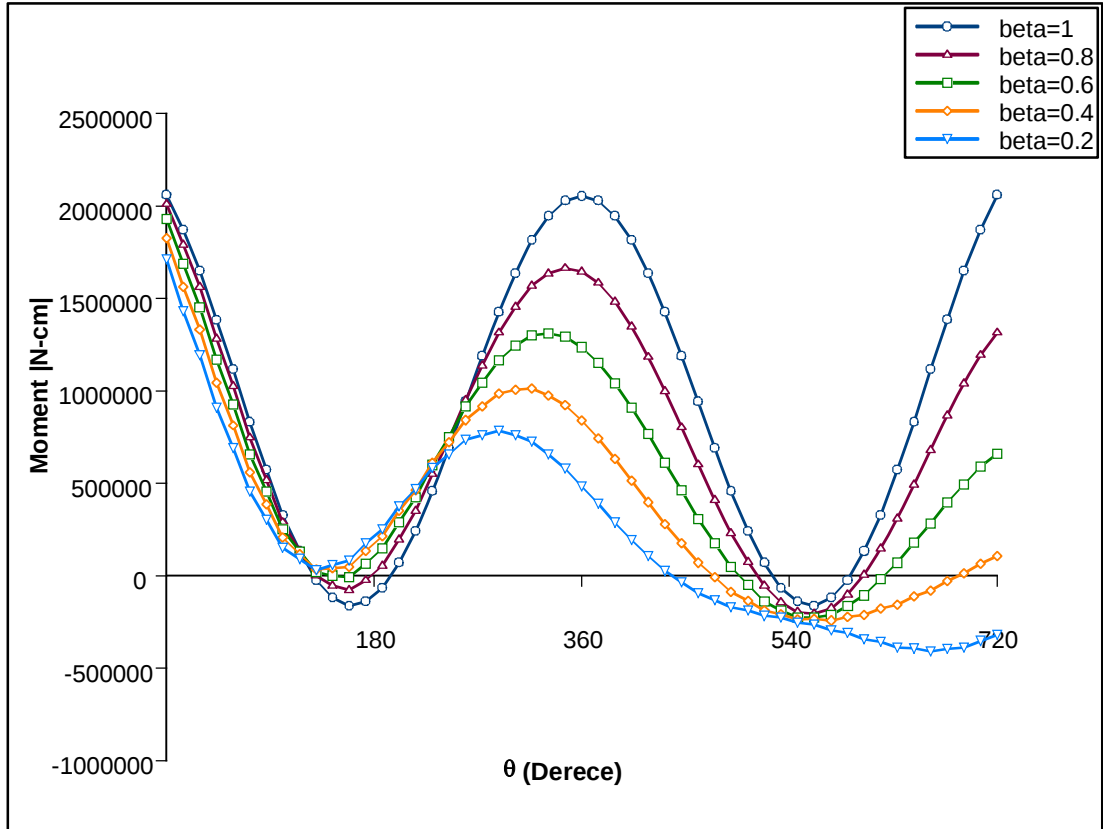


Şekil B.6 – Örnek 2’de  $n=1.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

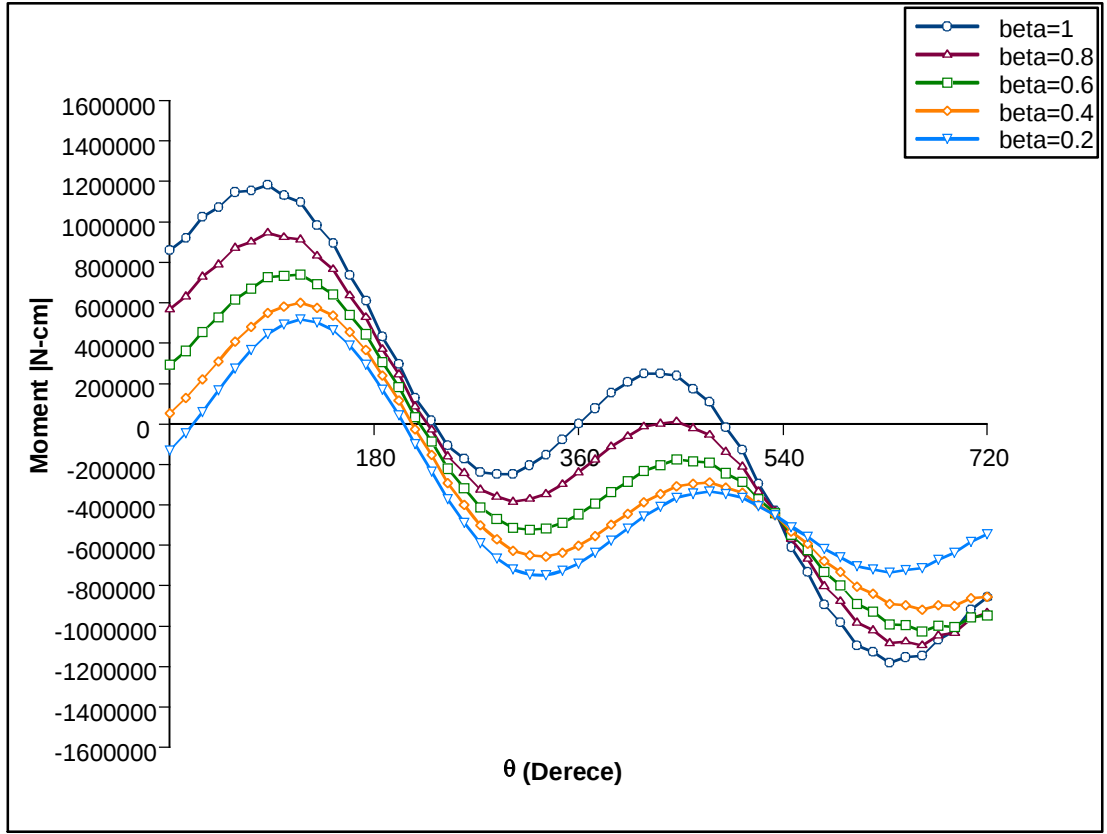


Şekil B.7 – Örnek 2’de  $n=2$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

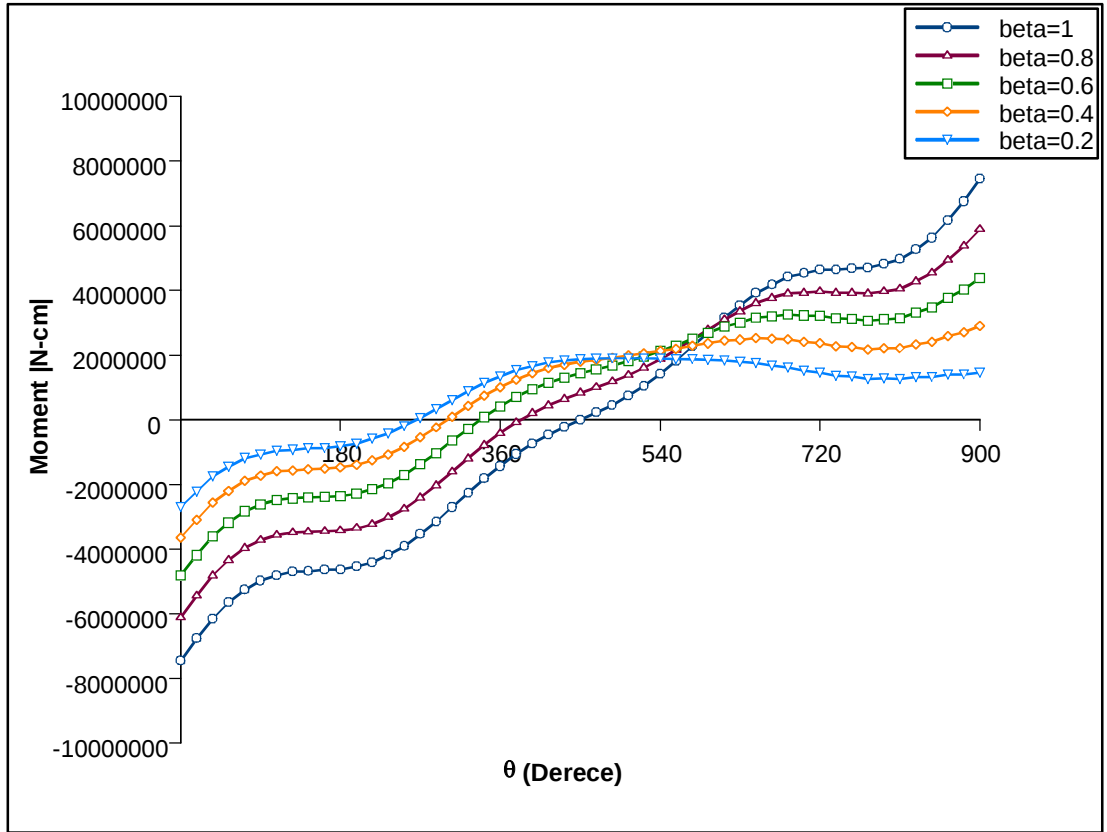


Şekil B.8 – Örnek 2’de  $n=2$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

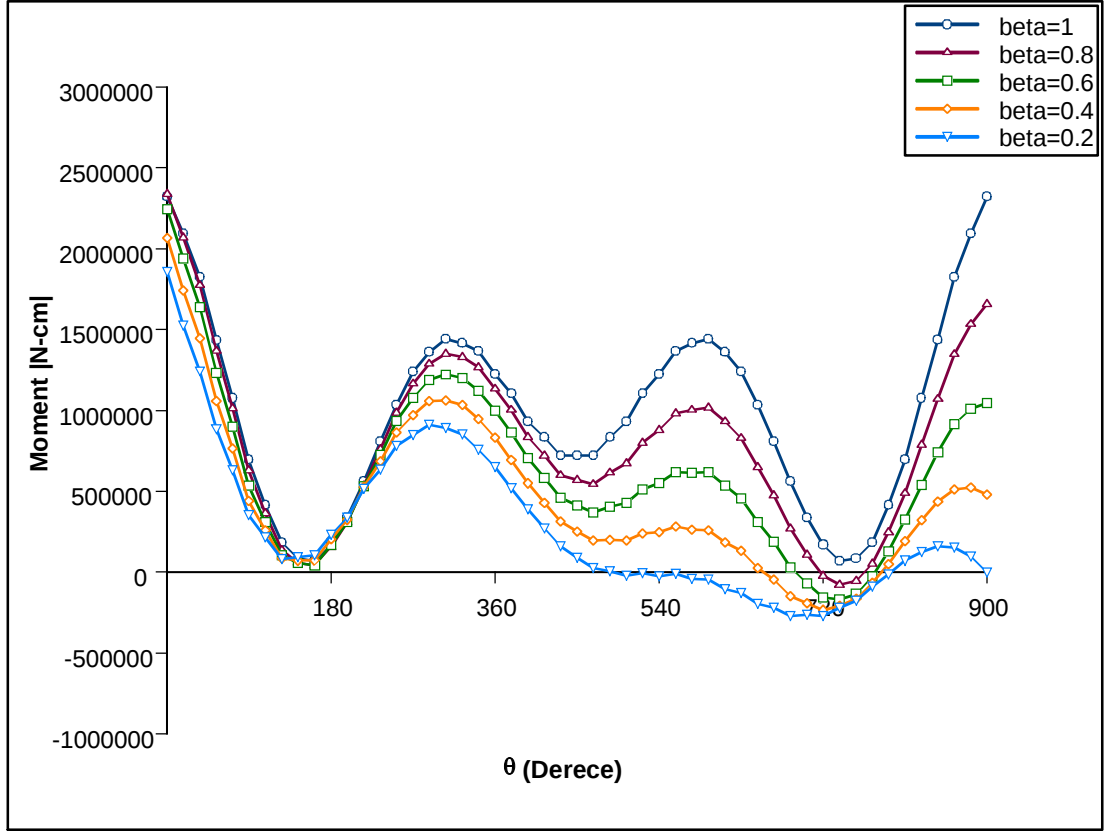


Şekil B.9 – Örnek 2’de  $n=2$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

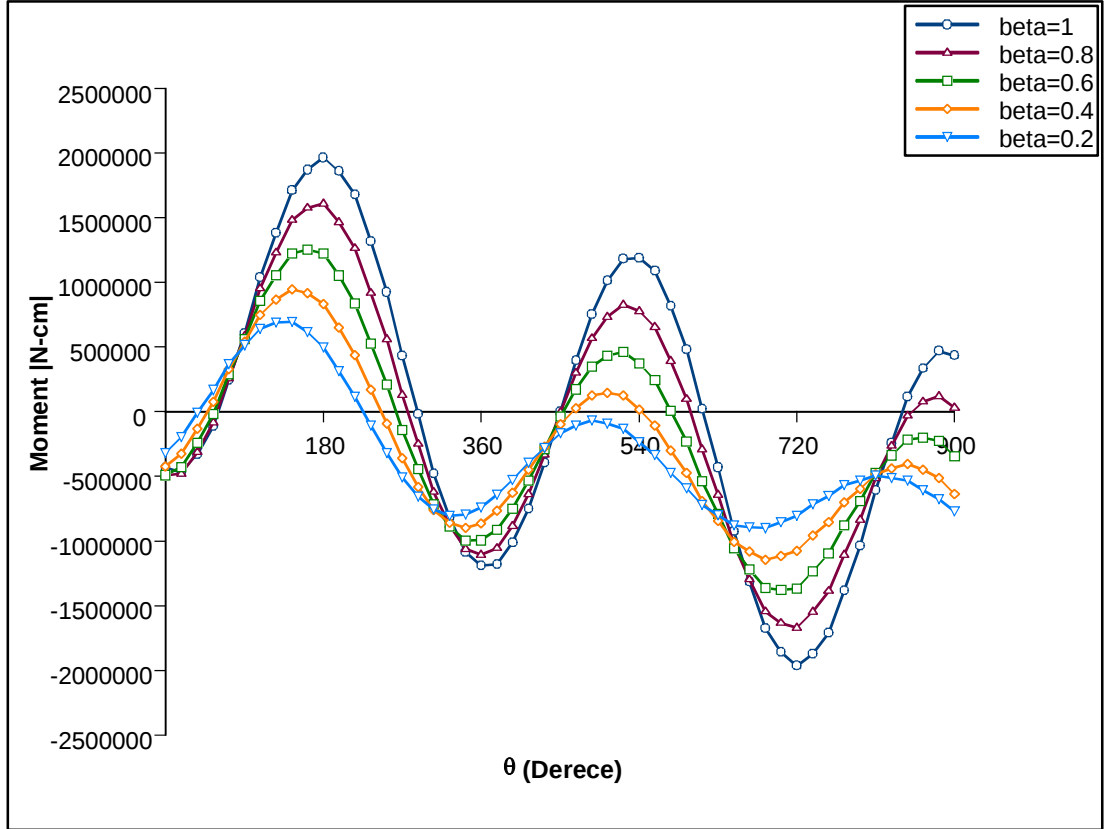


Şekil B.10 – Örnek 2’de  $n=2.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

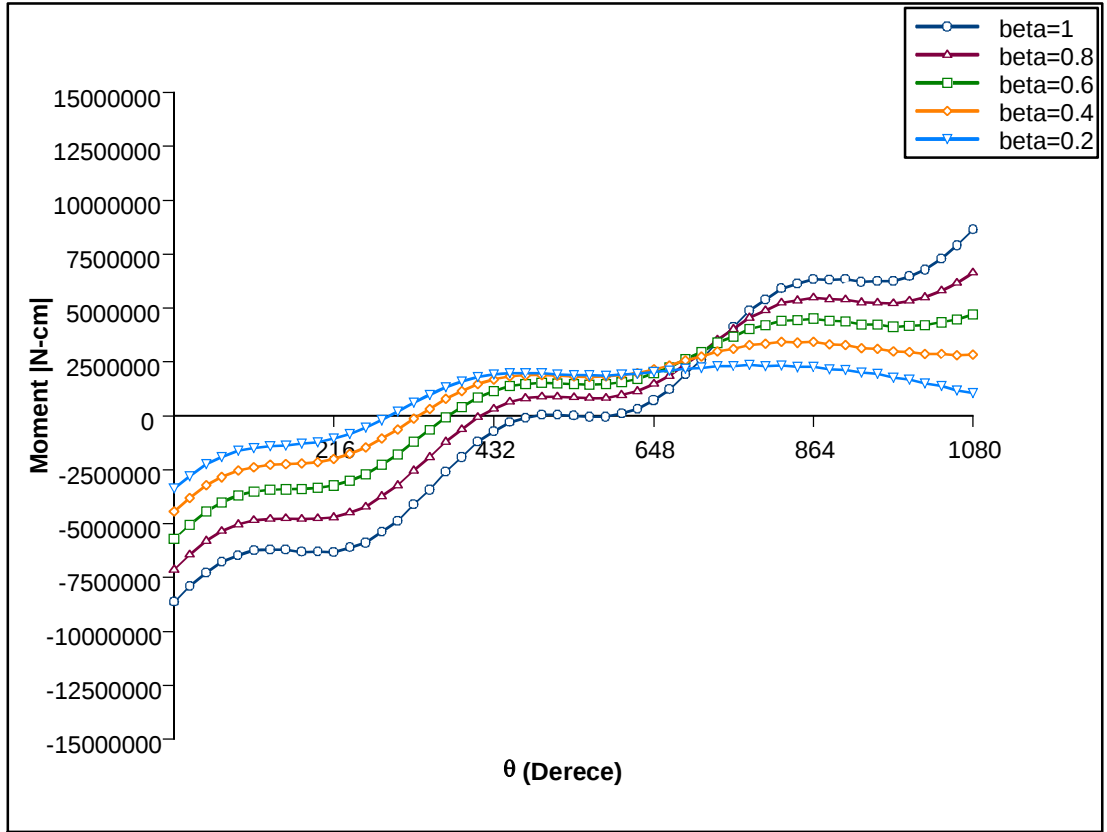


Şekil B.11 – Örnek 2’de  $n=2.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

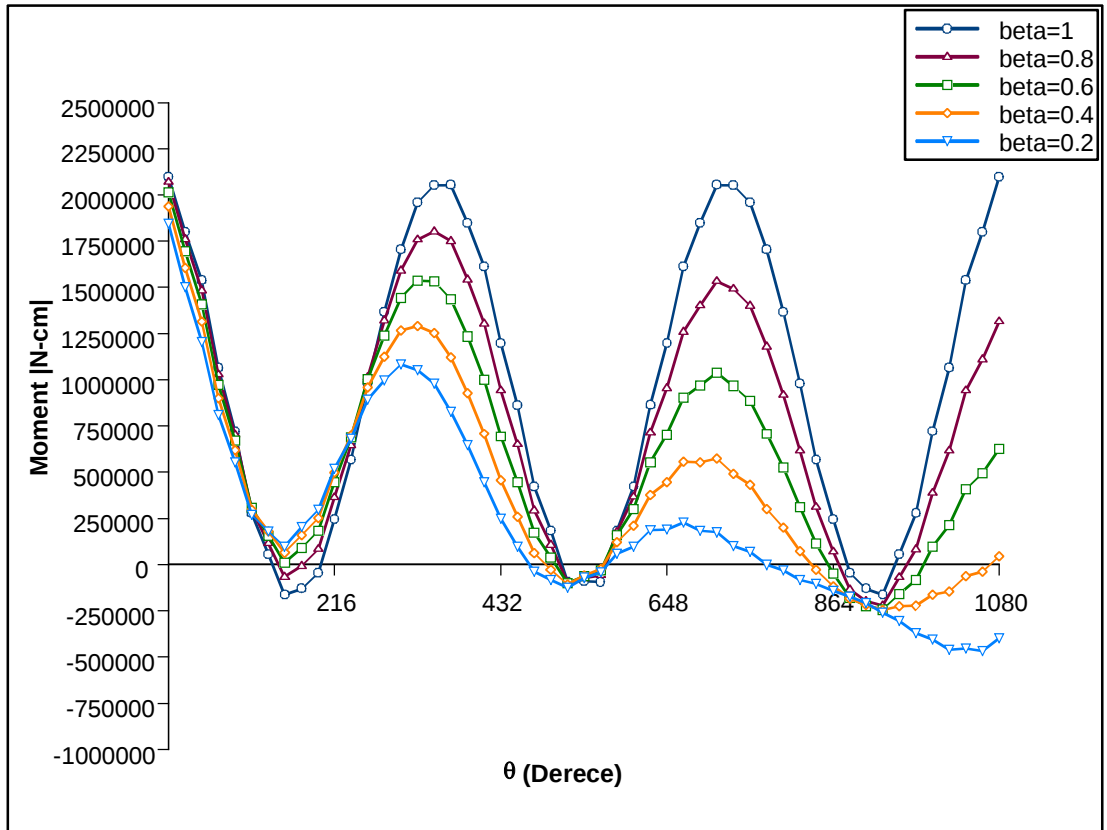


Şekil B.12 – Örnek 2’de  $n=2.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

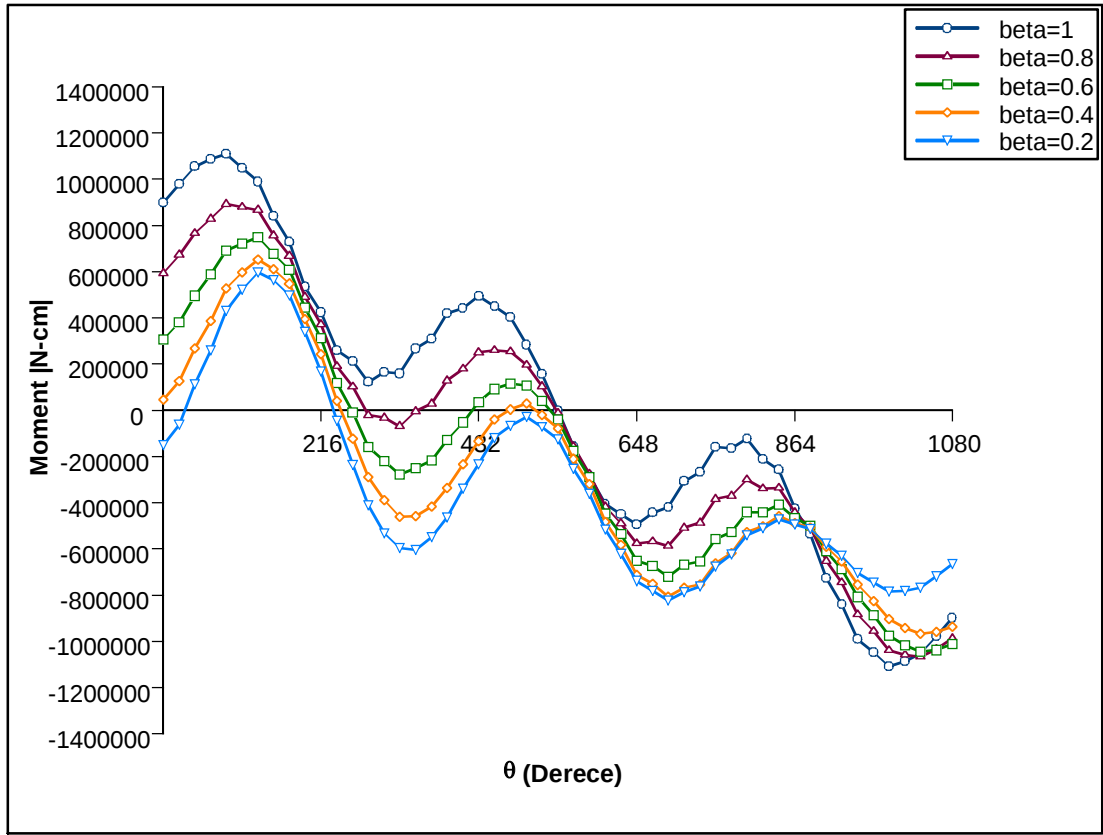


Şekil B.13 – Örnek 2’de  $n=3$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi



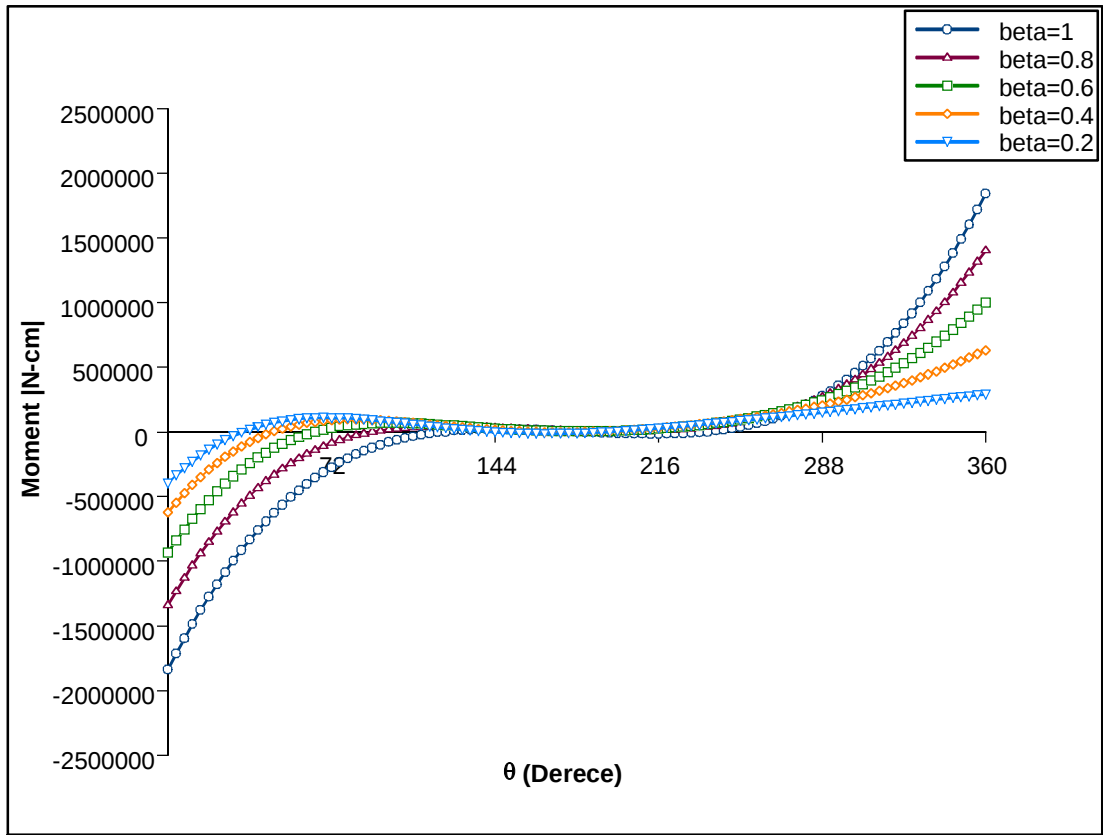
Şekil B.14 – Örnek 2’de  $n=3$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-B

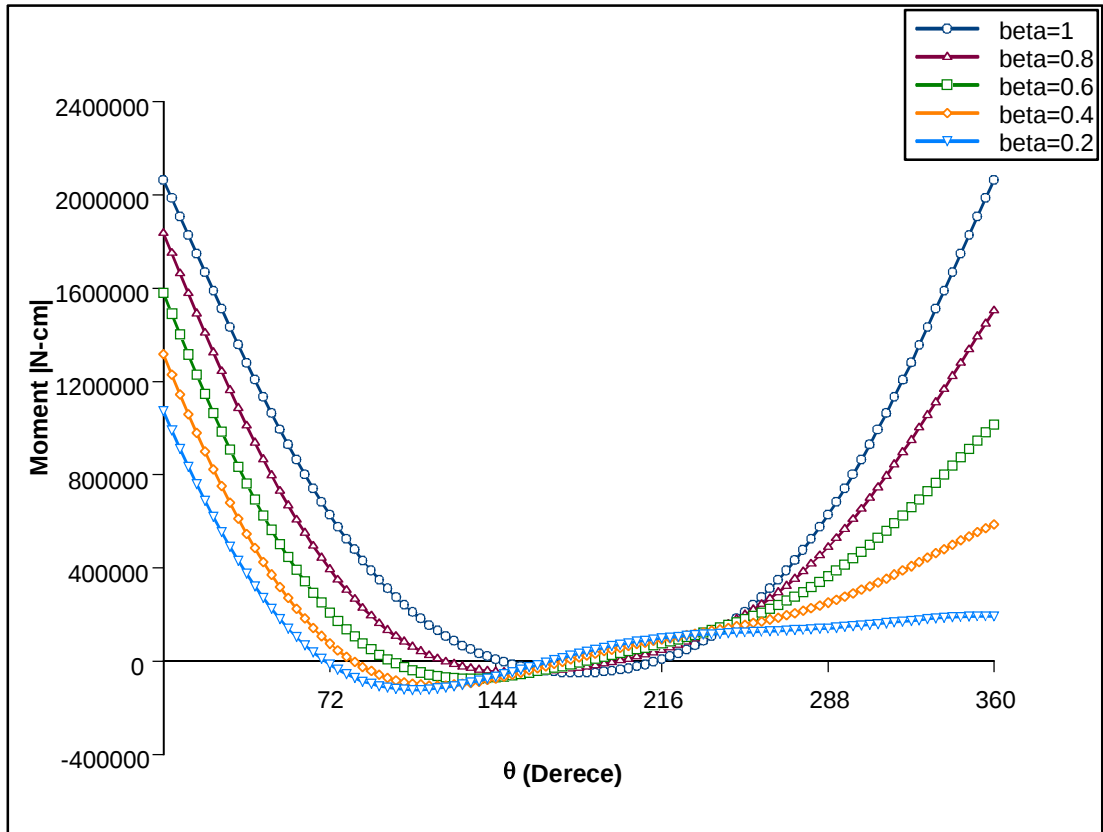


Şekil B.15 – Örnek 2’de  $n=3$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

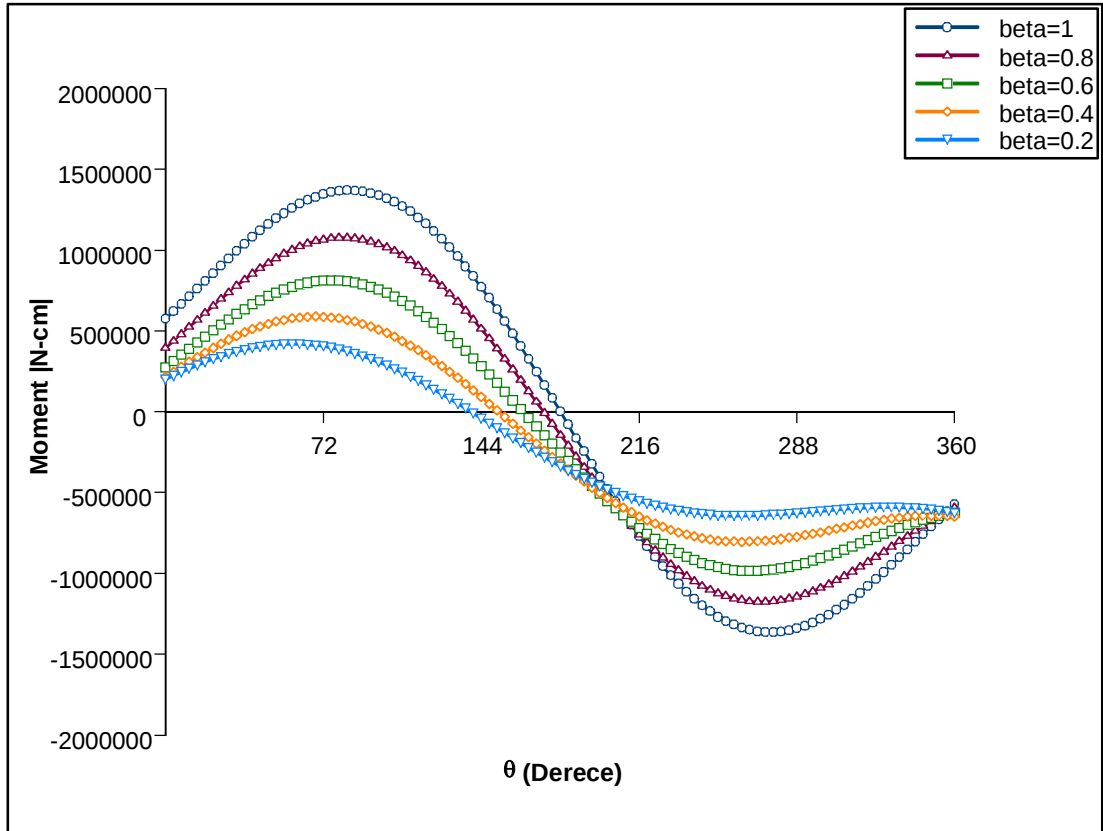


Şekil C.1 – Örnek 3’de  $n = 1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

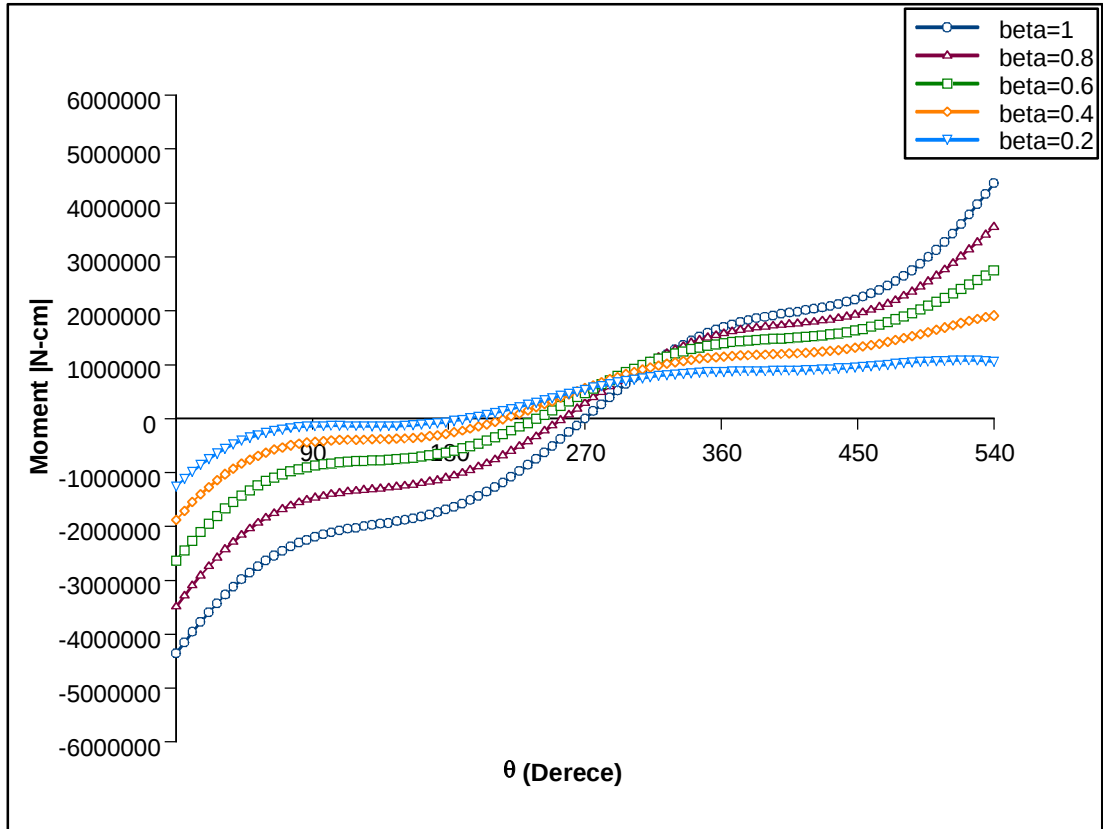


Şekil C.2 – Örnek 3’de  $n = 1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

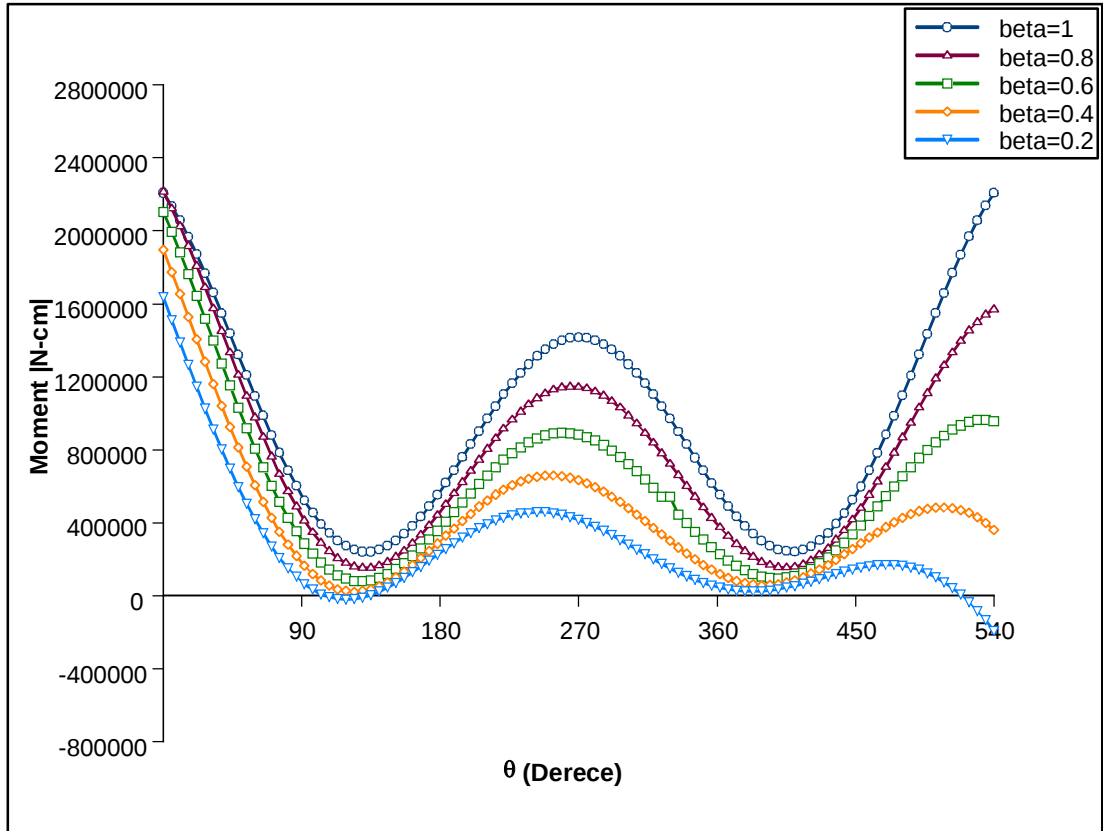


ŞekilC.3 – Örnek 3’de  $n = 1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

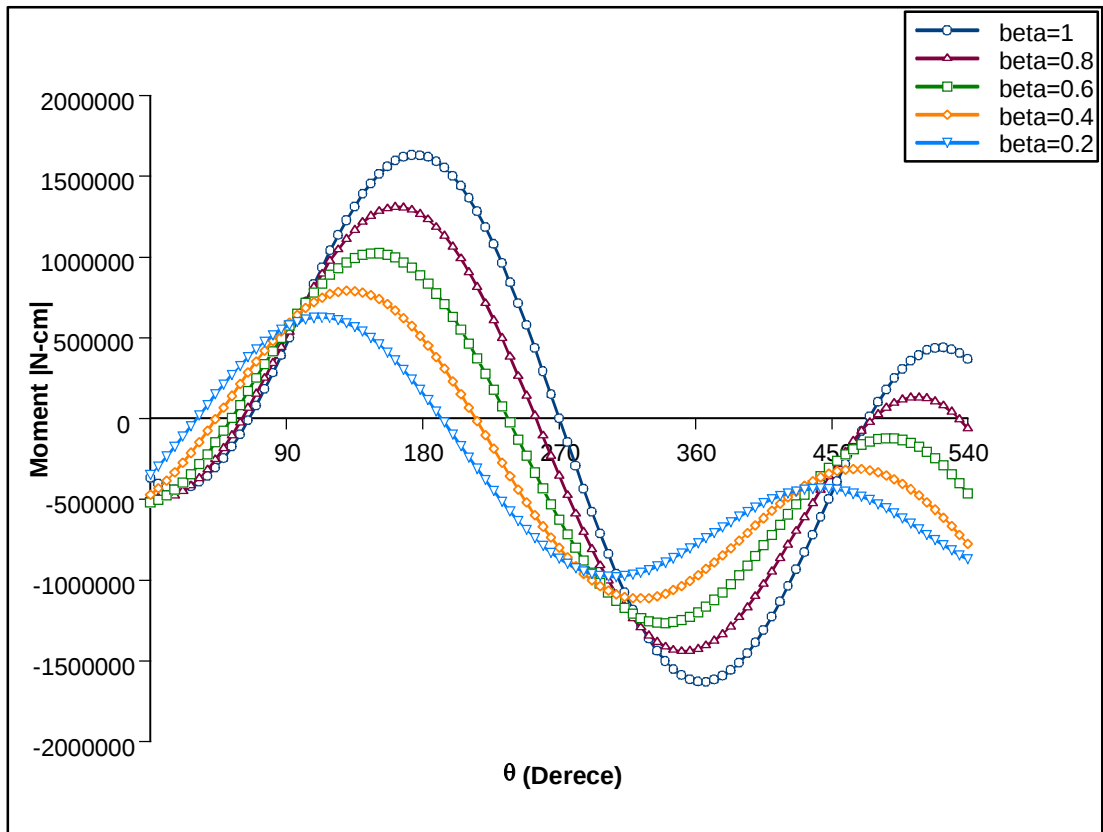


Şekil C.4 – Örnek 3’de  $n=1.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

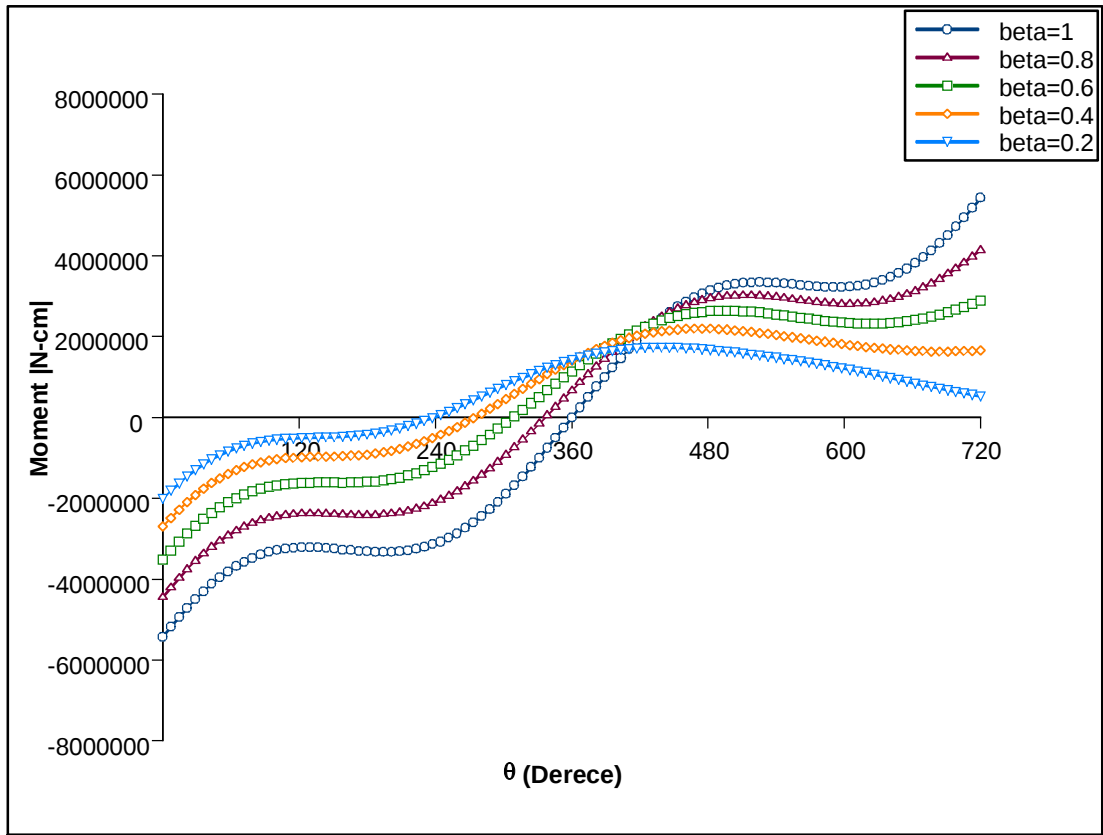


Şekil C.5 – Örnek 3’de  $n=1.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

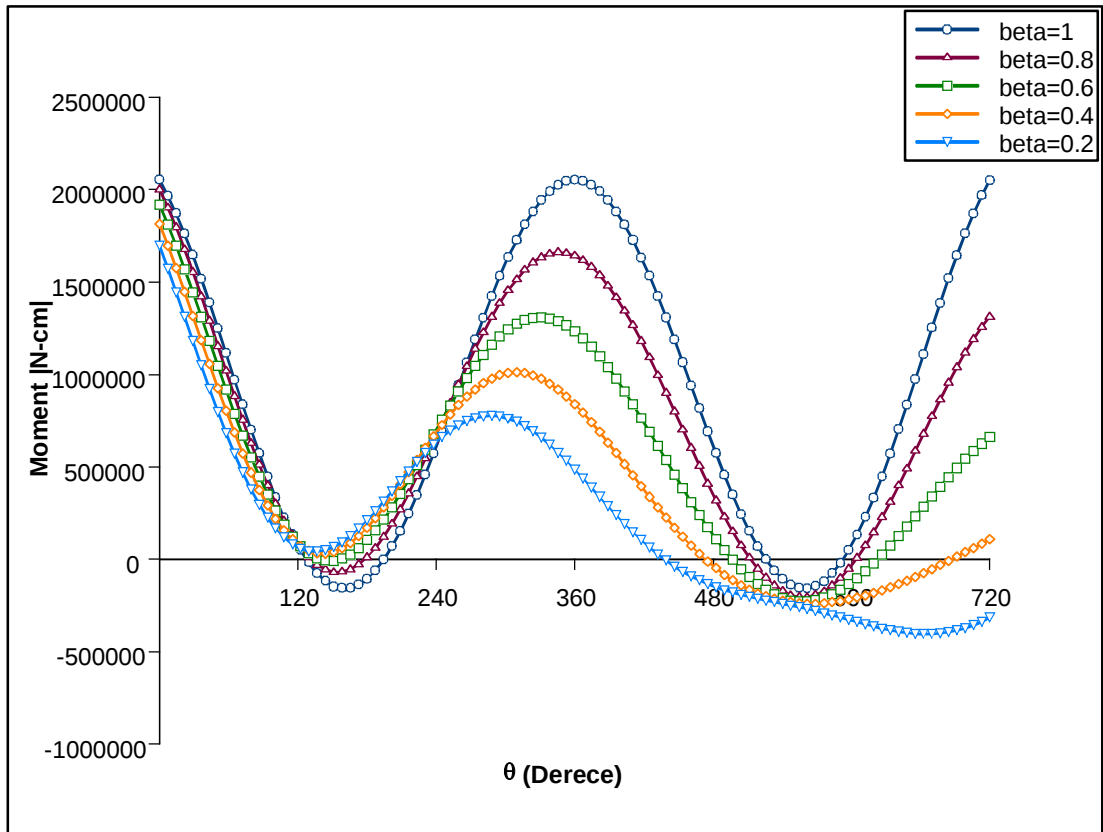


Şekil C.6 – Örnek 3’de  $n=1.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

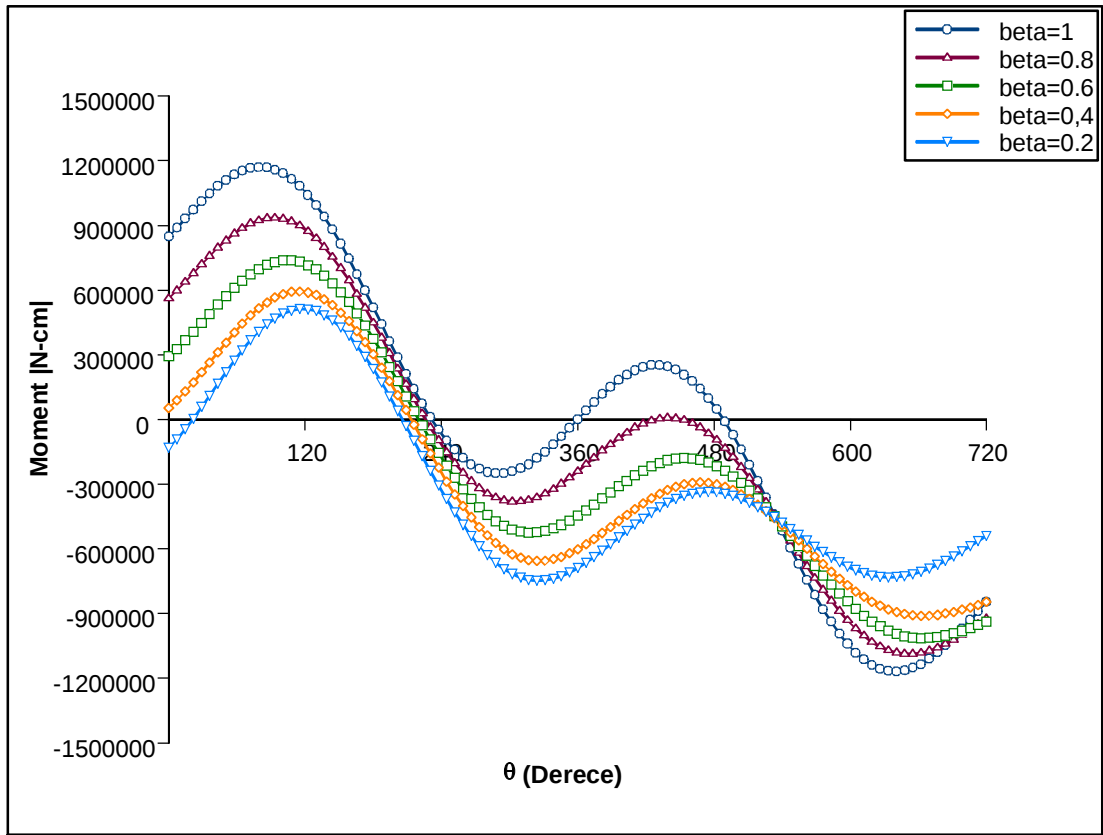


Şekil C.7 – Örnek 3’de  $n=2$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

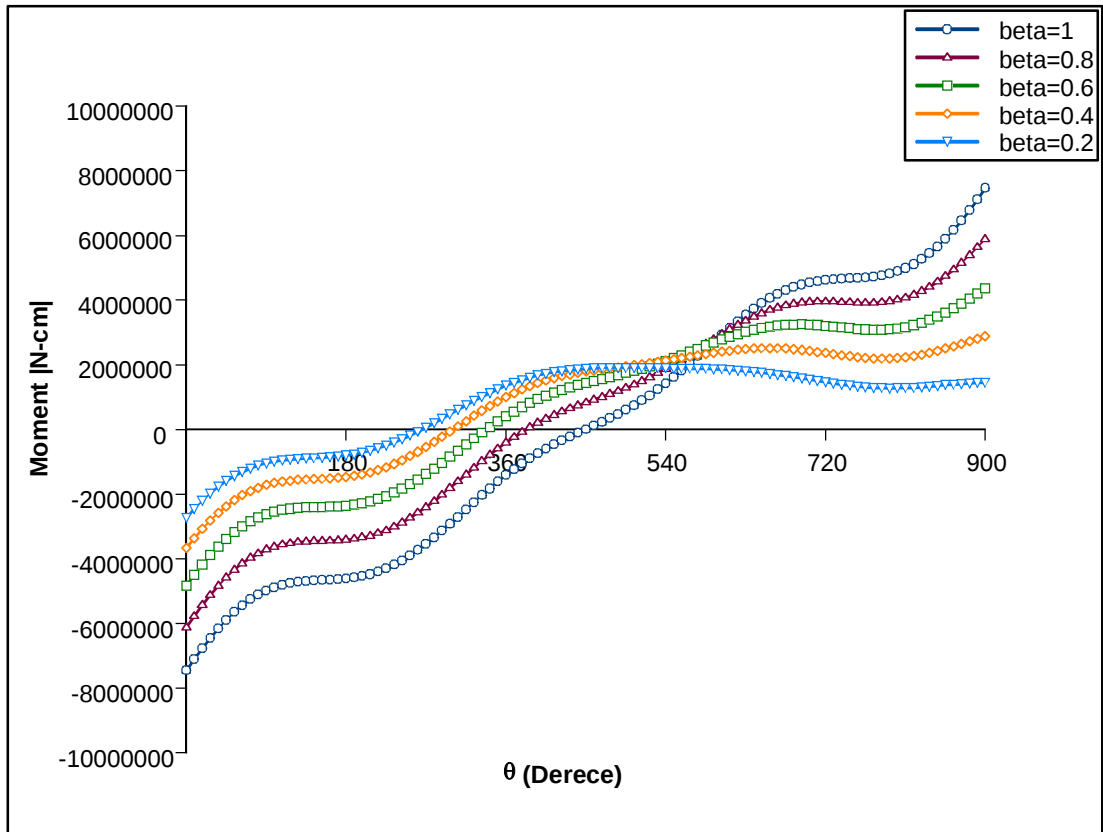


Şekil C.8 – Örnek 3’de  $n=2$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

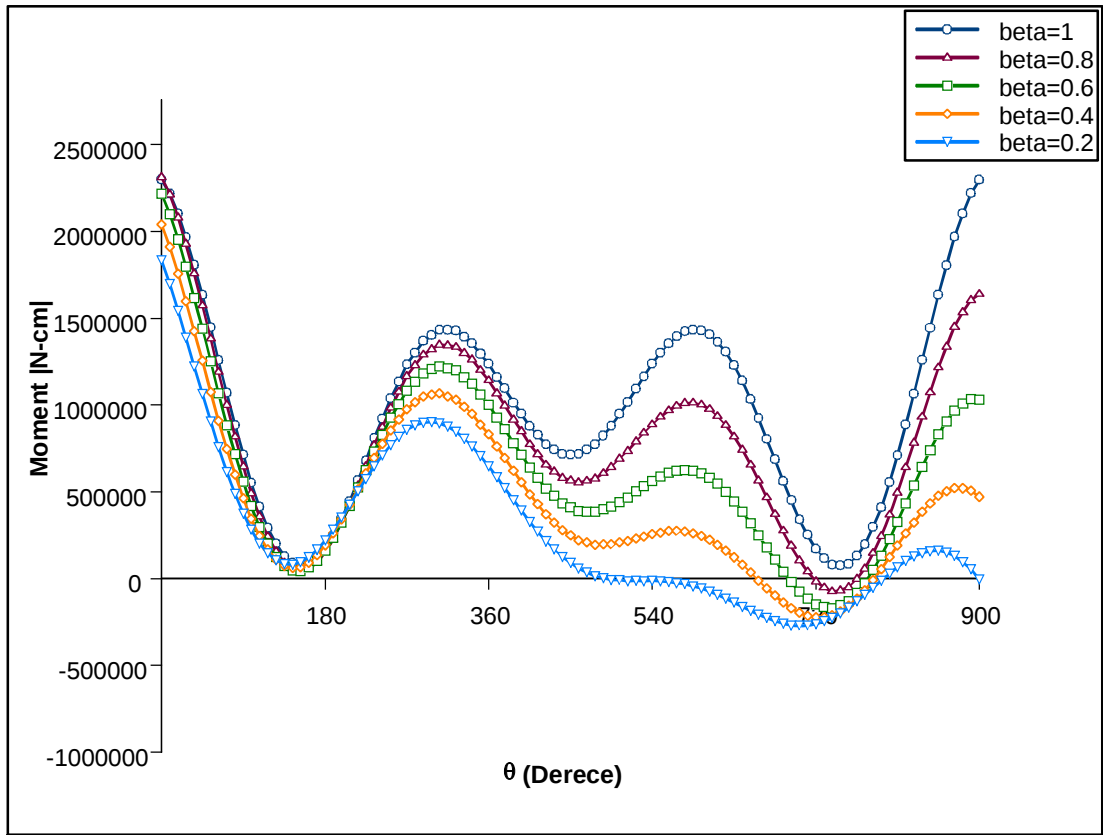


Şekil C.9 – Örnek 3’de  $n=2$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

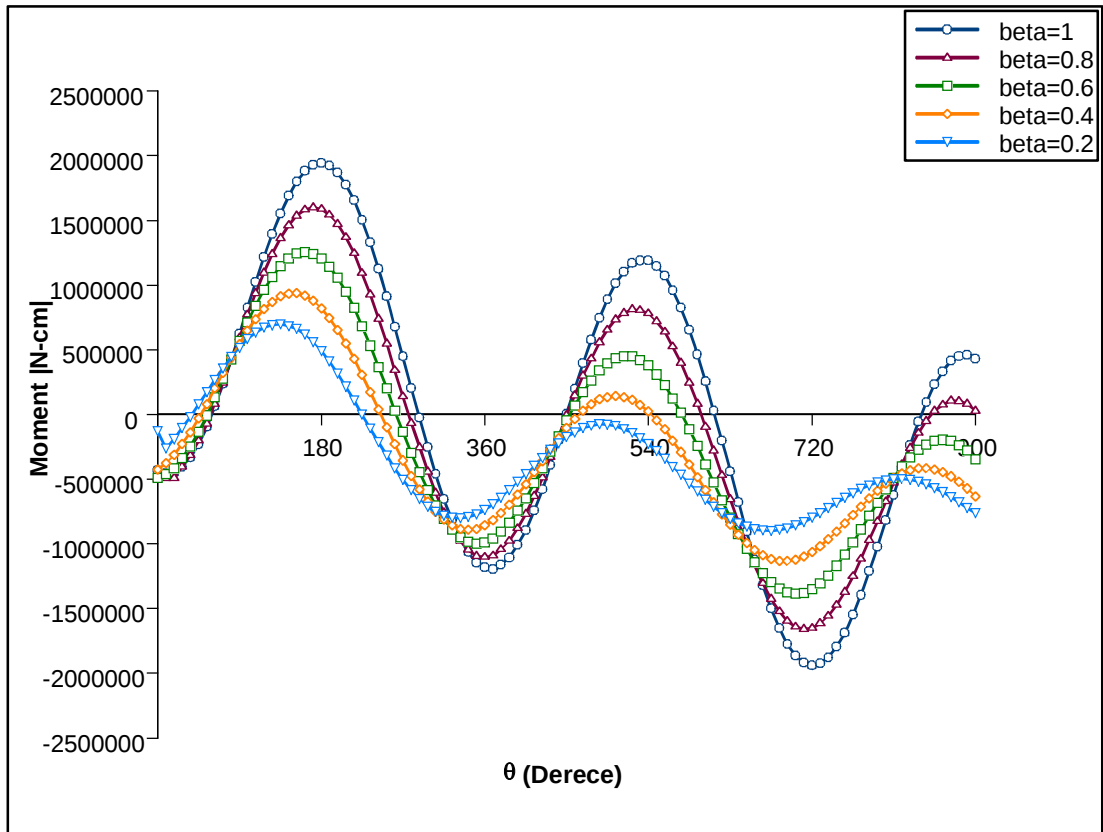


Şekil C.10 – Örnek 3’de  $n=2.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

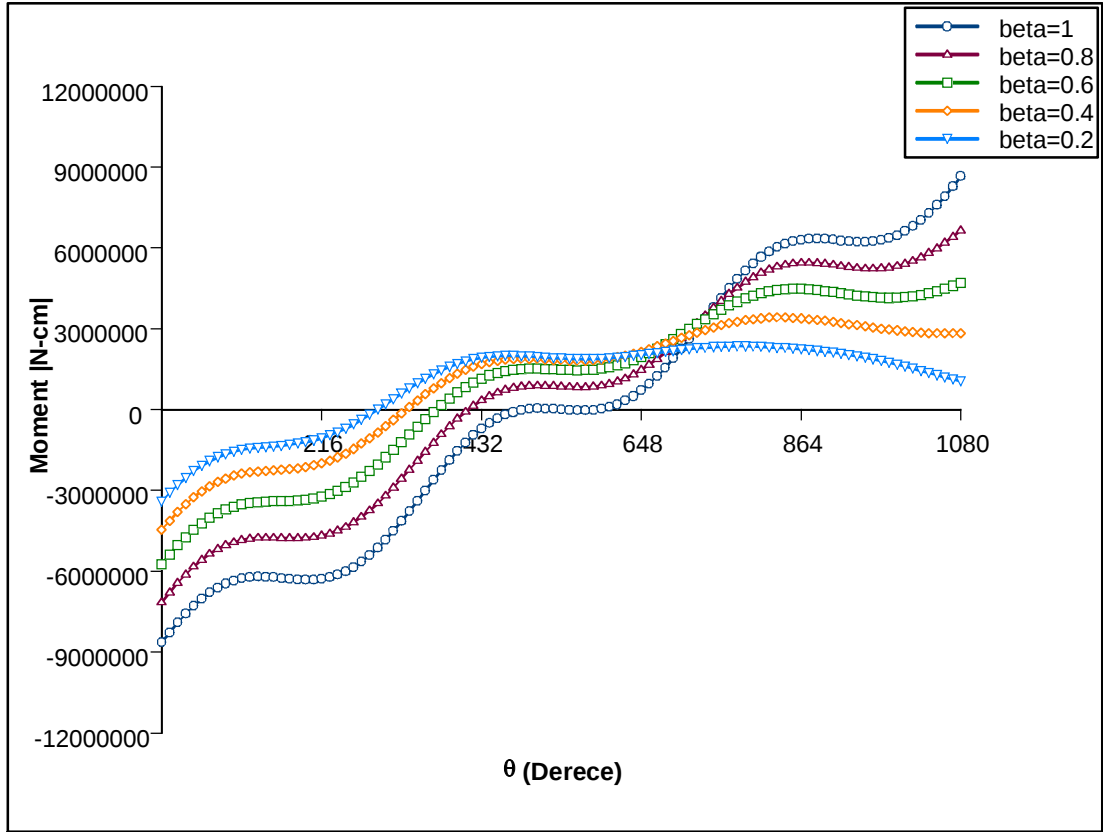


Şekil C.11 – Örnek 3’de  $n=2.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

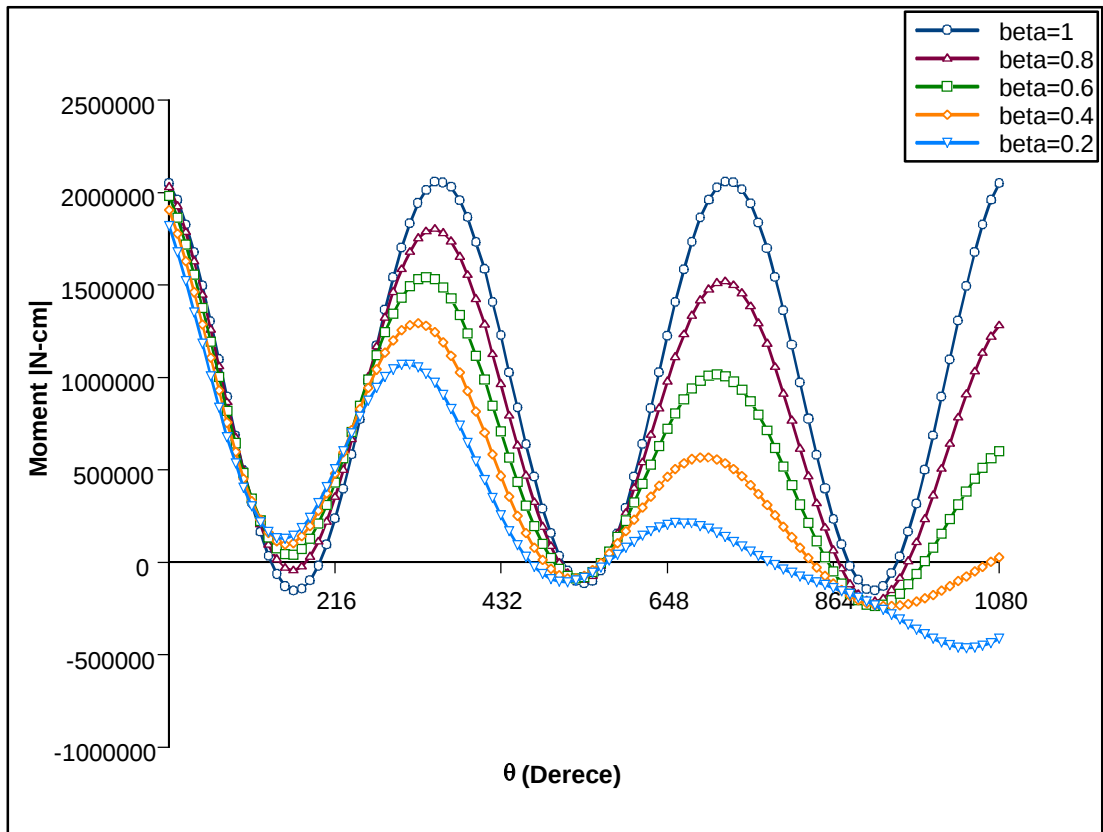


Şekil C.12 – Örnek 3’de  $n=2.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

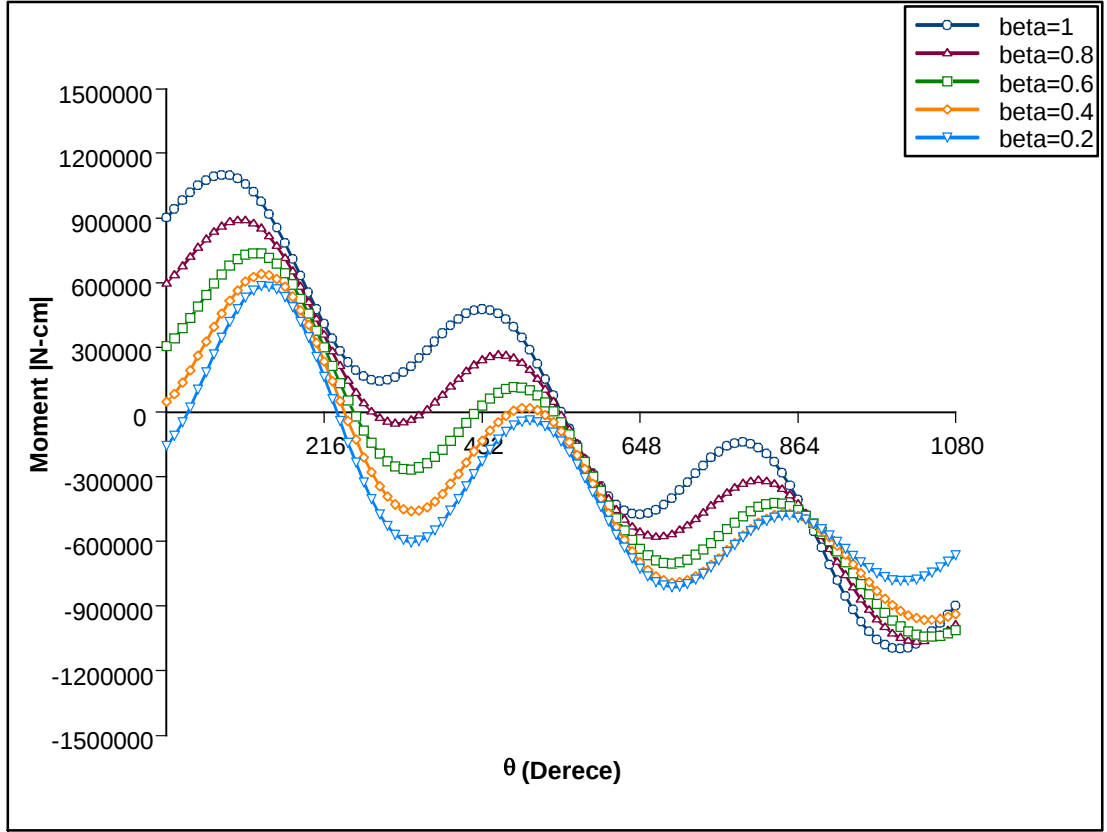


Şekil C.13 – Örnek 3’de  $n = 3$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi



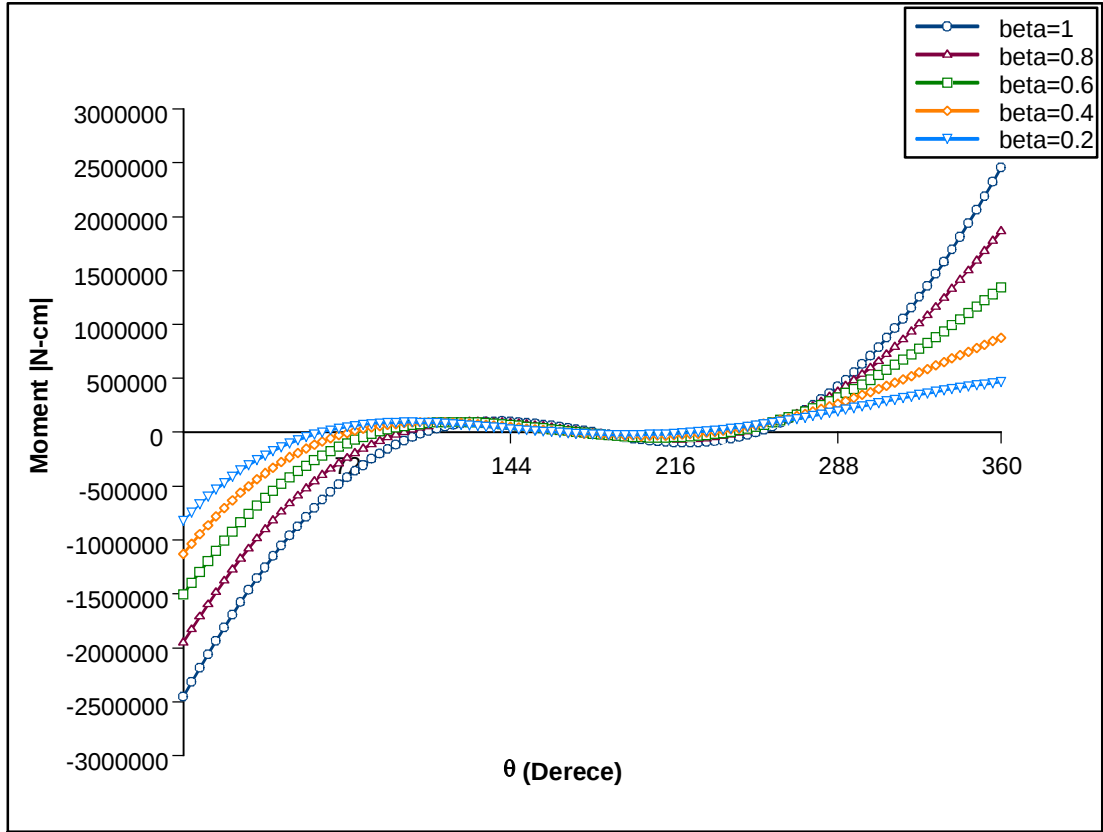
Şekil C.14 – Örnek 3’de  $n = 3$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-C

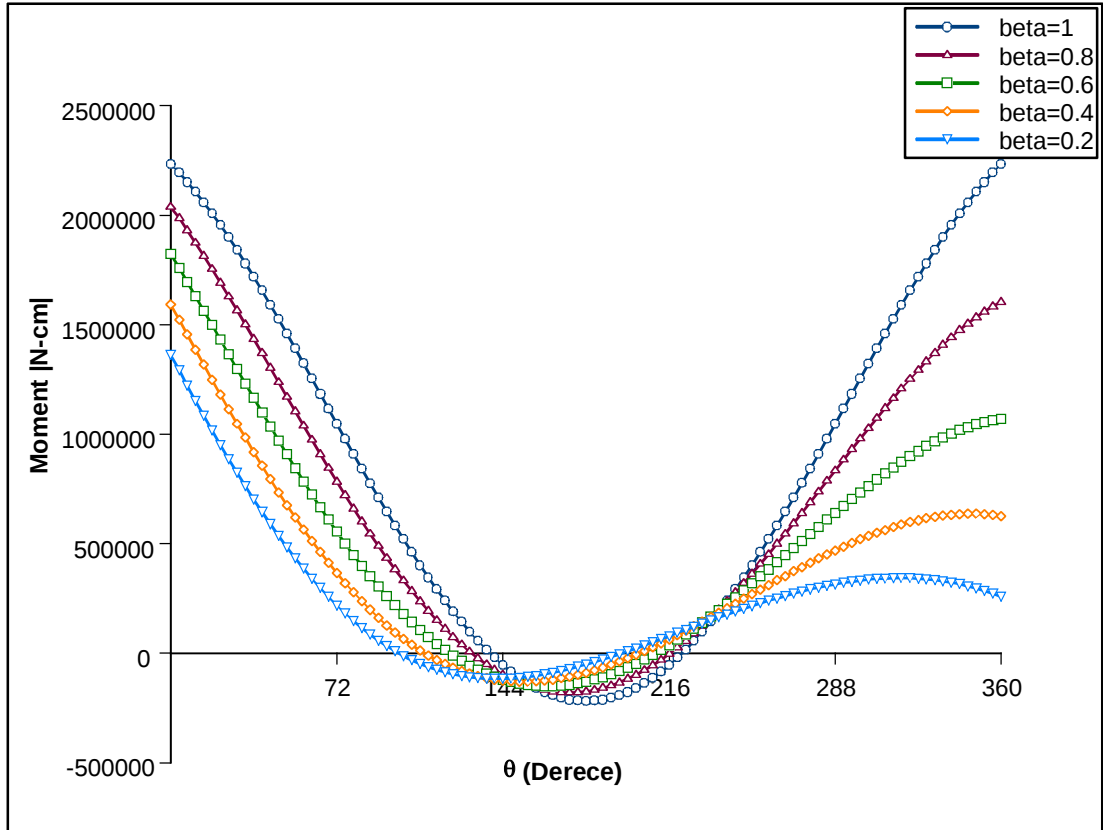


Şekil C.15 – Örnek 3’de  $n=3$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-D

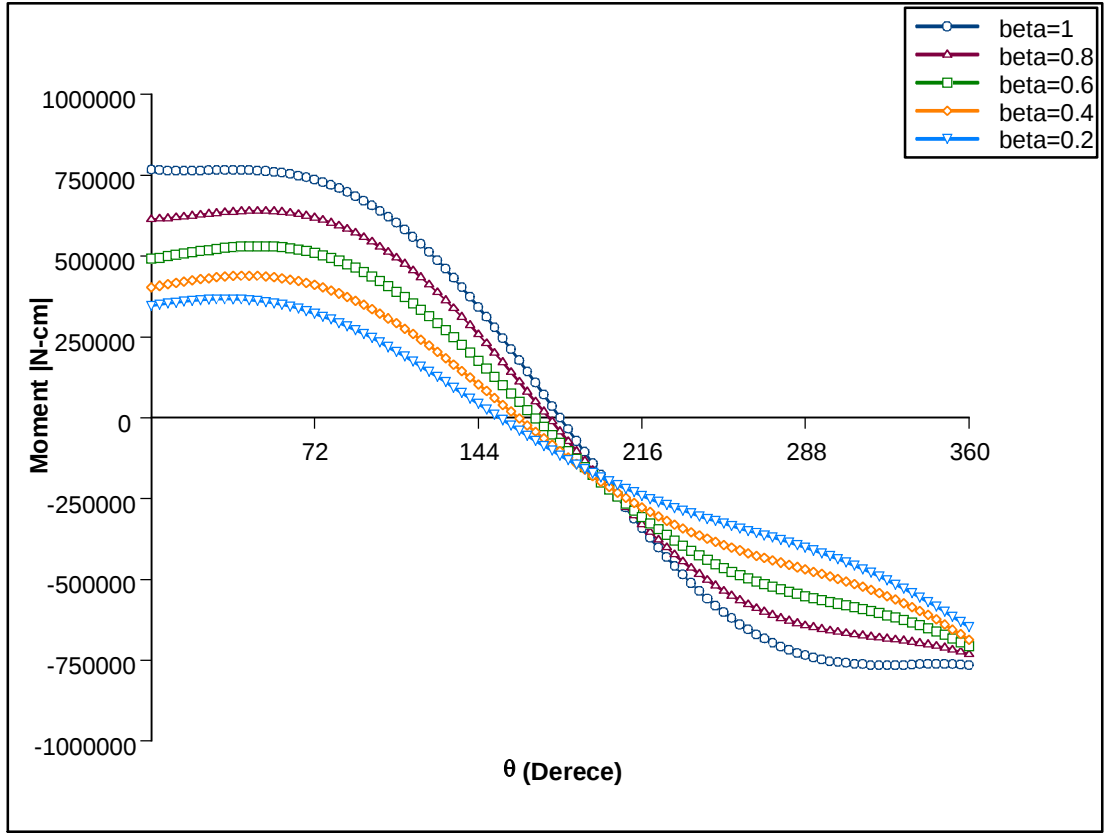


Şekil D.1 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_t$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi

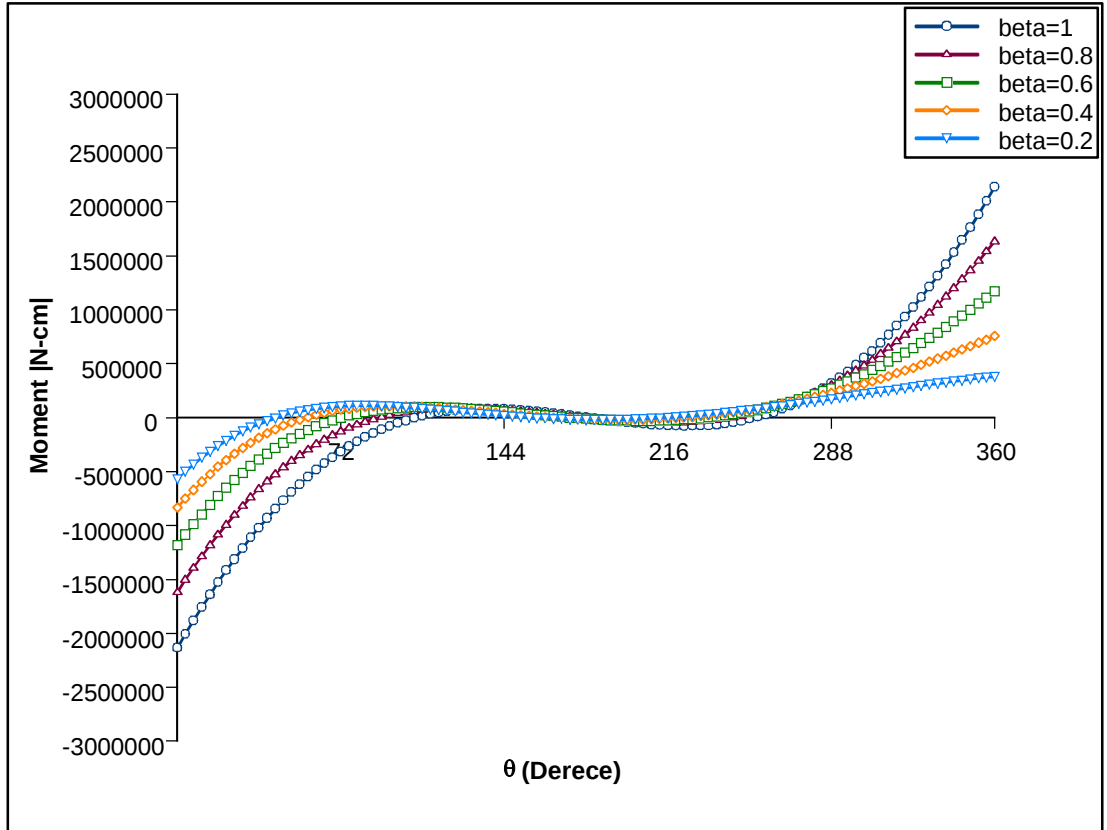


Şekil D.2 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_I/R_0$  ile değişimi

## EK-D

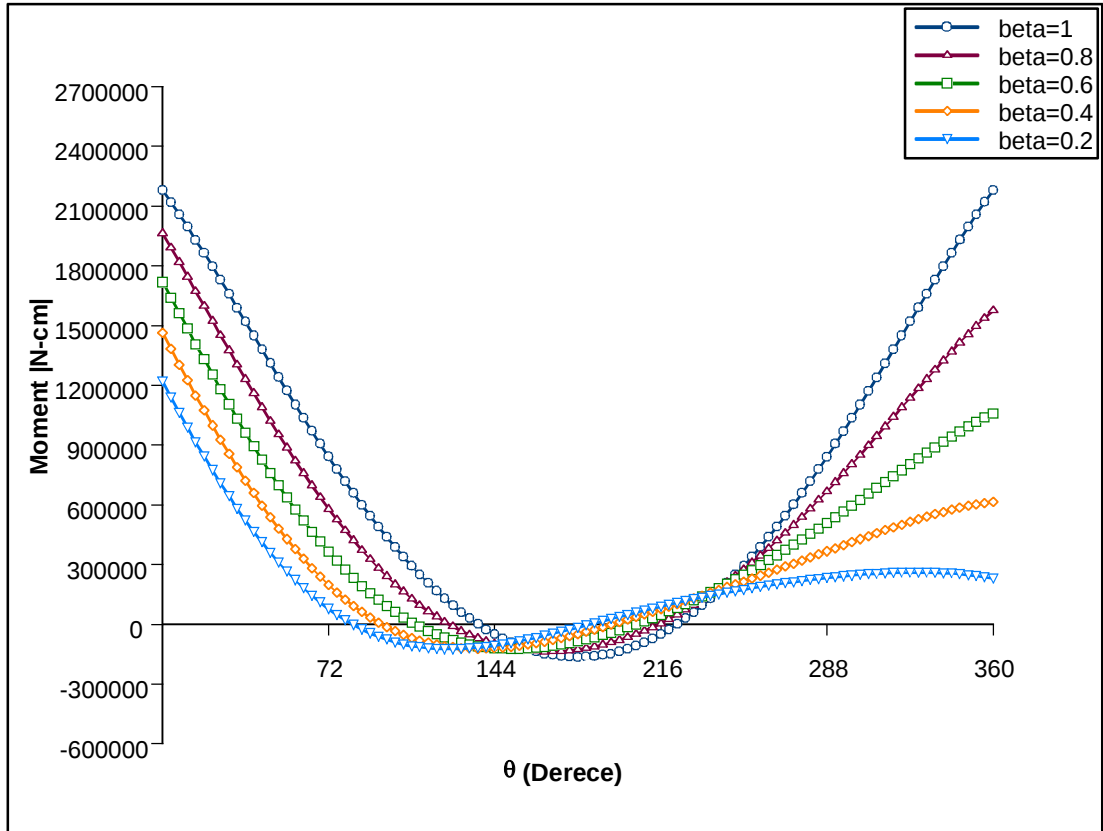


Şekil D.3 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta = R_l/R_0$  ile değişimi

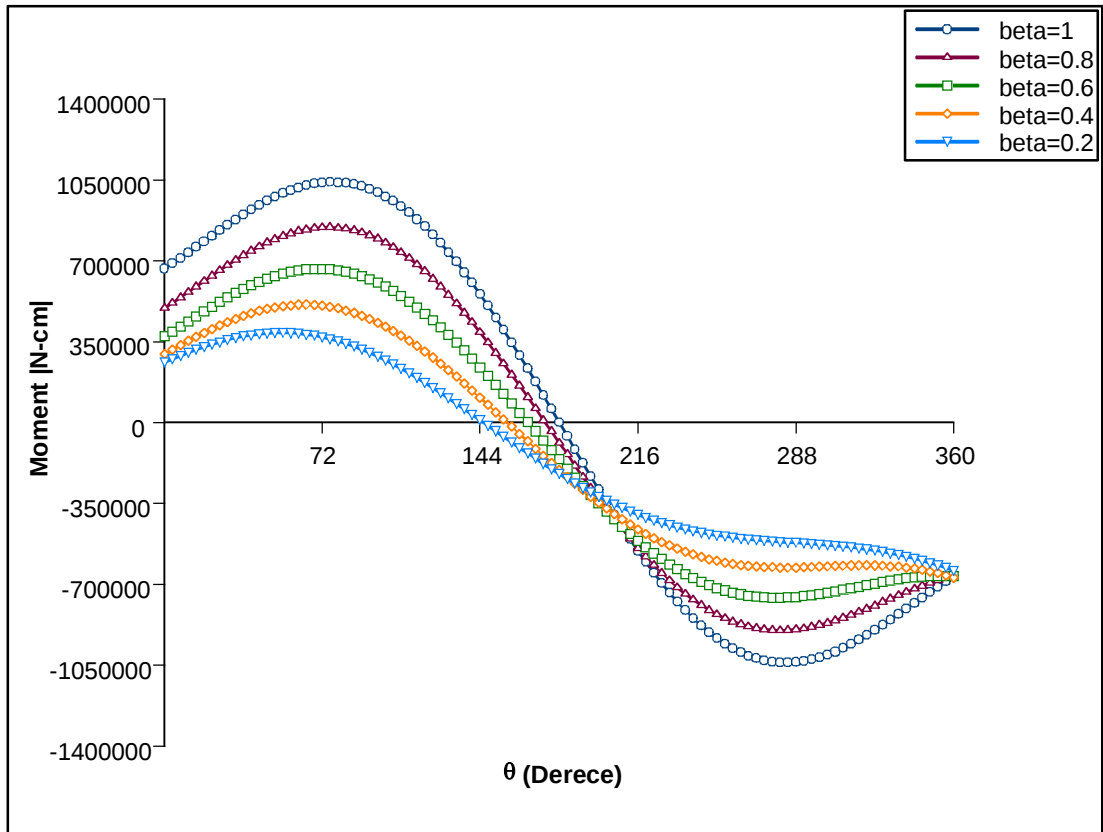


Şekil D.4 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta = R_l/R_0$  ile değişimi

## EK-D

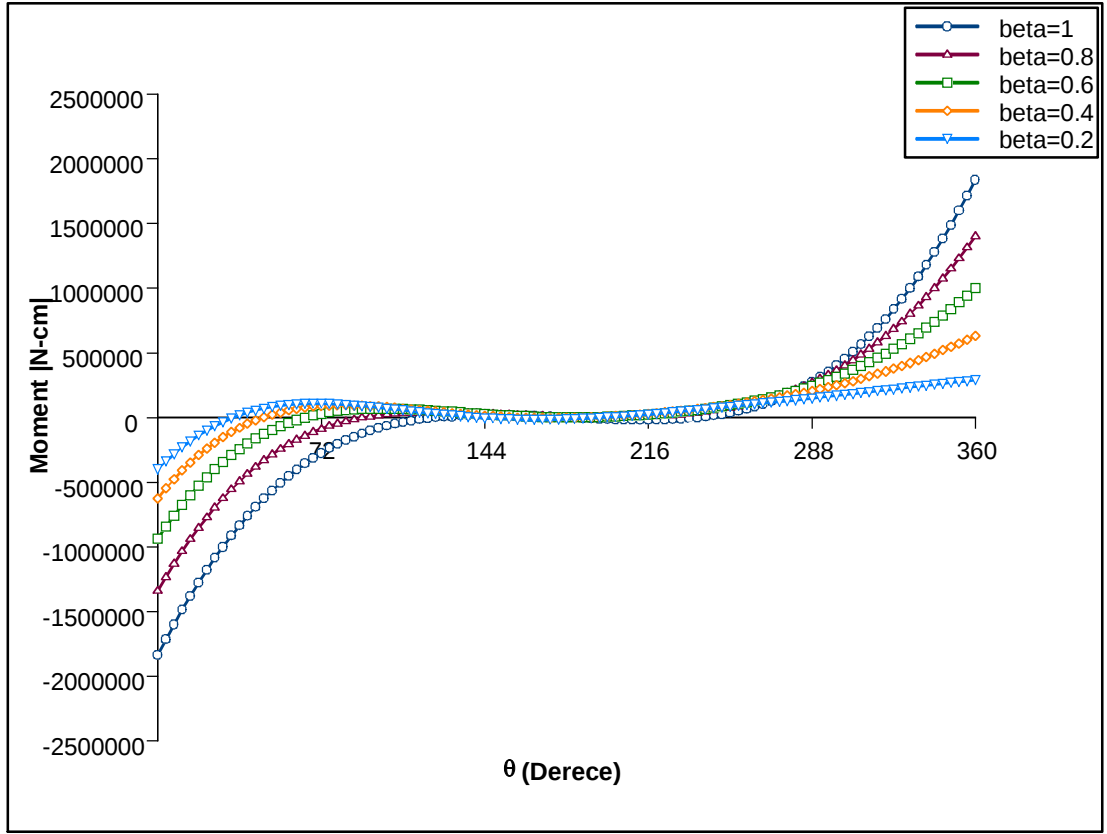


Şekil D.5 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

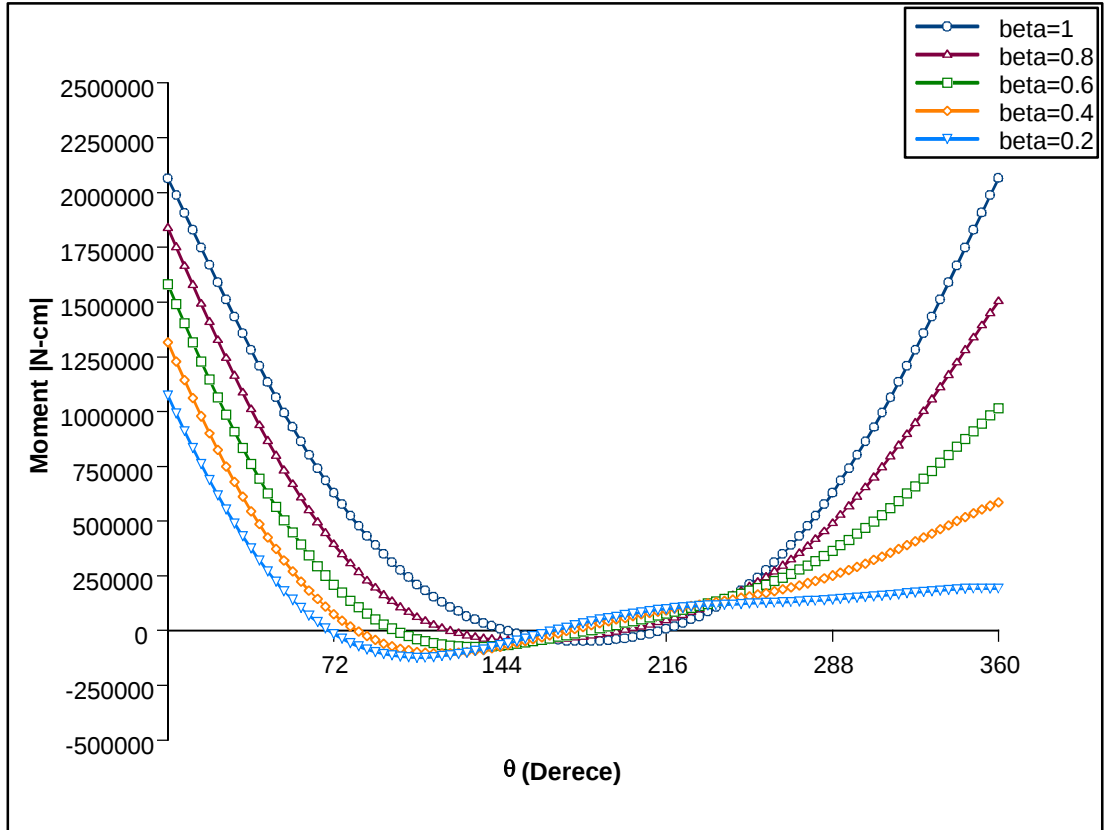


Şekil D.6 – Örnek 4’de  $n = 1$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-D

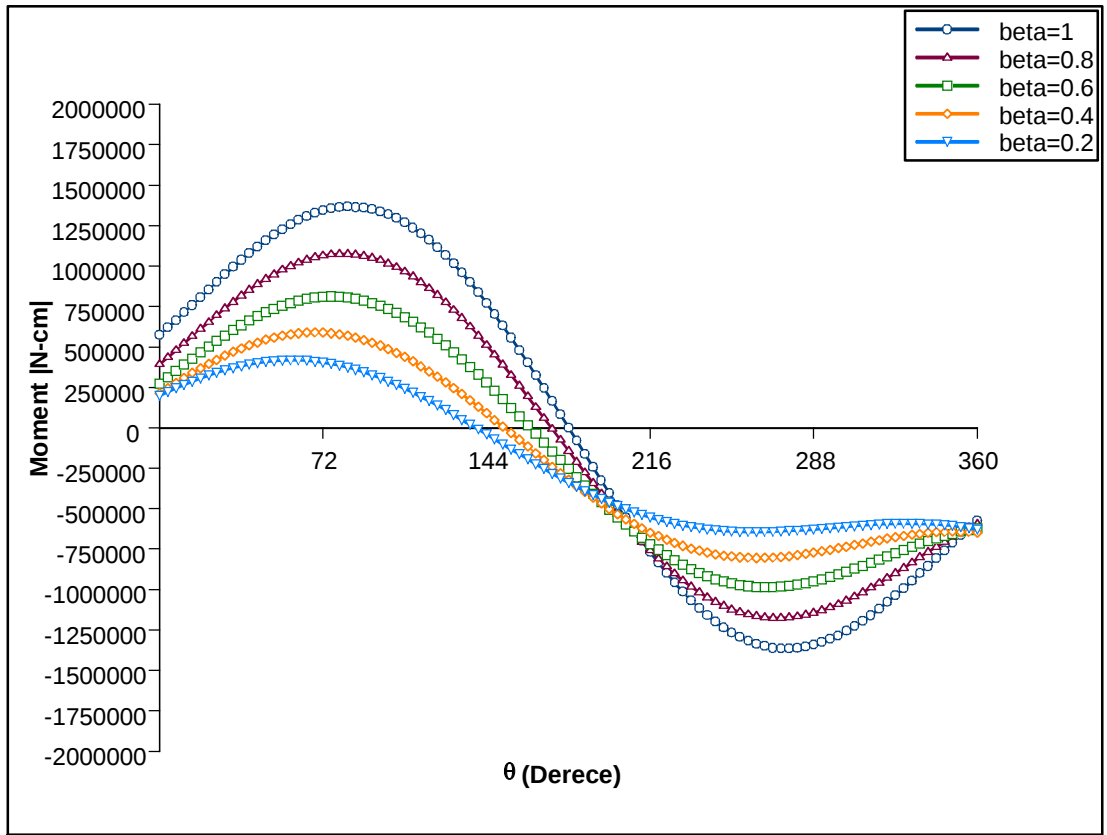


Şekil D.7 – Örnek 4’de  $n=1$  ve  $\alpha=1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi



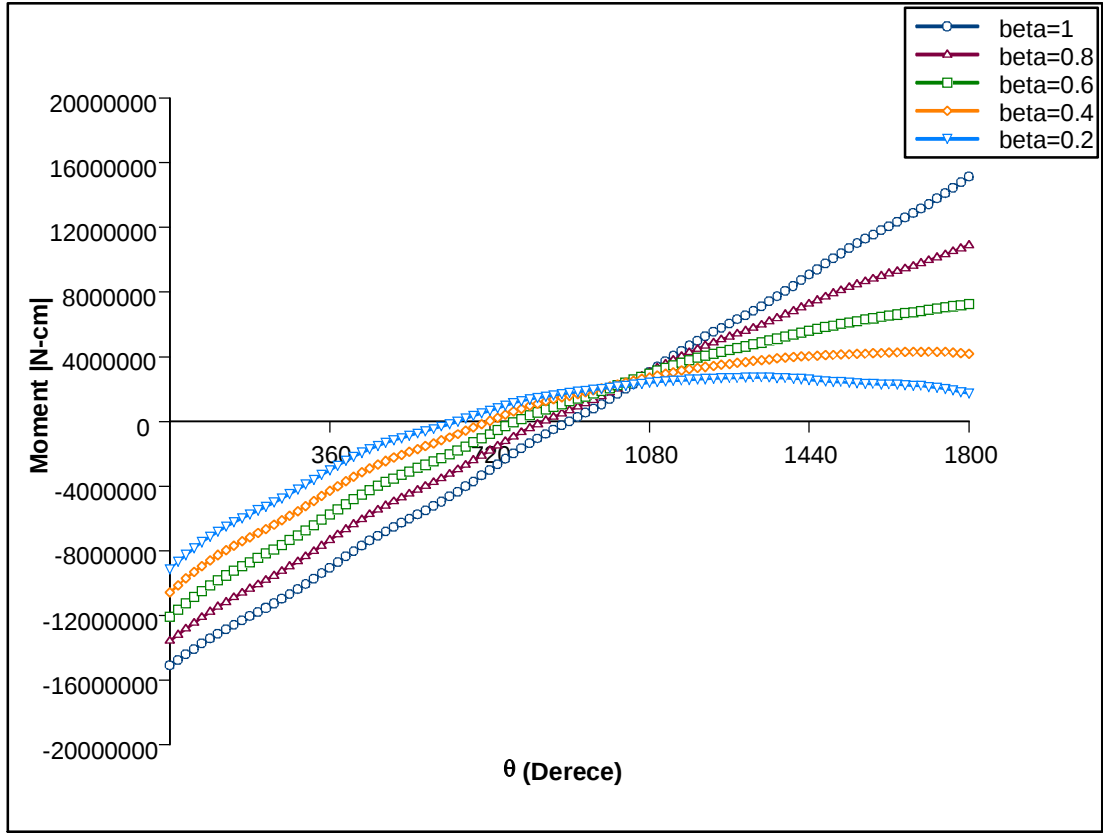
Şekil D.8 – Örnek 4’de  $n=1$  ve  $\alpha=1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-D

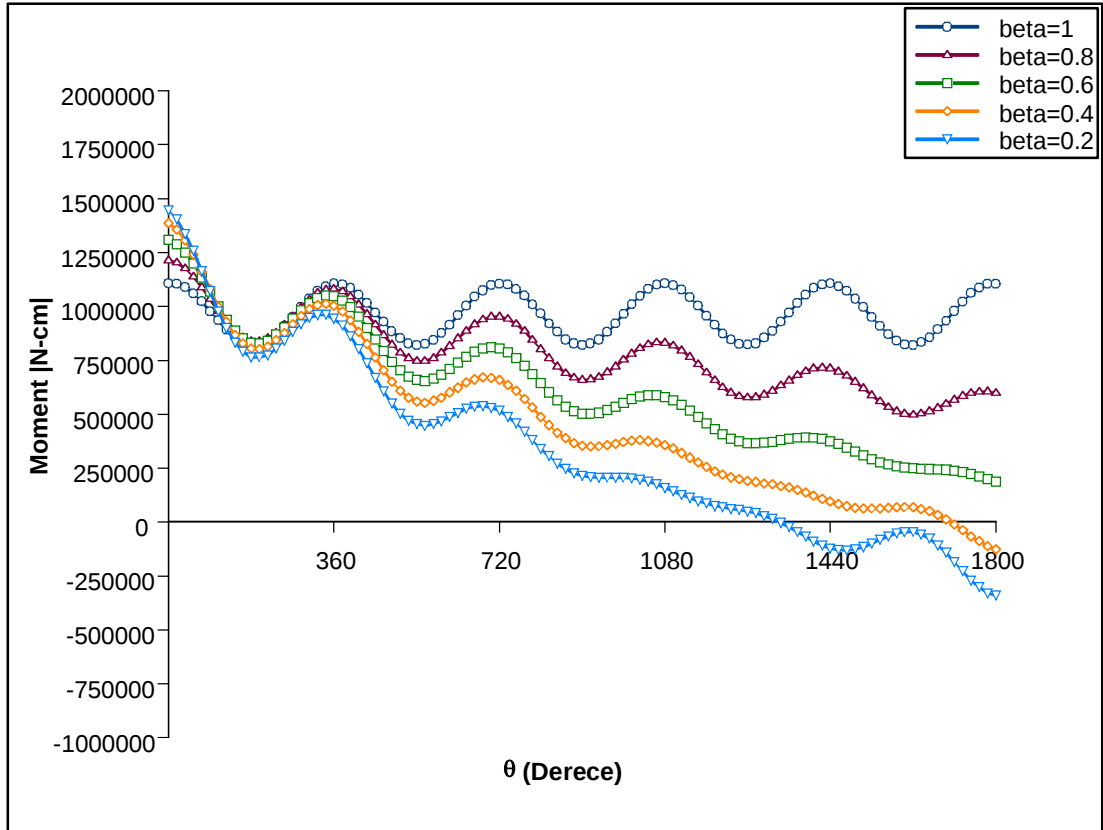


Şekil D.9 – Örnek 4’de  $n=1$  ve  $\alpha=1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-E

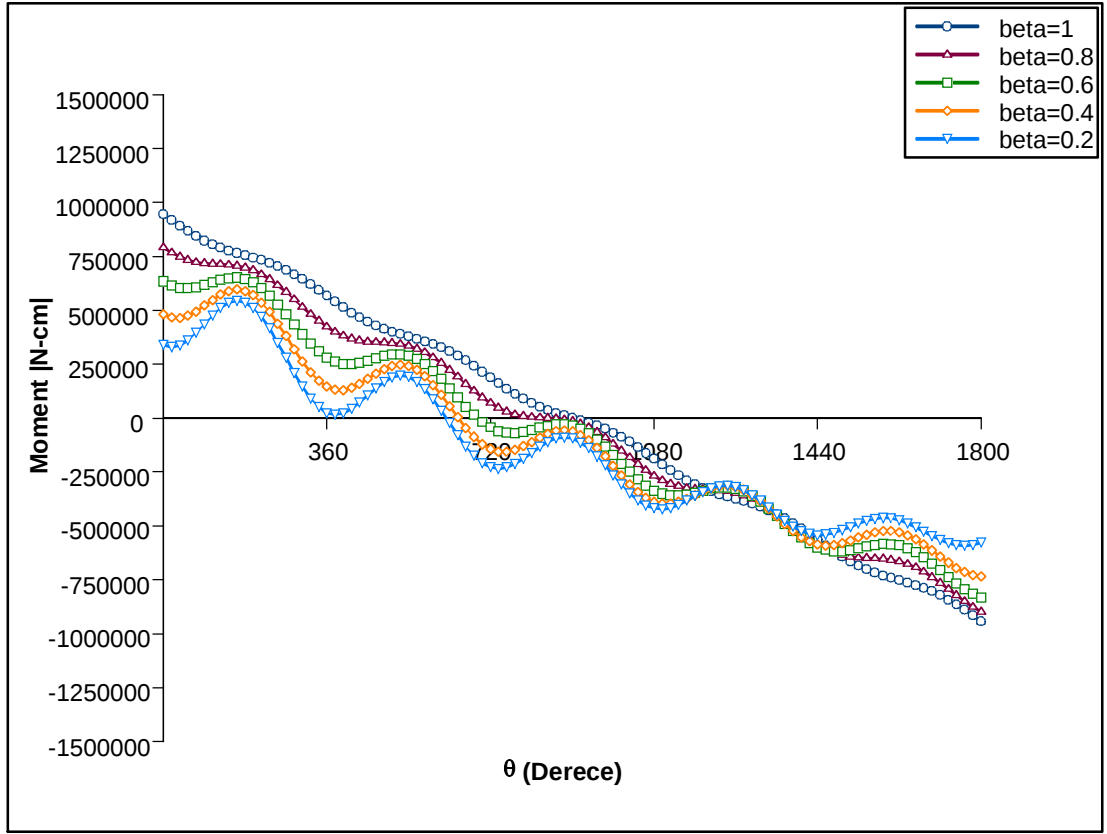


Şekil E.1 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

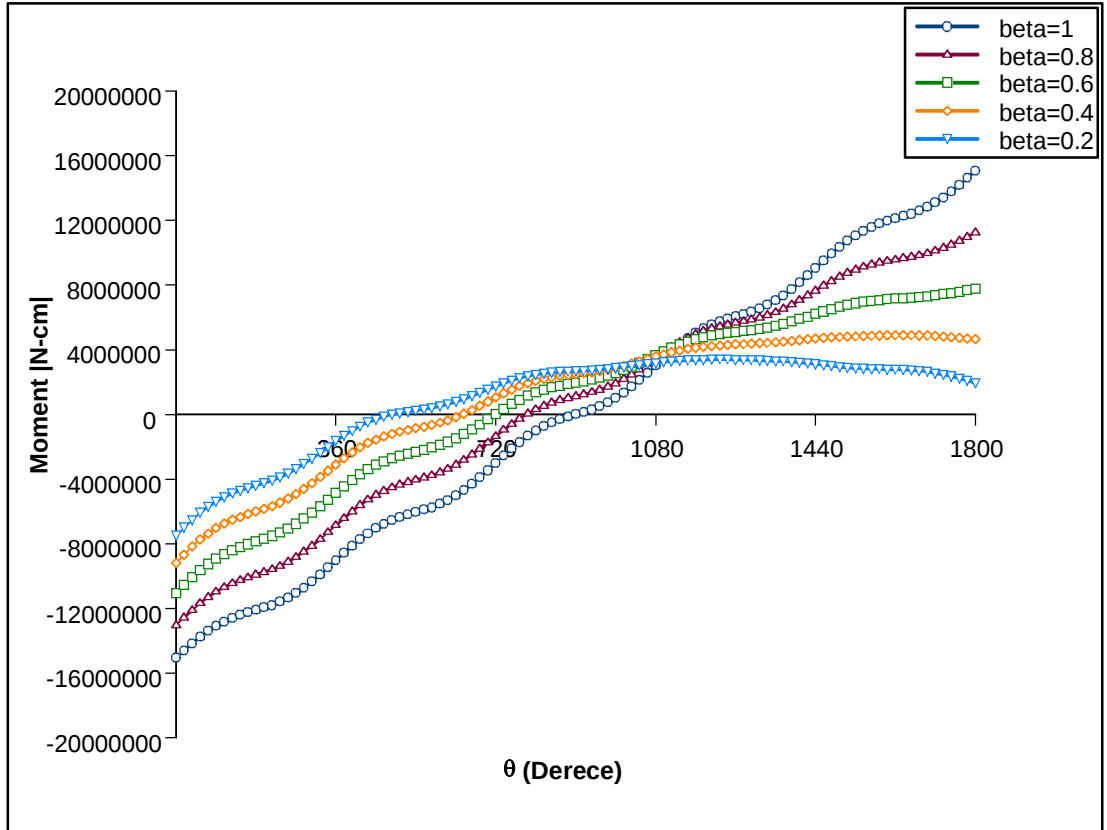


Şekil E.2 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-E

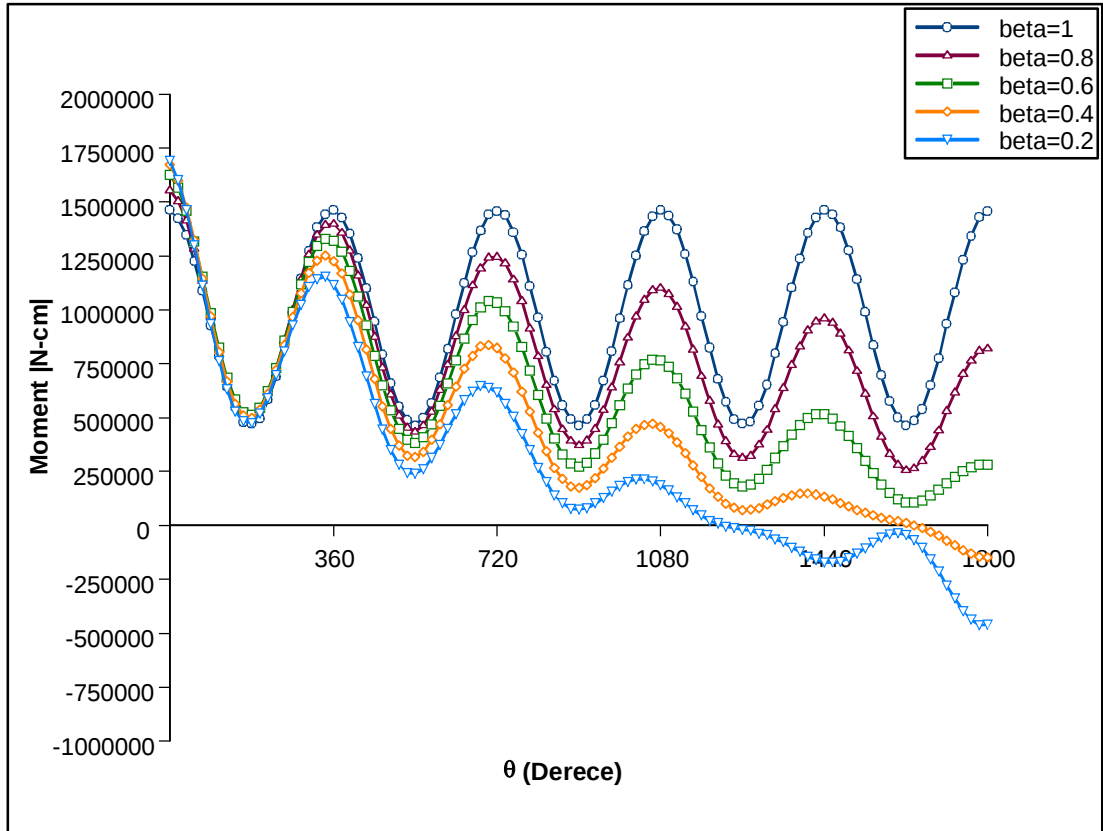


Şekil E.3 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

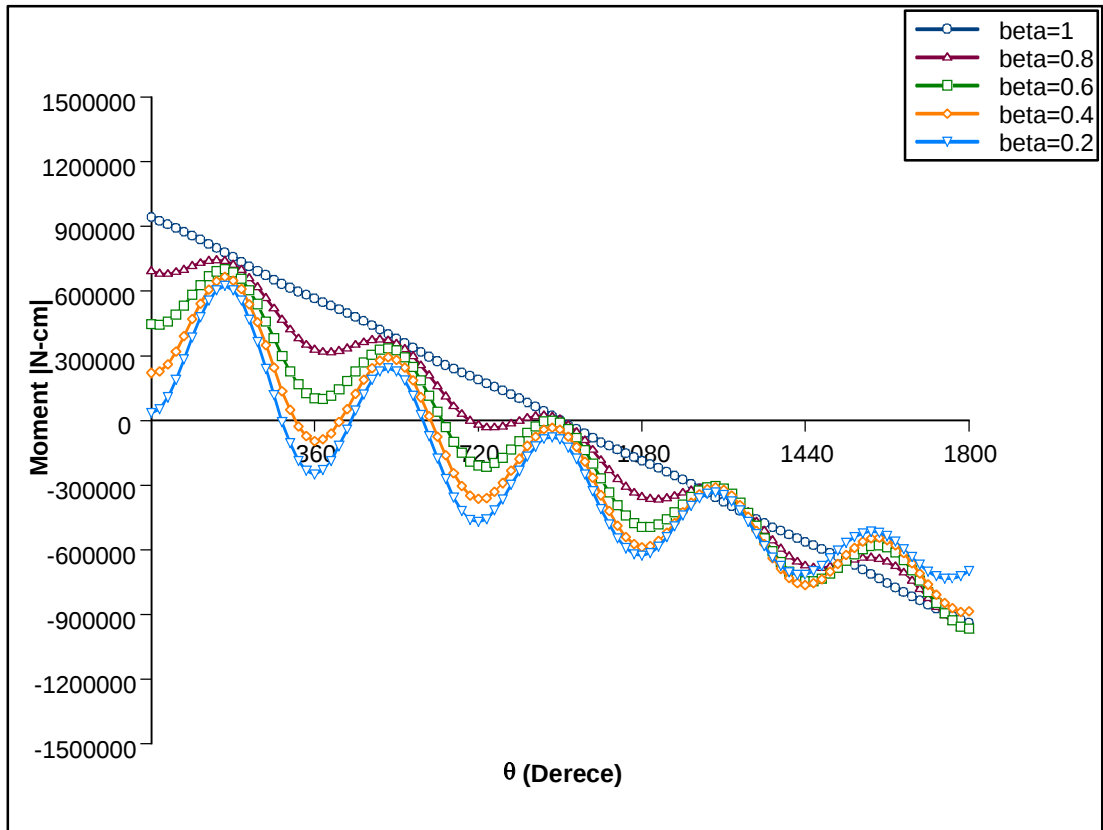


Şekil E.4 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-E

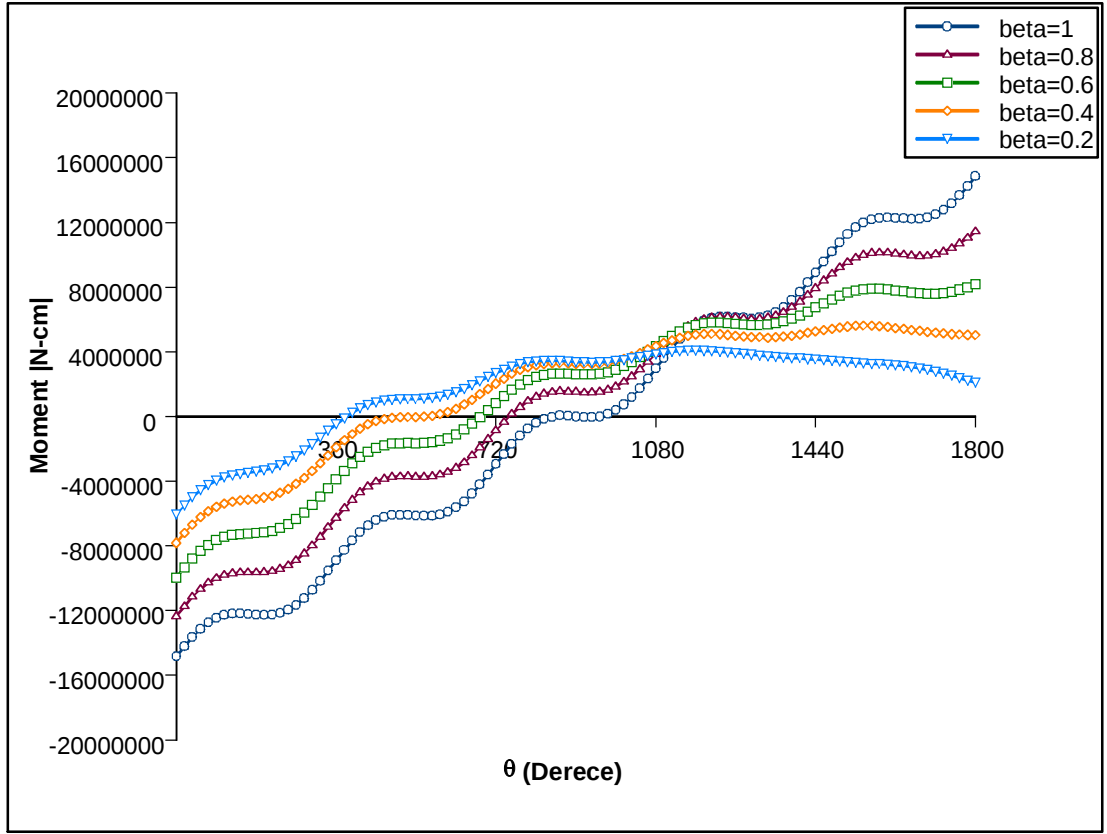


Şekil E.5 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

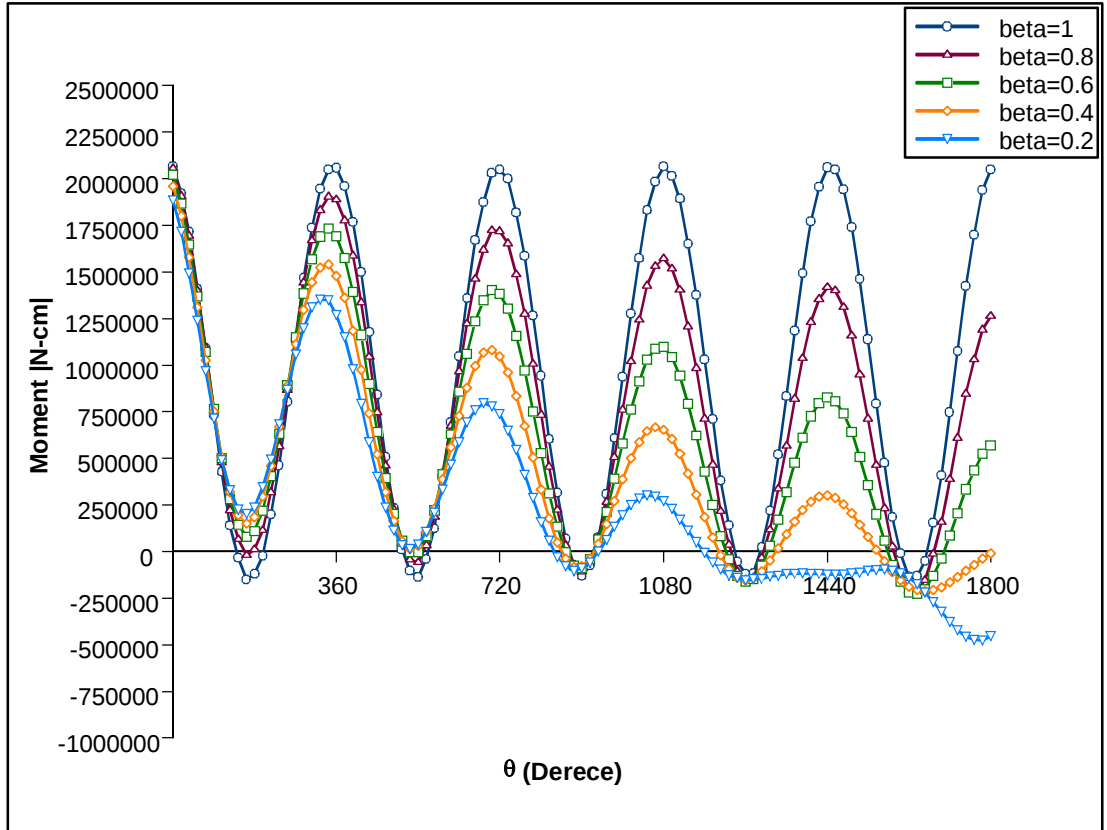


Şekil E.6 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 0.75$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-E

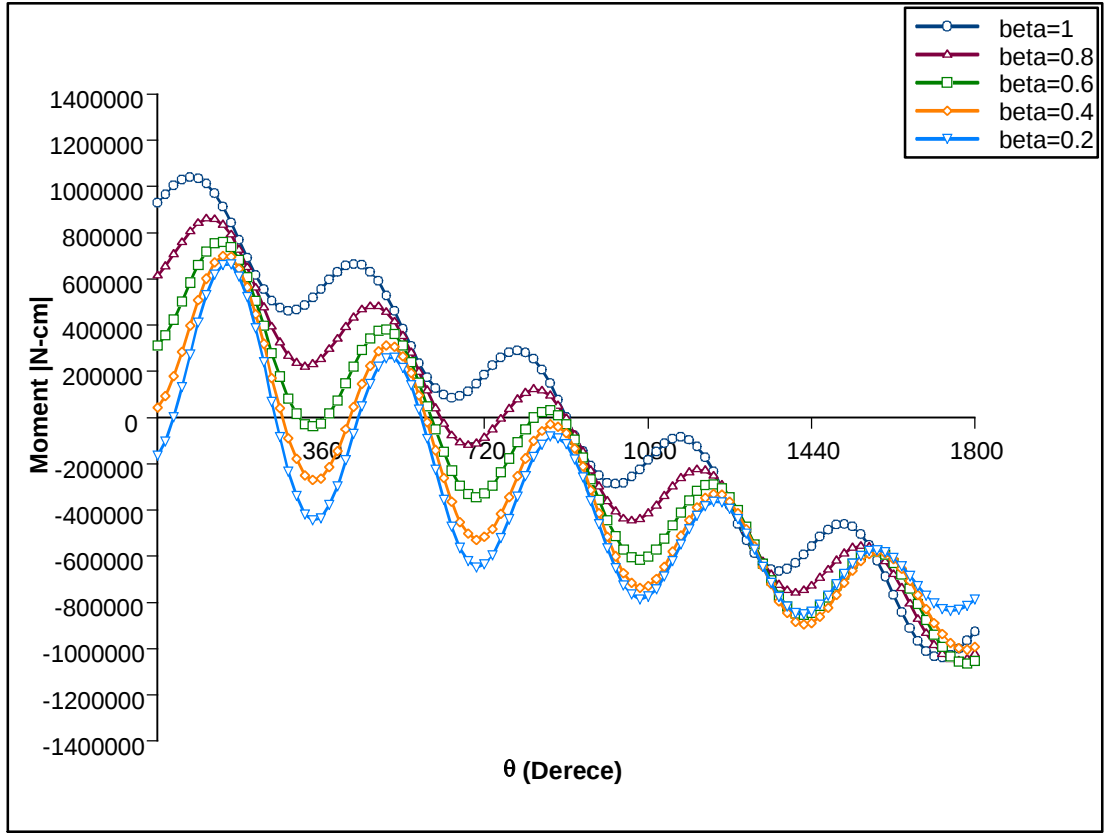


Şekil E.7 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi



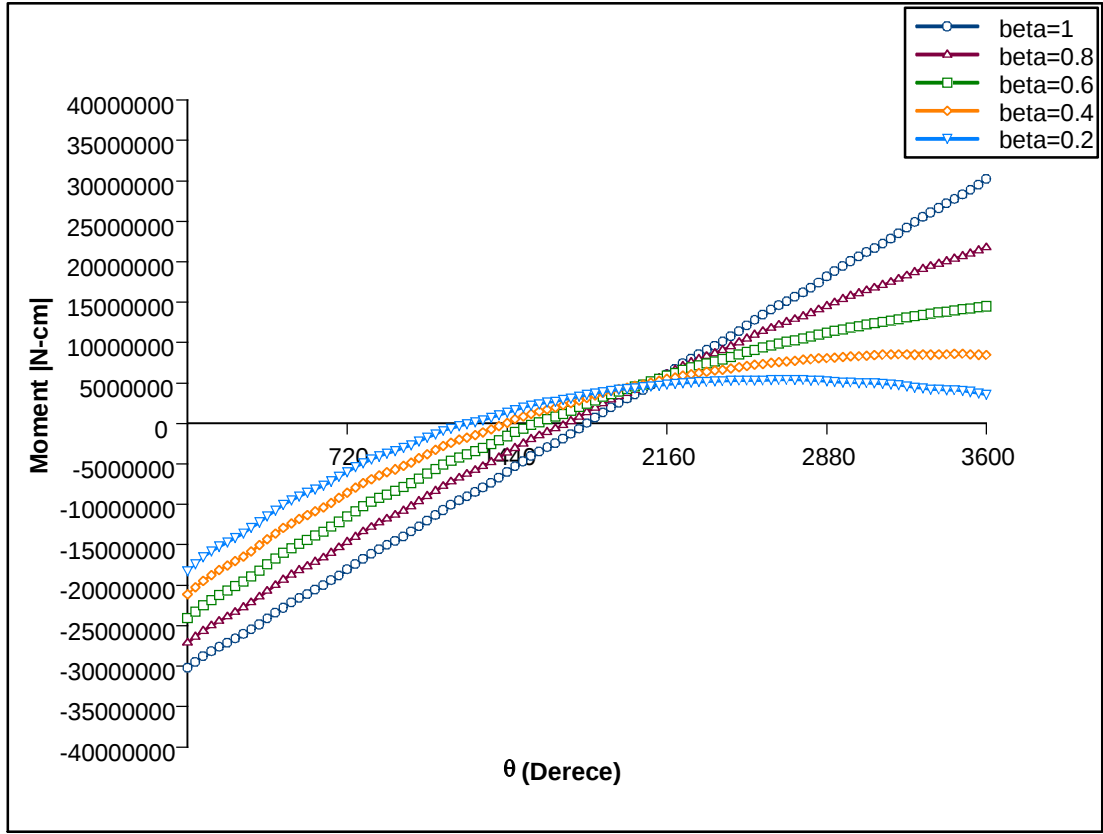
Şekil E.8 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta = R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-E

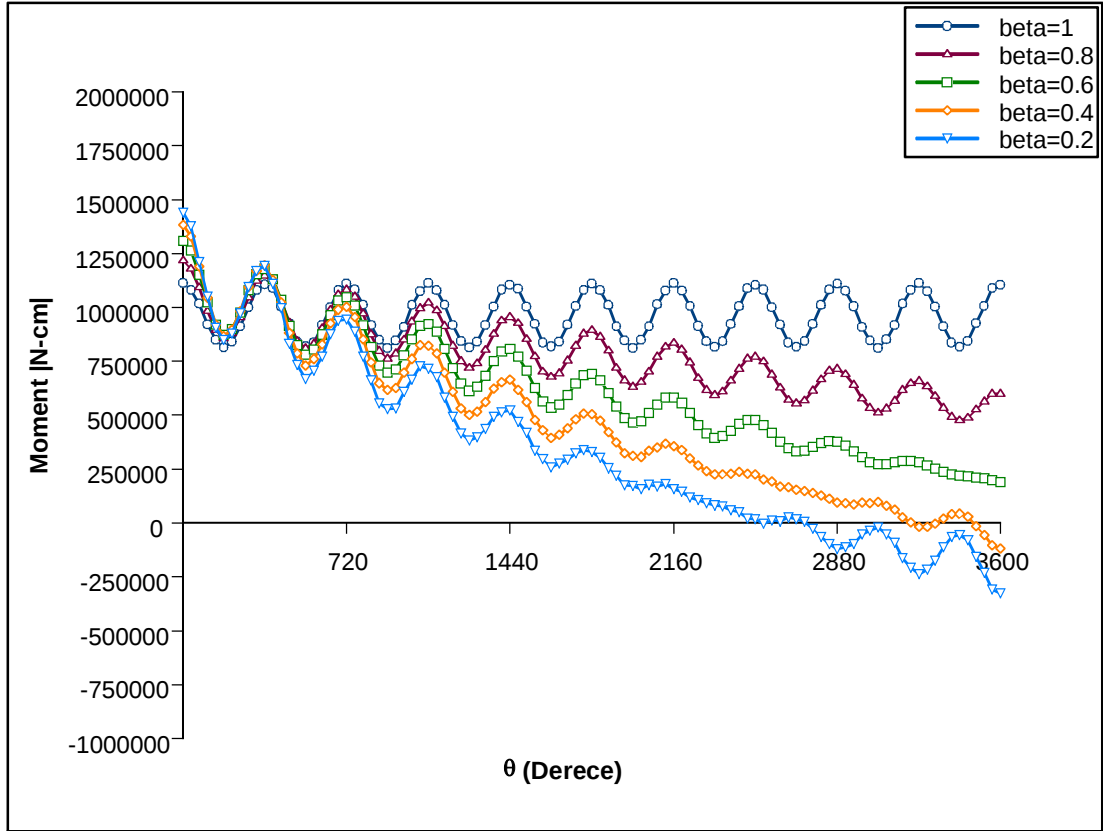


Şekil E.9 – Örnek 5’de  $n = 5$  ve  $\alpha = 1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi

## EK-F

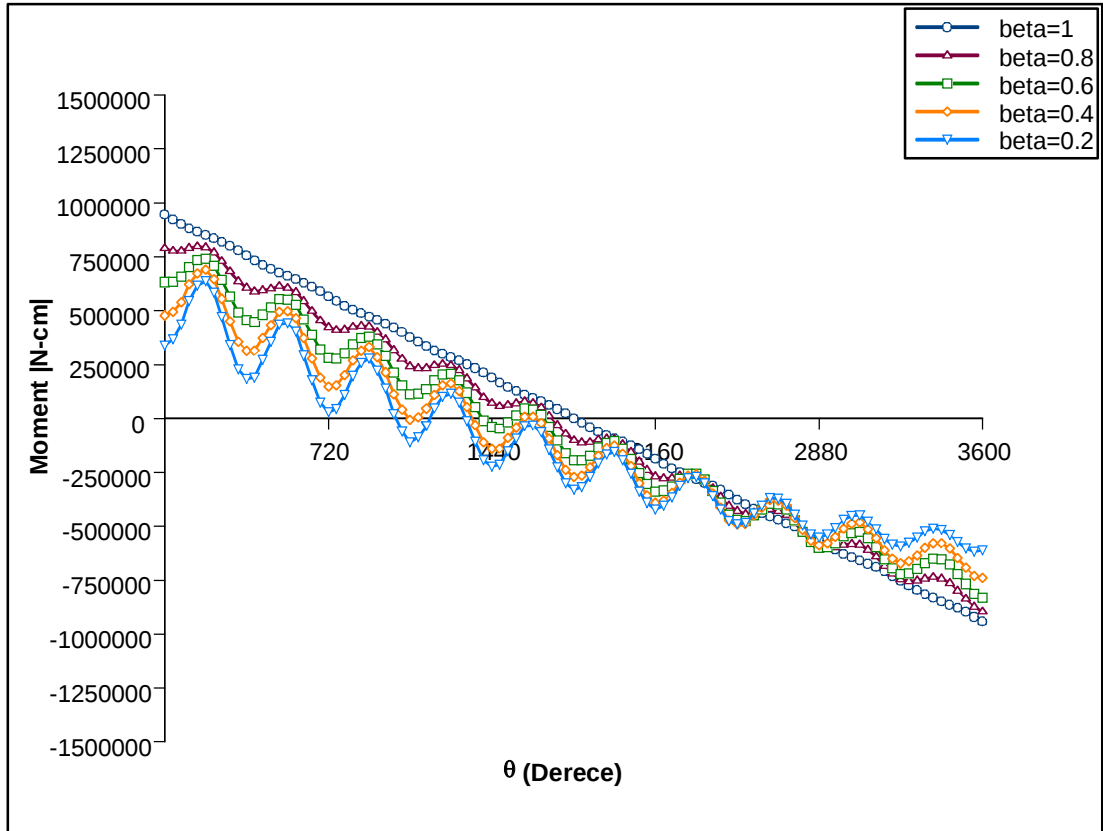


Şekil F.1–Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.5$  için  $M_t$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

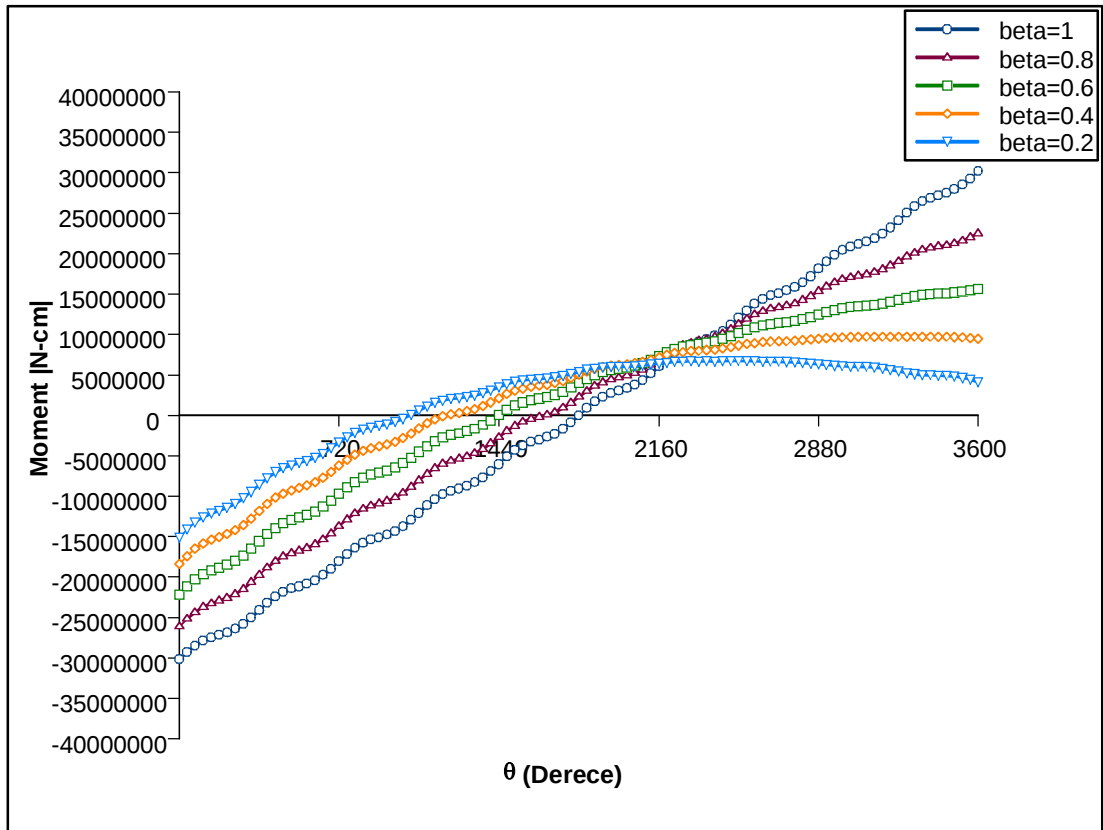


Şekil F.2 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.5$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-F

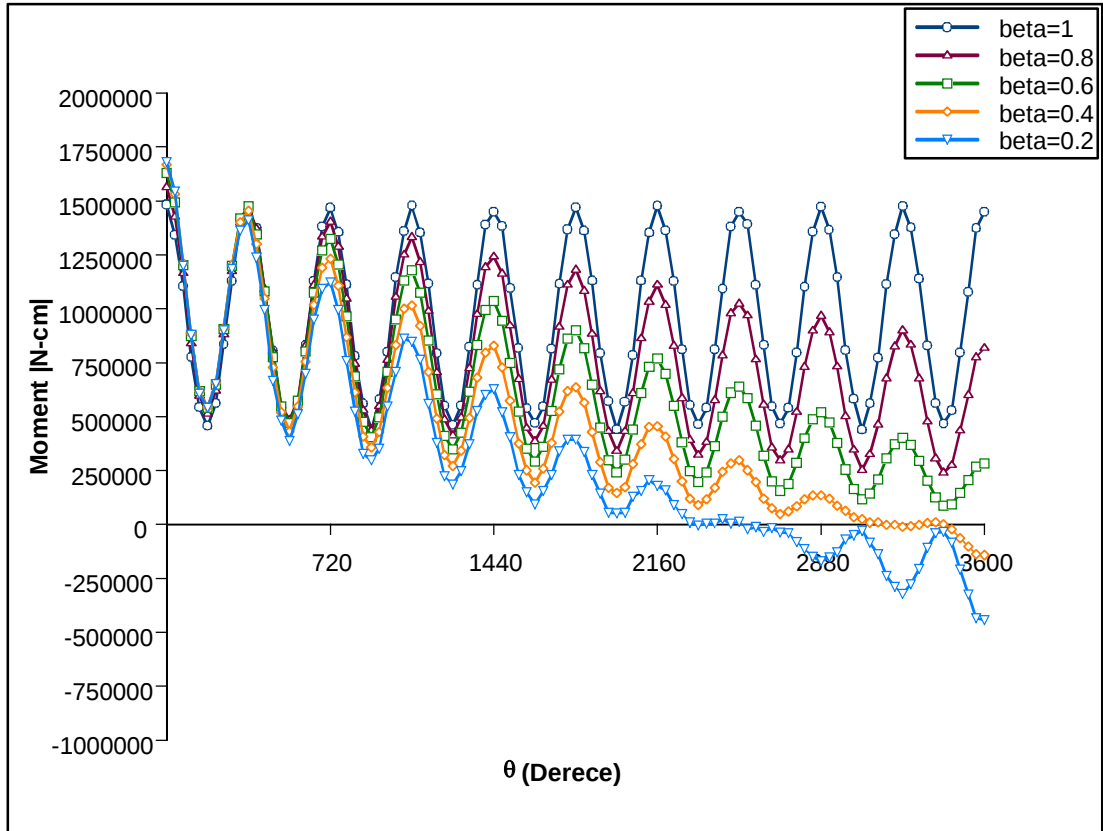


Şekil F.3 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.5$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

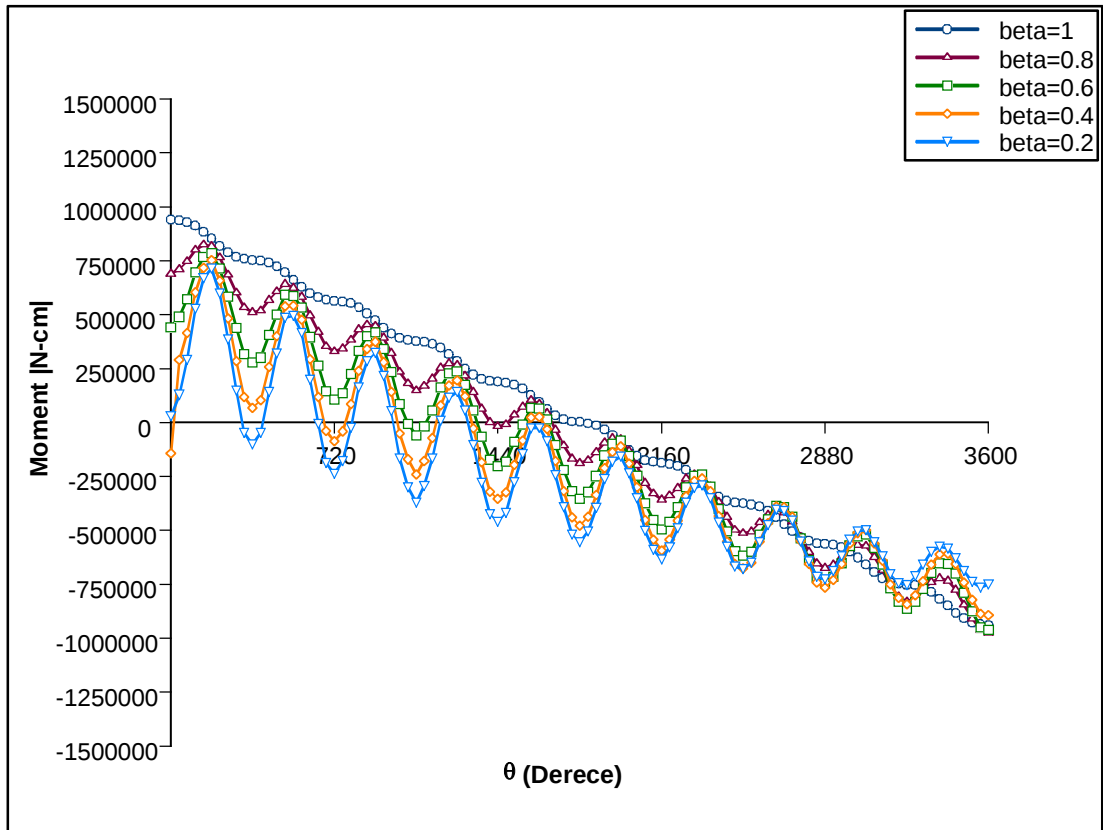


Şekil F.4 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.75$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-F

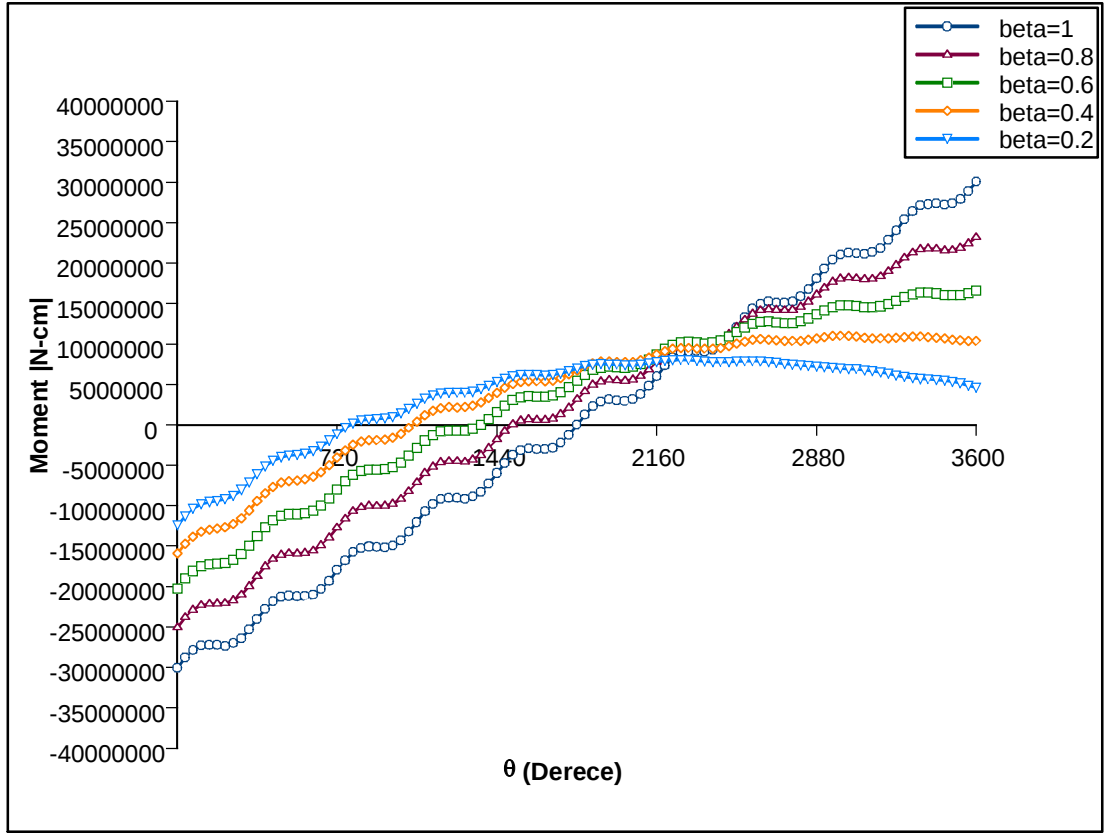


Şekil F.5 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.75$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

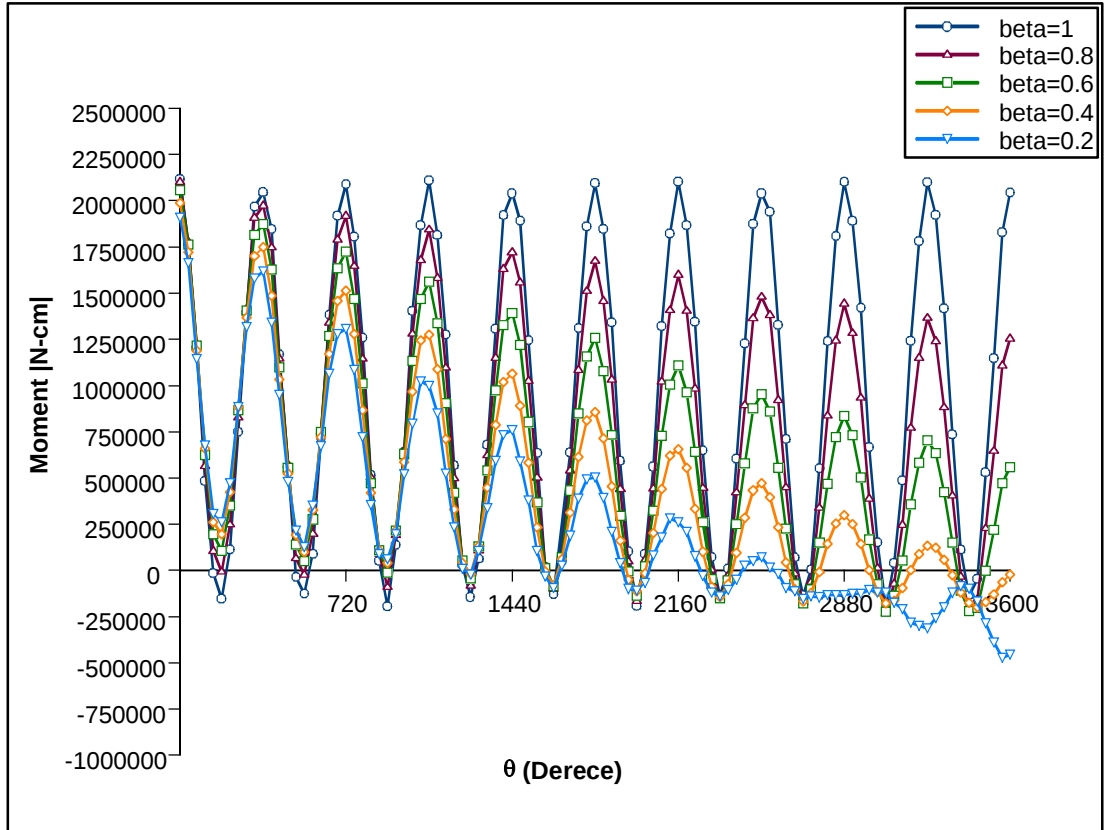


Şekil F.6 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=0.75$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-F

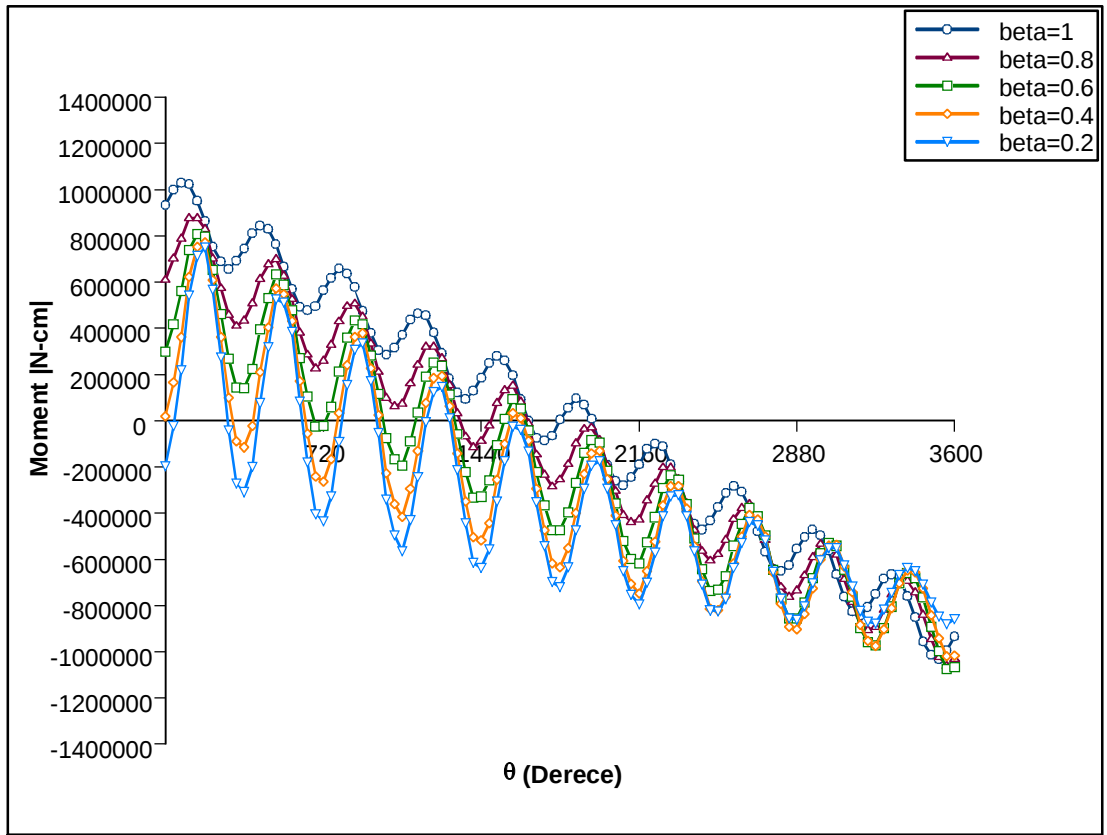


Şekil F.7 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=1$  için  $M_t$  burulma momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi



Şekil F.8 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=1$  için  $M_n$  eğilme momentinin  $\beta=R_1/R_0$  ile değişimi

## EK-F



Şekil F.9 – Örnek 6’da  $n=10$  ve  $\alpha=1$  için  $M_b$  eğilme momentinin  $\beta=R_l/R_0$  ile değişimi

## **ÖZGEÇMİŞ**

Suat Bayar 1980 yılında İstanbul’da doğmuş olup ilk ve orta öğrenimini burada tamamlamıştır. 2003 yılında Kocaeli Üniversitesinden İnşaat Mühendisi olarak mezun olmuştur.