

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ELASTİK BİR ORTAMDA
KUPLE YÜKSEK MERTEBE NONLİNEER
SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Araş. Gör. İrma HACINLIYAN
(Enstitü No: 509981003)**

101328

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Haziran 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Haziran 2001**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Saadet ERBAY

Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Faruk GÜNGÖR

Prof.Dr. Hilmi DEMİRAY (Işık Univ.)

HAZİRAN 2001

ÖNSÖZ

Çalışma süresince göstermiş olduğu tüm yardımlarından dolayı hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Saadet Erbay'a teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2001

İrma HACINLIYAN



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. NONLİNEER DALGALAR VE ASİMPOTİK YAKLAŞIM	9
2.1 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon	9
2.2 Nonlineerliğin Etkisi	11
2.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi	13
3. ALAN DENKLEMLERİ	17
4. KUPLE YÜKSEK MERTEBE NLS DENKLEMLERİ	23
4.1 Giriş	23
4.2 Kuple YMNLS Denklemlerinin Türetilmesi	24
4.3 Bazı Özel Çözümler	36
5. KUPLE GENELLEŞTİRİLMİŞ NLS DENKLEMLERİ	42
5.1 Giriş	42
5.2 Kuple GNLS Denklemlerinin Türetilmesi	44
5.3 Bazı Özel Çözümler	57
6. SONUÇLAR	64
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	69

GENELLEŞTİRİLMİŞ ELASTİK BİR ORTAMDA KUPLE YÜKSEK MERTEBE NONLINEER SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ

ÖZET

Diğer birçok olayda gözlemlendiği gibi elastik kristallerde de yeteri kadar yüksek bir enerji düzeyine ulaşırsa nonlinear etkiler önemli olmaya başlar. Eğer nonlinear etkiler ile dispersif etkiler dengelenebilirse, yalnız dalgalar gibi ilginç nonlinear yapılar ortaya çıkabilir. Son zamanlarda, bu olaylar birçok uygulamalı matematikçi ve teorik fizikçinin ilgisini çekmekte, elastik kristallerdeki nonlinear dalgalar hakkındaki yayınlar giderek artmaktadır. Cisimdeki ortalama parçacık büyüklüğünün karakteristik bir uzunlukla karşılaştırılabilir mertebede olduğu bir ortam içinde yüksek frekanslı dalga yayılımı ele alındığında, ortamdaki parçacıklar hareketten etkilenebilir. Bu durumda bu parçacıkların kendi başlarına yaptıkları hareketler de göz önüne alınmalıdır. Böyle olayları klasik elastisite sınırları içinde kalarak açıklamak mümkün değildir ve maddenin iç yapısını bünye denklemlerinde içermek için yeni sürekli ortam teorilerine gerek vardır. Bu teoriler arasında, yerel olmayan parçacık etkileşimleri, parçacığın yerel dönmeleri ve yüksek-mertebe gradyan teorileri sayılabilir. Bu çalışmada; sonsuz, homojen, yüksek-mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren zayıf nonlinear ve zayıf dispersif elastik bir ortamda yüksek frekanslı dalga yayılımı ele alınmıştır. Ortamdaki dalgaların uzun-zaman davranışını belirleyen yüksek-mertebe nonlinear ve dispersif etkileri içeren iki kuple nonlinear evolüsyon denklemi elde edilmiştir.

Bu çalışmanın anahatları aşağıda verilmiştir: İlk bölüm giriş olup nonlinear dalgalar, özellikle nonlinear Schrödinger denkleminin değişik formları hakkında genel bilgi vermektedir. 2. Bölümde, lineer ve nonlinear dalgaların kısa bir tanıtımı ve daha sonra dalgaların asimptotik davranışını incelemek için kullanılacak pertürbasyon yöntemi verilmiştir. Daha sonra, yüksek-mertebe gradyanları içeren üçüncü mertebe nonlinear elastik bir katının hareket denklemleri kısaca özetlenmiş; boyuna ve enine dalga modları için dispersiyon bağıntıları 3. Bölümde verilmiştir. 4. Bölümde, genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan enine dalgaların nonlinear modülasyonu problemi, hemen hemen tek dalga sayılı dalga çözümlerinin çok ölçekli açılımı kullanılarak incelenmiştir. Özellikle, evolüsyon denklemlerinde yüksek-mertebe nonlinear ve dispersif etkileri içermek için, yüksek-mertebe pertürbasyon denklemleri ele alınmış ve iki enine dalgaın değişiminin bir çift kuple yüksek-mertebe nonlinear

Schrödinger (YMNLS) denklemleri ile verildiği gösterilmiştir. Enine dalgalarından birinin olmaması durumunda, kuple YMNLS denklemlerinin daha önce nonlinear optikte elde edilen tek YMNLS denklemine indirgendiği bulunmuştur. Kuple YMNLS denklemlerinin sech-sech ve tanh-tanh gibi yalnız dalga şeklindeki bazı özel çözümleri de aynı bölümde verilmiştir. 5. Bölümde, kuple NLS denklemlerindeki nonlinear terimlerin katsayısını sıfır yapan kritik bir dalga sayısı civarında aynı ortamda yayılan iki enine dalganın nonlinear değişimi problemi ele alınmıştır. Kuple NLS denklemlerinde nonlinear terimlerin düşmesi ve böylece kuple NLS denklemlerin geçerli olmaması nedeniyle, *marginal durum* denen kritik dalga sayısı civarında bağımlı değişkenler için yeni pertürbasyon açılımları göz önüne alınmıştır. Kuple evolüsyon denklemlerinde dispersif etkileri dengelemek amacı ile daha yüksek-mertebe nonlinear terimleri içermek için, açılımlardaki nonlinearliğin etkisi arttırılmıştır. Marginal durum civarında iki enine dalganın değişiminin genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger (GNLS) denklemleri denen bir çift kuple evolüsyon denklemi ile verildiği gösterilmiştir. Enine dalgalarından birinin olmaması durumunda kuple GNLS denklemlerinin, *Benjamin-Feir* kararsızlığı olarak adlandırılan $k = 1.363$ kritik dalga sayısı civarında su dalgalarının hareketini karakterize eden tek GNLS denkleminin formuna indirgendiği gösterilmiştir. Kuple GNLS denklemlerinin bazı özel çözümleri de aynı bölümde verilmiştir. Son olarak, bu çalışmanın sonuçları 6. Bölümde verilmiştir.

COUPLED HIGHER-ORDER NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS IN A GENERALIZED ELASTIC MEDIUM

SUMMARY

As in many physical system nonlinearities become important when a sufficiently high level of energy is reached in elastic crystals. If nonlinear effects are balanced with the effect of dispersion, remarkable nonlinear structures such as solitary waves may exist. These phenomena have attracted many applied mathematicians and theoretical physicists recently, and a great amount of literature on nonlinear waves in elastic crystals is steadily growing. If high frequency wave propagation in a material body is considered, where the length scale is comparable with the average grain size in the body, then the individual constituents may get excited. In such a case the intrinsic motions of those constituents must be considered. Such a phenomenon cannot be explained within the limits of classical elasticity, and new continuum theories should be considered in order to include internal structure of matter into the constitutive equations. Among those theories, nonlocal particle interactions, local intrinsic rotations and higher-order gradient theories may be mentioned. In the present study; high frequency wave propagation in an infinite, homogeneous, weakly nonlinear and weakly dispersive elastic medium with higher-order displacement gradients are considered. Two coupled nonlinear evolution equations that include higher-order nonlinear and dispersive effects, are obtained for determining the long-time behavior of waves.

The outline of the present study is as follows: The first section is the introduction and gives general information about nonlinear wave equations, especially various forms of the nonlinear Schrödinger equations. Brief reviews of linear waves, nonlinear waves, and eventually, the multi-scale perturbation method to be used in determining the asymptotic behavior of waves are presented in Section 2. Then, the governing equations for a cubically nonlinear elastic solid with higher order gradients are briefly summarized and the dispersion relations for the longitudinal and transverse modes are presented in Section 3. In Section 4, the nonlinear modulation of transverse waves propagating in the generalized elastic solid are studied using a multi-scale expansion of quasi-monochromatic wave solutions. In particular, to include the higher-order nonlinear and dispersive effects in the evolution equations, higher-order perturbation equations are considered, and it is shown that the modulation of two transverse waves is governed by a pair of the coupled higher-order nonlinear Schrödinger (HONLS) equations. It is found that the coupled HONLS equations reduce to the single

HONLS equation which has already been obtained in the context of nonlinear optics, in the absence of one of the transverse waves. Some special solutions, such as sech-sech and tanh-tanh solitary waves, to the coupled HONLS equations are also presented in the same section. In Section 5, the problem of nonlinear wave modulation of two transverse waves propagating in the same medium is considered about a critical wave number for which the coefficients of the nonlinear terms in the coupled NLS equations are zero. New perturbation expansions for the dependent variables near the critical wave number, called *the marginal state*, are considered since the nonlinear terms drop from the coupled NLS equations, and thus the coupled NLS equations are no longer valid. In order to include higher order nonlinear terms in the coupled evolution equations to balance the effect of dispersion, the effect of nonlinearity is intensified in the expansions. It is shown that the modulation of two transverse waves near the marginal state is governed by a pair of the coupled evolution equations called the generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equations. It is found that the coupled GNLS equations reduce to the same form of the single GNLS equation which has already been obtained for a description of the behavior of water waves about the critical wave number, $k = 1.363$, called *Benjamin-Feir* instability, in the absence of one of the transverse waves. Some special solutions of the coupled GNLS equations are also presented in the same section. Finally, a conclusion of the present study is presented in Section 6.

1. GİRİŞ

Mühendislik, fizik ve doğal bilimlerdeki birçok sistem nonlineerdir ve nonlinear denklemlerle modellenir. Lineer ve nonlinear sistemler arasındaki temel fark ise lineer sistemlerde süperpozisyon prensibinin uygulanabilmesidir. Diğer bir deyişle lineer sistemin herhangi iki çözümünün toplamı aynı sistemin yeni çözümünü oluşturur. Bu özellik nonlinear sistemler için geçerli değildir. Lineer sistemlerdeki bu süperpozisyon prensibi lineer sistemi, her bir parçası Fourier veya Laplace dönüşümleri ile çözülebilecek parçalara ayırma imkanı verir ve elde edilen çözümlerin toplamı da orijinal sistemin yeni bir çözümüdür. Süperpozisyon prensibinin yokluğunun doğurduğu zorluklara rağmen; son 40 yıldır nonlinear sistemlerin gelişen bilgisayarların yardımı ile sayısal çözümü ve ters saçılma dönüşümü gibi yeni yöntemlerle analitik olarak çözümlerinin elde edilebilmesi için büyük bir çaba vardır.

Lineer olmayan bilimin bir dalı olan dalga yayılımı, son yıllarda çok yaygın olarak çalışılmış konulardan biridir. Dalga yayılımı problemlerinde araştırma, genel olarak deneysel bir sistemin davranışına bir yaklaşım veren bir boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) incelenmesi ile başlar. Dalga genliğinin sistemdeki karakteristik bir uzunluk ile karşılaştırılabilir bir mertebede olması, dalga hareketini yöneten KDD'lerin nonlinear olmasına yol açar. Nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasının zor, çoğunlukla mümkün olmadığı bilinen bir gerçektir. Bu durumda orijinal KDD ile uğraşmak yerine, birçok basitleştirici fiziksel kabul altında, küçük bir parametrenin de katıldığı asimptotik metotlar kullanarak [1, 2], uzay ve zaman değişkenlerinin belli değer bölgelerinde orijinal sistemin hareketini karakterize eden evölüsyon denklemleri veya denklemleri ile uğraşmak çoklukla takip edilen yollardan biridir.

Birçok değişik asimptotik yöntemle elde edilmiş bu model denklemler, uzun dalga yaklaşımı kabulü altında genellikle Korteweg-de Vries (KdV) veya kuple Korteweg-de Vries sınıfındaki denklemler ve dalga modülasyonu problemleri için nonlinear Schrödinger (NLS) veya kuple nonlinear Schrödinger denklemleri olarak elde edilir. Asimptotik yöntemler ile elde edilen bu nonlinear evölüsyon denklemlerin integre edilebilir ya da kısmen integre edilebilir olmaları, araştırmacıların bu denklemlerle uğraşmalarının en önemli nedenlerinden biridir. İntegre edilebilirliğin esas olarak özel dalga modlarının süperpoze edilmesi anlamına geldiğı düşünülürse, böylece birçok nonlinear probleme çözüm bulma imkanı ortaya çıkar.

Başlangıçta oldukça basit olan model denklemlere disipatif terimler, zorlayıcı kuvvetler, yüksek mertebe nonlinear ve/veya dispersif etkiler gibi yeni fiziksel etkilerin eklenmesi ile model KDD'ler daha karmaşık bir yapıya sahip olurlar. Örneğin, KdV tipi denklemler disipatif terimleri de içeren KdV-Burgers tipindeki denklemlere, NLS denklemleri ise kaynak terimini ve/veya disipatif terimleri de içeren NLS'nin genelleştirilmiş formlarına dönüşürler. Ancak daha karmaşık olan bu denklemler doğal olarak daha zengin dinamikleri de açıklayabilen yapıya sahiptir. Ayrıca elde edilen KDD denklem veya denklem sistemlerinin karmaşık bir yapıda olması denklemlerin çözümlerini elde etmek için yeni problemleri de beraberinde getirir. Diğer yandan; disipasyon, yüksek mertebe nonlinear ve yüksek mertebe dispersif etkilerin model denklemlerin çözümlerine getirdiğı katkının deneysel sonuçlarla karşılaştırılması bazı malzeme sabitlerinin belirlenmesine yol açabilir.

Doğa lineer olmayan dalga örnekleri ile doludur. Nonlinear dalga problemlerindeki araştırmalar, özellikle su dalgalarında olayların gözle görünür olması nedeniyle akışkanlar dinamiğinde birçok ilerlemelere neden olmuştur [3, 4, 5]. Ayrıca çok-hızlı optik iletişim hatlarında uygulama bulması nedeniyle optik ortamlardaki nonlinear dalga yayılımı çok yaygın olarak araştırma yapılan konuların başında gelmektedir [6]. Elastik ortamlarda yayılan dalgaların su dalgalarına göre çok hızlı olması, dalgaların su dalgalarında olduğu gibi kolay

görülebilmek olamaması elastik dalgaların hak ettiği ilgiyi görememesine neden olmuştur. Buna rağmen, son yıllarda elastik kristallerde nonlinear dalga yayılımı problemleri geniş olarak araştırılmaya başlanmış ve bu konudaki literatür de artarak gelişmektedir [7, 8, 9].

Elastik kristallerde yeteri kadar yüksek bir enerji düzeyine ulaşıldığında nonlinearliğin önemli olduğu bilinen bir gerçektir. Eğer elastik ortamda ortaya çıkan bu nonlinear etkiler dispersif etkiler ile dengelenebilirse, ortamda yalnız dalgalar (solitary waves) gibi ilginç nonlinear yapıların ortaya çıkma olasılığı ortaya çıkar. Bir cisimdeki ortalama parçacık büyüklüğü ile karakteristik dalga uzunluğun aynı mertebede olabildiği yüksek frekanslı dalga yayılımı incelendiğinde, malzemedeki tek tek parçacıkların bağımsız hareketi söz konusu olabilir. Buna benzer olayların söz konusu olduğu durumları klasik elastisite sınırları içinde kalarak açıklamak mümkün olmayabilir. Bu durumda malzemenin iç, ayrık, yapısını klasik elastisite teorisine katan ve dolayısıyla katıda dispersif dalga yayılımına neden olan, yeni sürekli ortam teorileri göz önüne alınmalıdır. Bu teoriler arasında parçacık etkileşimlerini hesaba katan yerel olmayan teorileri, parçacıkların mikro dönmelerini ele alan mikropolar teoriyi ve yerdeğıştirme alanının yüksek mertebe gradyanlarını hesaba katan kuple elastisite teorisi sayılabilir. Bu çalışmada, bünye denklemleri fiziksel orijinli nonlinear etkileri ve mikro yapının neden olduğu dispersif etkileri içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda yüksek frekanslı dalga yayılımı problemi incelenecektir.

Nonlinear optik bir ortamda [10], zayıf nonlinear ve zayıf dispersif elastik bir katıda [11], akışkan ve plazma gibi ortamlarda yayılan yarı-monokromatik (hemen hemen tek dalga sayılı) dalga paketlerinin yavaş değışen genliğinin hareketi, bilindiği gibi tek bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile verilir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + q|A|^2A = 0. \quad (1.1)$$

Burada ξ ve τ sırası ile yavaş değışen konum ve zaman değışkenleri, A ise yavaş değışen kompleks genlik fonksiyonudur. (1.1) evolüsyon denklemi, birçok fiziksel problemdeki orijinal alan denklemlerinin çok ölçekli asimptotik pertürbasyon

yöntemleri ile indirgenmesinden elde edilmiştir. Benzer şekilde, eğer ortamda aynı anda iki dalga yayılıyorsa dalgaların uzun zaman davranışı bir çift kuple nonlinear Schrödinger (KNLS) denklemleri ile verilir. Gerçekten nonlinear optik bir ortamda yayılan iki dalganın [12]; sonsuz ve homojen mikropolar elastik ortamda yayılan iki enine dalganın [13] uzak alan davranışları iki kuple nonlinear Schrödinger denklemleri ile karakterize edilir.

Sürekli ortamlarda yayılan dalgaların zarflarının davranışını veren tek NLS veya KNLS denklemleri türetilirken, uygun fiziksel koşullar altında yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkiler ihmal edilmektedir. Diğer bir deyişle, ϵ nonlinearliğin ve dispersif etkilerin zayıflığını ölçen küçük bir parametre olmak üzere, tek NLS ve KNLS denklemleri ilerleyen dalga hareketini ϵ 'a göre ikinci mertebeye kadar doğru karakterize eder. Ancak bazı durumlarda, mühendislik, fizik ve doğal bilimlerin diğer dallarındaki çok hızlı olayların anlaşılmasında önemli olabilecek olan çok kısa dalga hareketi incelendiğinde daha yukarı mertebe nonlinearlik ve dispersif etkilerin hesaba katılması gerekebilir. Bu durumda tek NLS ve KNLS denklemleri dalga hareketini doğru olarak betimleyemediğinden yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin uygun biçimde bu denklemlere katılması gerekir. Yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin tek NLS denklemine uygun biçimde katılması ilk olarak nonlinear optik alanında Kodama [14], Kodama ve Hasegawa [15] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bir lifte (fiber) yayılan ışık dalgasının zarf denklemi olarak Yüksek Mertebe NLS (YMNLS) denklemi, Taniuti [16] tarafından geliştirilmiş olan indirgeyici pertürbasyon metodu olarak adlandırılan pertürbasyon tekniği kullanılarak, Kodama ve Hasegawa [15], tarafından elde edilmiştir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + \tilde{q}|A|^2A + i\epsilon[A_{\xi\xi\xi} + \tilde{a}(|A|^2A)_\xi + \tilde{b}A(|A|^2)_\xi] = \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (1.2)$$

Burada A hızlı değişen ışık dalgasının zarfını gösteren kompleks genlik, ξ ve τ yavaş değişkenler olup katsayılardaki sabitler $\tilde{q} = q/\epsilon^2$, $\tilde{a} = a/\epsilon^2$ ve $\tilde{b} = b/\epsilon^2$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $A = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2$ birinci ve ikinci mertebe genliklerin toplamı olan bağımlı değişkendir. Bu yaklaşımda, bütün yüksek

mertebe terimler tek NLS denklemine pertürbasyonlar olarak kabul edilmiştir. (1.2) ile verilen YMNLS denklemi, yavaş değişen dalga genliğinin uzun zaman davranışını ϵ küçük parametresine göre ikinci merteye terimleri içerecek şekilde karakterize eder. Gerçekte (1.2) denklemi ilk olarak Hirota tarafından incelendiğinde denklem bir fiziksel problemi modelleyen bir denklem değildi [17]. Hirota adı geçen bu çalışmada, bu denklemi değiştirilmiş KdV denklemi ile NLS denkleminin birleşimi olan bir evolüsyon denklemi olarak ele almıştır. Ayrıca, günümüzde Hirota metodu olarak adlandırılan direkt bir metod kullanarak katsayı fonksiyonlarının özel değerleri için bu denklemlere soliton tipinde çözümler bulmuştur. Nonlineer optik alanında tek YMNLS denkleminin YMNLS denklemlerine genişletilmesi yakın zamandaki bir çalışmada verilmiştir [18]. Bu çalışmada, tek YMNLS denklemini sağlayan genliğin sağ- ve sol-polarize olmuş dalgaların toplamı olarak yazılabileceği varsayılmış ve tek YMNLS denklemi iki dalga genliği için kuple YMNLS denklemine dönüştürülmüştür. Ancak gerçek bir fiziksel probleminin modellenmesinde ortaya çıkabilecek karmaşık kuplaj terimlerinin böyle bir genişletme ile kapsamı kapsamıyacağı açık değildir. Başka bir çalışmada da, kuple NLS denklemlerine yüksek merteye terimlerin katılması ele alınmıştır [19]. Bu çalışmada, kuple denklemlerin integre edilebilir olma özelliğini koruyacak şekilde yüksek merteye terimlerin kuple NLS denklemlerine katılması için, Hermityen simetrik uzaylarının matematiksel yapısı kullanılarak sistematik bir yol önerilmiştir. Ancak elde edilen integre edilebilir kuple YMNLS denklemlerinin herhangi bir fiziksel problemi modelleyip modellemediği açık değildir. Şimdiki çalışmanın amaçlarından biri tek YMNLS denkleminin genelleştirilmiş *kuple* halini genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan enine dalgalar için elde etmek, denklemin katsayılarını açık olarak dalga sayısı, frekans ve malzeme sabitlerine bağlı olarak elde etmektir.

(1.1) NLS denklemine yol açan bu asimptotik yöntemler, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif etkiler arasında denge sağlanması esasına dayanır. Nonlineerlik ve dispersif etkilerin dengesi ise, NLS denkleminin soliton şeklindeki çözümleri kabul etmesine yol açar. Ancak, $q|A|^2A$ nonlineer teriminin $pA_{\xi\xi}$ dispersif

terimi yanında çok küçük olması bu dengenin bozulmasına yol açar ve NLS denklemi geçerli olmaktan çıkar. Bu durum, özellikle belli k dalga sayıları için NLS denkleminin nonlinear teriminin katsayısı sıfır olması ile ortaya çıkabilir. Pertürbasyon açılımı bakımından bu durum, ϵ küçük bir parametre ve k_c kritik dalga sayısı olmak üzere, $q(k_c) = \mathcal{O}(\epsilon) \ll \mathcal{O}(1) = p$, yani $pq \sim \epsilon$ şeklinde ifade edilebilir. k_c , dispersif terimin negatif olması durumunda, NLS denkleminin düzlem dalga çözümlerinin kararlı ($pq < 0$) olduğu bölgeden kararsız ($pq > 0$) olduğu bölgeye geçişe karşı gelen dalga sayısı olduğundan sistemin marjinal durumu olarak da tanımlanır. Marjinal durum civarında nonlinearliğin dalga yayılımına etkisini incelemek için daha detaylı bir pertürbasyon açılımı kullanılmalıdır, yani dalga paketlerinin hareketini marjinal durum civarında doğru olarak karakterize etmek için yüksek mertebe nonlinear etkilerin hesaba katıldığı pertürbasyon açılımları göz önüne alınmalıdır. Buna göre NLS denklemini elde etmek için ϵ parametresinin kuvvet serisi şeklinde olan çözüm, yeni açılımda $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ 'nin kuvvetlerine göre olmalıdır. Yeni ölçekleme ile nonlinear terimlerin etkisi arttırıldığından NLS yerine elde edilecek evolüsyon denkleminde yüksek mertebe nonlinear terimler ortaya çıkacaktır. Marjinal durum civarında dalga modülasyonunu karakterize eden genelleştirilmiş NLS (GNLS) denklemi ilk olarak Johnson [20]; Kakutani ve Michihiro [21] tarafından sonlu derinliğe sahip akışkanlarda Stokes dalgaları için elde edilmiştir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + q_1|A|^2A + q_2|A|^4A + (q_3 + iq_4)A(|A|^2)_\xi + iq_5|A|^2A_\xi = 0. \quad (1.3)$$

(1.3) GNLS denklemi, akışkan dolu tüplerde [22] ve genel bir dispersif sistemde [23] marjinal durum civarında dalga modülasyonunu karakterize eden denklem olarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın ikinci amacı ise tek GNLS denkleminin genelleştirilmiş kuple halini zayıf nonlinear ve dispersif elastik bir ortamda yayılan enine dalgalar için elde etmek, denklemin katsayılarını açık olarak dalga sayısı, frekans ve malzeme sabitlerine bağlı olarak elde etmektir.

Bu çalışmada zayıf nonlinear ve zayıf dispersif elastik bir ortamda yayılan enine dalgaların modülasyonu problemi ele alınmış ve modüle olmuş dalgalara yüksek

mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin katkısı araştırılmıştır. Çalışma esas olarak altı bölümden oluşmaktadır ve giriş bölümünden sonraki ikinci bölümde, lineer ve nonlinear dalgalar ele alınmış, dispersiyon ve nonlinearliğin etkileri tartışılmıştır. Aynı bölümde, zayıf nonlinear ve dispersif elastik bir ortamda yayılan $(1+1)$ boyutlu enine dalgaların modülasyonu problemini incelemek için kullanılacak olan indirgeyici pertürbasyon metodu kısaca tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde ise zayıf nonlinear ve mikro şekil değiştirmenin neden olduğu dispersif etkileri içeren elastik ortamın alan denklemleri kısaca verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde, zayıf nonlinear ve zayıf dispersif sonsuz, homojen elastik bir ortamda yayılan $(1+1)$ boyutlu enine dalgaların nonlinear modülasyonu problemi incelenmiştir. Bunun için yarı-monokromatik dalga çözümlerinin çok ölçekli bir açılımına dayanan pertürbasyon metodu kullanılmış ve ortamda yayılan *birinci mertebe* iki enine dalgaının etkileşiminin kuple nonlinear Schrödinger (KNLS) denklemleri ile karakterize edilebildiği gösterilmiştir. Ancak ortamda çok hızlı dalgaların yayılması durumunda, ikinci mertebeye kadar hareketi doğru olarak karakterize eden KNLS denklemleri geçerli olmaktan çıkar ve dalga hareketini doğru olarak karakterize etmek için yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkileri de hesaba katmak gerekir. Bu nedenle yüksek mertebe pertürbasyon denklemleri de hesaba katılarak *ikinci mertebe* enine modlar için de evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Birinci ve ikinci mertebe enine modlar uygun bir şekilde birleştirilerek, ortamda yayılan iki enine dalgaının kompleks genliklerinin davranışını üçüncü mertebeye kadar doğru karakterize eden kuple yüksek mertebe nonlinear Schrödinger (KYMNLS) denklemleri elde edilmiştir. Yüksek mertebe terimlerin ihmal edildiği özel durumda kuple NLS denklemlerine indirgenen bu evolüsyon denklemleri, esas olarak yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin katkılarını göstermektedir. Bu bölümün sonunda kuple YMNLS denklemlerine sech ve tanh tipinde bazı özel çözümler verilmiş, bu çözümlerin tek NLS denkleminde daha az kısıtlayıcı durumlarda elde etmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise, yukarıda adı geçen zayıf nonlinear ve zayıf dispersif sonsuz, homojen elastik bir ortamda

yayılan $(1+1)$ boyutlu enine dalgaların nonlinear modülasyonu problemi marjinal durum civarında incelenmiştir. Bunun için ilk olarak modüle olmuş enine dalgaların hareketini ikinci mertebeye kadar doğru betimleyen kuple NLS denklemleri elde edilmiştir. Kuple NLS denklemlerindeki nonlinear terimlerin katsayılarının, bazı kritik dalga sayıları için sıfır olduğu marjinal durumda evölüsyon denklemlerinin geçerli olmaktan çıktığı gözlenmiştir. Bu durumda nonlinear etkileri denklemlere katabilmek için nonlinearliğin şiddetini arttıran bir pertürbasyon açılımı kullanılarak hareketi karakterize eden kuple genelleştirilmiş NLS (GNLS) denklemleri elde edilmiştir. Enine dalga modlarından birinin ihmal edilmesi durumunda literatürde daha önce kritik bir dalga sayısı için elde edilmiş tek GNLS denklemine indirgenen kuple GNLS denklemleri, esas olarak marjinal durum civarında iki dalganın hareketini ve iki dalganın birbirleri ile nonlinear etkileşimlerini veren denklemler olarak bulunmuştur. Ayrıca bu bölümün sonunda, kuple GNLS denklemlerinin gezen dalga şeklindeki bazı özel çözümleri verilmiştir. Son bölümde ise kısaca sonuçlar özetlenmiş ve gelecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

2. NONLINEER DALGALAR VE ASİMPOTOTİK YAKLAŞIM

Bu bölümde, kısaca lineer ve nonlinear dalgalar göz önüne alınacak ve dalga yayılım problemlerinde dispersiyon (dağılma) ve nonlinearliğin etkileri örneklerle açıklanacaktır. Ayrıca dalga modülasyonu problemlerini incelemek için kullanılacak olan asimptotik yaklaşımlardan indirgeyici pertürbasyon yöntemi tanıtılacaktır.

2.1 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon

En bilinen dalga, δ faz sabiti olmak üzere

$$u(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \delta) \quad (2.1)$$

şeklindeki sinüsoidal dalgadır. Burada A genlik; λ dalga uzunluğu ve ν dalga frekansı olmak üzere $k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısı ve $\omega = 2\pi\nu$ açısal frekansıdır. (2.1) ifadesindeki artı işareti sol ve eksi işareti sağ tarafa olan dalga yayılımını gösterir. Bu dalganın faz hızı $c_p = \omega/k$ olarak tanımlanır.

$u(x, t)$ değişkeninin sağladığı en basit bir boyutlu lineer dalga denklemi

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0 \quad (2.2)$$

ve denklemin genel çözümü

$$u(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \quad (2.3)$$

şeklinde. Burada c_0 bir sabit ve f ve g ise sırası ile $x - c_0 t$ ve $x + c_0 t$ değişkenlerine göre türevleri sürekli olan keyfi fonksiyonlar olup başlangıç ve sınır koşulları ile belirlenirler. (2.2) denklemi lineer olduğundan harmonik dalga çözümünü kabul eder. O zaman, A genlik, k dalga sayısı ve ω frekans olmak

üzere

$$u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.4)$$

çözümü (2.2) denkleminde yerleştirilirse, sıfır olmayan çözüm elde etmek koşulu

$$D(k, \omega) = \omega^2 - c_0^2 k^2 = 0 \quad (2.5)$$

denkleminde yol açar. k ve ω arasındaki bu ilişkiye *dispersiyon bağıntısı* adı verilir. (2.5) denkleminde görüldüğü gibi dalganın faz hızı, $c_p = \omega/k = \pm c_0$, her dalga sayısı için aynıdır. Başka bir deyişle faz hızı sabittir, yani dalga ortamda dağılmadan yayılır. Ayrıca

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm c_0$$

şeklinde tanımlanan grup hızı da dalga faz hızına eşit olup sabittir.

Buna karşılık olarak, c_0 ve a sabitler olmak üzere

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + au = 0 \quad (2.6)$$

denkleminde (2.4) formundaki harmonik dalga çözümü önerilirse, dispersiyon bağıntısı

$$D(k, \omega) = \omega^2 - c_0^2 k^2 - a = 0 \quad (2.7)$$

olarak elde edilir. (2.7) ilişkisinden c_p faz hızı k dalga sayısına bağlı olarak elde edilir:

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{c_0^2 + \frac{a}{k^2}}. \quad (2.8)$$

(2.8) ifadesinden görüldüğü gibi c_p faz hızı, farklı k dalga sayıları için değişir, yani farklı dalga sayılarına karşı gelen modlar farklı hızlarda yayılır ve ortamda yayılan dalgalar dağılır. Bunun dışında dalganın grup hızı

$$c_g = \pm c_0^2 \frac{k}{\omega}$$

olarak hesaplanır. Diğer bir deyişle $\omega''(k) \neq 0$ 'dır. Sonuç olarak; *dispersiyon*, ω frekansı için farklı dalga sayısına sahip dalgaların, farklı faz ve grup hızlarının olduğu ve dalganın farklı bileşenlerinin dalga yayılımı boyunca dağılacağı (dispersif olacağı) anlamına gelir. Buna göre (2.2) dalga denklemi dispersif değildir ve (2.6) dalga denklemi ise dispersiftir.

2.2 Nonlineerliğin Etkisi

Ortamda yayılan dalgaların genliği karakteristik bir uzunluk ile aynı mertebede ise, dalga yayılımını yöneten denklem veya denklemler nonlinear olur. Nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ise, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinden büyük farklılık gösterir. Bu farkları görmek için

$$u_t + f(u)u_x = 0 \quad (2.9)$$

lineer olmayan genelleştirilmiş kısmi diferansiyel denklemini ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

alalım. (2.9) nonlinear denklemi karakteristikler metodu kullanılarak çözümlerse, u çözümü

$$u(x, t) = \phi(\xi), \quad x = \xi + tf(\phi(\xi)) \quad (2.10)$$

veya

$$u = \phi(x - tf(u)) \quad (2.11)$$

olarak elde edilir ve (2.9) nonlinear denkleminin bu çözümü sabit formda düzgün yayılan dalgalardan oluşmaz. Gerçekten, (2.10) çözümünden de görüldüğü gibi bütün t zamanlarında tanımlı türevlenebilen çözümler ayrı ayrı doğrulardır. Fakat, bir t_c kritik zamanında tüm tek olmayan çözümlerin kesiştiği düşünülürse çözüm $t = t_c$ zamanında tekliğini yitirir. Ayrıca sözü edilen çözüm türevlenebilir olmaktan çıkar; diğer bir deyişle t_c kritik zamanından sonra dalga çok değerli olup kırılır. Dalganın çok değerli olup kırılmasının denklemin nonlinear olmasından kaynaklandığını görmek için, (2.9) denkleminin u_0 sabit durumu civarındaki lineer formunu inceleyelim. Bu durumda (2.9) denklemi, $u = u_0 + \tilde{u}$ olmak üzere

$$\tilde{u}_t + f(u_0)\tilde{u}_x = 0$$

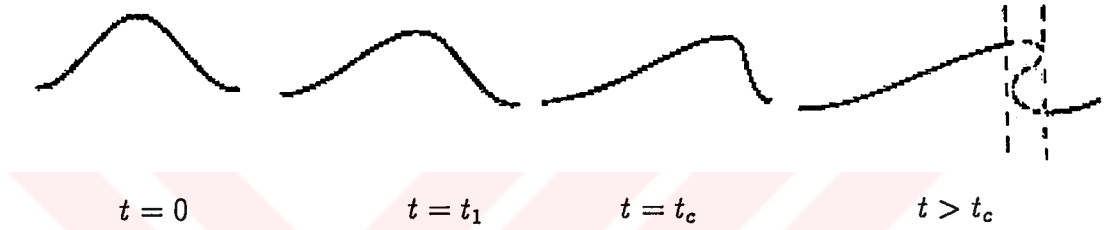
lineer denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü ise $\tilde{u} = \phi(x - c_0t)$, ($c_0 = f(u_0)$) ile verilir. Lineer denklemin çözümü olan bu ifadenin sağ tarafı $\tilde{u}$ çözümüne kapalı olarak bağlı değildir. Lineer denklemlerin çözümlerinin

çok değerli olup kırılmadıkları bilindiğine göre, (2.9) denkleminin çözümlerinin $t = t_c$ kritik zamanında türevlenebilir olma özelliğini kaybetmesinin, yani dalganın kırılmasının denklemin nonlinear olması ile ilgili olduğu görülür.

Nonlinearliğin etkisini daha iyi görebilmek için özel olarak ϕ fonksiyonu $\phi(x) = \sin x$ olarak alınmış ve (2.9) diferansiyel denkleminin

$$u(x, t) = \sin(x - tu) \quad (2.12)$$

şeklindeki özel çözümü $t = 0$, $t = t_1$, $t = t_c$ ve $t > t_c$ zamanlarında şematik olarak Şekil 1.'de gösterilmiştir.



Şekil 1.

Şekil 1.'den görüldüğü gibi faz hızı u olup; dalga, büyük u değerleri için daha hızlı yayılır. Bu da dalganın tepe noktasındaki parçacıkların daha hızlı hareket etmesi anlamına gelir ve $t = t_c$ anından itibaren aşağıda yavaş hareket eden parçacıkları yakalar. Böylelikle, dalga çok değerli hale gelerek kırılır.

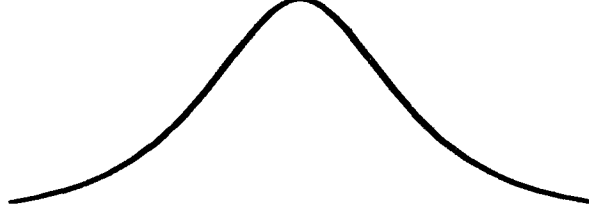
Sonuç olarak, nonlinearlik sonlu bir zaman sonra dalganın dikleşmesine ve daha sonra da kırılmasına neden olmaktadır. Sisteme dispersif etkiler eklenmesi durumunda (Dalgaların farklı dalga sayıları için farklı hızda dağılarak yayıldıkları durumda) zayıf nonlinearliğin neden olduğu kırılmanın gerçekleşmediği, nonlinearlik ve dispersiyonun birbirlerini dengelediği durumlar sözkonusu olabilir. Böyle durumlarda, denklemlerin düzgün, yapılarını koruyan yalnız dalga (solitary wave) tipinde gezen dalga çözümleri var olabilir. Örnek olarak, hem nonlinear hem de dispersif etkileri taşıyan Korteweg-de Vries denklemi

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

ele alındığında KdV denkleminin yalnız dalga şeklindeki bir çözümünün

$$u = 12K^2 \text{sech}^2 K(x - 4K^2 t)$$

sabit t zamanı için şematik olarak gösterimi Şekil 2.'de verilmiştir. Bu



Şekil 2.

gözlemden hareketle, nonlinear ve dispersif etkiler birbirini dengeleyecek şekilde uygun koordinat uzatmalarını ve çözüm fonksiyonlarının asimptotik seri açılımlarını içeren pertürbasyon yöntemleri kullanılarak bağımsız değişkenlerin belli değer bölgelerinde nonlinear sistemin davranışını karakterize eden evolüsyon denklemleri elde etmek mümkündür. Bundan sonraki alt bölümde, bu çalışmada genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan dalgaların uzak alan davranışını betimlemek için kullanılacak olan indirgeyici pertürbasyon yöntemi için kısaca tanıtılacaktır.

2.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

Yüksek mertebeden uzaysal türevleri içeren alan denklemleri ile temsil edilen fiziksel sistemlerde, dispersiyonun neden olduğu dağılma ve nonlinearliğin neden olduğu dikleşme birbirlerini dengeleyerek lineer sistem gibi davranmasına yol açar. Böylece, nonlinearlik ve dispersiyonun etkisi ile sistem yalnız dalga adı verilen düzgün yapıları çözüm olarak kabul edebilir. Bu düzgün yapıları çözüm kabul eden evolüsyon denklemlerini bulabilmek için birçok asimptotik yaklaşım önerilmiştir. Nonlinear dalga modülasyonunun incelenmesinde kullanılan değişik

asimptotik yöntemler [1, 2] numaralı çalışmalarda geniş ve ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu yaklaşımlarda, uzay ve zaman değişkenlerini yeniden ölçeklemek ve bağımlı değişkenlerin uygun seçilmiş bir pertürbasyon parametresine göre seri açılımlarını kullanmak gerekir. Bu şekilde zayıf nonlineerlik ve dispersiyon, pertürbasyon parametresi kullanılarak sisteme dahil edilir. Böylece nonlineerlik ve dispersiyonun birbirlerini dengelemesi ile nonlineer denklem sisteminin hareketini asimptotik olarak tanımlayan nonlineer evölüsyon denklemleri elde etmek mümkün olabilir. Bu çalışmada, zayıf nonlineer ve dispersif elastik bir ortamda yayılan iki enine dalganın modülasyonu problemi indirgeyici pertürbasyon yöntemi ile incelenecektir. Ortamda yayılan dalgaların uzak-alan davranışını bulmak için, öncelikle problem için uygun koordinat uzatmaları yapılmalıdır.

Bir boyutlu dalga modülasyonu problemlerindeki uygun koordinat uzatmalarını bulabilmek için, lineer bir ortamda yayılan ve genlikleri aynı olan iki sinüsoidal dalga verilmiş olsun:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= A e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} \\ u_2(x, t) &= A e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) ile verilen harmonik dalgaların k_1 ve k_2 dalga sayıları birbirine çok yakın olduğu durumda, yani dalgaların yarı-monokromatik olduğu durumda dalga çözümünün davranışını bulmak için, (2.13) dalgalarının süperpozisyonunu ele alalım. Bunun için Δk , k dalga sayısına verilen bir artım olmak üzere, k dalga sayısı civarında lokalize olmuş $k_1 = k + \Delta k$ ve $k_2 = k - \Delta k$ dalga sayılarına sahip dalgaların süperpozisyonunu hesaplayalım:

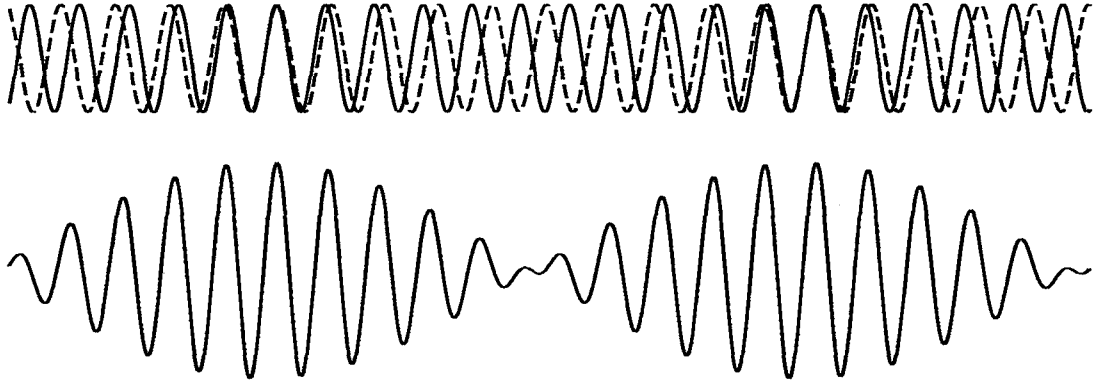
$$u(x, t) = A e^{i[(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t]} + A e^{i[(k-\Delta k)x - (\omega-\Delta\omega)t]}. \quad (2.14)$$

Buradan süperpoze olmuş u çözümünün

$$u(x, t) = 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. İki dalganın süperpozisyonu ile elde edilen (2.15)

sinüsoidal dalgasının reel kısmı sabit bir t zamanı Şekil 3.'de şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.

Şekil 3.'den de görüldüğü gibi, lineer ortamlarda yarı-monokromatik iki dalga'nın süperpozisyonu harmonik dalgaları, $\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ ile yavaş değişen bir genlik ve $\exp[i(kx - \omega t)]$ ile hızlı değişen bir fazdan oluşan iki kısma ayırmakta, diğer bir deyişle genliğin modüle olmasına neden olmaktadır. $\Delta k/k \ll 1$ ve $\Delta\omega/\omega \ll 1$ olduğundan ω frekansındaki $\Delta\omega$ değişimi

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \omega(k + \Delta k) - \omega(k) \\ &= \frac{d\omega}{dk}\Delta k + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}(\Delta k)^2 + \dots\end{aligned}\quad (2.16)$$

ile verilir. Bu durumda genliğin faz fonksiyonu

$$\Delta kx - \Delta\omega t = \Delta k\left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}(\Delta k)^2t + \dots\quad (2.17)$$

şeklini alır. p sonradan seçilecek bir pozitif sayı ve ϵ küçük bir parametre olmak üzere $\Delta k = \epsilon^p$ olduğu varsayılırsa, genlik modülasyonunu incelemek için yavaş değişkenler ξ ve τ

$$\xi = \epsilon^p(x - c_g t), \quad \tau = \epsilon^{2p}t\quad (2.18)$$

olarak seçilebilir. Burada $c_g = d\omega/dk$ olup x eksenini doğrultusunda yayılan dalganın grup hızını göstermektedir. Lineer dispersif sistemlerde dispersiyonun

bir ölçüsü olarak ortaya çıkan ϵ parametresini zayıf nonlinear sistemlerde nonlinearliğin bir ölçüsü olarak da hesaba katmak için bağımlı değişkenlerin ϵ 'nın bir asimptotik serisi şeklinde yazılabileceği varsayılır:

$$u(x, t) = \epsilon[u_1(\xi, \tau)e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.}] + \epsilon^2[u_0(\xi, \tau) + u_2(\xi, \tau)e^{i(kx-\omega t)} + \text{c.c.}] + \dots \quad (2.19)$$

(2.18) koordinat uzatmaları ve (2.19) çözüm fonksiyonları alan denklemlerinde yazılırsa ϵ pertürbasyon parametresinin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilir. Elde edilen denklem hiyerarşilerinin her mertebe için çözülmesi ile orijinal sistemin uzak alan davranışını karakterize eden ve nonlinearliğin dispersiyonla dengelendiği yeni evölüsyon denklemleri elde edilir. Yarı-monokromatik dalgaların uzun-zaman davranışını tanımlamaya yarayan ve burada kısaca tanıtılan bu pertürbasyon metodu, sonsuz elastik bir ortamda yayılan dalgaların nonlinear modülasyonu probleminin incelenmesinde kullanılacaktır. Bunun için hareketi yöneten alan denklemleri bir sonraki bölümde verilecektir.

3. ALAN DENKLEMLERİ

Polikristal, kompozit ve polimer gibi malzemelerde çok yüksek frekanslı, yani çok kısa dalgalar yayıldığında deneysel olarak gözlenen sonuçları klasik elastisite teorisi ile açıklamak mümkün olmaz. Bu durumda, çok kısa dalga boyları için malzemenin tanecikleri ile ortamda yayılan dalgaın etkileşimini daha iyi anlamak için, maddenin mikro yapısını hesaba katan yeni matematik modellere ihtiyaç vardır. Son yıllarda malzemenin ayrık yapısını klasik elastisite teorisine katmak için birçok sürekli ortam teorileri öne sürülmüştür. Bunlar arasında yüksek mertebe gradyan teorileri, yerel olmayan ve mikromorfik sürekli ortam teorileri sayılabilir. Bu teorilerin ortak yanı malzemenin mikro yapısını hesaba katması ve bunun sonucunda ortamda yayılan hem enine hem de boyuna dalgaların dispersif karaktere sahip olmasıdır. Eğer malzemenin davranışını karakterize eden bünye denklemlerine nonlinear etkiler de katılabilirse, uygun bir pertürbasyon tekniği kullanılarak nonlinearliğin ve dispersiyonun birbirini dengelendiği denklem sistemlerini elde etmek ve elde edilen sistemlerin davranışını incelemek mümkün olabilir. Bu çalışmanın amacı, yukarıda bahsi geçen ve yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren geliştirilmiş elastik bir ortamdaki dalga yayılımı problemini incelemektir.

Mikromorfik elastisite teorisinin [24, 25] özel bir hali olan elastisitenin moment teorisine göre, bir cismin şekil değiştirme durumu, makro hacmin kütle merkezinin yerdeğiştirmesini veren

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} + u_{n,k}u_{n,l}) \quad (3.1)$$

makro şekil değiştirme tansörü ve makro hacim içindeki mikro elemanların görelî

yer değiştirmesini veren

$$\Gamma_{klm} = -u_{l,km} \quad (3.2)$$

mikro şekil değiştirme gradyanı ile verilir [26]. Burada $u_k(\mathbf{x}, t)$ yer değiştirme vektörünün bileşenleri olmak üzere virgülden sonraki indis karşı gelen uzay koordinatına göre kısmi türevi gösterir, ayrıca tekrarlanan indisler üzerinde toplama uylaşımı geçerlidir.

Bu çalışmada, yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda zayıf nonlinear dalga yayılımı problemine yüksek mertebe terimlerin katkısı araştırılacağından, $\Sigma(\mathbf{e}, \Gamma)$ iç enerji yoğunluğu fonksiyonunu, makro şekil değiştirme tansörünün dördüncü mertebe terimlerini içeren bir fonksiyonla karakterize etmek uygundur [27, 28]:

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{\lambda}{2} e_{kk}e_{mm} + \mu e_{ik}e_{ik} + 2\mu m^2 (\Gamma_{klm}\Gamma_{klm} + \nu \Gamma_{klm}\Gamma_{lkm}) \\ & + \frac{A}{3} e_{ik}e_{lk}e_{il} + B (e_{ik}e_{ki})e_{mm} + \frac{C}{3} e_{kk}e_{mm}e_{ll} \\ & + D e_{kk}e_{mm}e_{ll}e_{ii} + G (e_{ik}e_{lk}e_{li})e_{mm} \\ & + H (e_{ik}e_{ki})e_{mm}e_{ll} + K (e_{ik}e_{ki})(e_{ml}e_{lm}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada λ, μ lineer elastik (Láme); A, B ve C ikinci mertebe ve D, G, H ve K üçüncü mertebe elastik sabitlerdir. Ayrıca ν ve m mikro yapıyı karakterize eden sabitlerdir.

(3.3)'deki açılımında (3.1)'de verilen makro ve mikro şekil değiştirme tansörleri yerlerine yazıldığında $u_{k,l}$ yerdeğiştirme gradyanının dördüncü mertebeden kuvvetlerini içeren Σ i enerji fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{\lambda}{2} (u_{k,k}u_{m,m} + u_{k,k}u_{r,m}u_{r,m} + \frac{1}{4}u_{n,k}u_{n,k}u_{r,m}u_{r,m}) \\ & + \frac{\mu}{2} (u_{i,k}u_{i,k} + u_{i,k}u_{k,i} + 2u_{i,k}u_{r,i}u_{r,k} + \frac{1}{2}u_{n,i}u_{n,k}u_{r,i}u_{r,k}) \\ & + 2\mu m^2 (u_{l,km}u_{l,km} + \nu u_{l,km}u_{k,lm}) \\ & + \frac{A}{24} (6u_{i,k}u_{i,l}u_{l,k} + 2u_{i,k}u_{k,l}u_{l,i} + 9u_{i,k}u_{l,k}u_{q,i}u_{q,l} + 3u_{i,k}u_{r,k}u_{r,l}u_{l,i}) \\ & + \frac{B}{4} (2u_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + 2u_{i,k}u_{i,k}u_{m,m} + u_{i,k}u_{k,i}u_{q,m}u_{q,m} + u_{i,k}u_{i,k}u_{q,m}u_{q,m} \\ & + 4u_{i,k}u_{r,i}u_{r,k}u_{m,m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{3} (u_{k,k} u_{l,l} u_{m,m} + \frac{3}{2} u_{k,k} u_{m,m} u_{q,l} u_{q,l}) \\
& + D u_{k,k} u_{l,l} u_{m,m} u_{i,i} \\
& + \frac{G}{8} (2u_{i,k} u_{l,k} u_{l,i} u_{m,m} + 2u_{i,k} u_{k,l} u_{l,i} u_{m,m} + 2u_{i,k} u_{k,l} u_{i,l} u_{m,m} \\
& \quad + 2u_{k,i} u_{l,k} u_{l,i} u_{m,m}) \\
& + \frac{H}{2} (u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} u_{l,l} + u_{k,i} u_{k,i} u_{m,m} u_{l,l}) \\
& + \frac{K}{4} (u_{i,k} u_{k,i} u_{m,l} u_{l,m} + 2u_{i,k} u_{k,i} u_{m,l} u_{m,l} + u_{k,i} u_{k,i} u_{m,l} u_{m,l}) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada mikro şekil değıştirme etkilerinin küçük olduğu kabul edilmiş ve Σ açılımının mikro şekil değıştirmeyi karakterize eden yer değıştirmenin ikinci gradyanlarına, $u_{k,l,m}$, kuadratik olarak bağı olduğu varsayılmıştır. (3.4) açılımını genel olarak yer değıştirmenin $u_{k,l}$ birinci ve $u_{k,l,m}$ ikinci gradyanları x , y ve z koordinatlarına bağıdır. Fakat bu çalışmada, bir uzay ve bir zaman boyutu olduğundan, diğeri bir deyişle (1+1) boyutlu dalga yayılımı ele alınacağından, bağımsız konum değışkeni x ve bağımsız zaman değışkeni t olarak seçilecektir. (3.4) ifadesindeki bağımlı değışkenlerin yalnız x ve t değışkenlerine bağı oldukları hesaba katılarak tekrarlı indisler üzerindeki toplama yapılırsa, Σ açılımının açık ifadesi

$$\begin{aligned}
\Sigma = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) (u_{1,x})^2 + \frac{1}{2}\mu [(u_{2,x})^2 + (u_{3,x})^2] \\
& + \frac{1}{6}(3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C) (u_{1,x})^3 \\
& + \frac{1}{4}(2\lambda + 4\mu + A + 2B) u_{1,x}[(u_{2,x})^2 + (u_{3,x})^2] \\
& + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + 4A + 12B + 4C + 8D + 8G + 8H + 8K) (u_{1,x})^4 \\
& + \frac{1}{8}(2\lambda + 4\mu + 5A + 14B + 4C + 6G + 4H + 8K) (u_{1,x})^2[(u_{2,x})^2 + (u_{3,x})^2] \\
& + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B + 2K) [(u_{2,x})^4 + (u_{3,x})^4] \\
& + \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu + A + 2B + 2K) (u_{2,x})^2(u_{3,x})^2 \\
& + 2\mu m^2(1 + \nu) (u_{1,xx})^2 + 2\mu m^2 [(u_{2,xx})^2 + (u_{3,xx})^2] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca yüksek mertebe şekil değıştirme gradyanlarını içeren bu katı için kinetik enerji yoğunluğunun klasik elastisite teorisindeki forma sahip

olduğu varsayılmıştır:

$$T = \frac{1}{2}\rho_0[(u_{1,t})^2 + (u_{2,t})^2 + (u_{3,t})^2]. \quad (3.6)$$

Burada ρ_0 başlangıç yoğunluğunu, t indisi ise ilgili bağımlı değişkenin zamana göre kısmi türevini gösterir.

Böylece bir boyutlu hareketi yöneten denklemleri

$$\delta \int L dt = \delta \int \int \mathcal{L} dx dt = 0 \quad (3.7)$$

Hamilton prensibinden elde etmek mümkün olur. (3.7) ifadesindeki $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = T - \Sigma$$

olarak tanımlanan Lagrange yoğunluk fonksiyonudur ve $\mathcal{L}(u_{k,t}, u_{k,x}, u_{k,xx})$ ($k = 1, 2, 3$) şeklindedir. Böylece (1+1) boyutlu hareketi yöneten denklemler, (3.7) sistemine karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,x}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,xx}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2,t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2,x}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2,xx}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3,t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3,x}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{3,xx}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. (3.5) Σ iç enerji yoğunluğu fonksiyonu ve (3.6) kinetik enerji yoğunluğu fonksiyonu (3.8) sisteminde kullanılırsa, yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını ve kübik nonlineer etkileri içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamdaki bir boyutlu hareketi yöneten denklemler aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_L^2 u_{xx} + 4c_T^2 m^2 (1 + \nu) u_{xxxx} &= \gamma_1 u_x u_{xx} + \gamma_2 (v_x v_{xx} + w_x w_{xx}) \\ &+ \gamma_3 (u_x)^2 u_{xx} + \gamma_4 \{ u_{xx} [(v_x)^2 + (w_x)^2] + 2u_x (v_x v_{xx} + w_x w_{xx}) \} \\ v_{tt} - c_T^2 v_{xx} + 4c_T^2 m^2 v_{xxxx} &= \gamma_2 (u_{xx} v_x + u_x v_{xx}) + \gamma_4 [2v_x u_x u_{xx} + (u_x)^2 v_{xx}] \\ &+ \gamma_5 [3(v_x)^2 v_{xx} + 2v_x w_x w_{xx} + (w_x)^2 v_{xx}] \\ w_{tt} - c_T^2 w_{xx} + 4c_T^2 m^2 w_{xxxx} &= \gamma_2 (u_{xx} w_x + u_x w_{xx}) + \gamma_4 [2w_x u_x u_{xx} + (u_x)^2 w_{xx}] \\ &+ \gamma_5 [3(w_x)^2 w_{xx} + 2w_x v_x v_{xx} + (v_x)^2 w_{xx}]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) sisteminde gösterim kolaylığı sağlaması için $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$ ve $u_3 \equiv w$ tanımları kullanılmış; t ve x alt indisleri ilgili bağımlı değişkenin sırası ile zaman ve konuma göre kısmi türevlerini göstermektedir. Ayrıca (3.9) sisteminde, u yerdeğiştirme vektörünün boyuna, v ve w ise enine bileşenlerini göstermektedir. Denklemlerdeki katsayılar ise

$$\begin{aligned} c_L^2 &= (\lambda + 2\mu)/\rho_0, \quad c_T^2 = \mu/\rho_0, \\ \gamma_1 &= [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]/\rho_0, \quad \gamma_2 = (2\lambda + 4\mu + A + 2B)/2\rho_0, \\ \gamma_3 &= 3[\lambda + 2\mu + 4A + 12B + 4C + 8(D + G + H + K)]/2\rho_0, \\ \gamma_4 &= (2\lambda + 4\mu + 5A + 14B + 4C + 6G + 4H + 8K)/4\rho_0, \\ \gamma_5 &= (\lambda + 2\mu + A + 2B + 2K)/2\rho_0, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. (3.9) sisteminde mikro şekil değiştirmeden gelen katkılar ve nonlinear terimler ihmal edilirse lineer elastisitenin öngördüğü kuple olmayan lineer denklemler elde edilir.

(3.9) sisteminin dispersif karakterinin görmek için A_k kompleks genlik, k dalga sayısı ve ω frekans olmak üzere,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_1 \exp[i(kx - \omega t)] \\ v(x, t) &= A_2 \exp[i(kx - \omega t)] \\ w(x, t) &= A_3 \exp[i(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklindeki çözümler, (3.9) sisteminin lineer kısmına yerleştirilirse A_k genlikleri için lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Elde edilen lineer homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün bulunması koşulu

$$\begin{aligned} D_1(k, \omega) &= \omega^2 - c_L^2 k^2 - 4c_T^2 m^2 (1 + \nu) k^4 = 0, \\ D_2(k, \omega) &= D_3(k, \omega) = \omega^2 - c_T^2 k^2 - 4c_T^2 m^2 k^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklindeki bağıntılara yol açar. k dalga sayısı ve ω frekansı arasındaki ilişkileri veren bu denklemler dispersiyon bağıntıları olarak adlandırılmıştı. Buradaki D_1 , boyuna yer değiştirme modu olan u ile ilgili dispersiyon bağıntısı

olup, D_2 ve D_3 ise sırası ile enine yer değiştirme modları olan v ve w bileşenlerine karşı gelen dispersiyon bağıntılarıdır. (3.11) bağıntılarında da görüldüğü gibi, hem boyuna hem de enine modlar dispersifdir, yani $\omega''(k) \neq 0$. Görüldüğü gibi ele alınan genelleştirilmiş elastik ortamda dispersif dalga yayılımı mümkündür. Eğer hareketi yöneten denklemler zayıf nonlinear etkileri de içeriyorsa, uygun bir pertürbasyon metodu kullanılarak, dispersif etkilerin ve nonlinear etkilerin birbirini dengelediğı denklem sistemleri elde etmek mümkün olur. Bu denklemler ortamda yayılan boyuna veya aynı dispersiyon bağıntısını sağlayan enine yer değiştirme modları için olabilir. Bu çalışmanın amacı, yukarıda adı geçen sonsuz, homojen elastik ortamda aynı dispersiyon bağıntısını sağlayan enine modların sağladığı kuple evolüsyon denklemleri bulmak ve özellikle yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin kuple denklemlere getirdiğı katkıyı belirlemektir.

4. KUPLE YÜKSEK MERTEBE NLS DENKLEMLERİ

4.1 Giriş

Nonlinear Schrödinger denklemi zayıf nonlinear ve zayıf dispersif sürekli bir ortamda yayılan (1+1) boyutlu *kısa* dalganın genliğinin davranışını, ϵ pertürbasyon parametresi olmak üzere, $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ mertebesine kadar doğru olarak tanımlayan nonlinear kısmi diferansiyel bir denklemdir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + q|A|^2A = 0. \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde ξ ve τ yavaş değişen değişkenler, A ise yavaş değişen kompleks genliktir. Ancak özellikle liflerde deneysel olarak elde edilen optik solitonların *çok kısa* dalgalar olabildiği gözlenmiş ve (4.1) NLS denkleminin artık olayı yeterince karakterize edemeyeceği ortaya çıkmıştır [29]. Bu durumda daha yukarı merteye nonlinear ve dispersif etkilerin hesaba katılması gereği, yani (4.1) denkleminin en azından $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ mertebesine kadar doğru olan formunun elde edilmesi gereği ortaya çıkmıştır. Ortamda çok kısa dalgaların yayılması varsayımı altında yüksek merteye nonlinear ve dispersif terimlerin içerildiği yüksek merteye NLS (YMNLS) denklemi ilk olarak Kodama [14] ve Kodama ve Hasegawa [15] tarafından türetilmiştir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + \tilde{q}|A|^2A + i\epsilon[A_{\xi\xi\xi} + \tilde{a}(|A|^2A)_\xi + \tilde{b}A(|A|^2)_\xi] = \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (4.2)$$

Burada A hızlı değişen ışık dalgasının zarfını gösteren kompleks genlik, ξ ve τ yavaş değişkenlerdir. (4.2) denklemindeki A genliği, birinci ve ikinci merteye bağımlı değişkenlerin toplamı olarak tanımlanmıştır. Özellikle optik solitonların yayılımını karakterize etmesi nedeniyle (4.2) denkleminin özellikleri geniş olarak araştırılan bir konu olmuştur.

Eğer sürekli ortamda aynı anda iki serbest dalga modu varsa dalga genliğinin zarf denklemi iki kuple NLS denklemleri ile verilir. Yukarıdaki duruma benzer şekilde eğer ortamda çok kısa dalga yayılımı söz konusu ise kuple NLS denklemleri hareketi doğru olarak betimleyemez ve yukarı merteye nonlinear ve dispersif etkilerin hesaba katıldığı yeni kuple evölüsyon denklemlerine gerek vardır. (4.2) denkleminin kuple YMNLS denklemlerine genelleştirilmiş formları [18] ve [19] çalışmalarında verilmiştir. Ancak her iki çalışmada verilen kuple YMNLS denklemleri gerçek fiziksel bir problemin çözümü olarak elde edilmiş değildir. [18] çalışmasındaki kuple YMNLS denklemleri tek YMNLS denklemin iki fonksiyon için yazılmış hali, [19] çalışması ise tek YMNLS denkleminin Hermityen matrisler yardımı ile integre olacak şekilde bir genişlemesi olarak verilmiştir. Bu denklemlerin, ortamda var olan iki serbest dalga modunun karmaşık etkileşimini belirten terimleri içerip içermediği açık değildir. Bu bölümdeki çalışmanın esas amacı, zayıf nonlinear ve zayıf dispersif etkileri içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan iki enine çok kısa dalganın genlik modülasyonunu karakterize eden iki kuple YMNLS denklemlerini elde etmek ve denklemlerin katsayılarını malzeme sabitlerine bağlı olarak bulmaktır.

4.2 Kuple YMNLS Denklemlerinin Türetilmesi

Bu alt bölümde, genelleştirilmiş elastik bir ortamda aynı anda yayılan enine iki dalganın nonlinear modülasyonu problemi indirgeyici pertürbasyon metodu ile incelenecektir. Alan denklemleri (3.9) ile verilen zayıf dispersif ve zayıf nonlinear genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan iki enine dalganın boylarının kısa olması durumunda dalga modülasyonun karakterize eden ve yüksek merteye terimlerin katkılarını da içeren iki kuple evölüsyon denklemi türetilenektir. Kodama'nın daha önce optik bir ortamda tek YMNLS denklemini elde ederken takip ettiği yola benzer bir yol takip edilecektir [14]. Buna göre indirgeyici pertürbasyon metodunda yüksek merteye pertürbasyon denklemleri ele alınacak ve ortamda aynı anda yayılan birinci ve ikinci merteye enine dalgaların yavaş

değişen genlikleri uygun bir şekilde birleştirilerek yüksek mertebe kuple evolüsyon denklemleri elde edilecektir.

(3.9) denklemlerinin uzun zaman davranışını belirleyen evolüsyon denklemlerini bulmak için çok ölçekli pertürbasyon metodu kullanılacağından, çözüm fonksiyonlarını

$$\xi = \epsilon(x - \Lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 t \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanan ξ ve τ yavaş değişkenleri cinsinden ifade etmek uygundur. Burada, k taşıyıcı dalgaların sayısı olmak üzere $\epsilon \ll 1$, $\epsilon \sim \mathcal{O}(\Delta k/k)$ küçük bir parametre ve Λ daha sonra belirlenecek reel bir büyüklüktür. Ayrıca zayıf nonlinear dalgaların modellenmesi ile ilgilenildiği için (3.9) denklem sistemine önerilen yaklaşık çözüm fonksiyonlarının ϵ parametresinin bir asimptotik serisi şeklinde yazılabileceği varsayılacaktır:

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1^{(0)}(\xi, \tau) + \epsilon^2 [u_2^{(0)}(\xi, \tau) + u_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\ v &= \epsilon [v_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\ &\quad + \epsilon^2 [v_2^{(0)}(\xi, \tau) + v_2^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + v_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\ w &= \epsilon [w_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\ &\quad + \epsilon^2 [w_2^{(0)}(\xi, \tau) + w_2^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + w_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4) ifadesinde, $\theta = kx - \omega t$, c.c. kendinden önceki ifadelerin kompleks eşleniğini gösterir. (4.4) açılımındaki $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonları birinci mertebe; $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ ikinci mertebe enine dalgaların genliklerini göstermektedir. Ayrıca (4.3) koordinat uzatması ile zayıf dispersiyonun bir ölçüsü olarak probleme ithal edilen ϵ parametresi burada aynı anda zayıf nonlinearliğin de bir ölçüsü olmaktadır. Böylece ϵ parametresi ile nonlinear ve dispersif etkilerin bir dengesini kurarak nonlinearliğin yarattığı dalga kırılmasını dispersiyonun dağıtması ile, üçüncü mertebe nonlinear olan (3.9) sisteminin uzak alan davranışını veren ve yalnız dalga gibi şekillerini koruyan düzgün çözümleri olan evolüsyon denklemlerini elde etmek mümkün olur.

Birinci merteye genliklerin, $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$, sağladığı evölasyon denklemlerini bulmak için (4.3) koordinat uzatmaları ve (4.4) asimptotik seri şeklinde önerilen çözümler, (3.9) alan denklemlerinde yazılırsa, ϵ pertürbasyon parametresinin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilir. Elde edilen denklemlerin her merteye ve mod için ayrı ayrı çözülmesi ile (4.4) ile önerilen çözüm fonksiyonlarındaki bilinmeyenlerin sağladığı denklemler elde edilir. Bu denklemlerin uygun bir şekilde çözülmesi ile birinci merteye $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonlarının sağladığı uygunluk koşulları evölasyon denklemleri olarak ortaya çıkar.

Birinci merteye, $\mathcal{O}(\epsilon)$, pertürbasyon denklemlerinin çözümünden elde edilen denklemler

$$\begin{aligned} e^{i\theta} : D_2(k, \omega) v_1^{(1)} &= 0, \\ D_2(k, \omega) w_1^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklindeir. Bu çalışmada enine dalgaların davranışı ile ilgilendiğimizden, birinci merteye enine dalga modları olan $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonları keyfi fonksiyonlar olarak kabul edilecektir. Buna göre (4.5) denkleminin sağlanması için $D_2(k, \omega) = 0$ olması gerektiği açıktır. Ayrıca bu çalışmada birinci dalga modlarının yüksek harmoniklerle etkileşimi gözönüne alınmayacağından, $n \geq 2$ için $D_2(nk, n\omega) \neq 0$ kabul edilecektir. Bu kabul yüksek harmoniklerin genlik fonksiyonlarının ya sıfır alınması gerektiği veya düşük merteye keyfi genlik fonksiyonları cinsinden ifade edilebileceği sonucuna yol açacaktır. Bu şekilde, dalgaların kendi kendileri ile etkileşimi de ortadan kalkacaktır.

Benzer şekilde, ikinci merteye, $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, pertürbasyon denklemlerinin çözümünden elde edilen denklemlerin birinci ve ikinci modlar için aldığı form

$$\begin{aligned} e^{i\theta} : 2i(\omega\Lambda - c_T^2 k - 8m^2 c_T^2 k^3) v_{1,\xi}^{(1)} - D_2(k, \omega) v_2^{(1)} &= 0, \\ 2i(\omega\Lambda - c_T^2 k - 8m^2 c_T^2 k^3) w_{1,\xi}^{(1)} - D_2(k, \omega) w_2^{(1)} &= 0, \\ e^{2i\theta} : D_1(2k, 2\omega) u_2^{(2)} &= ik^3 \gamma_2 [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2], \\ D_2(2k, 2\omega) v_2^{(2)} &= 0, \quad D_2(2k, 2\omega) w_2^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklindedir. $D_2(k, \omega) = 0$ olduğu için (4.6)₁ ve (4.6)₂ denklemlerindeki son terimler düşer. Ayrıca, $v_{1,\xi}^{(1)}$ ve $w_{1,\xi}^{(1)}$ keyfi fonksiyonları sıfırdan farklı olarak kabul edildiğinden katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir. Bu ise Λ reel sayısının

$$\Lambda = \frac{1}{\omega}(c_T^2 k + 8m^2 c_T^2 k^3). \quad (4.7)$$

olmasını gerektirir. Diğer yandan (3.11)₂ denkleminin türevi alınarak enine dalgaların grup hızı hesaplanırsa

$$c_g = \omega'(k) = \frac{1}{\omega}(c_T^2 k + 8m^2 c_T^2 k^3) \quad (4.8)$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) denklemlerinin karşılaştırılması ile Λ reel sayısının enine dalgaların grup hızı, c_g , olarak seçilmesi gereği ortaya çıkar. $\Lambda = c_g$ kabulü ile (4.6)₁ ve (4.6)₂ denklemleri

$$D_2(k, \omega) v_2^{(1)} = 0$$

$$D_2(k, \omega) w_2^{(1)} = 0$$

şeklini alır ve $D_2(k, \omega) = 0$ olduğu için $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ ikinci mertebe enine dalga modları keyfi fonksiyonlar olarak bulunur. (4.6) denkleminin ikinci moduna karşı gelen dispersiyon bağıntısı $D_2(2k, 2\omega)$ sıfırdan farklı kabul edildiği için, ikinci mertebe enine dalgaların genlikleri olan fonksiyonlar

$$v_2^{(2)} = 0, \quad w_2^{(2)} = 0 \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Ayrıca, ikinci mertebe boyuna dalga genliği olan $u_2^{(2)}$ fonksiyonu $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ enine dalga modları cinsinden ifade edilmiş formu olarak bulunur:

$$u_2^{(2)} = \frac{ik^3 \gamma_2}{D_1(2k, 2\omega)} [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]. \quad (4.10)$$

Birinci mertebe enine dalgaların genliklerinin zarf denklemleri ise üçüncü mertebe, $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, pertürbasyon denklemlerin çözümünden elde edilecektir. Bu mertebe için elde edilen denklemler nonlinear etkileşim terimlerini de içerdiğinden düşük mertebe pertürbasyon denklemlerinden daha karmaşık bir

yapıda olacaktır. Kolay fakat karmaşık işlemlerden sonra, $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ mertebesinde sıfıncı ve birinci modlar için elde edilen denklemler

$$\begin{aligned}
e^{i0} &: (c_g^2 - c_L^2) u_{1,\xi\xi}^{(0)} = \gamma_2 k^2 (v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)*}), \\
e^{i\theta} &: 2i\omega v_{1,\tau}^{(1)} - 2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) v_{2,\xi}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) v_{1,\xi\xi}^{(1)} \\
&= \gamma_2 k^2 [-2ik v_1^{(1)*} u_2^{(2)} + v_1^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}] \\
&+ \gamma_5 k^4 [3|v_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)} + v_1^{(1)*} (v_1^{(1)})^2 + 2|w_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)}], \\
2i\omega w_{1,\tau}^{(1)} - 2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) w_{2,\xi}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) w_{1,\xi\xi}^{(1)} \\
&= \gamma_2 k^2 [-2ik w_1^{(1)*} u_2^{(2)} + w_1^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}] \\
&+ \gamma_5 k^4 [3|w_1^{(1)}|^2 w_1^{(1)} + w_1^{(1)*} (w_1^{(1)})^2 + 2|v_1^{(1)}|^2 w_1^{(1)}] \quad (4.11)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.11) denklemlerindeki $*$ ilgili fonksiyonun kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca (4.11)₁ denklemi ξ değişkenine göre integre edilirse birinci mertebe boyuna $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonu, birinci mertebe enine serbest dalga modları olan $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonları cinsinden belirlenir:

$$u_{1,\xi}^{(0)} = \frac{k^2 \gamma_2}{c_g^2 - c_L^2} (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) \quad (4.12)$$

(4.11)₂ ve (4.11)₃ denklemlerinde $v_{2,\xi}^{(1)}$ ve $w_{2,\xi}^{(2)}$ fonksiyonlarının katsayıları (4.8) ilişkisinden dolayı özdeş olarak sıfırdır. Böylece (4.11)₂ ve (4.11)₃ denklemleri düzenlenerek birinci mertebe $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonlarının sağladığı kuple evolüsyon denklemleri elde edilebilecektir. Buna göre (4.10) ile verilen $u_2^{(2)}$ ve (4.12) denklemi ile açık formu verilmiş $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonları, (4.11)₂ ve (4.11)₃ denklemlerinde yazılır ve denklemler düzenlenirse *birinci mertebe* enine modların sağladığı (1+1) boyutlu kuple nonlinear evolüsyon denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
i \phi_{1,\tau} + p \phi_{1,\xi\xi} + \delta_1 |\phi_1|^2 \phi_1 + \delta_2 \psi_1^2 \phi_1^* + \delta_3 |\psi_1|^2 \phi_1 &= 0, \\
i \psi_{1,\tau} + p \psi_{1,\xi\xi} + \delta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 + \delta_2 \phi_1^2 \psi_1^* + \delta_3 |\phi_1|^2 \psi_1 &= 0. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

(4.13) denklemlerinde gösterim kolaylığı nedeni ile $\phi_1 \equiv v_1^{(1)}$ ve $\psi_1 \equiv w_1^{(1)}$ alınarak tanımları kullanılmıştır. (4.13) denklemlerindeki katsayılar ise

$$p = -\frac{1}{2\omega} (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2),$$

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -\frac{\gamma_2^2 k^4}{2\omega} \left(\frac{2k^2}{D_1(2k, 2\omega)} + \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \right) - \frac{3\gamma_5 k^4}{2\omega}, \\ \delta_2 &= -\frac{\gamma_2^2 k^6}{\omega D_1(2k, 2\omega)} - \frac{\gamma_5 k^4}{2\omega}, \\ \delta_3 &= -\frac{\gamma_2^2 k^4}{2\omega(c_g^2 - c_L^2)} - \frac{\gamma_5 k^4}{\omega}\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Kuple nonlinear Schrödinger (KNLS) denklemleri olarak adlandırılabilen (4.13) evölüsyon denklemleri, birinci mertebe enine dalgalarının yayılımını modelleyen denklemlerdir. (4.13) evölüsyon denklemlerinde $\delta_2 = 0$ kabul edilirse sistem

$$\begin{aligned}i \phi_{1,\tau} + p \phi_{1,\xi\xi} + \delta (|\phi_1|^2 + |\psi_1|^2) \phi_1 &= 0, \\ i \psi_{1,\tau} + p \psi_{1,\xi\xi} + \delta (|\psi_1|^2 + |\phi_1|^2) \psi_1 &= 0\end{aligned}\tag{4.14}$$

şeklindeki integrale edilebilen, ters saçılma yöntemi ile analitik olarak çözülebilen, Manakov sistemine dönüşür. Ayrıca $\delta_2 = 0$ kabulü ile evölüsyon denklemlerin katsayıları

$$\begin{aligned}\gamma_5 &= \frac{-2\gamma_2^2 k^2}{D_1(2k, 2\omega)}, \\ \delta = \delta_1 = \delta_3 &= \frac{\gamma_2^2 k^4}{2\omega} \left[\frac{4k^2}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \right]\end{aligned}\tag{4.15}$$

şeklindeki kısıtlamaları sağlar. Bilindiği gibi tek NLS denklemleri veya kuple NLS denklemleri ortamda yayılan dalgaların hareketini, ϵ pertürbasyon açılım parametresi olmak üzere, ϵ^2 mertebesine kadar doğru olarak karakterize eder. Ancak ortamda yayılan dalgaların çok kısa olması, diğer bir deyişle yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin önemli olması, durumunda NLS denklemleri hareketi karakterize edemez. Bu durumda yüksek mertebe etkilerin hesaba katılması gerekir. Yüksek mertebe terimlerin kuple evölüsyon denklemlerine getirdiği katkıyı görmek için ikinci mertebe genliklerin, $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$, sağladığı denklemler bulunmalıdır. Bu nedenle yukarı mertebe pertürbasyon denklemleri incelenmeli ve ikinci mertebe genliklerin sağladığı evölüsyon denklemleri elde edilmelidir.

Bu aşamada ikinci merteye evölüsyon denklemlerini bulmak için $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ mertebesindeki sıfıncı ve birinci modlar için elde edilen denklemler çözülecektir:

$$\begin{aligned}
e^{i0} : & (c_g^2 - c_L^2)u_{2,\xi\xi}^{(0)} - 2c_g u_{1,\xi\tau}^{(0)} = \gamma_2 [ik(\phi_1 \phi_{1,\xi\xi}^* - \phi_1^* \phi_{1,\xi\xi} + \psi_1 \psi_{1,\xi\xi}^* - \psi_1^* \psi_{1,\xi\xi}) \\
& + k^2(\phi_{1,\xi} v_2^{(1)*} + \phi_1 v_{2,\xi}^{(1)*} + \phi_{1,\xi}^* v_2^{(1)} + \phi_1^* v_{2,\xi}^{(1)} + \psi_{1,\xi} w_2^{(1)*} + \psi_1 w_{2,\xi}^{(1)*} \\
& + \psi_{1,\xi}^* w_2^{(1)} + \psi_1^* w_{2,\xi}^{(1)})], \\
e^{i\theta} : & 2i\omega v_{2,\tau}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) v_{2,\xi\xi}^{(1)} - 16ikc_T^2 m^2 \phi_{1,\xi\xi\xi} + 2c_g \phi_{1,\xi\tau} \\
& + \gamma_2 [2ik^3 u_2^{(2)} v_2^{(1)*} + 3k^2 \phi_1^* u_{2,\xi}^{(2)} + ik\phi_1 u_{1,\xi\xi}^{(0)} + 2ik u_{1,\xi}^{(0)} \phi_{1,\xi} \\
& - k^2 v_2^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)} - k^2 \phi_1 u_{2,\xi}^{(0)}] \\
& - \gamma_5 k^4 [3\phi_1^2 v_2^{(1)*} + 6k^4 |\phi_1|^2 v_2^{(1)} + \psi_1^2 v_2^{(1)*} + 2|\psi_1|^2 v_2^{(1)} + 2\phi_1^* \psi_1 w_2^{(1)} \\
& + 2\phi_1 \psi_1^* w_2^{(1)} + 2\phi_1 \psi_1 w_2^{(1)*}] \\
& + 4i\gamma_5 k^3 [3|\phi_1|^2 \phi_{1,\xi} + |\psi_1|^2 \phi_{1,\xi} + \phi_1^* \psi_1 \psi_{1,\xi} + \phi_1 \psi_1^* \psi_{1,\xi}] = 0, \\
2i\omega w_{2,\tau}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) w_{2,\xi\xi}^{(1)} - 16ikc_T^2 m^2 \psi_{1,\xi\xi\xi} + 2c_g \psi_{1,\xi\tau} \\
& + \gamma_2 [2ik^3 u_2^{(2)} w_2^{(1)*} + 3k^2 \psi_1^* u_{2,\xi}^{(2)} + ik\psi_1 u_{1,\xi\xi}^{(0)} + 2ik u_{1,\xi}^{(0)} \psi_{1,\xi} \\
& - k^2 w_2^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)} - k^2 \psi_1 u_{2,\xi}^{(0)}] \\
& - \gamma_5 k^4 [3\psi_1^2 w_2^{(1)*} - 6k^4 |\psi_1|^2 w_2^{(1)} + \phi_1^2 w_2^{(1)*} + 2|\phi_1|^2 w_2^{(1)} + 2\psi_1^* \phi_1 v_2^{(1)} \\
& + 2\psi_1 \phi_1^* v_2^{(1)} + 2\psi_1 \phi_1 v_2^{(1)*}] \\
& + 4i\gamma_5 k^3 [3|\psi_1|^2 \psi_{1,\xi} + |\phi_1|^2 \psi_{1,\xi} + \psi_1^* \phi_1 \phi_{1,\xi} + \psi_1 \phi_1^* \phi_{1,\xi}] = 0. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

(4.16)₁ denklemi ξ değişkenine göre integre edilirse ikinci merteye boyuna $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonu, birinci merteye enine genlik fonksiyonlarına, $(\phi_1$ ve $\psi_1)$, ve ikinci merteye enine genlik fonksiyonlarına, $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$, bağlı olarak belirlenir:

$$\begin{aligned}
u_{2,\xi}^{(0)} = & \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} [i\gamma_2 k(\phi_1 \phi_{1,\xi}^* - \phi_1^* \phi_{1,\xi} + \psi_1 \psi_{1,\xi}^* - \psi_1^* \psi_{1,\xi}) \\
& + \gamma_2 k^2(\phi_1 v_2^{(1)*} + \phi_1^* v_2^{(1)} + \psi_1 w_2^{(1)*} + \psi_1^* w_2^{(1)}) + 2c_g u_{1,\tau}^{(0)}]. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

İkinci merteye $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ fonksiyonlarının sağladığı uygunluk denklemlerini bulmak için (4.16)₂ ve (4.16)₃ denklemlerinde yukarı merteye fonksiyonlar düşük merteye fonksiyonlar cinsinden ifade edilmelidir. Bunun için birinci merteye genliklerin sağladığı (4.14) KNLS denklemleri, (4.10) ile verilen $u_2^{(2)}$,

(4.12) ile verilen $u_{1,\xi}^{(0)}$, (4.17)'de verilen $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonları (4.16)₂ ve (4.16)₃ denklemlerinde yazılmalıdır. Ancak (4.17) ifadesindeki $u_{1,\tau}^{(0)}$ fonksiyonu

$$u_{1,\tau}^{(0)} = \frac{\gamma_2 k^2}{c_g^2 - c_L^2} \int \frac{\partial}{\partial \tau} (|\phi_1|^2 + |\psi_1|^2) d\xi \quad (4.18)$$

integral formda olduğundan, ikinci mertebe $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ fonksiyonları için bulunacak denklemler kuple integro-diferansiyel denklem şeklini alacaktır. (4.17) ifadesinde, dolayısı ile kuple evolüsyon denklemlerinde ortaya çıkacak integral terimleri uygun cebirsel işlemler ile yok etmek mümkündür. Bunun için (4.14)'de verilen KNLS denklemleri kullanılır. (4.14)'deki ilk denklem ϕ_1^* ile çarpılıp kompleks eşleneğinden çıkarılırsa $(|\phi_1|^2)_\tau$ fonksiyonu için

$$(|\phi_1|^2)_\tau = ip(\phi_1^* \phi_{1,\xi} - \phi_1 \phi_{1,\xi}^*)_\xi. \quad (4.19)$$

elde edilir. Benzer işlemler KNLS denklemlerindeki ikinci denklem için de yapılırsa, $(|\psi_1|^2)_\tau$ fonksiyonu için

$$(|\psi_1|^2)_\tau = ip(\psi_1^* \psi_{1,\xi} - \psi_1 \psi_{1,\xi}^*)_\xi, \quad (4.20)$$

bulunur. Bu sonuçlar (4.18) denkleminde kullanılırsa

$$u_{1,\tau}^{(0)} = \frac{ip\gamma_2 k^2}{c_g^2 - c_L^2} (\phi_1^* \phi_{1,\xi} - \phi_1 \phi_{1,\xi}^* + \psi_1^* \psi_{1,\xi} - \psi_1 \psi_{1,\xi}^*) \quad (4.21)$$

bulunur. Bu sonuç ikinci mertebe genlikler için elde edilecek kuple evolüsyon denklemlerindeki integral terimleri de ortadan kaldırmış olur.

Daha önce bulunan sonuçlar ve (4.21) ifadesi kullanılarak uzun cebirsel işlemlerden sonra $v_2^{(1)}$ ve $w_2^{(1)}$ ikinci mertebe genliklerin sağladığı denklemler

$$\begin{aligned} & i\phi_{2,\tau} + p\phi_{2,\xi\xi} + i\gamma\phi_{1,\xi\xi\xi} + \alpha(|\phi_1|^2\phi_2 + \phi_1^*\psi_1\psi_2) \\ & + (q + \alpha)[\phi_1^2\phi_2^* + 2|\phi_1|^2\phi_2 + |\psi_1|^2\phi_2 + \phi_1\psi_1^*\psi_2 + \phi_1\psi_1\psi_2^*] \\ & + i[A|\phi_1|^2\phi_{1,\xi} + B\phi_1(|\phi_1|^2)_\xi + C|\psi_1|^2\phi_{1,\xi} + D\phi_1\psi_1^*\psi_{1,\xi} \\ & + E\phi_1\psi_1\psi_{1,\xi}^* + F\phi_1^*\psi_1\psi_{1,\xi}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i\psi_{2,\tau} + p\psi_{2,\xi\xi} + i\gamma\psi_{1,\xi\xi\xi} + \alpha(|\psi_1|^2\psi_2 + \psi_1^*\phi_1\phi_2) \\
& + (q + \alpha)[\psi_1^2\psi_2^* + 2|\psi_1|^2\psi_2 + |\phi_1|^2\psi_2 + \psi_1\phi_1^*\phi_2 + \psi_1\phi_1\phi_2^*] \\
& + i[A|\psi_1|^2\psi_{1,\xi} + B\psi_1(|\psi_1|^2)_\xi + C|\phi_1|^2\psi_{1,\xi} + D\psi_1\phi_1^*\phi_{1,\xi} \\
& + E\psi_1\phi_1\phi_{1,\xi}^* + F\psi_1^*\phi_1\phi_{1,\xi}] = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. Burada ikinci mertebe genlikler için $\phi_2 \equiv v_2^{(1)}$ ve $\psi_2 \equiv w_2^{(1)}$ tanımları kullanılmıştır. (4.22) denklemlerindeki katsayılar ise

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{c_g}{\omega} (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) + 16c_T^2 m^2 \right] = -\frac{1}{6} \omega'''(k), \\
q &= -\frac{k^4 \gamma_2^2}{2\omega(c_g^2 - c_L^2)}, \quad \alpha = \frac{2k^6 \gamma_2^2}{2\omega D_1(2k, 2\omega)}, \\
A &= -\frac{1}{2k} (8q + 9\alpha) + \frac{c_g}{\omega} (q + \alpha) + \frac{4c_g p q}{c_g^2 - c_L^2}, \\
B &= \frac{c_g}{\omega} (q + \alpha) - \frac{2c_g p q}{c_g^2 - c_L^2}, \\
C &= \left(\frac{c_g}{\omega} - \frac{2}{k} \right) (q + \alpha), \\
D &= \left(\frac{c_g}{\omega} - \frac{2}{k} \right) (q + \alpha) + \frac{2c_g p q}{c_g^2 - c_L^2}, \\
E &= \frac{c_g}{\omega} (q + \alpha) - \frac{2c_g p q}{c_g^2 - c_L^2}, \quad F = -\frac{1}{2k} \alpha
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse (4.22) kuple evolüsyon denklemleri ikinci mertebe ϕ_2 ve ψ_2 fonksiyonlarına göre lineerdir. Bu denklemlerdeki nonlineerlik birinci mertebe ϕ_1 ve ψ_1 fonksiyonları ile ilgili terimlerden gelir ve (4.14) KNLS denklemlerinin çözümü ile elde edilebilecek birinci mertebe ϕ_1 ve ψ_1 fonksiyonları, (4.22) denklemlerine kaynak terimleri olarak gelmektedir.

Bu aşamada, daha önce Kodama'nın [14] tek YMNLS denklemi elde ederken takip ettiği yol burada kuple YMNLS denklemlerini elde etmek için kullanılacaktır. Bu nedenle birinci mertebe genlikler, ϕ_1 ve ψ_1 , ile ikinci mertebe genliklerin, ϕ_2 ve ψ_2 , uygun bir birleşiminin sağladığı kuple evolüsyon denklemlerini bulmak için yeni bağımlı değişkenler, Φ ve Ψ , tanımlanacaktır:

$$\Phi = \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2, \quad \Psi = \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2$$

Birinci ve ikinci mertebe enine dalga genliklerinin bir kombinasyonu olarak tanımlanan Φ ve Ψ fonksiyonlarının sağladığı denklemleri bulmak için

(4.14) ile verilen KNLS denklemleri ϵ ve (4.22) ile verilen ikinci mertebe büyüklüklerin sağladığı denklemler ϵ^2 ile çarpılıp toplanır ve denklemler uygun şekilde düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial}{\partial \tau} (\epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2) + p \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2) + i \gamma \epsilon \frac{\partial^3 (\epsilon \phi_1)}{\partial \xi^3} + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \phi_1) (|\epsilon \phi_1|^2 + |\epsilon \psi_1|^2) \\
& + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \phi_1)^2 (\epsilon^2 \phi_2^*) + 2 \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon^2 \phi_2) |\epsilon \phi_1|^2 + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon^2 \phi_2) |\epsilon \psi_1|^2 + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \phi_1) (\epsilon \psi_1) (\epsilon^2 \psi_2^*) \\
& - i \epsilon \left[\frac{4q}{k \epsilon^2} - \frac{2c_g p q}{\epsilon^2 (c_g^2 - c_L^2)} \right] |\epsilon \phi_1|^2 \frac{\partial (\epsilon \phi_1)}{\partial \xi} - \epsilon \frac{2iq}{k \epsilon^2} |\epsilon \psi_1|^2 \frac{\partial (\epsilon \phi_1)}{\partial \xi} \\
& - i \epsilon \left[\frac{2q}{k \epsilon^2} - \frac{2pq}{\epsilon^2 (c_g^2 - c_L^2)} \right] (\epsilon \phi_1) (\epsilon \psi_1^*) \frac{\partial (\epsilon \psi_1)}{\partial \xi} + i \epsilon \frac{c_g q}{\omega \epsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\epsilon \phi_1) (|\epsilon \phi_1|^2 + |\epsilon \psi_1|^2)] \\
& - 2i \epsilon \frac{c_g q p}{(c_g^2 - c_L^2) \epsilon^2} (\epsilon \phi_1) \left[(\epsilon \phi_1) \frac{\partial (\epsilon \phi_1^*)}{\partial \xi} + (\epsilon \psi_1) \frac{\partial (\epsilon \psi_1^*)}{\partial \xi} \right] \\
& + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \phi_1) (\epsilon \psi_1^*) (\epsilon^2 \psi_2^*) = \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
& i \frac{\partial}{\partial \tau} (\epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2) + p \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2) + i \gamma \epsilon \frac{\partial^3 (\epsilon \psi_1)}{\partial \xi^3} + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \psi_1) (|\epsilon \psi_1|^2 + |\epsilon \phi_1|^2) \\
& + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \psi_1)^2 (\epsilon^2 \psi_2^*) + 2 \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon^2 \psi_2) |\epsilon \psi_1|^2 + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon^2 \psi_2) |\epsilon \phi_1|^2 + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \psi_1) (\epsilon \phi_1) (\epsilon^2 \phi_2^*) \\
& - i \epsilon \left[\frac{4q}{k \epsilon^2} - \frac{2c_g p q}{\epsilon^2 (c_g^2 - c_L^2)} \right] |\epsilon \psi_1|^2 \frac{\partial (\epsilon \psi_1)}{\partial \xi} - \epsilon \frac{2iq}{k \epsilon^2} |\epsilon \phi_1|^2 \frac{\partial (\epsilon \psi_1)}{\partial \xi} \\
& - i \epsilon \left[\frac{2q}{k \epsilon^2} - \frac{2pq}{\epsilon^2 (c_g^2 - c_L^2)} \right] (\epsilon \psi_1) (\epsilon \phi_1^*) \frac{\partial (\epsilon \phi_1)}{\partial \xi} + i \epsilon \frac{c_g q}{\omega \epsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\epsilon \psi_1) (|\epsilon \psi_1|^2 + |\epsilon \phi_1|^2)] \\
& - 2i \epsilon \frac{c_g q p}{(c_g^2 - c_L^2) \epsilon^2} (\epsilon \psi_1) \left[(\epsilon \psi_1) \frac{\partial (\epsilon \psi_1^*)}{\partial \xi} + (\epsilon \phi_1) \frac{\partial (\epsilon \phi_1^*)}{\partial \xi} \right] \\
& + \frac{q}{\epsilon^2} (\epsilon \psi_1) (\epsilon \phi_1^*) (\epsilon^2 \phi_2^*) = \mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Burada yüksek mertebe kuple evolüsyon denklemlerini Φ ve Ψ değişkenleri cinsinden uygun bir formda yazabilmek için α katsayı fonksiyonunun $\alpha = \mathcal{O}(\epsilon)$ olduğu kabul edilmiştir. Sonuç olarak, Φ ve Ψ değişkenlerinin sağladığı ve ϵ^2 mertebesindeki terimlerin katkısını da içeren kuple evolüsyon denklemleri

$$\begin{aligned}
& i \Phi_\tau + p \Phi_{\xi\xi} + \tilde{q} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2) \Phi + i \epsilon \{ \gamma \Phi_{\xi\xi\xi} + \tilde{q} [a |\Phi|^2 \Phi_\xi + b \Phi (|\Phi|^2)_\xi \\
& + c |\Psi|^2 \Phi_\xi + d \Phi \Psi^* \Psi_\xi + b \Phi \Psi \Psi_\xi^*] \} = \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
& i \Psi_\tau + p \Psi_{\xi\xi} + \tilde{q} (|\Psi|^2 + |\Phi|^2) \Psi + i \epsilon \{ \gamma \Psi_{\xi\xi\xi} + \tilde{q} [a |\Psi|^2 \Psi_\xi + b \Psi (|\Psi|^2)_\xi \\
& + c |\Phi|^2 \Psi_\xi + d \Psi \Phi^* \Phi_\xi + b \Psi \Phi \Phi_\xi^*] \} = \mathcal{O}(\epsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. (4.25) denklemlerinde $\tilde{q} = q/\epsilon^2$ ve lineer olmayan terimlerin katsayıları ise

$$\begin{aligned} a &= \frac{c_g}{\omega} + \frac{4c_g p}{c_g^2 - c_L^2} - \frac{4}{k}, & b &= \frac{c_g}{\omega} - \frac{2c_g p}{c_g^2 - c_L^2}, \\ c &= \frac{c_g}{\omega} - \frac{2}{k}, & d &= \frac{c_g}{\omega} + \frac{2c_g p}{c_g^2 - c_L^2} - \frac{2}{k} \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak tanımlanmıştır. Yüksek mertebe dispersif ve nonlinear etkileri içeren (4.25) evölüsyon denklemlerini kuple yüksek mertebe nonlinear Schrödinger (YMNLS) denklemleri olarak adlandırmak mümkündür. (4.25) denklemlerinde ikinci enine bileşen $\Psi \equiv 0$ olarak kabul edilirse, tek dalga genliğinin sağladığı denklem, daha önce nonlinear optikte yayılan modüle olmuş dalganın genliğini karakterize eden denklem olarak Kodama [14] ve Kodama ve Hasegawa [15] tarafından elde edilmiş tek YMNLS denkleminin formuna indirgenir. Bu bağlamda (4.25) YMNLS denklemlerinin, daha önce nonlinear optikte elde edilen tek YMNLS denkleminin iki kuple denkleme genelleştirilmiş hali olduğunu söylemek mümkündür. Gerçekten (4.25) denklemlerinde, ikinci mertebe terimlerin katkısını gösteren ϵ parametresini içeren terimler ihmal edilirse elde kalan denklemler kuple NLS denklemlerine indirgenir. Bu nedenle (4.25) denklemlerini kuple YMNLS denklemleri olarak adlandırmak doğru görünmektedir. Bilindiği kadarı ile (4.25) YMNLS denklemleri fiziksel bir problem için elde edilmiş ilk kuple denklem sistemidir. Porzesian *v.d.* [18] tarafından önerilmiş kuple YMNLS denklemleri bir fiziksel problemi modelleyen denklemler olmayıp, Kodama'nın nonlinear optikte elde ettiği tek YMNLS denkleminin sağ- ve sol-polarize olmuş dalgalar için yazılmış halidir. Park *v.d.* [19] tarafından önerilen kuple YMNLS denklemleri ise integre edilebilir bir sistem olacak şekilde önerilmiş ve fiziksel bir problemin modeli olmayan denklemlerdir. (4.25) kuple YMNLS denklemleri özel hal olarak, Porzesian *v.d.* [18] tarafından ele alınan kuple YMNLS denklemlerini içerir. Gerçekten (4.25) denklemlerindeki katsayılar

$$2p = \tilde{q} = \gamma = 1, \quad a = c = 6, \quad b = d = 3 \quad (4.27)$$

olacak şekilde seçilirse sistem

$$\begin{aligned}
& i\Phi_\tau + \frac{1}{2}\Phi_{\xi\xi} + (|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Phi \\
& \quad + i\epsilon[\Phi_{\xi\xi\xi} + 6(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Phi_\xi + 3\Phi(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)_\xi] = 0, \\
& i\Psi_\tau + \frac{1}{2}\Psi_{\xi\xi} + (|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Psi \\
& \quad + i\epsilon[\Psi_{\xi\xi\xi} + 6(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Psi_\xi + 3\Psi(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)_\xi] = 0 \quad (4.28)
\end{aligned}$$

formuna indirgenir. Bu form ise Kodama'nın elde ettiği tek YMNLS denkleminin [14], sağ- ve sol-polarize olmuş dalgalar için aldığı formudur.

(4.25) denklemlerinin $\tilde{q} = 1$ ve $pa = 3\gamma$ durumunda içerdiği diğer bir özel hal de daha önce tek YMNLS için önerilmiş koordinat dönüşümü kullanılarak kolaylıkla görülebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
x &= \xi - \frac{3\gamma}{\epsilon a^2}\tau, \quad t = \tau, \\
u(x, t) &= \Phi(\xi, \tau) \exp[-i\frac{1}{\epsilon a}(\xi - \frac{2\gamma}{\epsilon a^2}\tau)], \\
v(x, t) &= \Psi(\xi, \tau) \exp[-i\frac{1}{\epsilon a}(\xi - \frac{2\gamma}{\epsilon a^2}\tau)] \quad (4.29)
\end{aligned}$$

şeklindeki bağımsız ve bağımlı değişken dönüşümleri, (4.25) denklemlerini (gösterim kolaylığı nedeni ile üsler ihmal edilmiştir)

$$\begin{aligned}
u_t + \epsilon[\gamma u_{xxx} + a|u|^2 u_x + bu(|u|^2)_x + c|v|^2 u_x + duv^* v_x + buvv_x^*] &= 0, \\
v_t + \epsilon[\gamma v_{xxx} + a|v|^2 v_x + bv(|v|^2)_x + c|u|^2 v_x + dvu^* u_x + bvuu_x^*] &= 0 \quad (4.30)
\end{aligned}$$

formuna indirger. Ayrıca (4.30) sisteminde $a = c$ olduğu kabul edilirse $2c_g pk = c_g^2 - c_L^2$ elde edilir, dolayısı ile $b = d$ olup nonlineer dalgaların genliğini yöneten (4.30) denklemleri

$$\begin{aligned}
u_t + \epsilon[\gamma u_{xxx} + a(|u|^2 + |v|^2)u_x + bu(|u|^2 + |v|^2)_x] &= 0, \\
v_t + \epsilon[\gamma v_{xxx} + a(|u|^2 + |v|^2)v_x + bv(|u|^2 + |v|^2)_x] &= 0 \quad (4.31)
\end{aligned}$$

kuple değiştirilmiş kompleks Korteweg-de Vries denklemlerine dönüşür.

4.3 Bazı Özel Çözümler

Nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak için genel bir yöntem mevcut değildir. Bu nedenle nonlinear kısmi diferansiyel denklem veya denklem sistemine mümkün olan durumlarda özel çözüm bulmak da büyük bir önem kazanmaktadır. Ayrıca nonlinear denklemler için elde edilecek çözümlerin, denklemin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılacak nümerik yöntemin test edilmesi açısından da önemi vardır. Bu bağlamda, nonlinear denklemlerin özel çözümlerinin bulunması için sembolik hesap yapan programların da katkısı ile çok değişik yöntemler önerilmiştir. Çalışmanın bu bölümünde kuple nonlinear evölüsyon denklemlerinin bazı özel çözümleri verilecektir.

Tek YMNLS denkleminin değişik formlarının sech ve tanh formundaki gezen dalga çözümleri Potasek ve Tabor'un [30] ve Frantzeskakis'in [31] çalışmalarında verilmiştir. Daha sonra, Tasgal ve Potasek [32] kuple YMNLS denklemlerinin katsayılarının özel bir durumunda, denklemlerin ters saçılma metodu ile çözümlerini elde etmiştir. Ayrıca Liu [33], denklemlerin katsayılarının bazı kısıtlamalar sağlaması durumunda (4.25) kuple YMNLS denklemlerine Hirota yöntemini kullanarak denklemin N-soliton çözümlerini vermiştir. Benzer bir çalışmada [34], kuple YMNLS denklemlerinin özel çözümleri, ikinci ve üçüncü mertebe disperif terimlerin ve nonlinear terimlerin katsayılarına bazı kısıtlamalar getirilerek bulunmuştur. Bu çalışmanın esas amacı YMNLS denkleminin çözümlerinin elde edilmesi olmadığından, çok değişik çözüm metotları yerine, bu alt bölümde Potasek ve Tabor'un [30] tek YMNLS denkleminin özel çözümlerini bulmak için kullandıkları yol kuple YMNLS denklemlerinin özel çözümlerinin bulunması için uygulanacaktır. Bu alt bölümde kuple YMNLS denklemlerinde ikinci ve üçüncü mertebe dispersiyon terimlerinin katsayılarına herhangi bir kısıtlama getirilmeden sech-sech ve tanh-tanh tipinde çözümler aranacaktır.

(4.25) denkleminin özel çözümünü bulmak için ξ ve τ bağımsız değişkenleri ve Φ , Ψ bağımlı değişkenleri için

$$x = \xi, \quad t = \tau,$$

$$\Phi = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi', \quad \Psi = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \Psi'$$

dönüşümleri kullanılarak evolüsyon denklemlerini yeniden ölçeklemek uygundur. Yeni değişkenler cinsinden kuple evolüsyon denklemleri (gösterim kolaylığı için üsler ihmal edilerek)

$$\begin{aligned} i\Phi_t + p\Phi_{xx} + (|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Phi + i\epsilon [\gamma\Phi_{xxx} + a|\Phi|^2\Phi_x + b\Phi(|\Phi|^2)_x \\ + c|\Psi|^2\Phi_x + d\Phi\Psi^*\Psi_x + b\Phi\Psi\Psi_x^*] = 0, \\ i\Psi_t + p\Psi_{xx} + (|\Psi|^2 + |\Phi|^2)\Psi + i\epsilon [\gamma\Psi_{xxx} + a|\Psi|^2\Psi_x + b\Psi(|\Psi|^2)_x \\ + c|\Phi|^2\Psi_x + d\Psi\Phi^*\Phi_x + b\Psi\Phi\Phi_x^*] = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

formunu alır . Amaç (4.32) kuple denklemlerinin sech-sech ve tanh-tanh tipinde özel çözümlerinin olup olmadığını araştırmaktır.

(4.25) denklemlerine ilk olarak, nonlinear optikte bright-bright yalnız dalgalar olarak da adlandırılan sech-sech yalnız dalga çözümleri aranacaktır. Bunun için Φ_0 , Ψ_0 , k , ω , K_1 , K_2 , Ω_1 ve Ω_2 reel sabitler olmak üzere, Φ ve Ψ genlikleri için

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \Phi_0 \operatorname{sech}(kx - \omega t) \exp[i(K_1x - \Omega_1t)], \\ \Psi(x, t) &= \Psi_0 \operatorname{sech}(kx - \omega t) \exp[i(K_2x - \Omega_2t)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

formundaki çözümler önerilecektir. $\zeta = kx - \omega t$ tanımı kullanılarak (4.33) çözümleri (4.32) denklemlerinde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Omega_1 - pK_1^2 + \epsilon\gamma K_1^3 - pk^2 + \Phi_0^2 + \Psi_0^2 + 3\epsilon\gamma K_1k^2 - a\epsilon\Phi_0^2K_1 - c\epsilon\Psi_0^2K_1 \\ + \epsilon(b - d)\Psi_0^2K_2 + [2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_1k^2 - \Phi_0^2 - \Psi_0^2 + a\epsilon\Phi_0^2K_1 + c\epsilon\Psi_0^2K_1 \\ - \epsilon(b - d)\Psi_0^2K_2] \tanh^2 \zeta + i[\omega - 2pK_1k + 3k\epsilon\gamma K_1^2 + 5\epsilon\gamma k^3 \\ - \epsilon(a + 2b)k\Phi_0^2 - \epsilon(b + c + d)\Psi_0^2k] \tanh \zeta \\ + i[-6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a + 2b)k\Phi_0^2 + \epsilon(b + c + d)\Psi_0^2k] \tanh^3 \zeta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_2 - pK_2^2 + \epsilon\gamma K_2^3 - pk^2 + \Phi_0^2 + \Psi_0^2 + 3\epsilon\gamma K_2 k^2 - a\epsilon\Psi_0^2 K_2 - c\epsilon\Phi_0^2 K_2 \\
& + \epsilon(b-d)\Phi_0^2 K_1 + [2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_2 k^2 - \Phi_0^2 - \Psi_0^2 + a\epsilon\Psi_0^2 K_2 + c\epsilon\Phi_0^2 K_2 \\
& - \epsilon(b-d)\Phi_0^2 K_1] \tanh^2 \zeta + i[\omega - 2pK_2 k + 3k\epsilon\gamma K_2^2 + 5\epsilon\gamma k^3 \\
& - \epsilon(a+2b)k\Psi_0^2 - \epsilon(b+c+d)\Phi_0^2 k] \tanh \zeta \\
& + i[-6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a+2b)k\Psi_0^2 + \epsilon(b+c+d)\Phi_0^2 k] \tanh^3 \zeta = 0 \quad (4.34)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.33) çözümlerinin (4.32) denklemlerini özdeş olarak sağlaması için, (4.34) eşitliğinin reel ve sanal kısımlarının sıfır olması gerekir. Bu ise Φ_0 , Ψ_0 , k , ω , K_1 , K_2 , Ω_1 ve Ω_2 reel sabitlerin sağlaması gereken

$$\begin{aligned}
& \Omega_1 - pK_1^2 + \epsilon\gamma K_1^3 - pk^2 + \Phi_0^2 + \Psi_0^2 + 3\epsilon\gamma K_1 k^2 - a\epsilon\Phi_0^2 K_1 - c\epsilon\Psi_0^2 K_1 \\
& + \epsilon(b-d)\Psi_0^2 K_2 = 0 \\
& \omega - 2pK_1 k + 3k\epsilon\gamma K_1^2 + 5\epsilon\gamma k^3 - \epsilon(a+2b)k\Phi_0^2 - \epsilon(b+c+d)\Psi_0^2 k = 0 \\
& 2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_1 k^2 - \Phi_0^2 - \Psi_0^2 + a\epsilon\Phi_0^2 K_1 + c\epsilon\Psi_0^2 K_1 - \epsilon(b-d)\Psi_0^2 K_2 = 0 \\
& -6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a+2b)k\Phi_0^2 + \epsilon(b+c+d)\Psi_0^2 k = 0 \\
& \Omega_2 - pK_2^2 + \epsilon\gamma K_2^3 - pk^2 + \Phi_0^2 + \Psi_0^2 + 3\epsilon\gamma K_2 k^2 - a\epsilon\Psi_0^2 K_2 - c\epsilon\Phi_0^2 K_2 \\
& + \epsilon(b-d)\Phi_0^2 K_1 = 0 \\
& \omega - 2pK_2 k + 3k\epsilon\gamma K_2^2 + 5\epsilon\gamma k^3 - \epsilon(a+2b)k\Psi_0^2 - \epsilon(b+c+d)\Phi_0^2 k = 0 \\
& 2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_2 k^2 - \Phi_0^2 - \Psi_0^2 + a\epsilon\Psi_0^2 K_2 + c\epsilon\Phi_0^2 K_2 - \epsilon(b-d)\Phi_0^2 K_1 = 0 \\
& -6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a+2b)k\Psi_0^2 + \epsilon(b+c+d)\Phi_0^2 k = 0 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

kısıtlamalarına yol açar. (4.35) denklemlerinin her birinin sağlanması koşulu $K_1 = K_2$ ve $\Omega_1 = \Omega_2$ kısıtlamalarını verir. Bu sonuç ise ortamda iki sech tipinde yalnız dalga yayılması durumunda dalgaların dalga sayısı ve frekanslarının birbirine eşit olması gerektiğini verir. (4.26) ifadelerinin bir sonucu olan $a + b = c + d$ eşitliği ve $K = K_1$ ve $\Omega = \Omega_1$ tanımları kullanılarak (4.35) denklem sisteminden

$$\begin{aligned}
\Omega &= -p(k^2 - K^2) + \epsilon\gamma K(3k^2 - K^2) \\
\omega &= 2pkK + \epsilon\gamma k(k^2 - 3K^2) \\
2pk^2 - (\Phi_0^2 + \Psi_0^2) &= 2\epsilon bK(\Phi_0^2 + \Psi_0^2) \\
6\epsilon\gamma k^2 &= \epsilon(a + 2b)(\Phi_0^2 + \Psi_0^2)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. (4.36) denklemlerinde k ve Φ_0 (veya Ψ_0) genliği bağımsız parametrelerdir. (4.36)₃ denkleminden görüldüğü gibi dispersif terimin, p , işareti üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. Diğer bir deyişle sech-sech formundaki yalnız dalga çözümleri p 'nin pozitif veya negatif değerleri için de mümkündür. Bu sonuç, tek NLS denkleminin sech tipindeki yalnız dalga çözümlerin p dispersif terimin pozitif değerleri için mümkün olduğu sonucundan farklıdır. Dolayısı ile kuple YM-NLS denklemlerinde dispersif terimin pozitif ve negatif olması durumunda da sech tipindeki çözümlerinin var olduğu elde edilir. Bu ise tek NLS denkleminin çözümlerine göre daha az kısıtlayıcıdır. Gerçekten (4.36)₃ denkleminde yüksek mertebe dispersif nonlinear terimler ihmal edilirse, yani $\epsilon = 0$ alınırsa $2pk^2 = (\Phi_0^2 + \Psi_0^2)$ bulunur. Bu ise tek NLS durumunda sech çözümleri için p katsayısının pozitif olması sonucunu verir.

İkinci olarak (4.25) denklemlerine, nonlinear optikte dark-dark yalnız dalgalar olarak da adlandırılan tanh-tanh yalnız dalga çözümleri aranacaktır. Bunun için Φ_0 , Ψ_0 , k , ω , K_1 , K_2 , Ω_1 ve Ω_2 reel sabitler olmak üzere, Φ ve Ψ genlikleri için

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t) &= \Phi_0 \tanh(kx - \omega t) \exp[i(K_1x - \Omega_1t)], \\
\Psi(x, t) &= \Psi_0 \tanh(kx - \omega t) \exp[i(K_2x - \Omega_2t)]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

şeklinde çözümler önerilecektir. $\zeta = kx - \omega t$ tanımı kullanılarak (4.37) çözümleri (4.32) denklemlerinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
&[\Omega_1 - pK_1^2 + \epsilon\gamma K_1^3 - 2pk^2 + 6\epsilon\gamma K_1k^2] \tanh \zeta + [2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_1k^2 + \Phi_0^2 \\
&+ \Psi_0^2 - a\epsilon\Phi_0^2K_1 - c\epsilon\Psi_0^2K_1 + \epsilon(b - d)\Psi_0^2K_2] \tanh^3 \zeta + i[-\omega + 2pK_1k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3k\epsilon\gamma K_1^2 - 2\epsilon\gamma k^3](1 - \tanh^2 \zeta) + i[6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a + 2b)k\Phi_0^2 \\
& + \epsilon(b + c + d)\Psi_0^2 k] \tanh^2 \zeta (1 - \tanh^2 \zeta) = 0 \\
& [\Omega_2 - pK_2^2 + \epsilon\gamma K_2^3 - 2pk^2 + 6\epsilon\gamma K_2 k^2] \tanh \zeta + [2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_2 k^2 + \Psi_0^2 \\
& + \Phi_0^2 - a\epsilon\Psi_0^2 K_2 - c\epsilon\Phi_0^2 K_2 + \epsilon(b - d)\Phi_0^2 K_2] \tanh^3 \zeta + i[-\omega + 2pK_2 k \\
& - 3k\epsilon\gamma K_2^2 - 2\epsilon\gamma k^3](1 - \tanh^2 \zeta) + i[6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a + 2b)k\Psi_0^2 \\
& + \epsilon(b + c + d)\Phi_0^2 k] \tanh^2 \zeta (1 - \tanh^2 \zeta) = 0 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.37) çözümlerinin (4.38) denklemlerini özdeş olarak sağlaması için, (4.34) eşitliğinin reel ve sanal kısımlarınının sıfır olması gerekir. Bu ise Φ_0 , Ψ_0 , k , ω , K_1 , K_2 , Ω_1 ve Ω_2 reel sabitlerin sağlaması gereken

$$\begin{aligned}
\Omega_1 - pK_1^2 + \epsilon\gamma K_1^3 - 2pk^2 + 6\epsilon\gamma K_1 k^2 &= 0 \\
2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_1 k^2 + \Phi_0^2 + \Psi_0^2 - a\epsilon\Phi_0^2 K_1 - c\epsilon\Psi_0^2 K_1 + \epsilon(b - d)\Psi_0^2 K_2 &= 0 \\
-\omega + 2pK_1 k - 3k\epsilon\gamma K_1^2 - 2\epsilon\gamma k^3 &= 0 \\
6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a + 2b)k\Phi_0^2 + \epsilon(b + c + d)\Psi_0^2 k &= 0 \\
\Omega_2 - pK_2^2 + \epsilon\gamma K_2^3 - 2pk^2 + 6\epsilon\gamma K_2 k^2 &= 0 \\
2pk^2 - 6\epsilon\gamma K_2 k^2 + \Psi_0^2 + \Phi_0^2 - a\epsilon\Psi_0^2 K_2 - c\epsilon\Phi_0^2 K_2 + \epsilon(b - d)\Phi_0^2 K_2 &= 0 \\
-\omega + 2pK_2 k - 3k\epsilon\gamma K_2^2 - 2\epsilon\gamma k^3 &= 0 \\
6\epsilon\gamma k^3 + \epsilon(a + 2b)k\Psi_0^2 + \epsilon(b + c + d)\Phi_0^2 k &= 0 \tag{4.39}
\end{aligned}$$

kısıtlamalarına yol açar. (4.39) denklemlerinin her birinin sağlanması koşulu $K_1 = K_2$ ve $\Omega_1 = \Omega_2$ kısıtlamalarını verir. Bu sonuç ise ortamda iki tanh tipinde yalnız dalga yayılması durumunda dalgaların dalga sayısı ve frekanslarının birbirine eşit olması gerektiğini verir. $K = K_1$ ve $\Omega = \Omega_1$ tanımları ve $a + b = c + d$ eşitliği kullanılarak (4.39) denklem sisteminden

$$\begin{aligned}
\Omega &= p(2k^2 + K^2) - \epsilon\gamma K(6k^2 + K^2), \\
\omega &= 2pkK - \epsilon\gamma k(2k^2 + 3K^2), \\
2pk^2 + (\Phi_0^2 + \Psi_0^2) &= -2\epsilon b K(\Phi_0^2 + \Psi_0^2), \\
6\epsilon\gamma k^2 &= -\epsilon(a + 2b)(\Phi_0^2 + \Psi_0^2) \tag{4.40}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.40) denklemlerinde k ve Φ_0 (veya Ψ_0) genliği bağımsız parametrelerdir. (4.40)₃ denkleminde görüldüğü gibi dispersif terimin, p , işareti üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. Diğeri bir deyişle tanh-tanh formundaki yalnız dalga çözümleri p 'nin pozitif veya negatif değerleri için de mümkündür. Bu sonuç, tek NLS denkleminin tanh tipindeki yalnız dalga çözümlerin p dispersif terimin negatif değerleri için mümkün olduğu sonucundan farklıdır. Yani kuple YMNLS denklemlerinde dispersif terimin pozitif ve negatif olması durumunda da tanh tipindeki çözümlerinin var olduğu elde edilir. Bu ise tek NLS denkleminin çözümlerine göre daha az kısıtlayıcıdır. Gerçekten (4.40)₃ denkleminde yüksek mertebe dispersif nonlinear terimler ihmal edilirse, yani $\epsilon = 0$ alınırsa $-2pk^2 = (\Phi_0^2 + \Psi_0^2)$ bulunur. Bu ise tek NLS durumunda tanh çözümleri için p katsayısının negatif olması sonucunu verir.

5. KUPLE GENELLEŞTİRİLMİŞ NLS DENKLEMLERİ

5.1 Giriş

Nonlinear Schrödinger denklemi, zayıf nonlinear ve zayıf dispersif sürekli bir ortamda yayılan (1+1) boyutlu dalganın genliğinin davranışını tanımlayan bir evölüsyon denklemidir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} + q|A|^2A = 0. \quad (5.1)$$

Burada ξ ve τ yavaş değişkenler, A ise yavaş değişen kompleks genliktir. Bilindiği gibi, K dalga sayısı olmak üzere NLS denkleminin

$$A(\xi, \tau) = A_0 \exp\{i[K\xi - (pK^2 - qA_0^2)\tau]\} \quad (5.2)$$

şeklinde sabit genlikli düzlem dalga çözümü vardır. Bu çözümün kararlılığı, NLS denklemindeki nonlinear ve dispersif terimlerin çarpımına bağlıdır. Diğer bir deyişle $pq > 0$ ise düzlem dalga çözümleri kararsız ve $pq < 0$ ise çözümler kararlıdır. NLS denklemindeki dispersif veya nonlinear terimlerin katsayılarının sıfır olması *marjinal durum* olarak adlandırılır. İlk olarak, Stokes dalgalarında $k \simeq 1.363$ dalga sayısı için deneysel olarak gözlenen bu durum *Benjamin-Feir* kararsızlığı olarak adlandırılır. Nonlinear terimin sıfır olduğu marjinal durum civarında NLS denklemi artık geçerli olmaktan çıkar, diğer bir deyişle NLS denklemini elde etmek için kullanılan asimptotik açılım geçerli olmaz. Bu durumda marjinal nokta civarında dalga modülasyonunu karakterize edecek yüksek mertebe nonlinear terimleri de içeren NLS denkleminin genelleştirilmiş formuna gerek vardır. Marjinal durum civarındaki hareketi karakterize eden genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi ilk kez su dalgalarında Johnson [20] tarafından, NLS denklemindeki asimptotik açılım korunarak ancak daha

yavaş değişen koordinatlar seçilerek elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} iA_\tau - a_1 A_{\xi\xi} - a_2 |A|^2 A + a_3 |A|^4 A + i(a_4 |A|^2 A_\xi - a_5 A(|A|^2)_\xi) - a_6 \Psi_\tau &= 0, \\ \Psi_\xi &= |A|^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Burada ξ ve τ yavaş değişkenler, A ise yavaş değişen kompleks genliktir. (5.3) denklemlerindeki katsayılar ise $k = 1.363$ kritik dalga sayısı için verilmiştir. Daha sonra aynı problem Kakutani ve Michihiro [21] tarafından nonlineerliğin şiddetini arttıran bir asimptotik açılım kullanılarak incelenmiştir. (5.3) denkleminde varolan integral terimin uygun bir biçimde yok edilmesi ile Stokes dalgalarının Benjamin-Feir kararsızlığının gözlemlendiği kritik dalga sayısı civarında hareketi betimleyen genelleştirilmiş NLS (GNLS) denklemi elde edilmiştir:

$$iA_\tau + pA_{\xi\xi} = q_1 |A|^2 A + q_2 |A|^4 A + iq_3 A(|A|^2)_\xi + iq_4 |A|^2 A_\xi. \quad (5.4)$$

(5.4) GNLS denkleminde, nonlineerliğin şiddeti artmış ve denklem beşinci mertebe nonlineer ve genliğin türevini de içeren üçüncü mertebe nonlineer terimleri içeren bir form kazanmıştır.

Eğer sürekli bir ortamda yayılan iki dalga mevcut ise, iki serbest dalganın nonlineer modülasyonu iki kuple NLS denklemi ile verilir. Gerçekten önemli teknolojik uygulamaları olan nonlineer optik bir ortamda [12], mikropolar elastik bir katıda [13] ve burada verilmeyen birçok çalışmada ortamdaki iki dalganın hareketinin iki kuple NLS (KNLS) denklemleri ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} iA_\tau + pA_{\xi\xi} + (q_1 |A|^2 + q_2 |B|^2)A &= 0, \\ iB_\tau + pB_{\xi\xi} + (q_1 |A|^2 + q_2 |B|^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

(5.5) denklemlerinde ξ ve τ yavaş değişkenler, A ve B ise ortamda yayılan dalgaların yavaş değişen kompleks genlikleridir. (5.5) denklemlerinde nonlineer terimlerin katsayıları eşit ise, $q_1 = q_2$, (5.5) denklemleri Manakov sistemi olarak adlandırılır. Bu durumda kuple NLS denklemlerinin integre edilebilir

olduğu, diğer bir deyişle ters saçılma ile çözülebildiği gösterilmiştir. $q_1 = q_2$ durumundaki Manakov sisteminde nonlinear terimlerin katsayıları bazı kritik dalga sayıları için sıfır olabilir. Bu durumda KNLS denklem sistemi geçerli olmaktan çıkar. Ortamdaki iki serbest dalga modunun hareketini bu kritik dalga sayısı civarında tanımlayacak yeni KNLS denklemlerinin genelleştirilmiş formlarına ihtiyaç vardır. Tek NLS denkleminin kritik dalga sayıları için aldığı form olan tek GNLS denklemi literatürde bilinmesine rağmen [20, 21, 22, 23], iki kuple NLS denklemlerinin kritik dalga sayısı civarında iki kuple GNLS denklemlerine genişletilmiş hali bilindiği kadarı ile literatürde mevcut değildir. Bu bölümdeki çalışmanın amacı, tek GNLS denkleminin genelleştirilmiş kuple halini genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan enine dalgalar için elde etmek, denklemin katsayılarını açık olarak kritik dalga sayısı, frekans ve malzeme sabitlerine bağlı olarak bulmaktır.

5.2 Kuple GNLS Denklemlerinin Türetilmesi

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde, çok ölçekli pertürbasyon metodu kullanılarak yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren sonsuz, homojen elastik bir ortamda yayılan enine dalgaların nonlinear modülasyonu problemi incelenmişti. Buna göre

$$\xi = \epsilon(x - \Lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 t$$

koordinat uzatmaları ve

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1^{(0)}(\xi, \tau) + \epsilon^2 [u_2^{(0)}(\xi, \tau) + u_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\ v &= \epsilon [v_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\ &\quad + \epsilon^2 [v_2^{(0)}(\xi, \tau) + v_2^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + v_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\ w &= \epsilon [w_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\ &\quad + \epsilon^2 [w_2^{(0)}(\xi, \tau) + w_2^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + w_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \end{aligned}$$

şeklindeki çözüm fonksiyonları kullanılarak, enine dalgaların uzak alan davranışını ikinci mertebeye kadar karakterize eden evolölasyon denklemleri bir

çift KNLS denklemleri olarak bulunmuştur:

$$\begin{aligned} i \phi_\tau + p \phi_{\xi\xi} + \delta (|\phi|^2 + |\psi|^2) \phi &= 0, \\ i \psi_\tau + p \psi_{\xi\xi} + \delta (|\psi|^2 + |\phi|^2) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Burada $\phi \equiv v_1^{(1)}$ ve $\psi \equiv w_1^{(1)}$, enine dalgaların birinci merteye yavaş değişen kompleks genlikleri ve τ ve ξ yavaş değişen koordinatları göstermektedir. (5.6) KNLS denklemlerindeki katsayılar ise

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2\omega}(c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2), \\ \delta &= \frac{\gamma_2^2 k^4}{2\omega} \left[\frac{4k^2}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

olarak tanımlanmıştır. (5.7) denklemlerinden de görüldüğü gibi KNLS denklemlerindeki nonlinear terimin katsayısı olan δ bazı kritik dalga sayıları için sıfır olmaktadır. Gerçekten

$$\frac{4k^2}{D_1(2k, 2\omega)} = \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \quad (5.8)$$

kısıtlaması sağlandığı zaman δ katsayısı sıfır olur ve bu katsayıyı sıfır yapan kritik dalga sayısı civarında KNLS denklemleri geçerli olmaktan çıkar, diğer bir deyişle KNLS denklemlerini elde etmek için kullanılan asimptotik açılım geçerliliğini yitirir. Tek NLS denklemindeki duruma benzer olarak marjinal durum olarak adlandırılabilir bu kritik durum civarında, dalga modülasyonunu yeni denklemler ile ifade etmek gerekir. Marjinal durum civarında dispersif etkileri nonlinear etkiler ile dengelemek için, asimptotik seri açılımında (çözümler için önerilen) nonlinearliğin etkisi arttırılmalıdır. Bunun için nonlinearliğin mertebesi NLS denkleminde olduğu gibi $\mathcal{O}(\epsilon)$ yerine $\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ alınacaktır.

Taşıyıcı dalganın genliğindeki hızlı ve yavaş değişimi ayırt edebilmek için dördüncü bölümde de kullanılmış koordinat uzatması göz önüne alınacaktır:

$$\xi = \epsilon(x - c_g t), \quad \tau = \epsilon^2 t. \quad (5.9)$$

(5.9) koordinat uzatmalarındaki c_g dördüncü bölümdeki sonsuz ortamda yayılan enine dalgaların grup hızını göstermektedir. Diğer yandan, marjinal durum

civarında nonlineerliği de evolüsyon denklemlerine katabilmek için u çözüm fonksiyonu $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ parametresinin kuvvetlerine göre ifade edilecek, diğer bir deyişle nonlineerliğin etkisi arttırılacaktır:

$$\begin{aligned}
u &= u_1^{(0)}(\xi, \tau) \\
&+ \epsilon[u_2^{(0)}(\xi, \tau) + u_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^{\frac{3}{2}}[u_3^{(0)}(\xi, \tau) + u_3^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + u_3^{(3)}(\xi, \tau) e^{3i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^2[u_4^{(0)}(\xi, \tau) + u_4^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + u_4^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + u_4^{(4)}(\xi, \tau) e^{4i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\
v &= \epsilon^{\frac{1}{2}}[v_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon[v_2^{(0)}(\xi, \tau) + v_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^{\frac{3}{2}}[v_3^{(0)}(\xi, \tau) + v_3^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + v_3^{(3)}(\xi, \tau) e^{3i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^2[v_4^{(0)}(\xi, \tau) + v_4^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + v_4^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + v_4^{(4)}(\xi, \tau) e^{4i\theta} + \text{c.c.}] + \dots \\
w &= \epsilon^{\frac{1}{2}}[w_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon[w_2^{(0)}(\xi, \tau) + w_2^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^{\frac{3}{2}}[w_3^{(0)}(\xi, \tau) + w_3^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + w_3^{(3)}(\xi, \tau) e^{3i\theta} + \text{c.c.}] \\
&+ \epsilon^2[w_4^{(0)}(\xi, \tau) + w_4^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + w_4^{(2)}(\xi, \tau) e^{2i\theta} + w_4^{(4)}(\xi, \tau) e^{4i\theta} + \text{c.c.}] + \dots
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10) açılımında $\theta = kx - \omega t$, c.c. kendinden önceki ifadelerin kompleks eşleneği ve $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ fonksiyonları ise ortamda yayılan serbest enine dalga modlarını göstermektedir. $\epsilon \ll 1$ olduğu düşünülürse, enine serbest modlar $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ mertebesinde alınarak çözüm fonksiyonları için önerilen (5.10) açılımında nonlineerliğin şiddeti arttırılmıştır.

Kritik durum civarında kompleks genlik fonksiyonlarının sağladığı evalüsyon denklemlerini bulmak için, (5.9) koordinat uzatmaları ve (5.10) asimptotik seri çözümleri, (3.9) alan denklemlerinde yazılırsa, $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ pertürbasyon parametresinin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilir. Her mertebede elde edilen pertürbasyon denklemleri çözülürse, kritik dalga sayısı civarında $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ birinci mertebe enine genlik fonksiyonları için kuple evolüsyon denklemleri elde edilir.

$\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ için elde edilen denklemler

$$\begin{aligned} e^{i\theta} : D_2(k, \omega) v_1^{(1)} &= 0, \\ D_2(k, \omega) w_1^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklindedir. Burada $D_2(k, \omega)$, (3.11)₂ ile verilen enine dalgalara ait dispersiyon bağıntısı olmak üzere ortamda yalnız enine dalgaların yayıldığı varsayıldığından, $v_1^{(1)} \neq 0$ ve $w_1^{(1)} \neq 0$ olup $D_2(k, \omega) = 0$ olmalıdır. Ayrıca, birinci merteye enine modların yüksek harmoniklerle etkileşimleri bu çalışmanın konusu olmadığından, $n \geq 2$ için $D_2(nk, n\omega) \neq 0$ kabul edilmiştir.

$\mathcal{O}(\epsilon)$ problemi için elde edilen denklemler ise

$$\begin{aligned} e^{2i\theta} : D_1(2k, 2\omega) u_2^{(2)} &= ik^3 \gamma_2 [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2], \\ D_2(2k, 2\omega) v_2^{(2)} &= 0, \\ D_2(2k, 2\omega) w_2^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklindedir. (5.12)₂ ve (5.12)₃ denlemlerinde $D_2(2k, 2\omega) \neq 0$ koşulu dikkate alındığında ikinci merteye enine dalga modlarının sıfır olduğu görülür:

$$v_2^{(2)} = 0, \quad w_2^{(2)} = 0.$$

Ayrıca, (5.12)₁ denkleminde de ikinci merteye boyuna dalga modunun birinci merteye enine dalga modları cinsinden ifade edilebildiği bulunur:

$$u_2^{(2)} = \frac{ik^3 \gamma_2}{D_1(2k, 2\omega)} [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]. \quad (5.13)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ problemi için elde edilen denklemlerin birinci ve üçüncü mod için aldığı formlar ise

$$\begin{aligned} e^{i\theta} : D_1(k, \omega) u_3^{(1)} &= 0, \\ -2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) v_{1,\xi}^{(1)} + D_2(k, \omega) v_3^{(1)} \\ &= \gamma_2 k^2 (-2ik v_1^{(1)*} u_2^{(2)} + v_1^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}) \\ &+ \gamma_5 k^4 [3|v_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)} + v_1^{(1)*} (w_1^{(1)})^2 + 2|w_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) w_{1,\xi}^{(1)} + D_2(k, \omega) w_3^{(1)} \\
& = \gamma_2 k^2 (-2ik w_1^{(1)*} u_2^{(2)} + w_1^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}) \\
& + \gamma_5 k^4 [3|w_1^{(1)}|^2 w_1^{(1)} + w_1^{(1)*} (v_1^{(1)})^2 + 2|v_1^{(1)}|^2 w_1^{(1)}], \\
e^{3i\theta} : & D_1(3k, 3\omega) u_3^{(3)} = 0, \\
& D_2(3k, 3\omega) v_3^{(3)} = 0, \\
& D_2(3k, 3\omega) w_3^{(3)} = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

şeklindedir. Burada $*$ ilgili bağımlı değişkenin kompleks eşleniğini göstermektedir. Boyuna dalgalara ait dispersiyon bağıntısı $D_1(k, \omega) \neq 0$ olduğundan, (5.14)₁ denkleminde üçüncü mertebede birinci modun genliği olan fonksiyon

$$u_3^{(1)} = 0$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $D_1(3k, 3\omega) \neq 0$ olduğundan, (5.14)₄ denkleminde

$$u_3^{(3)} = 0$$

olarak elde edilir. Enine dalgaların dispersiyon bağıntısı olan $D_2(3k, 3\omega) \neq 0$ olduğundan (5.14)₅ ve (5.14)₆ denklemlerinden

$$v_3^{(3)} = 0, \quad w_3^{(3)} = 0$$

sonuçları elde edilir. Enine dalgalara ait grup hızı

$$c_g = \frac{1}{\omega} (c_T^2 k + 8c_T^2 m^2 k^3)$$

olarak verildiğinden, (5.14)₂ denkleminin ilk teriminin katsayısı sıfırdır. Ayrıca $D_2(k, \omega)$ sıfıra eşit kabul edildiği için üçüncü mertebedeki birinci modun genliği olan $v_3^{(1)}$ keyfi bir fonksiyondur. Benzer şekilde, (5.14)₃ denklemindeki ilk terimin katsayısı sıfırdır ve $w_3^{(1)}$ fonksiyonu keyfi olur. Bu durumda (5.14)₂ ve (5.14)₃ denklemlerinden geriye kalan terimler

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 (-2ik v_1^{(1)*} u_2^{(2)} + v_1^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}) \\
& + \gamma_5 k^2 [3|v_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)} + v_1^{(1)*} (w_1^{(1)})^2 + 2|w_1^{(1)}|^2 v_1^{(1)}] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2(-2ikw_1^{(1)*}u_2^{(2)} + w_1^{(1)}u_{1,\xi}^{(0)}) \\ & + \gamma_5k^2[3|w_1^{(1)}|^2w_1^{(1)} + w_1^{(1)*}(v_1^{(1)})^2 + 2|v_1^{(1)}|^2w_1^{(1)}] = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

şeklinde. $u_2^{(2)}$ fonksiyonunun birinci merteye modlar cinsinden açık ifadesi, (5.13), bilinmesine rağmen, (5.15) denklemlerinin getirdiği kısıtlamaları elde etmek için yukarı merteye pertürbasyon denklemlerinden $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonunun hesaplanması gereği ortaya çıkar.

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ pertürbasyon probleminin her mod için ayrı ayrı çözümünden elde edilen denklemler ise

$$\begin{aligned} e^{i0} : \quad & u_{1,\xi}^{(0)} = \frac{k^2\gamma_2}{c_g^2 - c_L^2}(|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2), \\ e^{i\theta} : \quad & D_1(k, \omega) u_4^{(1)} = 0, \\ & D_2(k, \omega) v_4^{(1)} = 0, \\ & D_2(k, \omega) w_4^{(1)} = 0, \\ e^{2i\theta} : \quad & -4i(\omega c_g - c_L^2 k - 32c_T^2 m^2(1 + \nu)k^3) u_{2,\xi}^{(2)} + D_1(2k, 2\omega) u_4^{(2)} \\ & = \gamma_1[4k^2 u_{1,\xi}^{(0)} u_2^{(2)}] \\ & + \gamma_2 k^2 [3(v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)}) \\ & + 2ik(v_1^{(1)} v_3^{(1)} + w_1^{(1)} w_3^{(1)} - 3v_3^{(3)} v_1^{(1)*} + 3w_3^{(3)} w_1^{(1)*})] \\ & + 2\gamma_4 k^3 \{4k u_2^{(2)}(|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) + iu_{1,\xi}^{(0)}[(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]\}, \\ & D_2(2k, 2\omega) v_4^{(2)} = 0, \\ & D_2(2k, 2\omega) w_4^{(2)} = 0, \\ e^{4i\theta} : \quad & D_1(4k, 4\omega) u_4^{(4)} = \frac{-8ik^7\gamma_2}{D_1(2k, 2\omega)} \left(\frac{k^2\gamma_1\gamma_2}{D_1(2k, 2\omega)} + \gamma_4 \right) [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]^2, \\ & D_2(4k, 4\omega) v_4^{(4)} = 0, \\ & D_2(4k, 4\omega) w_4^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

olarak verilir. (5.16)₁ denklemi $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonunun birinci merteye keyfi enine dalga modları cinsinden yazılabileceğini göstermektedir. Ayrıca, $n \geq 1$ için boyuna $D_1(nk, n\omega)$ ve $m \geq 2$ için enine $D_2(mk, m\omega)$ dispersiyon bağıntılarının sıfırdan farklı olduğu göz önüne alınırsa, (5.16)₂, (5.16)₆, (5.16)₇,

(5.16)₉ ve (5.16)₁₀ denklemlerinden dördüncü mertebedeki birinci, ikinci ve dördüncü modlara ait genlik fonksiyonları

$$\begin{aligned} u_4^{(1)} &= 0, \\ v_4^{(2)} &= 0, \quad w_4^{(2)} = 0 \\ v_4^{(4)} &= 0, \quad w_4^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak elde edilir. Buna ilaveten $D_2(k, w)$ sıfıra eşit olduğu için $v_4^{(1)}$ ve $w_4^{(1)}$ keyfi fonksiyonlar olarak elde edilir.

(5.13) denkleminde verilen $u_2^{(2)}$ ve (5.16)₁ denkleminde elde edilen $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonları, (5.16)₅ denkleminde yazılırsa dördüncü mertebedeki ikinci boyuna dalga modu $u_4^{(2)}$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} u_4^{(2)} &= A_1(v_1^{(1)}v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)}w_{1,\xi}^{(1)}) + iA_2(v_1^{(1)}v_3^{(1)} + w_1^{(1)}w_3^{(1)}) \\ &\quad + iA_3(|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2)[(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. (5.18) denklemindeki katsayılar ise

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\gamma_2 k^2}{D_1(2k, 2\omega)} \left\{ 3 - \frac{8k[\omega c_g - c_L^2 k - 32c_T^2 m^2(1 + \nu)k^3]}{D_1(2k, 2\omega)} \right\}, \\ A_2 &= \frac{2\gamma_2 k^3}{D_1(2k, 2\omega)}, \\ A_3 &= \frac{4\gamma_2 k^5}{(c_g^2 - c_L^2)D_1(2k, 2\omega)} \left[\gamma_4 + \frac{\gamma_1 \gamma_2 k^2}{(c_g^2 - c_L^2)D_1(2k, 2\omega)} \right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır.

(5.15) denklemini ile verilen kısıtlamanın son halini elde etmek için, (5.13) denklemini ile verilen $u_2^{(2)}$ ve (5.16)₁ denkleminde elde edilen $u_{1,\xi}^{(0)}$ fonksiyonları, (5.15) denklemlerinde yerlerine yazılır ve denklemler düzenlenirse

$$\begin{aligned} k^4 \gamma_2^2 \left[\frac{4k^2}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \right] v_1^{(1)} [|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2] &= 0, \\ k^4 \gamma_2^2 \left[\frac{4k^2}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{1}{c_g^2 - c_L^2} \right] w_1^{(1)} [|w_1^{(1)}|^2 + |v_1^{(1)}|^2] &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 2\omega \delta v_1^{(1)} [|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2] &= 0, \\ 2\omega \delta w_1^{(1)} [|w_1^{(1)}|^2 + |v_1^{(1)}|^2] &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19) denkleminde görüldüğü gibi sıfır olmayan birinci mertebe enine dalga genliklerinin katsayısı, (5.6) kuple NLS denklemlerinin nonlinear teriminin katsayısı olup kritik dalga sayısı için sıfırdır ve (5.15) denklemi özdeş olarak sağlanır.

Son olarak $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ birinci mertebe enine dalga genliklerinin sağladığı evolüsyon denklemlerini elde etmek için, $\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{5}{2}})$ problemi birinci mod için çözümlürse

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} : \quad & 2i\omega v_{1,\tau}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) v_{1,\xi\xi}^{(1)} - 2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) v_{3,\xi}^{(1)} \\
& = \gamma_2 k [-2ik^2 v_3^{(1)*} u_2^{(2)} - 2ik^2 v_1^{(1)*} u_4^{(2)} + kv_1^{(1)} u_{2,\xi}^{(0)} - iv_1^{(1)} u_{1,\xi\xi}^{(0)} \\
& \quad - 3kv_1^{(1)*} u_{2,\xi}^{(2)} - 2iv_{1,\xi}^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)} + kv_3^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}] \\
& \quad + \gamma_4 k^2 [(u_{1,\xi}^{(0)})^2 v_1^{(1)} - 4iku_{1,\xi}^{(0)} u_2^{(2)} v_1^{(1)*} + 8k^2 |u_2^{(2)}|^2 v_1^{(1)}] \\
& \quad + \gamma_5 k^3 [3k(v_1^{(1)})^2 v_3^{(1)*} - 12i|v_1^{(1)}|^2 v_{1,\xi}^{(1)} + 6k|v_1^{(1)}|^2 v_3^{(1)} \\
& \quad + k(w_1^{(1)})^2 v_3^{(1)*} - 4i|w_1^{(1)}|^2 v_{1,\xi}^{(1)} + 2k|w_1^{(1)}|^2 v_3^{(1)} \\
& \quad + 2kv_1^{(1)} w_1^{(1)} w_3^{(1)*} - 4iv_1^{(1)*} w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)} + 2kv_1^{(1)*} w_1^{(1)} w_3^{(1)} \\
& \quad - 4iv_1^{(1)} w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)} + 2kv_1^{(1)} w_1^{(1)*} w_3^{(1)}], \\
& 2i\omega w_{1,\tau}^{(1)} - (c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2 m^2 k^2) w_{1,\xi\xi}^{(1)} - 2i(\omega c_g - c_T^2 k - 8c_T^2 m^2 k^3) w_{3,\xi}^{(1)} \\
& = \gamma_2 k [-2ik^2 w_3^{(1)*} u_2^{(2)} - 2ik^2 w_1^{(1)*} u_4^{(2)} + kw_1^{(1)} u_{2,\xi}^{(0)} - iw_1^{(1)} u_{1,\xi\xi}^{(0)} \\
& \quad - 3kw_1^{(1)*} u_{2,\xi}^{(2)} - 2iw_{1,\xi}^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)} + kw_3^{(1)} u_{1,\xi}^{(0)}] \\
& \quad + \gamma_4 k^2 [(u_{1,\xi}^{(0)})^2 w_1^{(1)} - 4iku_{1,\xi}^{(0)} u_2^{(2)} w_1^{(1)*} + 8k^2 |u_2^{(2)}|^2 w_1^{(1)}] \\
& \quad + \gamma_5 k^3 [3k(w_1^{(1)})^2 w_3^{(1)*} - 12i|w_1^{(1)}|^2 w_{1,\xi}^{(1)} + 6k|w_1^{(1)}|^2 w_3^{(1)} \\
& \quad + k(v_1^{(1)})^2 w_3^{(1)*} - 4i|v_1^{(1)}|^2 w_{1,\xi}^{(1)} + 2k|v_1^{(1)}|^2 w_3^{(1)} \\
& \quad + 2kw_1^{(1)} v_1^{(1)} v_3^{(1)*} - 4iw_1^{(1)*} v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)} + 2kw_1^{(1)*} v_1^{(1)} v_3^{(1)} \\
& \quad - 4iw_1^{(1)} v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + 2kw_1^{(1)} v_1^{(1)*} v_3^{(1)}] \tag{5.20}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Birinci mertebe enine modlar için elde edilen bu karmaşık ve uzun denklemler hala birinci ve ikinci mertebe boyuna modları ve üçüncü mertebe enine modları içermektedir. (5.20) denklemlerinde görülen $u_2^{(2)}$, $u_{1,\xi}^{(0)}$ ve $u_4^{(2)}$ gibi boyuna modların herbiri, $v_1^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$ birinci mertebe enine

modlar cinsinden ifade edilmişti. Yukarıda elde edilen bu sonuçların denkleme yazılması ve denklemlerin düzenlemesi doğrudan fakat çok karmaşık işlemlerin yapılmasını gerektirir. Ancak bu işlemler yapılsa dahi (5.20) denklemlerinde bu mertebeye kadar hesaplanmamış $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonu bulunmaktadır. Bu fonksiyonu düşük mertebe fonksiyonlar cinsinden ifade edebilmek için $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ pertürbasyon denklemleri ele alınmalıdır.

ϵ^3 mertebesindeki denklemlerden yalnız $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonu ile ilgili denklem gerekli olduğundan, bu mertebede yukarı modlardan elde edilecek denklemler ele alınmayacaktır. Gerçekten $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ denklemlerinden yalnız boyuna modla ilgili denklemin sıfırıncı moduna karşı gelen denklemden $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonunu elde etmek mümkün olur:

$$\begin{aligned}
e^{i0} : (c_g^2 - c_L^2) u_{2,\xi\xi}^{(0)} - 2c_g u_{1,\tau\xi}^{(0)} = & \gamma_1 (u_{1,\xi}^{(0)} u_{1,\xi\xi}^{(0)} + 4k^2 u_2^{(2)} u_{2,\xi}^{(2)*} + 4k^2 u_2^{(2)*} u_{2,\xi}^{(2)}) \\
& + \gamma_2 k^2 (v_1^{(1)*} v_{3,\xi}^{(1)} + v_{1,\xi}^{(1)*} v_3^{(1)} + v_1^{(1)} v_{3,\xi}^{(1)*} + v_{1,\xi}^{(1)} v_3^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_{3,\xi}^{(1)} \\
& + w_{1,\xi}^{(1)*} w_3^{(1)} + w_1^{(1)} w_{3,\xi}^{(1)*} + w_{1,\xi}^{(1)} w_3^{(1)*}) \\
& + i\gamma_2 k (v_1^{(1)} v_{1,\xi\xi}^{(1)*} - v_1^{(1)*} v_{1,\xi\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi\xi}^{(1)*} - w_1^{(1)*} w_{1,\xi\xi}^{(1)}) \\
& + 2\gamma_4 k^2 [u_{1,\xi\xi}^{(0)} (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) \\
& + u_{1,\xi}^{(0)} (v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)*})] \\
& - 2i\gamma_4 k^3 \{u_{2,\xi}^{(2)} [(v_1^{(1)*})^2 + (w_1^{(1)*})^2] + 2u_2^{(2)} (v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)*}) \\
& - u_{2,\xi}^{(2)*} [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2] - 2u_2^{(2)*} (v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)})\}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

$u_2^{(0)}$ fonksiyonunun ikinci mertebe uzay türevini içeren (5.21) denklemi düzenlenir ve ξ değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned}
(c_g^2 - c_L^2) u_{2,\xi}^{(0)} - 2c_g u_{1,\tau}^{(0)} = & \frac{\gamma_1}{2} [(u_{1,\xi}^{(0)})^2 + 8k^2 |u_2^{(2)}|^2] \\
& + \gamma_2 k [k(v_1^{(1)*} v_3^{(1)} + v_1^{(1)} v_3^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_3^{(1)} + w_1^{(1)} w_3^{(1)*}) \\
& i(v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)*} - v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)*} - w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)})] \\
& + 2\gamma_4 k^2 \{u_{1,\xi}^{(0)} (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) - iku_2^{(2)} [(v_1^{(1)*})^2 + (w_1^{(1)*})^2] \\
& + iku_2^{(2)*} [(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2]\} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.22) denkleminde $u_{1,\xi}^{(0)}$ ve $u_2^{(2)}$ fonksiyonları için elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa $u_{2,\xi}^{(0)}$ fonksiyonu birinci merteye enine modlar ve üçüncü merteye enine modlar cinsinden elde edilir:

$$\begin{aligned}
(c_g^2 - c_L^2) u_{2,\xi}^{(0)} = & 2c_g u_{1,\tau}^{(0)} + \gamma_2 k [i(v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)*} - v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)*} - w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)}) \\
& + k(v_1^{(1)*} v_3^{(1)} + v_1^{(1)} v_3^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_3^{(1)} + w_1^{(1)} w_3^{(1)*})] \\
& + k^4 \left[\frac{2\gamma_2 \gamma_4}{c_g^2 - c_L^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2^2}{2(c_g^2 - c_L^2)^2} \right] (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2)^2 \\
& + 4k^6 \left[\frac{\gamma_2 \gamma_4}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{\gamma_1 \gamma_2^2 k^2}{D_1^2(2k, 2\omega)} \right] |(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2|^2.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

(5.23) ifadesindeki $u_{1,\tau}^{(0)}$ fonksiyonu, (5.16)₁ denkleminin τ bağımsız değişkenine göre türevi alınarak ξ değişkenine göre integre edilmesi ile bulunur:

$$u_{1,\tau}^{(0)} = \frac{k^2 \gamma_2}{c_g^2 - c_L^2} \int \frac{\partial}{\partial \tau} (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) d\xi. \tag{5.24}$$

Bu sonuç (5.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(c_g^2 - c_L^2) u_{2,\xi}^{(0)} = & \gamma_2 k [i(v_1^{(1)} v_{1,\xi}^{(1)*} - v_1^{(1)*} v_{1,\xi}^{(1)} + w_1^{(1)} w_{1,\xi}^{(1)*} - w_1^{(1)*} w_{1,\xi}^{(1)}) \\
& + k(v_1^{(1)*} v_3^{(1)} + v_1^{(1)} v_3^{(1)*} + w_1^{(1)*} w_3^{(1)} + w_1^{(1)} w_3^{(1)*})] \\
& + k^4 \left[\frac{2\gamma_2 \gamma_4}{c_g^2 - c_L^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2^2}{2(c_g^2 - c_L^2)^2} \right] (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2)^2 \\
& + 4k^6 \left[\frac{\gamma_2 \gamma_4}{D_1(2k, 2\omega)} - \frac{\gamma_1 \gamma_2^2 k^2}{D_1^2(2k, 2\omega)} \right] |(v_1^{(1)})^2 + (w_1^{(1)})^2|^2 \\
& + \frac{2c_g k^2 \gamma_2}{c_g^2 - c_L^2} \int \frac{\partial}{\partial \tau} (|v_1^{(1)}|^2 + |w_1^{(1)}|^2) d\xi
\end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. Bu aşamada, ϵ^3 mertebesine kadar çözülen pertürbasyon denklemlerinden elde edilen $u_{1,\xi}^{(0)}$, $u_{2,\xi}^{(0)}$, $u_2^{(2)}$ ve $u_4^{(2)}$ fonksiyonlarının (5.20) denklemlerinde yazılıp denklemlerin düzenlenmesi ile enine modların sağladıkları kupl evo lüsyon denklemleri elde edilecektir. Doğrudan fakat uzun ve karmaşık işlemlerden sonra denklemler toparlanırsa, üçüncü merteye birinci modların, $v_3^{(1)}$ ve $w_1^{(1)}$, katsayılarının özdeş olarak sıfır olduğu bulunur. Böylece $\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{5}{2}})$ mertebesindeki uygunluk denklemleri, birinci merteye enine modların sağladığı integro-diferansiyel denklemlere dönüşür:

$$\begin{aligned}
& i\phi_\tau + p\phi_{\xi\xi} + iA\phi^*(\phi\phi_\xi + \psi\psi_\xi) + 5B\phi|\phi|^4 + 2B\phi^*\psi^2|\psi|^2 + 6B\phi|\phi|^2|\psi|^2 \\
& + 3B\phi^*\psi^2|\phi|^2 + B\phi^3(\psi^*)^2 + 3B\phi|\psi|^4 + C\phi \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|\phi|^2 + |\psi|^2)d\xi = 0, \\
& i\psi_\tau + p\psi_{\xi\xi} + iA\psi^*(\psi\psi_\xi + \phi\phi_\xi) + 5B\psi|\psi|^4 + 2B\psi^*\phi^2|\phi|^2 + 6B\psi|\psi|^2|\phi|^2 \\
& + 3B\psi^*\phi^2|\psi|^2 + B\psi^3(\phi^*)^2 + 3B\psi|\phi|^4 + C\psi \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|\psi|^2 + |\phi|^2)d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

(5.26) denklemlerinde uygunluk için $\phi \equiv v_1^{(1)}$ ve $\psi \equiv w_1^{(1)}$ tanımları kullanılmış ve denklemlerdeki terimlerin katsayıları ise

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2\omega}(c_g^2 - c_T^2 - 24c_T^2m^2k^2), \\
A &= -\frac{4\gamma_2^2 k^5}{2\omega D_1^2(2k, 2\omega)}[D_1(2k, 2\omega) - 4k(\omega c_g - c_L^2k - 32c_T^2m^2(1 + \nu)k^3)], \\
\alpha_1 &= -\frac{\gamma_2^2\gamma_4 k^{10}}{D_1^2(2k, 2\omega)}, \\
\alpha_2 &= -\frac{\gamma_1\gamma_2^3 k^{12}}{D_1^3(2k, 2\omega)}, \\
B &= 24\alpha_1 + 16\alpha_2, \\
C &= -\frac{2\gamma_2 k^2}{(c_g^2 - c_L^2)}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. (5.26) denklemlerini daha basit bir formda yazabilmek için denklemleri dairesel olarak polarize olmuş dalgalar cinsinden ifade etmek uygun olabilir. Bunun için, u' ve v' dairesel polarize olmuş dalgaların genlikleri olmak üzere

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - i\psi), \quad v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + i\psi) \tag{5.27}$$

tanımları yapılır. Bu tanımla $|\phi|^2 + |\psi|^2 = |u|^2 + |v|^2$ ilişkilerinin sağlandığına dikkat edilmelidir. Bu durumda (5.26) denklemleri yeni bağımsız değişkenler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir (gösterim kolaylığı nedeniyle üsler ihmal edilmiştir):

$$\begin{aligned}
& i(u_\tau + v_\tau) + p(u_{\xi\xi} + v_{\xi\xi}) + iA(uv^*v_\xi + vu^*u_\xi + |u|^2v_\xi + |v|^2u_\xi) \\
& + B(2u|u|^4 + 2v|v|^4 + 12v|u|^2|v|^2 + 12u|u|^2|v|^2 + 6u|v|^4 + 6v|u|^4) \\
& + C(u + v) \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|u|^2 + |v|^2)d\xi = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (u_\tau - v_\tau) - ip(u_{\xi\xi} - v_{\xi\xi}) - A(u^*vu_\xi - uv^*v_\xi + |u|^2v_\xi - |v|^2u_\xi) \\
& - iB(2u|u|^4 - 2v|v|^4 - 12v|u|^2|v|^2 + 12u|u|^2|v|^2 + 6u|v|^4 - 6v|u|^4) \\
& - iC(u - v) \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|v|^2 + |u|^2)d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.28) denklemlerini u ve v fonksiyonlarının sağladığı denklemler şeklinde yazmak için basit cebirsel işlemlere gerek vardır. Buna göre (5.28)₂ denklemi i sayısı ile çarpılır ve elde edilen denklemler (5.28)₁ denklemi ile taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa dairesel polarize olmuş u ve v dalga genlik fonksiyonlarının sağladığı integro-diferansiyel denklemler bulunur:

$$\begin{aligned}
& iu_\tau + pu_{\xi\xi} + iA(uv^*v_\xi + |v|^2u_\xi) \\
& + 2B(u|u|^4 + 6u|u|^2|v|^2 + 3u|v|^4 + Cu \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|u|^2 + |v|^2)d\xi = 0, \\
& iv_\tau + pv_{\xi\xi} + iA(u^*vu_\xi + |u|^2v_\xi) \\
& + 2B(v|v|^4 + 6v|u|^2|v|^2 + 3v|u|^4) + Cv \int \frac{\partial}{\partial\tau}(|v|^2 + |u|^2)d\xi = 0.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

(5.29) denklemlerinin (5.26) denklemleri ile karşılaştırılması yeni denklemlerin formunun lineer polarize olmuş dalgalara göre daha basit olduğu sonucunu verir. Bu aşamada dairesel polarize olmuş dalgaların sağladığı (5.29) denklemlerinden integral terimleri yok ederek evölüsyon denklemlerini daha basit bir formda ifade etmek mümkün görünmektedir. Gerçekten (5.29)₁ denklemi u^* ile çarpılıp elde edilen denklem kompleks eşleğinden çıkarılırsa $(|u|^2)_\tau$ fonksiyonu

$$i(|u|^2)_\tau = -p(u^*u_\xi - uu_\xi^*) - iA(|v|^2|u|^2)_\xi \tag{5.30}$$

olarak elde edilir. Benzer bir işlem (5.29)₂ denklemi için de yapılırsa

$$i(|v|^2)_\tau = -p(v^*v_\xi - vv_\xi^*) - iA(|v|^2|u|^2)_\xi \tag{5.31}$$

bulunur. (5.30) ve (5.31) denklemlerinden ise

$$\int \frac{\partial}{\partial\tau}(|u|^2 + |v|^2)d\xi = ip(u^*u_\xi - uu_\xi^* + v^*v_\xi - vv_\xi^*) - 2A|u|^2|v|^2 \tag{5.32}$$

bulunur. (5.32) ifadesi (5.29) integro-diferansiyel denklemlerinde yerine yazılırsa integral terimleri düşer ve u ve v dairesel polarize olmuş dalgaların sağladığı

beşinci mertebe nonlinear terimleri de içeren denklemler

$$\begin{aligned}
& iu_\tau + pu_{\xi\xi} + i[pC(|u|^2u_\xi - u^2u_\xi^*) + A|v|^2u_\xi + (A + pC)uv^*v_\xi - pCuvv_\xi^*] \\
& + 2Bu|u|^4 + (12B - 2AC)u|u|^2|v|^2 + 6Bu|v|^4 = 0, \\
& iv_\tau + pv_{\xi\xi} + i[pC(|v|^2v_\xi - v^2v_\xi^*) + A|u|^2v_\xi + (A + pC)vu^*u_\xi - pCvuu_\xi^*] \\
& + 2Bv|v|^4 + (12B - 2AC)v|v|^2|u|^2 + 6Bv|u|^4 = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

şeklini alır. Sonuç olarak, marjinal durum civarında zayıf nonlinear ve zayıf dispersif elastik bir ortamda yayılan modüle olmuş enine dalgaların hareketi kuple genelleştirilmiş NLS (GNLS) denklemleri ile karakterize edilebildiği gösterilmiş olur.

(5.33) denkleminde enine modlardan sıfır olarak alınır, $v \equiv 0$, kuple GNLS denklemleri form olarak literatürde mevcut olan tek GNLS denklemine indirgenir:

$$iu_\tau + pu_{\xi\xi} + ipC(|u|^2u_\xi - u^2u_\xi^*) + 2Bu|u|^4 = 0. \tag{5.34}$$

(5.33) ve (5.34) denklemlerinden de görüldüğü gibi evolüsyon denklemlerinin kuple olması iki enine mod arasındaki etkileşim terimlerinin karmaşık bir yapıya sahip olmasına yol açmaktadır. Diğer bir deyişle, marjinal durum civarında ortamda iki serbest mod mevcut ise kuple GNLS denklemleri tek GNLS denklemine göre daha karmaşık olmaktadır.

Yakın zamandaki bir çalışmada [35], kuple GNLS denklemlerinin özel bir hali olan ve

$$\begin{aligned}
& iu_t + u_{xx} - 2u^2v + 2\beta^2u^3v^2 + 4i\beta(uv)_xu = 0, \\
& iv_t - v_{xx} - 2uv^2 + 2\beta^2v^3u^2 + 4i\beta(uv)_xv = 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

şeklinde alınan denklemlerin Darboux dönüşümü yardımı soliton çözümü verilmiştir. Ancak (5.35) kuple denklemleri $v = \epsilon v^*$ tanımlaması ile tek GNLS denklemine indirgendiğinden, bulunan soliton çözümlerinin tek GNLS denkleminin çözümü olduğunu söylemek yanlış olmaz.

5.3 Bazı Özel Çözümler

Genelleştirilmiş NLS denklemlerinin özel çözümleri ile ilgili birçok çalışma literatürde mevcuttur. Kundu'nun [36] çalışmasında tek bir GNLS denklemi bir ayar dönüşümü kullanılarak katsayıları özel formda olan bir GNLS denkleme dönüştürülmüş ve daha sonra denklemin gezen dalga çözümleri verilmiştir. Başka bir çalışmada Clarkson [37], Kruskal ve kendisinin geliştirdiği direkt metot olarak adlandırılan bir yöntemi kullanarak GNLS denkleminin bazı özel çözümlerini vermiştir.

Bu bölümde, Kundu'nun [36] tek GNLS denklemlerinin gezen dalga çözümlerini bulmak için kullandığı yöntem (5.33) kuple GNLS denklemlerinin gezen dalga çözümlerini bulmak için kullanılacaktır. İşlem kolaylığı sağlaması bakımından (5.33) denklemlerinde $p = 1$ olarak ele alınacaktır.

$f(\zeta)$ ve $g(\zeta)$ daha sonra belirlenecek reel fonksiyonlar olmak üzere (5.33) denklemlerine

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= f(\zeta) \exp[ig(\zeta)], \\ v(\xi, \tau) &= f(\zeta) \exp[ig(\zeta)] \end{aligned} \quad (5.36)$$

şeklinde çözüm olarak önerelim. Burada, b sabit ve $\zeta = \xi - b\tau$ olarak tanımlanmıştır. (5.36) çözümlerini (5.33) denklemlerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} -ibf' + bfg' + f'' + 2if'g' + ifg'' - f(g')^2 - 2(A + 2C)f^3g' \\ + (20B - 2AC)f^5 + 2iAf^2f' = 0, \\ -ibf' + bfg' + f'' + 2if'g' + ifg'' - f(g')^2 - 2(A + 2C)f^3g' \\ + (20B - 2AC)f^5 + 2iAf^2f' = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

denklemleri elde edilir. (5.37) denklemlerine $'$, ζ değişkenine göre türevi göstermektedir. Ayrıca, (5.37) ile verilen iki denklem birbirine eşit olduğu için, (5.33) sistemi tek bir denkleme indirgenir. (5.36) ile önerilen ifadelerin çözüm olması için (5.37) denklemlerinin reel ve imajiner kısımlarının sıfıra eşit olması gerekir:

$$f'' + bfg' - f(g')^2 + (20B - 2AC)f^5 - 2(A + 2C)f^3g' = 0,$$

$$fg'' + 2f'g' - bf' + 2Af^2f' = 0. \quad (5.38)$$

(5.38)₂ denklemi f' ile çarpılıp ζ değişkenine göre integre edilirse g için

$$g' = \frac{b}{2} - \frac{A}{2}f^2 \quad (5.39)$$

ifadesi elde edilir. Bu sonuç (5.38)₁ denkleminde kullanılırsa, $f(\zeta)$ fonksiyonunun sağladığı

$$f'' + \left(\frac{A^2B}{4} + 20B\right)f^5 - b(A + 2C)f^3 + \frac{b^2}{4}f = 0 \quad (5.40)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (5.40) denklemi f' ile çarpılıp elde edilen denklem ζ değişkenine göre integre edilirse

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}A^2 + 20B\right)f^6 - \frac{b}{4}(A + 2C)f^4 + \frac{b^2}{8}f^2 + E = 0 \quad (5.41)$$

birinci mertebe diferansiyel denklemi elde edilir. Burada E integral sabitidir. (5.41) denkleminin genel çözümü Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden verilebilir. Ancak bu çalışmada Jacobi fonksiyonlarının özel hali olan bazı fonksiyonlar cinsinden çözümler ifade edilecektir. Bu nedenle $\zeta \rightarrow \infty$ için çözüm fonksiyonu f ve türevlerinin sıfıra gittikleri kabul edilerek integrasyon sabiti E sıfıra eşit alınacaktır.

(5.41) denkleminde $z = f^2$ tanımı yapılırsa denklem z fonksiyonu cinsinden

$$(z')^2 = -(A^2 + \frac{80}{3}B)z^4 + 2b(A + 2C)z^3 - b^2z^2 \quad (5.42)$$

şeklini alır. (5.42) denklemindeki z^4 teriminin katsayısı sağ tarafındaki dördüncü derece polinomun dominant davranışını belirlemektedir. Açık formu bilinmeyen bu katsayının işaretine göre (5.42) denkleminin çözümleri üç ayrı durum için incelemek mümkündür.

a) (5.42) denkleminde dominant davranışı belirleyen z^4 katsayısının, $A^2 + 80/3B$, negatif olması durumunda (5.42) denklemi

$$z'^2 = qz^2(z^2 + \beta z + \gamma)$$

şeklinde yazılabilir. Burada denklemin katsayıları

$$q = -(A^2 + \frac{80}{3}B), \quad \beta = -\frac{2b(A + 2C)}{A^2 + \frac{80}{3}B}, \quad \gamma = \frac{b^2}{A^2 + \frac{80}{3}b}$$

olarak tanımlanmıştır. z^2 fonksiyonu reel bir fonksiyon olarak tanımlandığından $(z')^2 > 0$ olmalıdır. Ayrıca $z^2 + \beta z + \gamma$ ikinci derece polinomun kökleri z_1 ve z_2 olarak alınıp yukarıdaki diferansiyel denklemin sağ tarafındaki ifadenin köklerinin arasında $z_1 > z_2 > z > z_3 = z_4 = 0$ bir sıralama olduğu kabul edilirse

$$\frac{dz}{d\zeta} = \sqrt{qz^2(z^2 + \beta z + \gamma)}$$

diferansiyel denkleminin çözümü integral tabloları kullanılarak

$$\int_z^{z_2} \frac{dz}{z\sqrt{(z_1 - z)(z_2 - z)}} = \bar{g} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) = \sqrt{q}\zeta \quad (5.43)$$

bulunur [38]. (5.43) denklemindeki büyüklükler

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{2}{\sqrt{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}} = \frac{2}{\sqrt{z_1 z_2}}, \\ k^2 &= \frac{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = 1, \\ \sin \varphi &= \sqrt{\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z)}} = \sqrt{\frac{z_1(z_2 - z)}{z_2(z_1 - z)}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $\operatorname{sn}^{-1}(y, k)$ Jacobi eliptik fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\operatorname{sn}^{-1}(y, k) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \quad (5.45)$$

$k = 1$ özel durumu için

$$\operatorname{sn}^{-1}(y, 1) = \operatorname{artanh} y \quad (5.46)$$

sonucu elde edilir. (5.44) ve (5.46) ifadeleri (5.43) denkleminde yerlerine yazılırsa z fonksiyonu

$$z = \frac{z_1 z_2 (1 - \tanh^2 \chi)}{z_1 - z_2 \tanh^2 \chi} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_1 - z_2) \sinh^2 \chi} \quad (5.47)$$

olarak elde edilir. (5.47) denkleminde $\chi = \sqrt{q}\zeta/g$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu sonuç (5.39) denkleminde yazılır ve denklem ζ değişkenine göre integre edilirse

$$g = \frac{b}{2}\zeta - A\left(\frac{z_1 z_2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{z_1 + (z_1 - z_2) \sinh^2 u} \quad (5.48)$$

elde edilir. (5.48) denklemindeki integral elemanter fonksiyonlar cinsinden hesaplanırsa kuple GNLS denklemlerinin yalnız dalga formundaki özel bir çözümü

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_1 - z_2) \sinh^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\ v(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_1 - z_2) \sinh^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\ g(\xi - b\tau) &= \frac{b}{2}(\xi - b\tau) - \frac{A}{\sqrt{q}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{q z_1 z_2} (\xi - b\tau) \right) \right), \\ \chi &= \frac{1}{2} \sqrt{q z_1 z_2} (\xi - b\tau) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

b) (5.42) denkleminde dominant davranışı belirleyen z^4 katsayısının, $A^2 + 80/3B$, pozitif olması durumunda (5.42) denklemi

$$z'^2 = qz^2(-z^2 + \beta z + \gamma)$$

şeklinde yazılabilir. Burada denklemin katsayıları

$$q = A^2 + \frac{80}{3}B, \quad \beta = \frac{2b(A + 2C)}{A^2 + \frac{80}{3}B}, \quad \gamma = -\frac{b^2}{A^2 + \frac{80}{3}B}$$

olarak tanımlanmıştır. z^2 fonksiyonu reel bir fonksiyon olarak tanımlandığından $(z')^2 > 0$ olmalıdır. Ayrıca $-z^2 + \beta z + \gamma$ ikinci derece polinomun kökleri z_1 ve z_2 olarak alınıp yukarıdaki diferansiyel denklemin sağ tarafındaki ifadenin köklerinin arasında $z_1 > z > z_2 > z_3 = z_4 = 0$ şeklinde bir sıralama olduğu kabul edilirse

$$\frac{dz}{d\zeta} = \sqrt{qz^2(-z^2 + \beta z + \gamma)}$$

diferansiyel denkleminin çözümü integral tabloları kullanılarak

$$\int_z^{z_1} \frac{dz}{z\sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)}} = \bar{g} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) = \sqrt{q}\zeta \quad (5.49)$$

bulunur [38]. (5.49) denklemindeki büyüklükler

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \frac{2}{\sqrt{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}} = \frac{2}{\sqrt{z_1 z_2}}, \\ k^2 &= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = 0, \\ \sin \varphi &= \sqrt{\frac{(z_2 - z_4)(z_1 - z)}{(z_1 - z_2)(z - z_4)}} = \sqrt{\frac{z_2(z_1 - z)}{z(z_1 - z_2)}}\end{aligned}\quad (5.50)$$

şeklinde tanımlanmıştır [38]. $k = 0$ özel durumunda $\text{sn}^{-1}(y, k)$ Jacobi eliptik fonksiyonu

$$\text{sn}^{-1}(y, 0) = \arcsin y \quad (5.51)$$

şeklindeki elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. (5.50) ve (5.51) ifadeleri (5.49) eşitliğinde yerlerine yazıldığında z fonksiyonunu

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_2 + (z_1 - z_2) \sin^2 \chi} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_2 - z_1) \cos^2 \chi} \quad (5.52)$$

elde edilir. (5.52) denkleminde $\chi = \sqrt{q}\zeta/g$ olarak şeklinde tanımlanmıştır. Bu sonuç (5.39) denkleminde yazılır ve ζ değişkenine göre integre edilirse, g için

$$g = \frac{b}{2}\zeta - A\left(\frac{z_1 z_2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{z_1 + (z_2 - z_1) \cos^2 u} \quad (5.53)$$

çözümü elde edilir. (5.53) denklemindeki integral kolaylıkla elemanter fonksiyonlar cinsinden hesaplanabilir. Böylece kuple GNLS denklemlerinin periyodik özel bir çözümü

$$\begin{aligned}u(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_2 - z_1) \cos^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\ v(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_1 + (z_2 - z_1) \cos^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\ g(\xi - b\tau) &= \frac{b}{2}(\xi - b\tau) - \frac{A}{\sqrt{q}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{z_1}{z_2}} \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{q z_1 z_2} (\xi - b\tau) \right) \right), \\ \chi &= \frac{1}{2} \sqrt{q z_1 z_2} (\xi - b\tau)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

c) Son olarak (5.42) denkleminde dominant davranışı belirleyen $A^2 + 80/3B$ katsayısının pozitif olduğunu varsayalım. Bu durumda q , β ve γ katsayıları

için, ikinci özel durumda yapılan tanımlar geçerli olacaktır. Böylece (5.42) denklemi

$$z'^2 = qz^2(-z^2 + \beta z + \gamma) \quad (5.54)$$

formunu koruyacaktır. (5.54) denkleminin reel çözümleri ile ilgili olduğumuzdan $(z')^2 > 0$ olmalıdır. Bu kez $-z^2 + \beta z + \gamma$ ikinci derece polinomun kökleri olan z_1 ve z_2 için sıralamayı ikinci durum için olandan farklı olarak $z_1 > z > z_3 = z_4 = 0 > z_2$ şeklinde olduğunu varsayalım. O zaman

$$\frac{dz}{d\zeta} = \sqrt{qz^2(-z^2 + \beta z + \gamma)}$$

diferansiyel denkleminin çözümü integral tabloları yardımı ile

$$\int_z^{z_1} \frac{dz}{z\sqrt{(z_1 - z)(z - z_2)}} = \bar{g} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) = \sqrt{q}\zeta \quad (5.55)$$

olarak bulunur [38]. (5.55) denklemindeki ifadeler

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{2}{\sqrt{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}} = \frac{2}{\sqrt{-z_1 z_2}}, \\ k^2 &= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = 1, \\ \sin \varphi &= \sqrt{\frac{(z_2 - z_4)(z_1 - z)}{(z_1 - z_2)(z - z_4)}} = \sqrt{\frac{z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_2)}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, Jacobi eliptik fonksiyonu $k = 1$ durumunda

$$\operatorname{sn}^{-1}(y, 1) = \tanh^2 y \quad (5.57)$$

şeklindeki elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. (5.56) ve (5.57) ifadelerini (5.55) eşitliğinde yerlerine yazıldığında z fonksiyonunu

$$z = \frac{z_1 z_2 (1 - \tanh^2 \chi)}{z_2 - z_1 \tanh^2 \chi} = \frac{z_1 z_2}{z_2 + (z_2 - z_1) \sinh^2 \chi}$$

olarak elde edilir. Burada $\chi = \sqrt{q}\zeta/g$ olarak tanımlanmıştır. Bu sonuç (5.39) denkleminde yazılır ve ζ değişkenine göre integre edilirse, g için

$$g = \frac{b}{2}\zeta - A\left(\frac{-z_1 z_2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{z_2 + (z_2 - z_1) \sinh^2 u} \quad (5.58)$$

bulunur. (5.58) denklemindeki integral kolaylıkla elemanter fonksiyonlar cinsinden hesaplanabilir. Buradan kuple GNLS denklemlerinin yalnız dalga şeklindeki özel bir çözümü

$$\begin{aligned}
u(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_2 + (z_2 - z_1) \sinh^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\
v(\xi, \tau) &= \left(\frac{z_1 z_2}{z_2 + (z_2 - z_1) \sinh^2 \chi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{ig(\xi - b\tau)}, \\
g(\xi - b\tau) &= \frac{b}{2}(\xi - b\tau) + \frac{A}{\sqrt{q}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{-z_1}{z_2}} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{-q z_1 z_2} (\xi - b\tau) \right) \right), \\
\chi &= \frac{1}{2} \sqrt{-q z_1 z_2} (\xi - b\tau)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada zayıf dispersif ve zayıf nonlinear etkileri içeren sonsuz, homojen genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan modüle olmuş enine dalgaların uzun zaman davranışı çok ölçekli bir pertürbasyon tekniği kullanılarak incelenmiştir. Özel olarak yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin ortamda yayılan dalgaların hareketini nasıl etkilediği araştırılmış ve iki farklı durum için enine dalgaların hareketini karakterize eden kuple evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Bu çalışma, elde edilen esas sonuçlara göre iki bölümden oluşmuştur.

İlk olarak yukarıda bahsi geçen genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan $(1+1)$ boyutlu enine dalgalara, yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin katkısı araştırılmıştır. Enine dalgaların uzak alan davranışını karakterize eden ikinci mertebe etkileri de içeren kuple evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemlerin, özellikle nonlinear optikte yaygın uygulama alanı bulan benzer formdaki denklemlerden daha genel bir yapıda olduğu gözlenmiştir. Bu sonucun göz önüne alınan elastik ortamda hareketi karakterize eden yerdeğiştirme vektör alanının bileşenleri arasındaki karmaşık kuplajdan olduğunu söylemek çok yanlış olmaz. Ayrıca Kuple Yüksek Mertebe Nonlinear Schrödinger denklemleri olarak adlandırılan bu denklemlere sech ve tanh tipinde çözümler verilmiştir. Kuple Yüksek Mertebe Nonlinear Schrödinger denklemlerinin sech ve tanh tipindeki yalnız dalga çözümleri için dispersif terimin katsayısının işaretine, tek NLS denkleminde farklı olarak, herhangi bir kısıtlama gelmediği gözlenmiştir. Böylece çok hızlı dalgaların hareketini veren Yüksek Mertebe NLS denklemlerinin de zarfı sech ve tanh şeklinde olan yalnız dalga çözümlerinin olabileceği gözlenmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, aynı ortamda yayılan enine dalgaların modülasyonu problemi marjinal durumda incelenmiştir. İlk olarak enine dalga hareketini birinci mertebeye kadar karakterize eden kuple nonlinear Schrödinger denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen kuple NLS denklemlerinde nonlinear terimin katsayısı $4k^2(c_g^2 - c_L^2) = D_1(2k, 2\omega)$ kısıtlaması için sıfır olduğu gözlenmiştir. Diğer bir deyişle kuple NLS denklemlerindeki nonlinear terimlerin katsayılarının bazı k dalga sayıları için sıfır olduğu marjinal durum civarında kuple NLS denklemlerinin geçerli olmaktan çıktığı gözlenmiştir. Bu durumda enine dalga hareketini marjinal durum civarında karakterize eden evolüsyon denklemlerini bulmak için pertürbasyon açılımındaki nonlinearliğin etkisi arttırılmıştır. Enine dalgaların marjinal durum civarında uzak alan davranışını karakterize eden ve beşinci mertebe nonlinear etkileri içeren kuple geliştirilmiş NLS denklemleri elde edilmiştir. Dairesel polarize olmuş dalgalar cinsinden ifade edilen kuple denklemlerin, daha önce tek NLS denkleminin marjinal durumu civarında elde edilen geliştirilmiş NLS denkleminin iki kuple denkleme genişletilmiş hali olduğu gözlenmiş ve enine dalga modlarından birinin ihmal edilmesi durumunda iki denklemin form olarak aynı olduğu bulunmuştur. Ayrıca kuple geliştirilmiş NLS denklemlerinin de yalnız dalga ve periyodik çözümleri elde edilmiştir.

Bu aşamada, farklı iki durumda yüksek mertebe nonlinear ve dispersif etkilerin katkılarını gösteren ve bu tez çalışmasının esas katkısı olan kuple YMNLS ve kuple GNLS denklemlerinin özelliklerinin incelenmesi, denklemlerin sayısal çözümlerinin araştırılması ilgi çekici görünmektedir. Teknolojik uygulama bulması nedeniyle kuple YMNLS denklemlerinin özel çözümleri, integre edilebilirliği gibi özellikleri birçok araştırmacı tarafından incelenmesine rağmen, kuple GNLS denklemleri için böyle durum söz konusu değildir. Literatürde henüz mevcut olmayan kuple GNLS denklemlerinin analitik ve sayısal metotlarla incelenmesi gelecekte yürütülecek çalışmaların konusu olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Jeffrey, A., Kawahara, T., 1982. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory. Pitman, London.
- [2] Taniuti, T., Nishihara, K., 1983. Nonlinear Waves. Pitman, London.
- [3] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D., and Morris, H.C., 1982. Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic Press, London.
- [4] Toda, M., 1989. Nonlinear Waves and Solitons, Kluwer, Dordrecht.
- [5] Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Hasegawa, A., 1989. Optical Solitons in Fibers, Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Jeffrey, A., Engelbrecht, J.(Eds.), 1994. Nonlinear Waves in Solids, Springer-Verlag, New York
- [8] Engelbrecht, J., 1997. Nonlinear Wave Dynamics, Complexity and Simplicity. Kluwer, Dordrecht.
- [9] Maugin, G.A., 1999. Nonlinear Waves in Elastic Crystals. Oxford University Press, New York.
- [10] Hasegawa, A., Tappert, F., 1973. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion and II. Normal dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 142-144, 171-172.
- [11] Erbay, S., Erbay, H.A., Dost, S., 1991. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media-I. Longitudinal waves, *Int. J. Engng. Sci.*, **29**, 845-858.
- [12] Newbould, G.K., Parker, D.F., Faulkner, T.R., 1989. Coupled nonlinear Schrödinger equations arising in the study of monomode step-index optical fibers. *J. Math. Phys.*, **30**, 930-936.
- [13] Erbay, H.A., Erbay, S., Dost, S., 1991. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media-II. Transverse waves, *Int. J. Engng. Sci.*, **29**, 859-868.
- [14] Kodama, Y., 1985. Optical solitons in a monomode fiber. *J. Stat. Phys.*, **39**, 597-614.

- [15] **Kodama, Y., Hasegawa, A.**, 1987. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *IEEE J. Quant. Elect.*, **QE-23**, 510-524.
- [16] **Taniuti, T.**, 1974. Reductive perturbation method and far fields of wave equations. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **55**, 1.
- [17] **Hirota, R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. *J. Math. Phys.*, **14**, 805-814.
- [18] **Porsezian, K., Sundaram, P.S., Mahalingam, A.**, 1994. Coupled higher- order nonlinear Schrödinger equations in nonlinear optics: Painlevé analysis and integrability. *Phy. Rev.*, **E50**, 1543-1547.
- [19] **Park, Q-H., Shin, H.J., Kim, J.**, 1999. Integrable coupling of optical waves in higher-order nonlinear Schrödinger equations. *Phys. Lett.*, **A263**, 91-97.
- [20] **Johnson, R. S.**, 1977. On the modulation of water waves in the neighborhood of $kh \simeq 1.363$, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 357**, 131-141.
- [21] **Kakutani, T., Michihiro, K.**, 1983. Marginal state of modulational instability – Note on Benjamin-Feir Instability–, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**, 4129-4137
- [22] **Erbay, S.**, 1995. Modulation of waves near the marginal state of instability in fluid-filled distensible tubes, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28** , 2905-2919.
- [23] **Parkes, E.J.**, 1987. The modulation of weakly non-linear dispersive waves near the marginal state of instability, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20** , 2025-2036.
- [24] **Eringen, A.C., Suhubi, E.S.**, 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids -I, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 189-203.
- [25] **Suhubi, E.S., Eringen, A.C.**, 1964. Nonlinear theory of micro-elastic solids -II, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 389-404.
- [26] **Eringen, A.C.**, 1968. Micropolar Elasticity, in *Fracture, An advanced treatise, in mathematical fundamentals*, Ed. H. Liebowitz), **2**, Academic press, New York.
- [27] **Erofeyev, V.I., Potapov, A.I.**, 1989. Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure, in *Nonlinear World*, pp. 1197-1215, Ed. Bar'yakhtar, V.G., et. al. World Scientific, Singapore.
- [28] **Erofeyev, V.I., Potapov, A.I.**, 1993. Longitudinal strain waves in non-linearly- elastic media with couple stresses, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **28**, 483-488.

- [29] Mollenauer, L.F., Stolen, R.H., Gordon, J.P., 1980. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1095-1098.
- [30] Potasek, M.J., Tabor, M., 1991. Exact solutions for the extended nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett.*, **A 154**, 449-452.
- [31] Frantzeskakis, D.J., 1996. Small-amplitude solitary structures for an extended nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 3631-3639.
- [32] Tasgal, R.S., Potasek, M.J., 1992. Soliton solutions to coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.*, **33**, 1208-1215.
- [33] Liu, S.L., Wang, W.Z., 1994. Exact N-soliton solutions of the extended nonlinear Schrödinger equation, 1994. *Phys. Rev.*, **E 49**, 5726-5730.
- [34] Radhakrishnan, R., Lakshmanan, M., 1996. Exact soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations with higher-order effects, *Phys. Rev. E* **54**, 2949-2955.
- [35] Geng, X, Tam, H-W., 1999. Darboux transformation and soliton solutions for generalized nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. Soc. Japan*, **68**, 1508-1512.
- [36] Kundu, A., 1987. Exact solutions to higher-order nonlinear equations through gauge transformation, *Physica* , **25D**, 399-406.
- [37] Clarkson, P.A., 1992. Dimensional reductions and exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*, **5**, 453-472.
- [38] Byrd, P.F., Friedman, M.D., 1954. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

İrma Hacınlıyan, 1976 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Özel Feriköy İlköğretim okulunda, lise eğitimini Beyoğlu Teknik Lisesi Bilgisayar Bölümünde, yüksek öğrenimini ise 1994-1998 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde tamamladı. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Yüksek okulunda bir yıl İngilizce hazırlık sınıfında okuduktan sonra, Matematik Bölümü'nde lisans üstü eğitimine başladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı, halen bu göreve devam etmektedir.

