

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**POISSON DENKLEMİ İÇİN TERS KAYNAK
PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE YAPAY SİNİR AĞLARI
İLE BİR YAKLAŞIM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Müh. Melek YILMAZ
(304001001)**

152198

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Aralık 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ocak 2004**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Melih GEÇKİNLİ
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Hasan SAYGIN
Doç.Dr. Coşkun SÖNMEZ**

Melih Geçkinli.
H. Saygin
Coşkun Sönmez

OCAK 2004

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında , Poisson denklemi için ters kaynak probleminin çözümüne yapay sinir ağları ile bir yaklaşım yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının her safhasında, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Melih GEÇKİNLİ'ye en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan çalışma arkadaşım sayın Öğr.Gör. Metin ŞENGÜL'e de teşekkür ederim.

Beni yetiştiren anne ve babama, her zaman yanımda olan ve benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan sevgili anneanneciğime sonsuz teşekkürler.

Ocak 2004

Melek YILMAZ

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ VE ÇALIŞMANIN AMACI	1
1.1. Giriş	1
1.2. Amaç	3
2. TEMEL BİLGİLER VE UYGULAMALARI	6
2.1. Ters Isı Geçişi Problemi	6
2.1.1. Ters Isı Geçişi Problemi ile İlgili Temel Bilgiler	6
2.1.2. Bir Boyutlu Ters Isı Geçişi Problemi'nin Matematiksel İfadesi	7
2.1.3. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Uygulama Alanları	10
2.1.4. Fizyolojik Elektriksel Kaynak Görüntüleme (ESI)	11
2.2. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Çözüm Yöntemleri	14
2.2.1. Klasik Optimizasyon Yöntemleri	14
2.3. Literatürdeki Uygulamalar	15
2.4. Ters Problem Çözümündeki Zorluklar	16
3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	21
3.1. Giriş	21
3.2. Doğrudan Isı Geçişi Problemi	21
3.3. Ters Isı Geçişi Probleminin Tanımlanması	25
3.4. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Formal Çözüm Şekli	29
3.4.1. Optimizasyon Yöntemi	29
3.4.2. Sonlu Farklar Yöntemi ile Bir Yaklaşım	35
4. YAPAY SİNİR AĞLARI YAKLAŞIMI	42
4.1. Giriş	42
4.2. Ters Isı Geçişi Problemi'nin YSA ile Çözümü	45
4.3. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Çözümü için Kullanılan "Kendinden Organize Olan Haritalama Yöntemi" ile Elde Edilen Sonuçlar	49
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	50

KAYNAKLAR

52

ÖZGEÇMİŞ

54



KISALTMALAR

DIGP	: Doğrudan Isı Geçişı Problemi
ESI	: Electrical Source Imaging (Fizyolojik Elektriksel Kaynak Görüntüleme)
GF	: Green Fonksiyonu
SOM	: Self Organizing Map (Kendinden Organize Olan Haritalama Yöntemi)
TIGP	: Ters Isı Geçişı Problemi
YSA	: Yapay Sinir Ağları



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Ölçüm hatalarına karşılık kaynak kestirimindeki yüzdelik başarı oranları	40
Tablo 4.1. Eğitilmiş YSA'nın ölçüm gürültüsüne karşı toleransı, hata için σ	49
Tablo 4.2. $ \Delta x , \Delta y = 0.1$ kabul edilebilir hata sınırları içinde başarı yüzdeleri.....	49



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 : Isı geçişi probleminin uygulandığı bölge ve sınırı; T_i sınırdaki sıcaklık ölçümlerini temsil etmektedir.....	25
Şekil 3.2a : Kare bölge üzerinde nokta kaynağın koordinatlarının gelişigüzel seçimi.....	25
Şekil 3.2b : $\mathcal{S}$ uzayında Şekil 3.2a'daki nokta kaynaklara karşılık ölçülen sıcaklık değerleri.....	26
Şekil 3.3 : $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Tam sayılar alandaki nokta kaynakları pozisyonlarını belirtmektedir. Kırık çizgiler, kaynak konumlarına karşı gelen 2-boyutlu sıcaklık değerlerini verir.(Küçük yol içteki kareye aittir.).....	26
Şekil 3.4 :Kaynak a, b, c doğruları boyunca hareket etmektedir. (a- (0,0.5) 'den (1,0.5)'e doğru; b- (0,0)'dan (1,1)'e doğru, c- (0.5,0)'dan (0.5,1)'e doğru.).....	27
Şekil 3.5 : $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Nokta kaynak (0, 0.5) koordinatlarından (1, 0.5) koordinatlarına doğru hareket etmektedir. (a- (0,0.5) 'den (1,0.5)'e doğru; b- (0,0)'dan (1,1)'e doğru, c- (0.5,0)'dan (0.5,1)'e doğru.) 4&11, 6&10, ve 7&9 noktalarının çakışmasına dikkat edilmelidir.....	28
Şekil 3.6 : $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Şekil 3.5 'deki noktaların birleştirilmesiyle elde edilmiştir.....	28
Şekil 3.7a : Hata yüzeyi için kontur haritası : Nokta kaynak (0.3, 0.4) koordinatlarında iken; yüzey sıcaklıkları (0.5, 0.) ve (1.0, 0.5) noktalarında ölçülmektedir.....	30
Şekil 3.7b :Hata yüzeyi için kontur haritası: Nokta kaynak (0.3,0.4) koordinatlarında iken; yüzey sıcaklıkları kenarların ortalarındaki dört noktadan ölçülmektedir.....	31
Şekil 3.8 : Duyarlılık katsayılarının kaynağın konumu ile değişimi; sıcaklığın ölçüldüğü nokta (1.0, 0.1) a) $\frac{\partial T_m}{\partial x_0}$ b) $\frac{\partial T_m}{\partial y_0}$ c) ∇T_m için alan vektörleri.....	33
Şekil 3.9 : Duyarlılık katsayılarının kaynağın konumu ile değişimi; sıcaklığın ölçüldüğü nokta (1.0, 0.5) a) $\frac{\partial T_m}{\partial x_0}$ b) $\frac{\partial T_m}{\partial y_0}$ c) ∇T_m için alan vektörleri.....	34
Şekil 3.10 : Problemin sayısal çözümü için kullanılan ızgara ve ilgili düğüm noktalarının indislenmesi.....	36
Şekil 3.11 : Bir iç ızgara noktasında Poisson denkleminin ayrıklaştırılması	37
Şekil 3.12 : Bir kenardaki ızgara noktası için Poisson denkleminin konvektif sınır koşulları ile beraber ayrıklaştırılması.....	37

Şekil 3.13	: Köşedeki ızgara noktası için Poisson denkleminin konvektif sınır koşulları ile beraber ayrıklaştırılması.....	38
Şekil 4.1	: Nöron modeli.....	43
Şekil 4.2	: Tek gizli katmanlı YSA.....	43
Şekil 4.3	: Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, a) aynı tip verilerle, b) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, c) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle, d) ($\sigma = \%20$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi.....	46
Şekil 4.4	: a) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, b) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, aynı tip verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.....	47
Şekil 4.5	: ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, a) hata içermeyen verilerle test edilmesi sonucunda, b) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.....	47
Şekil 4.6	: Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, a) aynı tip verilerle, b) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, c) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle, d) ($\sigma = \%20$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi sonucu elde edilen kestirim hata dağılımları.....	48



SEMBOL LİSTESİ

c_p	: Sabit basınçta birim kütle için ısı kapasite
$G(x, y; u, v)$	: Green fonksiyonu
h	: Isı taşınım katsayısı [$W / m^2 K$]
$J(P)$	: Jacobian veya Sensitivite (duyarlılık) matrisi [K / m]
k	: Isı iletim katsayısı [$W / m K$]
n	: Hacimden dışa doğru olan yüzey normalleri vektörleri
P	: Bilinmeyen kaynak koordinat vektörü
q	: Isı kaynağı [W / m^3]
$\mathcal{R}^2$	: Kaynak konum vektörünün ait olduğu uzay
S	: Kestirim hatasının karesi
t	: Zaman
t_f	: Son zaman
T	: Konu bağlamında sıcaklık değerlerinden oluşan matris, vektör veya skaler büyüklük
$T(x, t)$	: Konum ve zamana bağımlı sıcaklık
$T(P)$	: Bir P vektörü ile hesaplanan sıcaklık vektörü
TM_k	: k ' ıncı kaynak için ölçüm düğümlerindeki sıcaklık değerleri vektörü ($M \times 1$)
$\mathcal{T}^n$	: n boyutlu kartezyen ölçüm uzayı
x	: Gözlem noktası
x_0	: Kaynak noktası
Y	: Ölçülen gerçek sıcaklık değerleri vektörü (Ölçüm hataları içerebilir.)
α	: Isıl difüzyivite [m^2 / s]
β	: Boyutsuz III. tip sınır koşulunun parametresi, sırasıyla, karenin sol, sağ, alt ve üst kenarlarında bulunurlar
ε	: Hata miktarı
$\phi(x, y)$	: Özfonksiyon
$\varphi(x)$	: Özfonksiyon
λ	: Özdeğer
ρ	: Yoğunluk [kg / m^3]
σ	: Elektrik iletkenliği [S / m], varyans
$\psi(y)$	: Özfonksiyon

POISSON DENKLEMİ İÇİN TERS KAYNAK PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE YAPAY SINIR AĞLARI İLE BİR YAKLAŞIM

ÖZET

Birçok fiziksel sistemin davranışı Hadamard'ın tanımladığı şekilde 'iyi ifade edilmiş' problem olarak modellenebilir. Bu önermenin temelini kararlı fiziksel sistemlerin uzaysal-zamansal frekansların düşük bölgesine duyarlı olmaları oluşturur. Bu durumda ilgili ters problemler de yüksek frekanslara çok duyarlı olmak zorundadırlar. Dolayısıyla ölçüm verilerindeki gürültü gereksiz bir şekilde yükseltilir. Giriş verilerindeki gürültü ters problemin çözümünde kararsızlıklara neden olur. İkinci problem de ters çözümün tek olmaması durumudur. Ters problemlerde kullanılan regülarizasyon yöntemi, doğruluktan bir miktar vazgeçerek, kararlı ve düzgün görünümlü çözümler üretmeyi amaçlar. Bu nedenle çözüme aday olabilen birçok sonuçların düzgün olanı seçilmeye çalışılır. Bir başka yaklaşım olarak giriş verilerindeki gürültü filtrelenir. Bu çalışmada basit bir model olarak kare şeklindeki bir bölge içinde koordinatları bilinmeyen nokta-birim kaynak göz önüne alınmıştır. Sınır verisi toplamak üzere karenin kenarlarının orta noktalarındaki sıcaklık ölçümleri analitik olarak simüle edilmektedir. Amaç, en az veri ile kaynağın koordinatlarının kestirilmesidir. Sıcaklık probunun yerinin seçimi için duyarlılık alanı incelenmiştir. Önce problemin kötü ifade edilmiş problemler sınıfına neden ait olduğu incelenmiştir. Çözüm için klasik yöntemler dışında, kendinden organize olan haritalama yöntemi ve yapay sinir ağları denenmiştir. En iyi sonuçlar geriye yayma yöntemiyle eğitilen ve dört adet sıcaklık veri seti girdilene yapay sinir ağları ile alınmıştır. Bunun nedeni yapay sinir ağlarının sahip olduğu universal regülarizasyon ve interpolasyon özellikleridir. Ölçüm verilerine eklenen artan miktarlardaki gürültü katkısının sonuçlar üzerindeki orantılı etkisi gözlenmiştir.

ON THE INVERSE SOURCE PROBLEM OF THE POISSON EQUATION VIA ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

SUMMARY

The behaviour of most physical systems can be mathematically modelled as well-posed problems in the sense of Hadamard. This is true just because such physical systems have certain common characteristics; spatio-temporal low-pass filtering properties being the top item of that list. From this observation it immediately follows that the associated inverse problems are necessarily based on high-pass models, which in principle tend to amplify the high frequency noise components of the measured input data, and this is obviously contrary to what we get used to. In other words, the difficulty is that the inverse problem is extremely sensitive to measurement errors which results in the instability of the solution. Another flaw of the inverse problem stems from the fact that the solution of the forward problem may correspond to a situation in which several distinct points of the input space are mapped onto the same point of the output space, which violates the uniqueness requirement of the well-posedness, at least locally. Regularization method sacrifices accuracy in favor of stability and smoothness of the inverse solution. For instance noise in the measured data can be filtered or among the all possible candidate solutions, the one that agrees most with the smoothness criteria is chosen. In this work a basic inverse heat conduction problem of a simple 2-D model with steady state point heat source is taken into view. The physical problem is for a square region with uniform thermophysical properties and a point heat source of unit magnitude. To obtain boundary data, temperature probes are placed at the midpoints of the sides of the boundary of the square domain. The objective of the inverse problem is to estimate the coordinates of the point source with the least amount of data. Sensitivity fields of the probes have been studied. Initially, the inverse problem is analyzed to determine the main causes that render the problem ill-posed. For the solutions of the problem, besides the classical methods, self organizing maps and artificial neural network have been tried, the best results were obtained from a backpropagating ANN with four-probe measurement data. When white gaussian noise is added to the measurements by the increasing amounts, no catastrophic failure has been observed. Artificial neural network approach proved to be superior because of its inherent regularization and interpolation capabilities and universal properties.

1.BÖLÜM

GİRİŞ VE ÇALIŞMANIN AMACI

1.1. GİRİŞ

Isı denklemi, kolay anlaşılabilir basit bir fiziksel modele dayalı olması ve çözümleri için genel yöntemler geliştirilmiş olması nedeniyle, matematiksel fizik ders kitaplarının temel konularından birisini oluşturur. Ancak, ters sıfatıyla nitelendirilen ısı problemlerinin çözümü, doğrudan problemlerin çözümünün tam tersine, oldukça karmaşık ve beklenmeyen kötü sürprizlerle doludur. Doğrudan ısı geçişi probleminde amaç; sınır koşulları, başlangıç koşulu, kaynak terimi ve termofiziksel özellikler belirtildiği zaman , katı bölgenin içindeki sıcaklık dağılımının $T(x,t)$, zamanın ve konumun fonksiyonu olarak hesaplanmasıdır. Ters ısı geçişi probleminde ise amaç; katı ortamın bazı özel bölgelerinden ölçülen sıcaklık değerleri yardımıyla, bilinmeyen parametre, kaynak terimi, sınır koşulları ya da termofiziksel özelliklerin tespit edilmesidir. Doğrudan ısı geçişi probleminde, nedenler verilerek sonuç saptanmakta; ancak ters ısı geçişi probleminde sonuç verilerek, neden veya nedenlere ulaşılmaya çalışılmaktadır. Son yıllarda, ters ısı geçişi problemlerinin teorisine ve uygulamasına bilimin ve mühendisliğin her dalından ilgi artmıştır. Makine, uzay, kimya ve nükleer enerji alanında çalışanlar, matematikçiler, astrofizikçiler ve istatistikçiler , kendi uygulama alanları açısından bu tür problemi ele alarak, yakından ilgilenmektedirler (Özışık ve Helcio , 2000).

Ters ısı geçişi problemi'nin başlıca yararlarından birisi, malzemelerin termofiziksel özelliklerinin , gerçek koşullarda ölçümlerini olanaklı kılmasıdır. Ters ısı geçişi problemi tekniğinin pratik uygulamaları şu spesifik alanları içermektedir;

- Malzemelerin termofiziksel özelliklerinin yerinde tahmini.
- Soğuran, emisyon yapan ve saçıcı özelliğe sahip yarı geçirgen materyallerde sınır koşulları ve hacimsel ısıma özelliklerinin belirlenmesi.

- Katı-sıvı fazlar arası yüzeyin katılaşma sırasında hareketinin kontrolü.
- Borularda zorlanmış ısı iletiminde başlangıç koşulları ve sınır ısı akısının tahmini.
- Sınırdaki iletim katsayısının metal katılaşma yüzeyindeki ısı iletim katsayısının zamana bağlı olarak soğumakta olan bir döküm parçası için incelenmesi ve ısı iletim parametrelerinin nasıl değiştiğinin incelenmesi.
- Periyodik olarak temas halinde olan yüzeylerin ara yüzey davranışının tahmini.
- Isıtıcıların yüzeylerinden yansıyan ışıyım özelliklerinin tespiti.
- İki katının sürtünmesi sırasında ortaya çıkan ısı enerjisinin tahmini, örneğin, namlu içinde hareket eden mermi (Özışık ve Helcio , 2000).

Bazı ters metod örneklerini şöyle sıralayabiliriz;uzaydan geri dönen araçların atmosfere girişi sırasında ısı kalkanlarının dizaynı ve uzay araçlarının tekrar giriş sırasında dış yüzey koşullarının tespiti, dizaynı, kontrolü, jetlerin ve roketlerin motorlarında sıcak yüzeylere uygulanacak sınır koşullarının tespiti, nükleer reaktör yakıt çubukları, elektronik aletler, kalorimetre tipi enstrümanlar, yanma odacığındaki pistonun kayması, erimesi ve zamanla aşınması, metallere uygulanan ısı işlem süreçlerinin kontrolü, endüstriyel işlem kontrolü, camın katılaşması, kusurların tahribatsız testi , kızıl altı tarama ile boşlukların ve hataların tespiti , uzaktan algılama (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Dış yüzeydeki ısı transfer koşullarının atmosfere geri dönen uzay aracı için tespit edilmesi , ters yaklaşımla mümkün olmaktadır, çünkü yüzey materyali kısmi olarak süblimleşir ve özellikleri değişir. Temas direncinin veya ısı transferinin ve sürtünme sırasında ısı üretiminin araştırılması için, ters metod oldukça etkilidir(Kurpisz ve Nowak , 1995).

Kriyostatlar ve kriyoskoplar için sıcaklık sensörlerini cismin aktif yüzeyine yerleştirmek olası değildir, çünkü, termoçift telleri ısıyı soğuk yüzeye iletir ve fiziksel olarak olayı bozar (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Jeofiziksel bir metod olan, mineral kaynaklarının bulunması için sismik, elektromanyetik, yerçekimi, manyetik, radyoaktif alan ölçümleri ile yapılan çalışmalar da ters problemler için başarılı bir uygulama alanı olabilir.

Jeofiziksel aramacılıkta, şu problemleri sıralayabiliriz; yapısal problemler, tortu örtüsünün genel yapısının dağıtımı ve Dünya'nın kabuğu,yerel inhomojenliklerin tespiti için yerel problemler (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Plazma özellikleri, elektron yoğunluğu ve oldukça yüksek plazma sıcaklığından dolayı, uzak sensörler yardımıyla araştırılabilir. Hiçbir alet bu sıcaklığa dayanamayacağı için, deneysel dolaylı veriler, ters yaklaşım temelleriyle işlem den geçirilebilir.

Saçılma ters problemleri de parçacıklar arasındaki etkileşim ile ilgili oldukça iyi bilgiler sağlar.

Ters metodun en mükemmel uygulama alanlarından biri de tıp bilimidir. Görüntü işleme tıptaki uygulama alanlarından biridir. Görüntü işlemede, lekeli ya da tam odaklanamamış görüntünün yeniden yapılandırılması için çalışılmaktadır.

Elektrodinamikde de, ters yaklaşımla çözülebilen problemler vardır. Alan kaynaklarının ve saçılma yapan cisimlerin biçimleri hakkında dolaylı bilgiyi alan ölçümlerinden bulmak mümkündür.

Ters metodla ilgili birkaç diğ er ilginç problem tipi olarak ş unları verebiliriz; okyanus akustiklerinde ters problem, okyanus sıcaklığı ve derinlik değ işkenleri, ve deniz yüzeyindeki tortu özellikleri hesaplanabilir, kalınlık , tuzluluk özellikleri ve buzların birleşiminin tespiti için buzlu denizdeki çok az hissedilen elektromanyetik uzaktan algılama kullanılabilir (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Poisson Denklemi de , dipol akım kaynağ ının oluşturduğu elektrik alanını ifade eder (Gencer ve Tanzer , 1999). Bu nedenle, elektriksel kaynak görüntülem ede (ESI) , ısı problemine benzer bir ters problem çözü lür.

1.2. AMAÇ

Bu tez çalışmasının amacı, termofiziksel özellikleri değ işmez olan bir katı iç erisine yerleştirilmiş ısı kaynağ ının koordinatlarının tespit edilmesidir. Bu çalışmada, basit 2-boyutlu temel ters ısı geç işi problemi göz önüne alınmıştır. Nokta ısı kaynağ ı zamandan bağımsızdır. Termofiziksel özellikleri değ işmez olan bir kare bölge ve

birim şiddette noktasal ısı kaynağı için fiziksel problem kurulmuştur. Sınır koşullarını elde etmek için sıcaklık ölçerler, kare alanın kenarlarının tam orta noktalarına yerleştirilmiştir. Ters problemin amacı, nokta kaynağın koordinatlarını elimizdeki en az yüzeysel veri değerleri ile tahmin edebilmektir. Başlangıçta, ters problemi kötü koşullu yapan nedenler analiz edilmiştir. Çözüm için denenen metotların arasından, dört adet sınır sıcaklık ölçümü verileriyle kullanılan geriye yayma yöntemiyle eğitilen yapay sinir ağları en iyi sonuçları vermiştir. Beyaz Gaussian gürültü ölçümlere eklendiğinde, ciddi boyutlarda başarısızlık elde edilmemiştir.

Kare alanın kenarlarının tam orta noktalarına yerleştirilen sıcaklık ölçerlerin verdiği düşünülen değerler deney yerine hesaplanarak türetilmiştir. Sıcaklık ölçerlerin verdiği değerlerin tespiti için , bir kaynak dağılımını içeren iki boyutlu değişmez özellikleri olan katı ortam içerisinde, doğrudan ısı geçişi problemi çözülmüştür. Daha sonra, bu hesaplanan sıcaklık değerlerinden yola çıkarak III. tip sınır koşullarına sahip ters ısı geçişi problemi oluşturulmuştur. Oluşturulan bu ters problemin yardımıyla, katı ortam içerisinde bulunan nokta kaynağın koordinatları en doğru şekilde tespit edilmeye çalışılmıştır.

Öncelikle doğrudan problemin çözümü yapılmıştır. Bu adımdan sonra, yapay sinir ağları yöntemi ile ters ısı geçişi problemi çözülmüştür.

Ters ısı geçişi probleminin çözümü için, “MATLAB” bilgisayar programlama dilinde bulunan “Kendinden Organize Olan Haritalama Yöntemi (SOM)” paketi de kullanılmıştır. Ancak, kendinden organize olan haritalama yöntemi komşuluk ilişkilerini korumadığı için, nokta kaynağın konumunu bize vermede başarılı olmamıştır.

Özet olarak, doğrudan ısı geçişi probleminin çözümü ile , kare alanların kenarlarının orta noktalarındaki dört sıcaklık değerleri bulunacaktır. Ters ısı geçişi probleminin çözümünde bu sıcaklık değerleri giriş verisi olarak kullanılacaktır. Çıkışta nokta kaynağın konumu olan (x_0, y_0) koordinatları bulunmaya çalışılacaktır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, özellikle, Poisson denklemini üzerine kurulmuş olan ters ısı geçişi problemlerinin literatürdeki uygulamaları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, doğrudan ısı geçişi probleminin çözümü ile ilgili bilgiler verilerek, ters ısı geçişi probleminin formal çözümü için kullanılan iki yaklaşımdan; optimizasyon yöntemi ve sonlu farklar yönteminden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, bizim kurduğumuz ters ısı geçişi probleminin çözümüne yapay sinir ağlarının nasıl uygulandığı anlatılmıştır. Verilere gürültü katıldığında sonuçların ne gibi değişikliklere uğradığı grafiklerle gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanarak, ileriye dönük neler yapılabileceği konusunda önerilerde bulunulmuştur.



2. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER VE UYGULAMALARI

2.1. Ters Isı Geçişi Problemi

Bu kısımda, ters ısı geçişi problemi ile ilgili bazı temel bilgiler verilerek, bu problemin formülasyonu ve genel uygulama alanlarından bahsedilecektir.

2.1.1. Ters Isı Geçişi Problemi ile İlgili Temel Bilgiler

Bir problemin çözümü yakınsamayan bir seri ile ifade ediliyorsa veya birden fazla çözümü varsa , kötü kurulmuş veya ifade edilmiş problem olarak kabul edilir. Matematiksel olarak; standart ısı iletim problemleri iyi ifade edilmiş iken, ters ısı geçişi problemleri kötü ifade edilmiş olarak isimlendirilebilirler. Bölüm 2.4’de kötü ifade edilmiş bir problemin çözümü sırasında karşılaşılan zorluklar anlatılmıştır. İyi ifade edilmiş problemlerin Hadamard tarafından belirtilen şu üç özeliği sağlaması gerekmektedir.

- En az bir çözüm olmalıdır.
- Çözüm tek olmalıdır.
- Giriş verilerindeki küçük değişimler karşısında çözüm kararlı olmalıdır (Özışık ve Helcio , 2000 ; Haberman, 1987).

Birçok fiziksel sistemin davranışı matematiksel olarak iyi kurulmuş problemler olarak modellenebilir. Çünkü, bu tür fiziksel sistemlerin belirli ortak karakteristikleri vardır;uzaysal-yerel alçak geçiren filtreleme özelliği listenin en üstünde yer alır(Shenefelt ve diğ., 2002). Bu gözlemin sonucu olarak hemen söylenebilir ki, ilgili ters problemler yüksek geçiren filtreler içerir. Bunlar temel olarak, ölçülen giriş verilerinin yüksek frekanslı gürültü bileşenlerini güçlendirme eğilimindedirler, bu da, alışık olunan duruma tamamiyla zıttır. Bu durumu şöyle

özetleyebiliriz; en önemli zorluk, ters problemlerin ölçüm hatalarına oldukça fazla duyarlı olmasından kaynaklanmaktadır, bu da doğal olarak çözümü kararsızlığa götürmektedir. Ters problemlerin bir diğer sorunu da şudur, doğrudan problemin çözümünün karşılığında oluşan durumda, giriş uzayındaki birçok farklı nokta çıkış uzayındaki aynı noktaya karşılık gelebilir, bu da iyi kurulmuş problem olmanın tek çözüme sahip olması ilkesini en azından yerel olarak bozar (Hensel , 1991).

Regülerizasyon metodu, zamana bağlı yüksek geçiren özellikli ters problemlerin tek olmayan çözümleri için bir çaredir. Sürekli rejim problemleri için, ölçüm noktalarının en iyi seçimi, ters problemleri iyi kurulmuş hale getirmek için yardımcı olabilir (Hensel , 1991).

Sıcaklık ölçümlerindeki küçük hatalar hesaplanan ısı transferinde büyük hatalara neden olabilir. Düşük düzeyde, geniş aralıkta gürültüden dolayı sıcaklık verileri, hesaplanan ısı akısı için fiziksel olarak anlamsız çözümlerle sonuçlanabilir (Shenefelt ve diğ., 2002).

Ters problemlerin çözümlerinin tek olması , matematiksel olarak sadece bazı özel durumlar için sağlanabilir. Bunun yanı sıra, ters problemler, ölçümler sırasında alınan giriş verilerinde oluşabilecek rastgele hatalara karşı oldukça fazla duyarlıdır. Bu nedenle, kararlı bir çözüme ulaşmak için, ters problemlerde özel tekniklere ihtiyaç duyulmaktadır. Ters problemimiz iyi kurulmuş bir problem değilse, üzerinde çalışmanın bir anlamı yoktur. Çünkü, çözümden elde edilecek sonuçların hiçbir anlamı olmayacaktır. Ters problemlerin çözümünde daha kararlı bir sonuç elde etmek için, doğruluktan bir miktar vazgeçilmelidir. Genellikle ters problemin tek çözümü yoktur, bir çözüm ailesi vardır. Amacımız, bu çözüm ailesinden en kararlı çözümü seçmektir. Ayrıca çözümümüze ilave bilgiler ekleyerek en doğru hale getirmeye çalışırız. Regülerizasyon yöntemi ile daha kararlı çözüme ulaşabiliriz. Hedef, dışarıdan çok az bilgi ilave ederek çözüm ailesi içerisinde en doğru ve en kararlı çözümü yakalayabilmektir.

2.1.2. Bir Boyutlu Ters Isı Geçişi Problemi'nin Matematiksel İfadesi

Ters ısı probleminin fiziksel gösterimi; L kalınlığındaki plaka içinde, bir boyutlu, geçici rejim ısı geçiş problemi olarak alınması uygundur. Başlangıç anında plaka içindeki sıcaklık dağılımı $F(x)$ şeklinde alınabilir. $x = 0$ 'daki sınırda $t > 0$ olduğu

zamanlarda geçici ısı akısı $f(t)$, $x = L$ 'deki sınır koşulunda sabit sıcaklık değeri T_L 'de bulunmaktadır. Bu problemin matematiksel formülasyonu şu şekilde verilir (Özışık ve Helcio , 2000).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq t_f \quad (2.1 a)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f(t) = ? \text{ (bilinmiyor) } x = 0, \quad 0 < t \leq t_f \quad (2.1 b)$$

$$T = T_L \quad x = L, \quad 0 < t \leq t_f \quad (2.1 c)$$

$$T = F(x) \quad t = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.1 d)$$

ve iç bölgedeki $x_{ölç}$ konumunda farklı zaman dilimlerindeki sıcaklık ölçümleri şu şekilde verilmektedir.

$$T(x_{ölç}, t_i) \equiv Y_i, \quad x = x_{ölç}, \quad t = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, I) \quad (2.2)$$

Yukarıda verilen probleme benzer olarak, fakat $x = 0$ 'daki yüzeyde sınır koşulu fonksiyonu $f(t)$ bilinmeyerek , biraz önce verilen eşitliklerdeki diğer bütün özelliklerin bilindiği, örneğin T_L , $F(x)$, k , ρ ve c_p gibi , bir problem göz önüne alınacaktır. Amacımız bilinmeyen sınır koşulu olan $f(t)$ 'yi hesaplamak olacaktır. Sınır koşullarında verilen bilgi eksikliğini gidermek için , ölçülen sıcaklıklar $T(x_{ölç}, t_i) \equiv Y_i$ iç kısımdaki $x_{ölç}$ noktasında, t_f bitiş zamanı olmak üzere $0 < t \leq t_f$ zaman aralığındaki farklı zaman dilimlerinde t_i ($i = 1, 2, \dots, I$) ölçülen sıcaklıklar $T(x_{ölç}, t_i) \equiv Y_i$ verilecektir. Bu, ters problemdir, çünkü bilinmeyen yüzey koşulu olan $f(t)$ 'yi tahmin etmeyi amaçlamıştır.

Ters analizde ölçülen sıcaklık değerleri ölçüm hataları içerir. Dolayısıyla, ters analizde bulunan sınır koşulu $f(t)$ 'nin değeri kesin değildir, ölçüm hatalarıyla tahmin edilen değerdir.

Doğrudan problemin temel amacı, katıdaki sıcaklık alanına neden olan tüm karakteristiklerin (örneğin, sınır koşulları ve onların parametreleri, başlangıç koşulları, ortamdaki termofiziksel özellikler ve enerji üretimi) bilinerek $T(x,t)$ 'nin bulunmasıdır. Diğer taraftan ters problemin amacı, ortamda belirtilen bir kısımda ölçümlenen sıcaklık değerleri yardımıyla bir veya birkaç bilinmeyen karakteristiklerin tahmin edilmesidir.

Yukarıda verilen ters problemde, sınır yüzey akısı olan $f(t)$ bilinmemektedir. Bundan dolayı, bu problem ters sınır ısı geçişi problemi olarak adlandırılır. Benzer olarak, ters ısı geçişi problemlerinde bilinmeyenler başlangıç koşulları, enerji üretimi, termofiziksel özellikler de olabilir. Şimdiye dek ters ısı probleminde iletimi göz önüne aldığımız gibi, benzer olarak, ters problemlerin taşınımı, parça veya yüzeydeki ısıması, karışık durumlardaki ısı geçişi ve diğerleri de incelenebilir.

Ters problemler, “parametre tahmini” ya da “fonksiyon tahmini” yaklaşımı ile çözülebilir. Fonksiyonel formun bilinmeyen miktarı hakkında biraz bilgi mevcutsa, ters problem az sayıda bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesine indirgenebilir. Ters sınır probleminin yukarıdaki eşitliklerle verildiği göz önüne alınır ve bilinmeyen fonksiyon olan $f(t)$ 'nin zamana bağlı bir polinom formunda gösterildiği farz edilirse,

$$f(t) = P_1 + P_2 t + P_3 t^2 + \dots + P_N t^{N-1} \quad (2.3)$$

veya daha genel doğrusal formda

$$f(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (2.4)$$

burada P_j , $j = 1, 2, \dots, N$ arasında bilinmeyen sabitler ve $C_j(t)$ değerleri de bilinen deneme fonksiyonlarıdır. Böylelikle, ters problem bilinmeyen fonksiyon $f(t)$ 'nin tahmin edilmesinden, sınırlı sayıdaki parametreleri olan P_j 'nin tahmin edilmesine indirgenmiştir. Burada N daha sonra belirlenecek parametre sayısıdır. Parametre tahmininde diğer örnek bilinmeyen sabit termofiziksel özelliklerin bulunmasıdır. Isı

iletimi olan k veya hacimsel ısı kapasitesi olan ρc_p şeklinde denklemlerde görülen özellikler bulunabilir. Eğer, bilinmeyenler hakkında hiçbir bilgi verilmemişse, ters problem “sonsuz boyutlu fonksiyon uzayında fonksiyon tahmini yaklaşımı” olarak göz önüne alınabilir (Özışık ve Helcio , 2000).

2.1.3. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Uygulama Alanları

Ters problemlere, araştırma ve endüstri alanlarının ilgisinin arttığı gözlemlenmiştir. Üniversitelerden ve endüstri sektöründen birçok araştırmacı, bu problemlerin modellenmesi, analizi ve etkili nümerik metodlara uygulaması ile yakından ilgilenmektedir. Bugünkü ölçüm teknolojilerinin desteği ile ters problemlerin uygulamaları son yıllarda oldukça ilerlemiştir (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Ters ısı geçişi metodunun genel uygulamaları mühendislikte şu problemleri içerir;

- Teşhis ve tanımlama
- Tasarım
- Kontrol amaçlıdır (Kurpisz ve Nowak ,1995).

Birinci grup, en klasik olanıdır. Genellikle deneysel verilerin oluşumunu ve analizini içerir. Tasarım problemleri, genellikle ölçüm içermezler. Bunun yerine, ters problem anlamına gelen tasarım amacı vardır. Örneğin; katılaşma için özel hareket istenmekte ve harekete neden olan sınır koşulları tespit edilmektedir. İstenilen sonuçtan nedeni tespit etmek için, kontrol problemleri, ters problemlerin bir diğer uygulama alanlarıdır. Genellikle geri besleme çevrimi ters algoritmayı içerir (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Daha önce belirtildiği gibi, ters problemler deneysel veri yorumlarıyla oldukça bağlantılıdır ve bu nedenden dolayı, doğal bilimin her dalında bu tip problemlerle karşılaşmak olasıdır.

Tıp biliminden örnek vermek gerekirse, şu konuları içerir;

- Tıpta görüntüleme ve frekansa ve zamana bağlı dielektrik sabitinin iyileştirilmesi ve vücudun dışındaki ölçümlerden , insan bedenindeki iletkenlik dağılımı.
- Empedans tomografisi.
- Elektrokardiogram yorumlaması (Kurpisz ve Nowak , 1995).

2.1.4. Fizyolojik Elektriksel Kaynak Görüntüleme (ESI)

Elektriksel kaynak görüntüleme hacimsel iletkenlik modeli üzerine kurulmuştur. İyi iletkenlerde, hacim içindeki serbest yükler yüzeyde toplanır ve yüzeyin her noktasında potansiyel aynı olur; bu olay çok kısa bir süre içerisinde tamamlanır ($\approx 10^{-19} s$) (Corson ve Lorain, 1962). İyi olmayan iletkenlerde ise durum farklıdır.

Uyarılabilen dokular aktive edildikleri zaman hacimsel akım kaynağı haline gelebilirler. Fizyolojik akım kaynak yoğunluğu $\vec{J}_i(x, y, z, t)$ şeklinde bir vektörde tanımlanır ve zamana bağlı değişimler 1 kHz 'den küçük frekanslar içerir. Bu durumda olay statik gibi kabul edilebilir; diğer bir deyişle olaylar kaynaktaki değişimleri faz farkı olmadan takip eder. Fizyolojik akım kaynağını (biyolojik pil) hücre zarındaki ATP ile sürülen iyon pompalarının oluşturduğu konsantrasyon farkları oluşturur. Kaynakta yaratılan akım, iletkenliği σ olan ortamda bir elektrik alanı $\vec{E}$, ve o da Ohm kanununa göre $\sigma \vec{E}$ ile tanımlanan ilave akım yoğunluğu oluşturur.

Şu halde iletken ortamdaki toplam akım yoğunluğu

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_i \quad (2.5)$$

olarak verilir.

Statik koşullarda bir nokta etrafındaki küçük bir hacmin yüzeyinden olan toplam akım kaçakları/hacim oranı sıfır olur; aksi halde ortam içindeki net yükün artması veya azalması gerekir. Bu ifadenin matematiksel tanımı şöyle verilebilir.

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.6)$$

Diğer taraftan, elektrostatikte , konservatif elektrik alanı bir potansiyel ile ifade edilebilir.

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.7)$$

(2.5),(2.6) ve (2.7) bağıntıları birleştirilerek

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J}_i \quad (2.8)$$

ifadesi türetilebilir. Bağıntı (2.8) Poisson denklemdir. Diğer taraftan, boşluktaki bir yük dağılımının neden olacağı potansiyel de (2.8) bağıntısına benzer bir Poisson denklemi ile ifade edilebilir. Her iki denklemi kıyaslayınca fizyolojik kaynağın neden olduğu akım yoğunluğunun diverjansı ile boşluktaki serbest yük yoğunluğu dağılımı arasında bir benzeşim olduğu görülür (Plonsey, 2000).

Biyolojik uygulamalarda (2.8) bağıntısındaki J_i akım kaynağı dipol ($\pm$ kaynak monopol çifti) olarak da alınabilir. Sınır koşulu olarak homojen Neumann sınır koşulu uygulanır (Johnson, 2000),

$$\sigma n \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.9)$$

burada n cismin yüzeyindeki dışarı doğru yöndeki normalini ifade eder.

Son yıllarda, vücut yüzeyinde kalple ilgili hastalıkların neden olduğu farklı elektrik potansiyeli dağılımının bulunması ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Vücut yüzeyinde düzgünce dağılmış bölgelerde eş zamanlı olarak yapılmış olan yaklaşık 200 elektrokardiyogramdan toplanan bilgiler, normal ve normal olmayan kalp sistemleri arasındaki farkı görmek açısından önemli bir yardımcıdır. Elektrokardiyolojideki ters problem, yüzey potansiyel dağılımının kalp zarında hesaplanmasını içerir. Kalp zarındaki potansiyel dağılım bilgisi, klinik tanıyı oldukça kolaylaştırır (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Elektrokardiyoloji'nin ters probleminin formülasyonu, bizi ikinci dereceden eliptik Poisson problemine götürür. İnsan vücudu, izotropik, dirençli, doğrusal iletim yapan bir ortam olarak izlenir; kalbi içeren alan vücuda dahil edilmezken, farklı iletim bölgeleri (akciğer ve kemikler) vücuda dahil edilir. Vücut, hacimsel iletken olarak, yalıtkan ortamın(hava) içine yerleştirilir ve kalp tarafından üretilen elektrik alan statik gibi kabul edilir (Kurpisz ve Nowak , 1995).

Sonuç olarak, kalple ilgili potansiyel Poisson denklemini sağlar ve potansiyelin vücut üzerindeki normal türevi sıfırdır.

Kalple ilgili elektrik potansiyel $\phi(r)$ verilen şu denklemleri karşılar.

$$\nabla \sigma(r) \nabla \phi(r) = 0 \quad (\text{Vücut içerisinde}) \quad (2.10)$$

Sınır koşulları:

$$\phi(r) = \phi_0(r) \quad (\text{Kalp zarı üzerinde}) \quad (2.11)$$

$$\partial \phi(r) / \partial n = 0 \quad (\text{Vücut üzerinde}) \quad (2.12)$$

burada n , S yüzeyinden dışarı doğru olan yüzey normalidir. $\sigma(r)$ de ortamın elektrik iletkenliğidir. Ters problemin amacı, S yüzeyinin bir parçası olan S^* yüzeyinde geçerli olan $\phi(r)$ ek bilgisi verildiği zaman , epikardiyal yüzeydeki $\phi_0(r)$ 'nin hesaplanmasıdır.

$$\phi(r) = U(r) \quad (S^* \text{ vücut yüzeyinde olduğunda}) \quad (2.13)$$

Gerçek olaylarda, $\phi(r)$, gövdenin belirli noktalarında ölçümlenebilir. Epikardiyal yüzey potansiyelinin tasarlanmasıyla elde edilen bilgiler, vücut yüzey dağılımından elde edilen bilgilerden çok daha fazlasını sağlar.

Elektrokardiyolojideki ters problem, nesnenin istenilen niteliklerinin direkt olarak ölçülemediği, fakat sadece dolaylı bilgiye ulaşılabildiğinde, tanı alanında kullanılan karakteristik örneğe bir yaklaşımdır. Aynı problem tıp alanında da, doktor stetoskoptan dinlediklerini yorumlayacağı ve X-ışınları ile kazandığı bilgileri yorumlayacağı zaman söz konusu olur. Bu bizi sık sık genel formda verilen şu eşitlik setlerine götürür.

$$Db = e \quad (2.14)$$

Burada b , hesaplanması istenen niceliktir, e bilinen nicelik ve D operatördür. Bilgisayarlı tomografi de, aynı sınıf problemlerdendir (Kurpisz ve Nowak, 1995).

Elektroensefalogram (EEG)' de benzer şekilde kafatasına uygulanır (Johnson, 2000).

2.2. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Çözüm Yöntemleri

Ters problemlerin çözümünde kullanılan en popüler yaklaşım optimizasyondur. Statik problemlerde, verilen sıcaklık ölçüm değerleri ile doğrudan problemin çözümünden bulunan sonuçlar arasındaki farkın karesi alınarak parametreler uzayında bir hata yüzeyi kurulur. Bundan sonra bu yüzey üzerinde optimizasyon yöntemleri kullanılarak global minimum aranır.

2.2.1. Klasik Optimizasyon Yöntemleri

Optimizasyon için kullanılan en basit yöntem lokal gradyanın tersi yönde ilerliyerek minimuma yaklaşımdır. Hata yüzeyi üzerindeki dar vadilerde yakınsama çok yavaştır, ancak lokal gradyanın hesaplanması yeterlidir. Cauchy yönteminde, gradyanın tersi yönde ve bir çizgi üzerinde minimum aranarak global minimuma birçok denemeden sonra varılır. Newton-Raphson yöntemi ise ikinci derece yöntemdir; gradyana ilaveten lokal Hessian matrisinin bilinmesi yakınsamayı kolaylaştırır. Levenberg-Marquardt metodu ise iki metodun bir karışımıdır. Minimumdan uzakta Cauchy metodu olarak, minimuma yaklaştıkça Newton-Raphson yöntemi olarak çalışır. İkinci türevleri içeren Hessian matrisi, kabaca gradyan vektöründen kestirilebilir. Eşlenik gradyan yöntemi de gradyana dayalı olup, en çok kullanılan arama yöntemlerinden biridir. Kuadratik yüzeylerin paralel-alt uzay özelliği kullanılarak N —boyutlu uzayda N adet eşlenik vektör bulunarak minimuma varılabilir. Örneğin iki boyutlu kuadratik yüzey üzerinde Newton-Raphson metodu bir adımda minimumu bulurken, eşlenik yön metodu iki adım atılmasını gerektirir. Eşlenik yönlerin seçiminde gradyan vektörü de kullanılır. Bu yöntem kendinden regülarizasyon özelliğine sahip olması nedeniyle ters problemlerin çözümlerinde tercih edilmektedir (Reed ve Marks, 1999).

2.3. Literatürdeki Uygulamalar

Kim ve Lee (2002)'nin makalesinde, bir yüzü yalıtılmış plakanın diğer yüzeyine uygulanan zamana bağlı ısı akısının, plaka içindeki bir noktada yapmakta olduğu sıcaklık ölçümleri ile kestirmek istenmektedir. Bu amaçla, maksimum entropi metodu kullanılmaktadır. Bu yöntem, olabilecek kötü çözümlerden olasılığı en büyük çözümü seçmektedir. Maksimum entropi metodu, verilen ölçüm verilerinden mümkün olan en fazla bilgiyi içeren, fakat doğruluğu limitli olan çözümü seçer. Yazarlar, bu yöntemin diğer klasik yöntemlere göre daha iyi sonuç verdiğini belirtmişlerdir.

Prud'homme ve Nguyen (1999)'nin makalesinde, kare şeklinde bir bölgenin bir kenarına uygulanan zamana bağlı ısı akısını kestirmek için, doğrudan çözümü bir Fourier serisi olarak ifade etmektedir. Ters problem için bu seri çözümünde, eşlenik gradyan metoduna dayanan optimizasyon metodu kullanılmıştır. İteratif ve sınır elemanları metoduyla yapılan optimizasyon çok kararlı sonuçlar vermektedir.

Shenefelt (2002)'in makalesinde, bir yüzeyi yalıtılmış plakanın diğer yüzeyine zamana bağlı ısı akısı uygulanmaktadır. Doğrudan problem, sonlu farklar yöntemi ile, $\phi q = \theta$ şeklinde doğrusal olarak ifade edilmektedir. Burada ϕ , nedenselliği ihlal etmeyen impuls ısı akısı - sıcaklık cevap fonksiyonudur. q vektörü, zaman üzerinden ayrıklaştırılmış yüzey ısı akısıdır. θ ise, plaka içindeki bir düğüm noktasında zaman üzerinden ayrıklaştırılmış sıcaklık vektörüdür. ϕ matrisi, çok kötü koşullu olduğu için θ vektöründeki gürültü, çözümü hemen hemen imkansız kılar. Bu amaçla, ϕ matrisine, tekil değer ayrıklaştırması uygulanarak, küçük tekil değerlere karşılık gelen sütun-satır indirilmesi yapılır ve ters problemin çözümü gürültüye daha az duyarlı hale getirilir. Bu çalışmada ayrıca, literatürde bulunan bir kısım çözüm yöntemleri de özetlenmiştir.

Frederic (2002)'in makalesinde, iki boyutlu bölge içindeki statik nokta kaynakların yerlerinin ve şiddetlerinin kestirilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca hareketli bir kaynağın şiddetinin ve yerinin tespiti için ters probleme sınır elemanları yöntemiyle yaklaşılmaktadır.

Monde(2000) makalesinde, bir boyutlu zamana bağlı ısı denkleminde, sınır koşulları yerine, ortam içindeki bir noktada sıcaklık koşulları uygulanmış ve Laplace

transformu yardımıyla bir çözüm bulmuştur. Bu çözümü ekstrapole ederek sınırlardaki ısı akısı ve sıcaklık değerlerini nedenselliği de göz önüne alarak bulmaktadır.

Daha sonraki bir çalışmada (Monde ve Mitsutake, 2001) aynı çözüm yöntemini ortamın termal difüzivitesinin kestirilmesinde kullanmıştır.

2.4. Ters Problem Çözümündeki Zorluklar

Matematiksel fizikte problemler, diferansiyel denklemler olarak verilmektedir. Çözümler, diferansiyel denklemlerin integrasyonu şeklinde oluşturulur. İntegral alma işlemi, doğrudan problem olarak görülürken, türev alma işlemi ters problem olarak sınıflandırılır. Ters problemin çözümünde türev alma işlemi sırasında, birtakım zorluklarla karşılaşılır.

Gerçek veriler $f(x)$ olarak kabul edilirse ve

$$f_n^\delta(x) = f(x) + \delta \sin \frac{n}{\delta} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \delta < 1 \quad (2.15)$$

şeklinde pertürbe edilebilir.

$$\left\| \sin \frac{n}{\delta} x \right\|_\infty = 1 \quad (2.16)$$

olduğu için, pertürbasyon büyüklüğünün uniform normu,

$$\left\| f - f_n^\delta \right\|_\infty = \delta \quad (2.17)$$

ve türevinin normu

$$\left\| f'(x) - (f_n^\delta)' \right\|_\infty = n \quad (2.18)$$

olduğu kolayca gözlenebilir. Sonuç olarak, iki fonksiyon farkının üniform normu δ iken, iki türev farkının normu frekans ile orantılıdır. Diğer bir deyişle, gerçek verileri bozan küçük bir gürültünün türev üzerindeki etkisi, gürültünün frekansı ile orantılıdır.

Aynı şekilde, merkezi fark oranı olarak ifade edilen sayısal türev için

$$\frac{f^\delta(x+h) - f^\delta(x-h)}{2h} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{\delta}{h} \quad (2.19)$$

yazılır. Buradan da görüleceği gibi, adım büyüklüğü h küçüldükçe, gürültünün sayısal olarak hesaplanan türev üzerindeki etkisi artar (Engl ve Hanke, 1996).

Isı denklemini homojen Dirichlet sınır koşulları ile yazılabilir.

Isı denklemini;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0 \quad (2.20 \text{ a})$$

sınır koşulları;

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.20 \text{ b})$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.20 \text{ c})$$

şeklinde ifade edilir. Son değer için şu atama yapılabilir.

$$f(x) = u(x, 1), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.21)$$

Doğal olarak $f(x)$ sınır koşullarını sağlar;

$$f(0) = f(\pi) = 0. \quad (2.22)$$

$u(x, t)$ çözümü problemin özfonksiyonları ile bir seriye açılabilir.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \quad (2.23)$$

Bu çözümün, kısmi diferansiyel denklemini sağlaması beklenir, buradan $c_n(t)$ katsayılarının zaman bağımlılığı bulunur.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \varphi_n(x) \quad (2.24)$$

$t = 1$ 'deki son değer;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2} \varphi_n(x) \quad (2.25)$$

ise, $f(x)$ şu şekilde tanımlanabilir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \quad (2.26)$$

burada,

$$f_n = c_n e^{-n^2} \quad (2.27)$$

olarak tanımlanmıştır; şu halde

$$c_n = f_n e^{n^2} \quad (2.28)$$

olarak ifade edilir. Sonuç olarak bilinmeyen başlangıç koşulu için, bir seri şeklinde çözüm bulunur:

Ölçüm hataları ile beraber,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^0 + \delta f_n) e^{n^2} \varphi_n(x) \quad (2.29)$$

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \delta f_n e^{n^2} \varphi_n(x)$ serisinin yakınsaması hiçbir şekilde garanti edilemez, yani ölçümlerdeki gürültü çözümü kararsız yapmaktadır. Çözümlerde kararlılığın doğruluğa göre daima önceliği vardır, diğer bir deyişle, kararsız bir çözümü iyileştirmek için çalışmanın bir anlamı yoktur. Bu nedenle çözümü kararlı yapabilmek için, serinin belirli bir terimden sonraki kısmını ihmal etmemiz gerekir.

Buradan da görüleceği gibi, n 'inci Fourier katsayısında olabilecek küçük bir hata e^{n^2} faktörü ile büyüyecektir. Bu durumda serinin, elimizdeki verilerdeki gürültü seviyesine göre, ilk birkaç terimi ile yetinmek zorunda kalınır, aksi halde çözüm, çok kararsız olacaktır .

Sonuç olarak kararlılık uğruna , çözümün doğruluğundan bir miktar vazgeçmek gerekmektedir. Verilerin yüksek frekanslı bileşenlerinin filtrelendiği veya atılması bir tür regülarizasyona karşılık gelir (Engl ve Hanke ,1996). Zaten, içinde yüksek frekanslar taşıyan veya ani değişimler içeren bir başlangıç koşulunu fiziksel olarak gerçekleştirmek imkansız değilse bile çok zordur.

Ters metodun en çok istenilen uygulaması, sınır koşulları ve diğer parametrelerin tahmininin yapılmasıdır. Örneğin, burada amacımız ısı transfer katsayısı h 'nın , sürekli rejim durumunda bulunmasıdır. h 'yı bulmak için, q ve T 'yi bilmemiz gerekmektedir. q 'yu bulmak için de iki adet termoçifte ihtiyacımız vardır. h 'nın hesaplanma formülü şu şekilde verilebilir;

$$q = h(T_s - T_a) \quad (2.30)$$

burada T_s yüzey sıcaklığı, T_a da akışkan sıcaklığıdır, q ise yüzeydeki ısı akısıdır. Bununla beraber, yüzeye yerleştirilmiş olan sensörlerden ölçülen sıcaklık verileri, özellikle yüksek akışkan sıcaklıklarından ve yüksek akış hızı gibi deneysel hatalardan oldukça etkilenir. Ayrıca sürekli rejimde ısı transferini sağlamak oldukça

zordur. Bu zorlukların üstesinden ters yaklaşımla gelinebilir (Kurpisz ve Nowak ,1995). Yüzeydeki ısı akısını ölçebilmek için, yüzey altına iki adet termočift yerleştirilmelidir. Bazen , bu iki adet termočiftten alınan sonuçlarla da, problemin çözümü için gerekli olan yeterli bilgiye ulaşamayabilinir.

Bundan sonraki bölümde, önce önerdiğimiz problemin çözümüne hazırlık olmak üzere doğrudan problem üzerinde durulacaktır. Daha sonra ters problemin çözümü için iki klasik yaklaşım incelenecektir.



3.BÖLÜM

PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU

3.1. Giriş

Ters ısı geçişi problemi için veri türetmek amacıyla, öncelikle doğrudan problemin analitik çözümü üzerinde durulacaktır. İki boyutlu ve kartezyen koordinatlara uyum sağlaması için kare bir bölge seçildi. Bu karenin kenarlarının tam orta noktalarına sıcaklık ölçerler yerleştirildi. Karenin kenarları birim uzunlukta kabul edildi.

3.2. Doğrudan Isı Geçişi Problemi

Ele aldığımız problem, çalıştığımız birim kare bölgesinde homojen termofiziksel özelliklere sahiptir. Bölgemizin çevresine üçüncü tür homojen sınır koşulları uygulanmıştır. Nokta kaynağımız karenin içinde herhangi bir yerde bulunmaktadır. Sıcaklık ölçerler, karenin çevresinin dört kenarının tam orta noktalarına Şekil 3.1’de görüldüğü gibi yerleştirilmiştir. Bu problemin çözümü için Poisson denklemi yazılır:

$$k\nabla^2 T = -\rho(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (3.1)$$

$$\text{Nokta kaynak: } \rho(x, y) / k = \delta(x - x_o) \delta(y - y_o). \quad (3.2)$$

Sınır koşulları

$$\beta_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = T(0, y), \quad 0 < y < 1 \quad (3.3)$$

$$\beta_E \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = -T(1, y), \quad 0 < y < 1 \quad (3.4)$$

$$\beta_S \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = T(x, 0), \quad 0 < x < 1 \quad (3.5)$$

$$\beta_N \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} = -T(x, 1), \quad 0 < x < 1 \quad (3.6)$$

burada,

$$\beta_i = \frac{hL}{k}, \quad i = E, W, N, S \quad (3.7)$$

$T(x, y)$: Yerel sıcaklık,

k : Ortamın ısı iletim katsayısı,

h : Isı taşınım katsayısı;

$L(=1)$: Kare bölgenin bir kenarının uzunluğudur.

Düz problemin çözümü şu şekilde verilmektedir.

$$T(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 G(x, y; u, v) \rho(u, v) du dv \quad (3.8)$$

İki boyutlu ısı probleminin çözümü için gereken özfonksiyonlar daha önce çözülmüş olan Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarından türetilebilir;

$$\nabla^2 \phi(x, y) + \lambda^2 \phi(x, y) = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (3.9)$$

$\phi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ çarpımı şeklinde olduğu varsayılır.

Problemimiz kartezyen koordinatlarda;

$$\frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} + \lambda_i^2 \varphi_i(x) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (3.10)$$

ve homojen sınır koşulları,

$$\frac{d^2 \psi_j(y)}{dy^2} + \lambda_j^2 \psi_j(y) = 0 \quad 0 < y < 1 \quad (3.11)$$

ve homojen koşulları şeklinde iki özdeş probleme indirgenebilir. Birinci denklem $\psi_j(y)$, ikinci denklem $\varphi_i(x)$ ile çarpılarak toplandığında;

$$\frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} \psi_j(y) + \frac{d^2 \psi_j(y)}{dy^2} \varphi_i(x) + (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \varphi_i(x) \psi_j(y) = 0 \quad (3.12)$$

Şu halde $\lambda_{ij}^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2$ ve $\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) \psi_j(y)$ olur.

Green bağıntısı ise,

$$\iint_A [u \nabla^2 v - v \nabla^2 u] dy dx = \oint_{\tilde{C}} [u \nabla v - v \nabla u] n ds \quad (3.13)$$

şeklini alır.

Burada n sınırdaki ve bölgenin dışına doğru olan birim normal vektörüdür, $\tilde{C}$ ise A alanının çeperini ifade eder.

$\nabla^2 u = f(x, y) + \text{homojen sınır koşulları}$ probleminin çözümü için

$v = G(x, y; x_0, y_0)$ ve

$$\nabla^2 G(x, y; x_0, y_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (3.14)$$

olarak alınır.Green formülüne yerleştirerek,

$$\iint_A [u(x, y)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) - G(x, y; x_0, y_0)f(x, y)] dx dy = 0 \quad (3.15)$$

$$u(x_0, y_0) = \iint_A f(x, y)G(x, y; x_0, y_0) dx dy \quad (3.16)$$

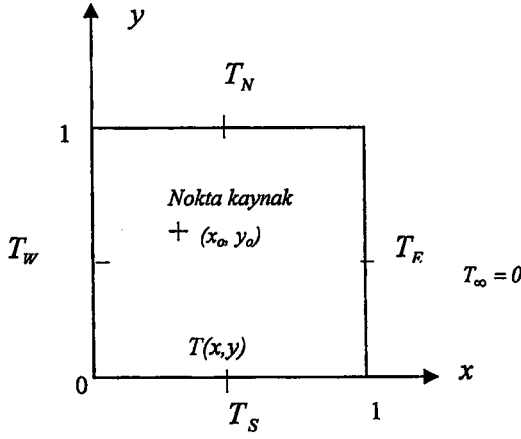
x_0 ile x ve y_0 ile y değişkenlerinin yerlerini değiştirsek ve GF'nun $G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y)$ şeklindeki simetri özelliğini kullanırsak,

$$u(x, y) = \iint_A G(x, y; x_0, y_0)f(x_0, y_0)dx_0dy_0 \quad (3.17)$$

çözümüne varılır.

Diğer taraftan bir boyutlu problemde olduğu gibi, GF'nu iki boyutlu özfonksiyonlar ile bir seriye açılabilir(Haberman,1987).

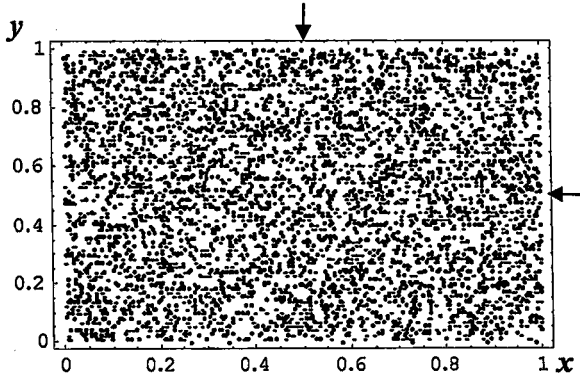
$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_j \sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_i(x_0)\varphi_j(y_0)}{-(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)} \quad (3.18)$$



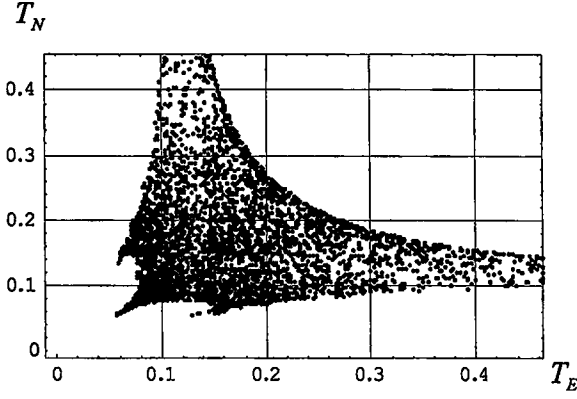
Şekil 3.1: Isı geçişi probleminin uygulandığı bölge ve sınırı; T_i sınırdaki sıcaklık ölçümelerini temsil etmektedir.

3.3. Ters Isı Geçiş Probleminin Tanımlanması

Çözümü istenen ters problem şu şekilde tanımlanmıştır. Verilen nokta kaynak koordinatları $X = \{x_0, y_0\} \in \mathcal{R}^2, [0,1]^2$ için sınır sıcaklık ölçümleri $T = \{T_E, T_N\} \in \mathcal{T}^2$ hesaplanabilir. Doğrudan ısı geçişi problemi (DIGP) eşleme olarak tanımlanabilir: (DIGP): $(X \rightarrow T \mid x_0, y_0 \in [0,1])$ şeklindedir ve bire-bir değildir. Şekil 3.2-a' da daha sonra YSA eğitiminde kullanılmak üzere gelişigüzel seçilen kaynak koordinatları görülmektedir. Şekil 3.2-b bu koordinatlara karşılık gelen (T_E, T_N) sıcaklık değerlerini göstermektedir. Kare şeklindeki alan aşırı derecede deforme olmaktadır. Bu doğrusal olmayan eşleşme esnasında bir miktar bilgi de kaybolmaktadır. Bu problemin üstesinden gelmek için, ölçülen sıcaklık verileri sayısının ikiden dörde çıkarılması uygun olmaktadır.



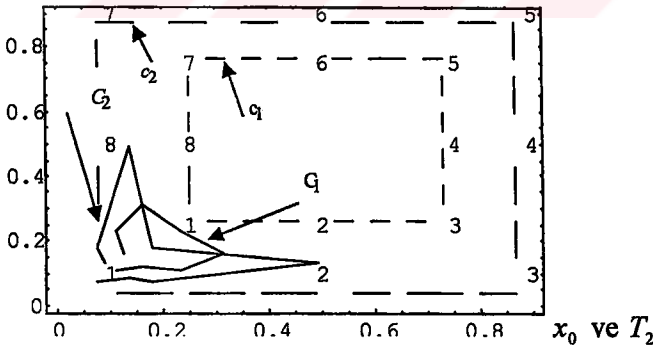
Şekil 3.2-a: Kare bölge üzerinde nokta kaynağın koordinatlarının gelişigüzel seçimi. (Oklar sıcaklık ölçer konumlarını göstermektedir.)



Şekil3.2-b: $\mathcal{T}^2$ uzayında Şekil 3.2-a'daki nokta kaynaklara karşılık ölçülen sıcaklık değerleri.

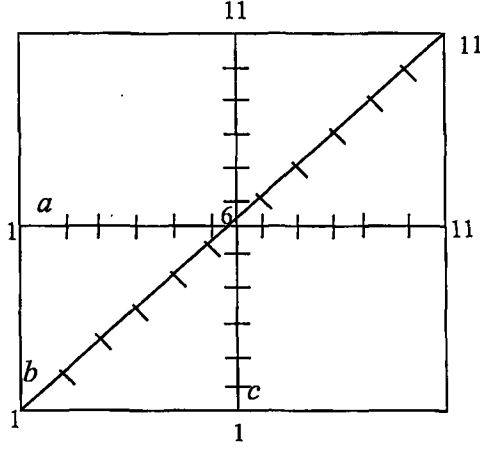
Bu eşleşmenin topolojiyi koruyup korumadığını anlamak için, kaynağın konumu ortam içinde iç içe iki karenin kenarları üzerinde dolaştırılır. $\mathcal{T}^2$ kartezyen sıcaklık ölçüm uzayındaki nokta da Şekil 3.3'de gösterilen yolları izlemektedir. (x_0, y_0) nokta kaynağın koordinatlarını, T_1 ve T_2 yüzeyde ölçülen sıcaklıkları temsil eder. c_1 ve c_2 kaynağın konum değişimini gösteren yoldur. C_1 ve C_2 sıcaklık ölçümlerinin $\mathcal{T}^2$ düzleminde takip ettiği yolu göstermektedir. Şekil 3.3'de görüldüğü gibi, küçük kareye karşılık gelen yol, büyük kareye karşılık gelen yolun dışına düşmektedir. Bu nedenle topoloji, yani noktalar arasındaki komşuluk ilişkisi korunmamaktadır.

y_0 ve T_1



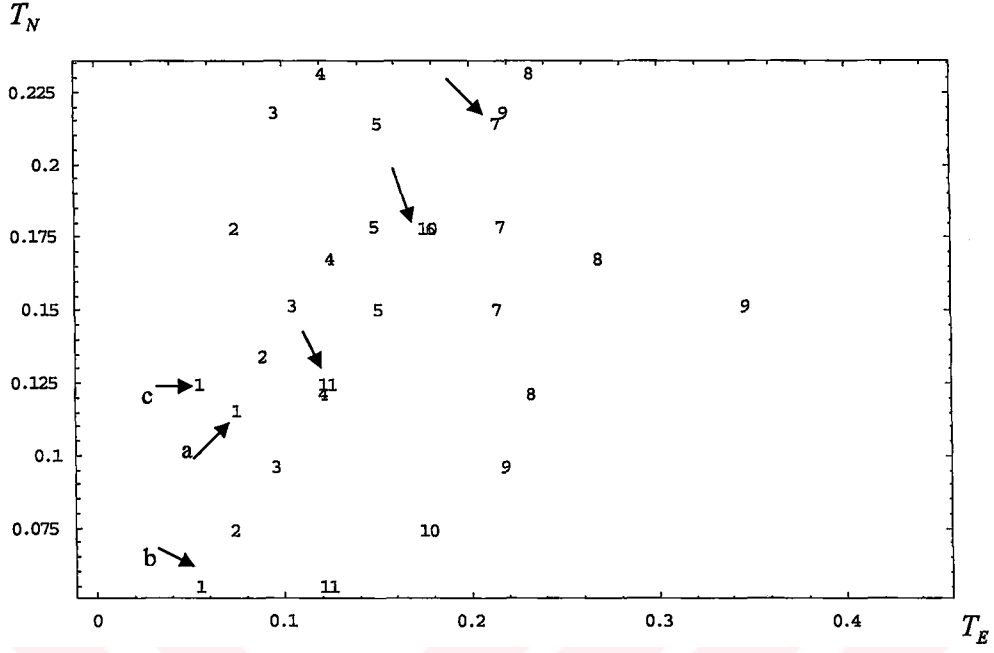
Şekil-3.3: $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Tam sayılar alandaki nokta kaynakların pozisyonlarını belirtmektedir. Kırık çizgiler, kaynak konumlarına karşı gelen 2-boyutlu sıcaklık değerlerini verir.(Küçük yol içteki kareye aittir.)

Şekil 3.4 'de, kaynak a , b ve c ile belirtilen çizgiler boyunca hareket etmektedir. Kaynaklar, 1 ile başlayan konumlardan 11 ile biten konumlara kadar hareket ederler.

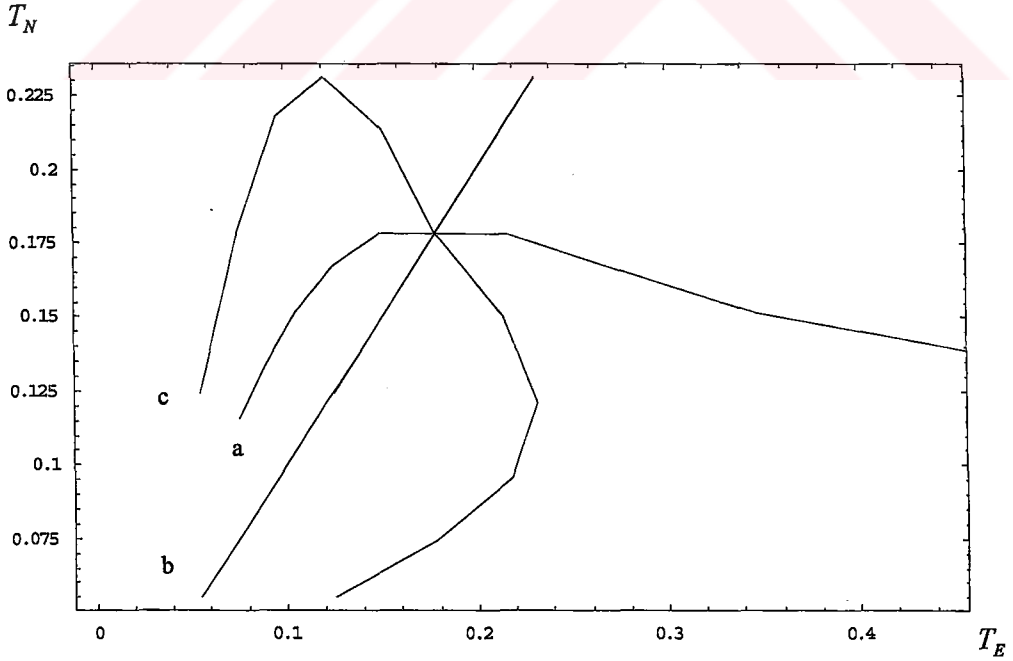


Şekil-3.4: Kaynak a,b,c doğruları boyunca hareket etmektedir. (a - (0,0.5) 'den (1,0.5)'e doğru; b - (0,0)'dan (1,1)'e doğru, c - (0.5,0)'dan (0.5,1)'e doğru.)

Şekil 3.5'de, kaynağın bu konum değişikliğine karşılık gelen sıcaklık değişimlerinin ne şekilde gerçekleştiği görülmektedir. Şekil 3.6 , $X \rightarrow T$ eşleştirilmesi için, Şekil 3.5'deki noktaların birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Farklı iki kaynak koordinatının $\mathcal{T}^s$ uzayında aynı noktaya düştüğü görülmektedir. Diğer bir deyişle kaynak koordinat uzayındaki birden fazla noktalar, $\mathcal{T}^s$ uzayındaki tek bir noktayla eşleşmektedir. Bu duruma simetri neden olmaktadır.



Şekil 3.5: $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Nokta kaynak (0, 0.5) koordinatlarından (1, 0.5) koordinatlarına doğru hareket etmektedir. (a- (0,0.5) 'den (1,0.5)'e doğru; b- (0,0)'dan (1,1)'e doğru, c- (0.5,0)'dan (0.5,1)'e doğru.) 4&11, 6&10, ve 7&9 noktalarının çakışmasına dikkat edilmelidir.



Şekil 3.6: $X \rightarrow T$ eşleştirmesi. Şekil 3.5 'deki noktaların birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

3.4. Ters Isı Geçişi Problemi'nin Formal Çözüm Şekli

Termofiziksel özellikleri uniform olan ve içinde (x_0, y_0) koordinatlarında bir nokta kaynak içeren kare şeklindeki bölgeye üçüncü tip homojen sınır koşulları uygulanan ısı probleminin çözümü bir Green fonksiyonu yardımıyla verilmişti. Bundan sonra, kare bölgenin yüzeyinde seçilen ölçüm noktalarından alınan sıcaklık değerleri verildiği zaman nokta kaynağın koordinatlarının kestirilmesi problemi üzerinde durulacaktır; çözüm için şu yaklaşımlar önerilebilir.

- Optimizasyon yöntemi(Hataların karelerinin toplamının minimizasyonu.)
- Sonlu farklar yöntemi.
- Yapay sinir ağları.

3.4.1. Optimizasyon Yöntemi

Özışık ve Helcio (2000)'nun, ters problemleri çözerken kullandığı hataların karelerinin toplamı şeklindeki amaç fonksiyonu yaklaşımı, burada kullanılan optimizasyon yöntemi ile çözülen problemler üzerindeki bir uygulaması olarak verilmektedir. Öncelikle ters problem bir minimizasyon problemine dönüştürülür. Amaç fonksiyonu;

$$S(x_0, y_0) = \sum_{m=1}^M [Y_m - T_m(x_0, y_0)]^2 \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Y_m , m yüzey ölçüm noktasından alınan gerçek sıcaklık değeri, $T_m(x_0, y_0)$ ise kaynağın (x_0, y_0) koordinatlarında olduğu varsayılarak doğrudan problemde bulunan m yüzey ölçüm noktasına ait sıcaklık değeridir. Amaç fonksiyonu ise, bu iki sıcaklık değeri arasındaki uyumsuzluktan ortaya çıkan hataların karelerinin toplamından oluşmaktadır. S amaç fonksiyonu, (x_0, y_0) koordinatlarında bir hata yüzeyi oluşturmaktadır. Şekil 3.7'de, bu hata yüzeyleri görülmektedir. Şekil 3.7-a' da nokta kaynak (0.3,0.4) koordinatlarında iken, yüzey sıcaklıklarının 2 noktadan ölçülmesiyle elde edilen örnek hata yüzeyi verilmiştir. Şekil3.7-b' de ise, kaynağın konumu değiştirilmeyerek, yüzey sıcaklıklarının 4

noktadan ölçülmesiyle elde edilen örnek hata yüzeyi görülmektedir. Bu yüzeyin minimum noktası için gerek koşul

$$\text{grad } S = \nabla S = 0 \quad (3.20)$$

olarak verilir. Açık biçimde

$$\nabla S = \left[\frac{\partial S}{\partial x_0}, \frac{\partial S}{\partial y_0} \right]^T \quad (3.21)$$

bir sütun vektörü şeklinde yazılabilir.

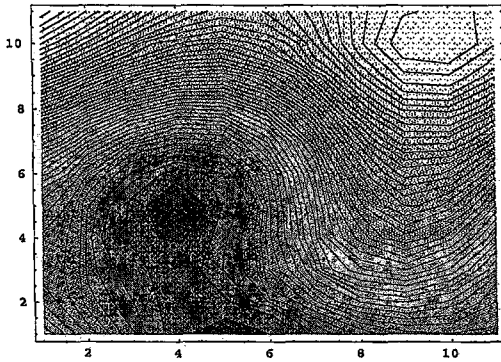
$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = -2 \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial T_m}{\partial x_0} \right) [Y_m - T_m(x_0, y_0)] \quad (3.22)$$

Duyarlılık katsayıları;

$$J_{mx} = \frac{\partial T_m}{\partial x_0} \quad \text{ve} \quad J_{my} = \frac{\partial T_m}{\partial y_0} \quad (3.23)$$

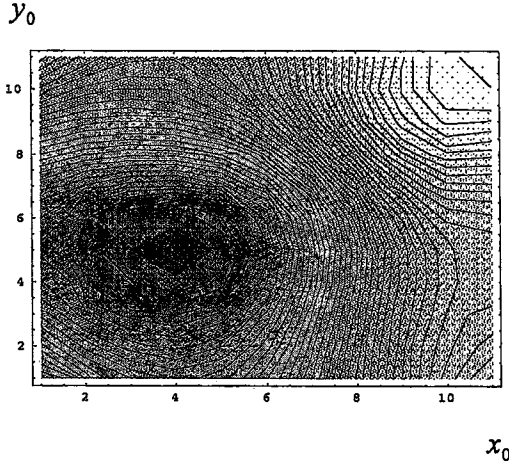
olarak tanımlanır ve $M \times 2$ boyutlu bir duyarlılık matrisi olarak düzenlenebilir.

y_0



x_0

Şekil 3.7-a: Hata yüzeyi için kontur haritası : Nokta kaynak (0.3, 0.4) koordinatlarında iken; yüzey sıcaklıkları (0.5, 0.) ve (1.0, 0.5) noktalarında ölçülmektedir. ($M = 2$)



Şekil 3.7-b: Hata yüzeyi için kontur haritası: Nokta kaynak (0.3, 0.4) koordinatlarında iken; yüzey sıcaklıkları kenarların ortalarındaki dört noktadan ölçülmektedir. ($M = 4$)

Yüzey sıcaklıkları dört farklı noktadan alındığında, global yüzey minimumunun daha belirgin şekilde gözlemlendiği yukarıdaki şekiller yardımıyla görülmektedir.

Problemin çözümü için J matrisinin elemanları (x_0, y_0) noktasındaki birim kaynak ve bir (x_m, y_m) ölçüm noktası için kolayca hesaplanabilir.

$$\frac{\partial T_m}{\partial x_0} = \frac{\partial G(x_m, y_m; x_0, y_0)}{\partial x_0} \quad (3.24)$$

Y ve T sütun vektörlerini aşağıdaki şekilde tanımladıktan sonra,

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^T \quad (3.25)$$

$$T = [T_1, T_2, \dots, T_M]^T \quad (3.26)$$

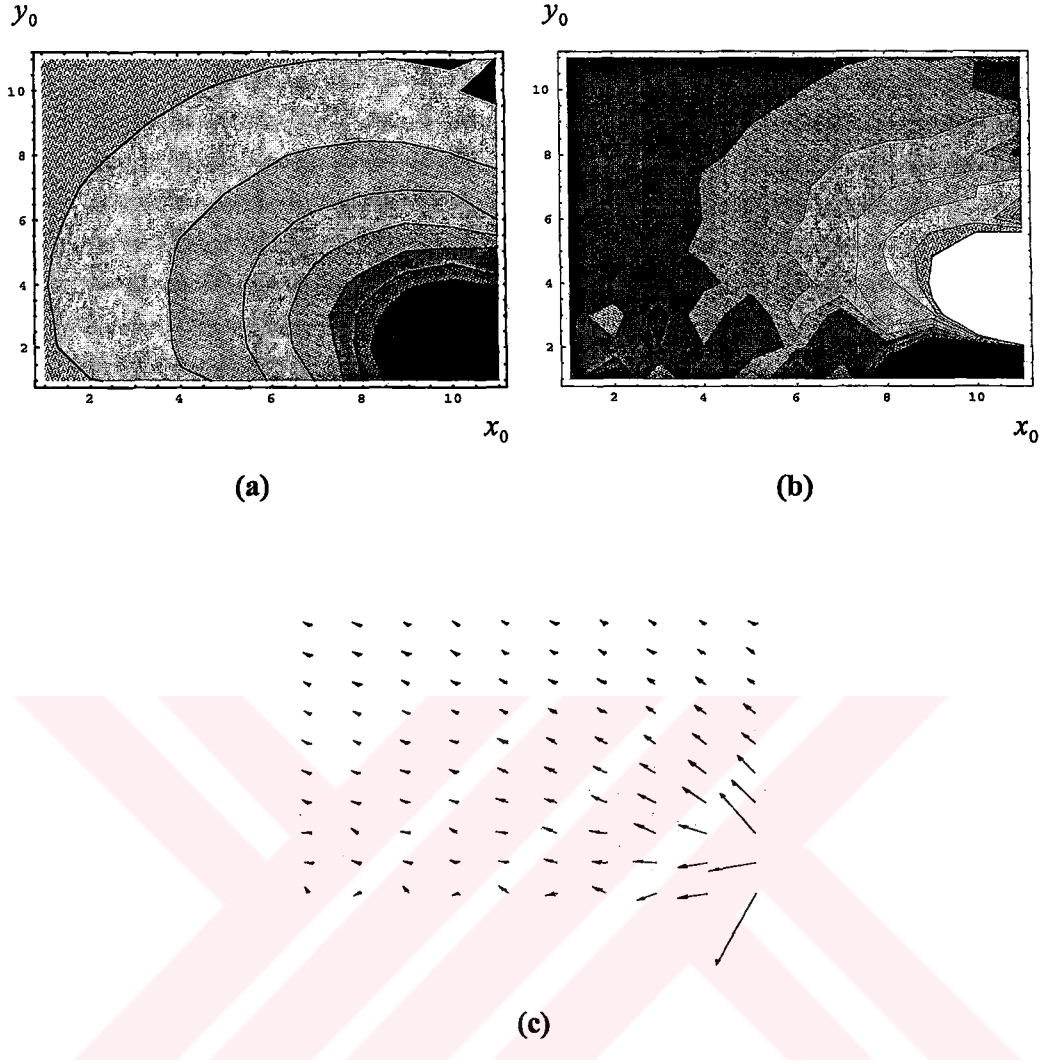
hata vektörü;

$$Y - T = [Y_1 - T_1, Y_2 - T_2, \dots, Y_M - T_M]^T \quad (3.27)$$

olarak verildiğinde, gradyan vektörü duyarlılık matrisinin transpozunu ile hata vektörünün çarpımından bulunur. Hata yüzeyindeki gradyanın kapalı ifadesi

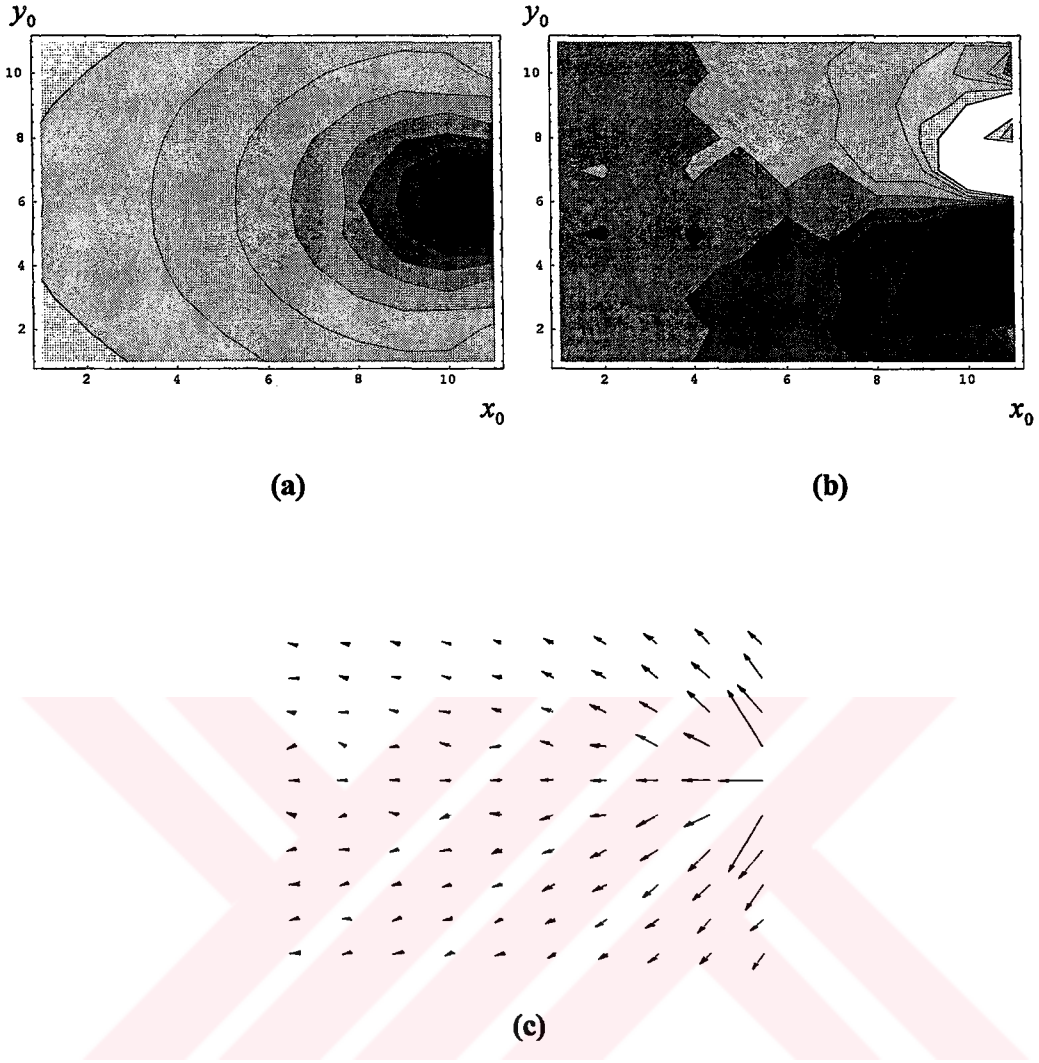
$$\nabla S(x_0, y_0) = -2J^T [Y - T] \quad (3.28)$$

olur. Duyarlılık katsayılarının kaynağın konumu ile nasıl değiştiği ve ∇T_m için alan vektörleri , iki farklı kaynak konumu için verilen grafikler yardımıyla görülmektedir. Şekil 3.8’de, karenin (1.0, 0.1) konumuna sıcaklık ölçer yerleştirilmiştir. Sıcaklık ölçerin konumu sabit tutularak nokta kaynak kare içerisinde dolaştırılmıştır. Böylece, kaynağın konumuna bağlı olarak duyarlılık katsayılarının değişimleri gözlemlenmektedir. Şekillerde de görüldüğü gibi, sıcaklık ölçümünün yapıldığı noktaya yakın bölgelerde, kaynak konumunun x_0 ve y_0 boyunca çok az miktarda değiştirilmesinden, ölçülen sıcaklık değerleri oldukça fazla etkilenmektedir. Sıcaklık ölçümünün yapıldığı bölgelerden uzaklaştıkça, kaynağın x_0 ve y_0 üzerindeki değişimlerinden, ölçülen sıcaklık değişimlerinin çok fazla etkilenmediği gözlemlenmektedir. y_0 boyunca olan değişikliklerde, x_0 ’da gözlemlenmeyen şu farklılık görülmektedir; sıcaklık ölçer $y_0 = 0.1$ çizgisinin üzerindeki hareketlere duyarsızdır. Şekil 3.8-c’ de , duyarlılık katsayılarının oluşturduğu vektörel alan çizilmiştir.



Şekil 3.8: Duyarlılık katsayılarının kaynağın konumu ile değişimi; sıcaklığın ölçüldüğü nokta $(1.0, 0.1)$ a) $\frac{\partial T_m}{\partial x_0}$ b) $\frac{\partial T_m}{\partial y_0}$ c) ∇T_m için alan vektörleri.

Şekil 3.9 'da , Şekil 3.8 'de yapılan işlemin aynısı, bu kez karenin $(1.0, 0.5)$ konumuna sıcaklık ölçer yerleştirilerek tekrarlanmıştır. Burada sıcaklık ölçerin $y_0 = 0.5$ çizgisinin üzerindeki hareketlere duyarsız olduğu görülmektedir.



Şekil 3.9: Duyarlılık katsayılarının kaynağın konumu ile değişimi; sıcaklığın ölçüldüğü nokta $(1.0, 0.5)$ a) $\frac{\partial T_m}{\partial x_0}$ b) $\frac{\partial T_m}{\partial y_0}$ c) ∇T_m için alan vektörleri.

Doğrusal ters problemlerde duyarlılık matrisi parametrelerden bağımsız olur, ancak burada görüldüğü gibi J, x_0 ve y_0 parametrelerine bağımlıdır, bu nedenle problemimizi doğrusal olmayan ters problem olarak niteleyebiliriz. Bu durumda çözüme iteratif olarak yaklaşmamız gerekir. Notasyonu basitleştirmek üzere x_0, y_0 parametreleri bir $P = [x_0, y_0]^T$ vektörü ile gösterilebilir. P parametreleri ile hesaplanan T vektörünün Taylor serisi açılımı için

$$T(P^{i+1}) = T(P^i) + J'(P^i)(P^{i+1} - P^i) \quad (3.29)$$

yazılır. Burada i iterasyon adımını göstermektedir. $P = P^*$ olduğunda, gerçek minimum için $Y = T(P^*)$ olmaktadır.

$$T(P^*) = T(P^i) + J^i[P^* - P^i] \quad (3.30)$$

$$[Y - T(P^i)] = J^i[P^* - P^i] \quad (3.31)$$

Denklemin her iki tarafı J^{iT} ile çarpılır;

$$J^{iT}[Y - T(P^i)] = J^{iT}J^i[P^* - P^i] \quad (3.32)$$

$$P^{i+1} = P^* \quad (3.33)$$

olması istenir, böylece P^{i+1} denklemde yalnız bırakılır.

$$P^{i+1} = P^i + \eta[J^{iT}J^i]^{-1}J^{iT}[Y - T(P^i)] \quad (3.34)$$

Burada, P^* aranan gerçek $(x_0, y_0)^*$ değerleridir (Özışık ve Helcio,2000). Ancak, çözümün bu değere küçük adımlarla yakınsamasını sağlayabilmek için, $0 > \eta > 1$ gibi küçük bir katsayı kullanılmıştır. $J^{iT}J^i$ matrisi çok kötü ifade edilmiş olduğu için tersini almakta zorluklar vardır ve sonuç ölçüm hatalarına çok duyarlıdır. Problem doğrusal olsa bile durum değişmez. (Kuzkaya,2003). Gürültünün çok küçük olması durumunda iterasyonlarda Levenberg-Marquardt metodu kullanılabilir(Özışık ve Helcio,2000 ; Haykin,1999).

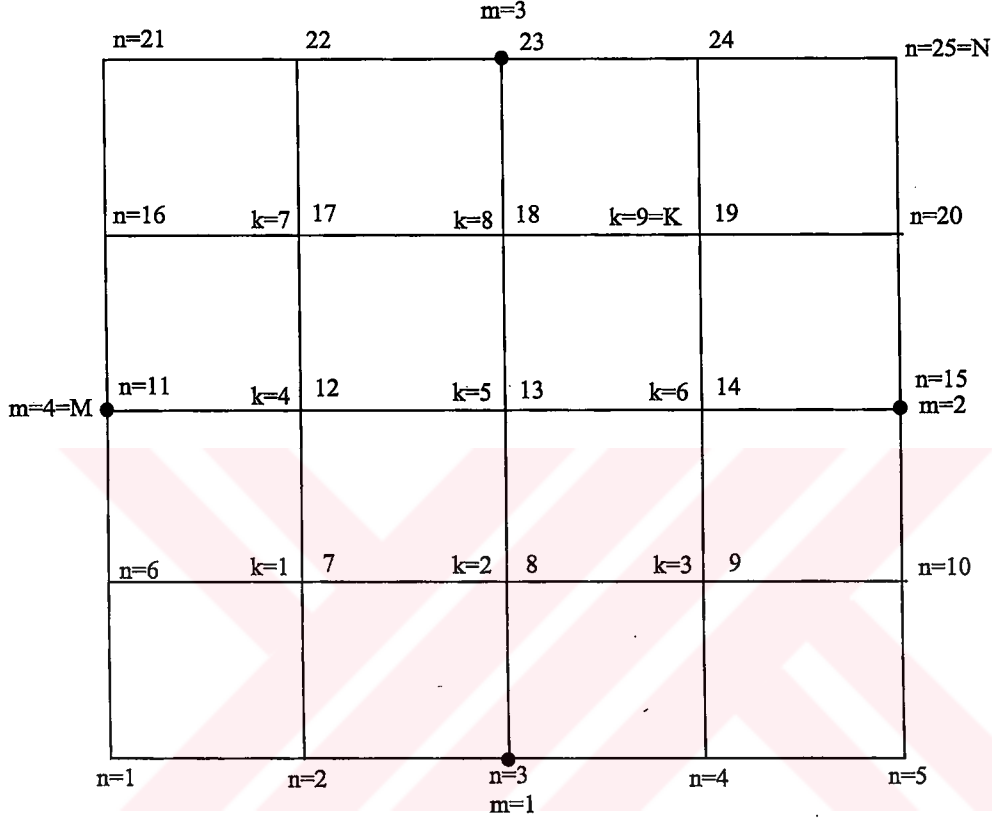
3.4.2. Sonlu Farklar Yöntemi ile Bir Yaklaşım

Bu kısımda, ters problemin çözümüne sonlu farklar yöntemi ile bir yaklaşım yapılacaktır. Problemimizin çözümüne doğrudan sayısal bir yöntemle yaklaşmak için şekilde gösterilen ızgara yapısı seçilmiştir.

$n = 1, 2, \dots, N$: Sıcaklık değerleri için düğüm noktaları. ($N = 25$)

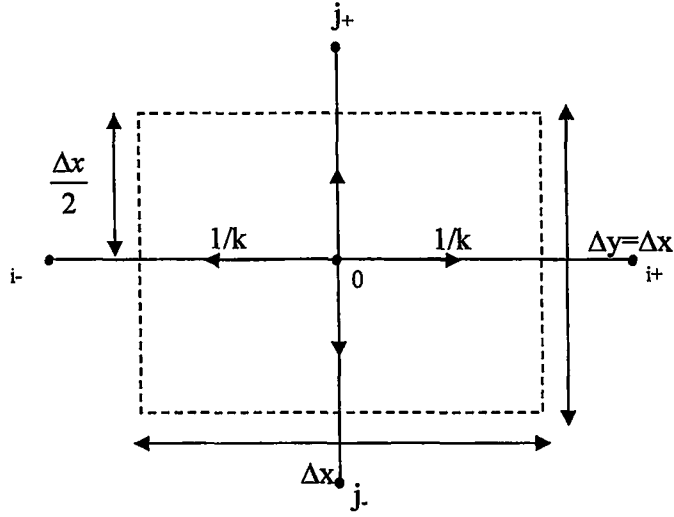
$k = 1, 2, \dots, K$: Kaynak noktaları. ($K = 9$)

$m = 1, 2, \dots, M$: Yüzey sıcaklık ölçüm noktaları. ($M = 4$)



Şekil 3.10: Problemin sayısal çözümü için kullanılan ızgara ve ilgili düğüm noktalarının indislenmesi.

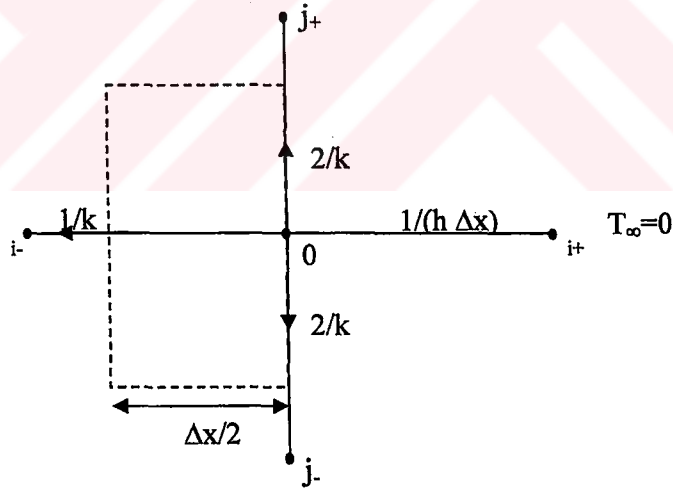
Her bir düğüm noktasının kare şeklindeki bir elemanın ortasında olduğu varsayılır ve ısı akısının diverjansı q kaynak şiddetine eşitlenerek sonlu fark denklem sistemi oluşturulur (Holman,1997).



Şekil 3.11: Bir iç ızgara noktasında Poisson denkleminin ayrıklaştırılması.

$$\frac{(T_0 - T_{i-})}{1/k} + \frac{(T_0 - T_{i+})}{1/k} + \frac{(T_0 - T_{j-})}{1/k} + \frac{(T_0 - T_{j+})}{1/k} = q_0 \Delta x^2 \quad (3.35)$$

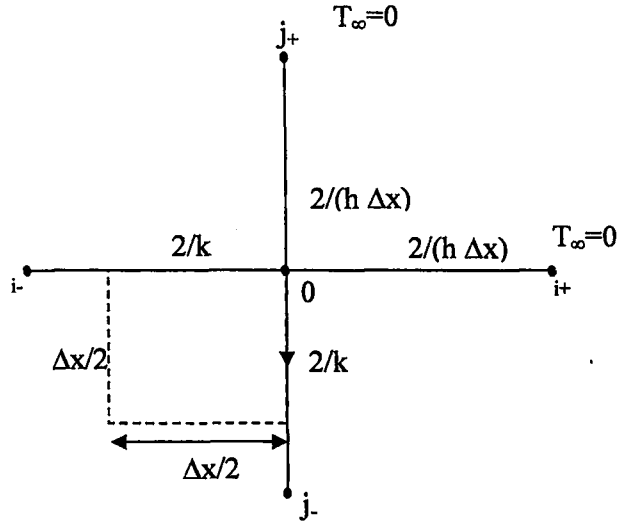
$$4T_0 - (T_{i-} + T_{i+} + T_{j-} + T_{j+}) = \frac{q_0 \Delta x^2}{k} \quad (3.36)$$



Şekil 3.12: Bir kenardaki ızgara noktası için Poisson denkleminin konvektif sınır koşulları ile beraber ayrıklaştırılması.

$$k(T_0 - T_{i-}) + \frac{k}{2}(T_0 - T_{j+}) + \frac{k}{2}(T_0 - T_{j-}) + (T_0 - T_\infty)h\Delta x = q_0 \frac{\Delta x^2}{2} \quad (3.37)$$

$$T_0(2 + \frac{h\Delta x}{k}) - \frac{1}{2}(2T_{i-} + T_{j-} + T_{j+}) = q_0 \frac{\Delta x^2}{2k} \quad (3.38)$$



Şekil 3.13: Köşedeki ızgara noktası için Poisson denkleminin konvektif sınır koşulları ile beraber ayrıklaştırılması.

$$k \frac{(T_0 - T_{i-})}{\Delta x/2} + h \Delta x \frac{(T_0 - T_\infty)}{2} + k \frac{(T_0 - T_{j-})}{\Delta x/2} + h \Delta x \frac{(T_0 - T_\infty)}{2} = q_0 \frac{\Delta x^2}{4} \quad (3.39)$$

$$T_0 \left(1 + \frac{h \Delta x}{k}\right) - \frac{1}{2} (T_{i-} + T_{j-}) = q_0 \frac{\Delta x^2}{4k} \quad (3.40)$$

Sonuçta sınır koşulları ile beraber ayrıklaştırılan Poisson denklemi

$$AT_k = q_k \quad k = 1, \dots, K \quad (3.41)$$

şeklinde , doğrusal denklem takımı halinde yazılabilir. A , $N \times N$ boyutlu matristir; T , $N \times K$ boyutlu matris olup T_k bu matrisin k numaralı sütunudur. Ayrıca sağ taraftaki vektör, örneğin 1 numaralı kaynak için

$$q_1 = [0, 0, \dots, 0, \underset{n=7}{1}, 0, \dots, \underset{n=25}{0}]^T \quad (3.42)$$

olarak tanımlanırsa,

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_K] \quad (N \times K) \quad (3.43)$$

şeklinde verilir. Problemin çözümü

$$T = A^{-1}Q \quad (3.44)$$

olur. Burada bize sadece $M = 4$ noktadaki sıcaklık ölçümleri gerekir. Ölçüm noktalarındaki çözümleri ayıklamak üzere

$$TM = UA^{-1}Q \quad (3.45)$$

yazılır. U matrisi, her satırdaki uygun bir elemanı “bir” ve geriye kalan elemanlar “sıfır” alınarak kurulan bir matristir:

$$u_1 = [\underset{n=1}{0}, \underset{n=1}{0}, \underset{n=3}{1}, \underset{m=1}{0}, \dots, \underset{n=25}{0}] \quad (3.46)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \quad M \times N \quad (3.47)$$

Şekil 3.10’a göre ve sıcaklık ölçüm vektörlerinden

$$TM_k = [T_{3,k}, T_{15,k}, T_{23,k}, T_{11,k}]^T \quad (3.48)$$

şeklinde kurulan $M \times K$ boyutlu bir matristir ve

$$TM = [TM_1, TM_2, \dots, TM_K] \quad (3.49)$$

şeklinde kurulur.

Hesaplamalar için ;

$$\frac{h\Delta x}{k} = 0.0625 \quad (3.50)$$

$$\frac{q_k \Delta x^2}{k} = 1 \quad (3.51)$$

alınmıştır.

Verilen herhangi bir ölçüm vektörü Y için

$$S_k = (Y - TM_k)^T (Y - TM_k) \quad (3.52)$$

veya

$$S_k = \|Y - TM_k\|^2 \quad (3.53)$$

değerleri hesaplanabilir. Daha sonra , $\arg \min_k (S_k)$ en uygun kaynak indisini belirler.

Bu öneriyi denemek için Y vektörlerine değişik oranlarda olasılık yoğunluk fonksiyonu Gaussian olan ve tamamen gelişigüzel olan gürültü (Gaussian beyaz gürültü) ilave edilerek hazırlanan ölçüm vektör seti kullanılmıştır ve sonuçlar aşağıda verilmiştir. Gaussian olasılık fonksiyonunun seçimindeki amaç, verilere dışarıdan gürültü ile en az bilgi ilavesinin sağlanmasıdır (George ve Dimitris,2000).

T_0 ölçüm değerlerinde merkezlenmiş ve varyansı $\sigma = 0.05 T_0, 0.1 T_0$ ve $0.15 T_0$ olan normal dağılımlara uyacak şekilde, gelişigüzel ve birbirinden bağımsız olarak türetilen yeni veriler hata veya gürültü ilave edilmiş T_0 değerleri olarak alınmıştır.

Tablo 3.1. Ölçüm hatalarına karşılık kaynak kestirimindeki yüzdelik başarı oranları.

Ölçüme ilave edilen hata yüzdesi Kaynak Konumu	5	10	15
1	91	56	38
2	91	62	49
5	89	39	17

Tablodan görüldüğü gibi, 2 numaralı kaynak konumu için çözümünün gürültü duyarlılığı minimum olmaktadır. 2 numaralı kaynak konumunda en iyi sonucu almamızın nedeni, 2 numaralı kaynağın yüzeye en yakın konumda olmasıdır. Dolayısıyla, 1 numaralı sıcaklık ölçer konumuna en yakın pozisyonudur.

Ters problem yönünden sonlu farklar yöntemi sonuçları tekrarlı ve sürekli Hopfield ağı yardımıyla da işlenebilir. K -adet vektör için K adet düğümü olan tekrarlı Hopfield ağı kurulur. Bir düğümden diğer düğüme olan geri beslemenin ağırlığı kod-defterindeki vektörler yardımıyla yapılan eğitim sonucunda bulunur. Daha sonra sisteme eksik bilgi içeren bir veri vektörü uygulandığında, sistem kendiliğinden verilen ve hata içeren vektörü en uygun kod-vektörü ile eşleştirir. Hopfield ağı geri besleme içerdiği için bir nonlinear nörodinamik sistem olarak nitelendirilir. Kod defterindeki her bir vektör bu sistemin bir çekim merkezini (=attractor) oluşturur. Sisteme gösterilen vektör hangi çekicinin toplama havzasında (basin of attraction) ise sistem o çekiciye yakınsar (Haykin, 1999). Hopfield ağı bu davranışı nedeniyle içerik ile adreslenen (=content addressable) bellek olarak nitelendirilebilir ve hata düzeltici (=error correcting) özeliği vardır.

Ancak bu çalışmada, ileri beslemeli ve hatayı geriye yayarak öğrenen çok katmanlı perseptron (Haykin, 1999) modeli üzerinde bir uygulama yapılacaktır.

4.BÖLÜM

YAPAY SİNİR AĞLARI YAKLAŞIMI

4.1 Giriş

Bu bölümde, ters ısı geçişi probleminin çözümüne YSA ile yapılan yaklaşım anlatılacaktır.

Canlı sinir sisteminden bir anlamda esinlenerek modellenen yapay sinir ağları, basitleştirilmiş nöron adı verilen ve çeşitli yollarla birbirine bağlı işlemci birimlerinden oluşmuş topluluklardır. Tek olarak düşünüldüklerinde basit bir işleve sahip olan nöronlar bir arada kullanıldıklarında oldukça karmaşık işlemleri gerçekleştirebilecek bir yapıya dönüşebilmektedirler.

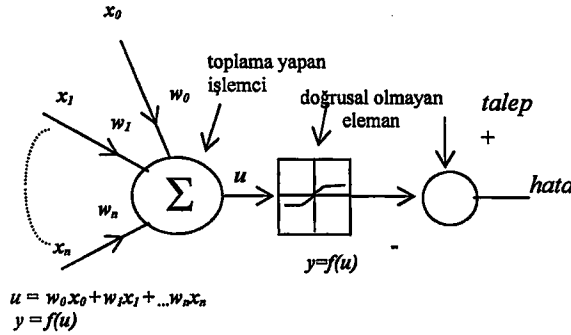
YSA'ları eğitilebilir adaptif sistemlerdir. Sistem değişen koşullara uyar ve kendi kendine organize olabilir. Yapay sinir ağları, eğitmeye/örnek bilgiye dayanan bir fonksiyon geliştirir ve tasarımıdan ziyade eğitmeyle hesaplama yapıları sağlayabilir. YSA'ları daha önce öğrendikleri bilgiyi eksik veya bozuk giriş verildiği zaman bile yeniden üretebilir ve doğrusal olmayan bir karakteristiğe sahip olmaları nedeniyle de gerçek dünya problemlerine daha doğru çözümler getirebilirler (Haykin,1999).

Yapay sinir ağlarının avantajları şu şekilde sıralanabilir: Yoğun bir şekilde paralel ve paralellikten dolayı hataya toleranslı olması, adaptif olarak tasarlanabilir olması ve eğitim setinin dışında problemin tam tanımlı olması gerekmemesidir (Haykin,1999).

Ancak rastgele uygulamalar için kesin kurallar ve tasarım kriterlerinin olmaması, ağın iç çalışmasını değerlendirecek genel bir yolun bulunamaması nedeniyle eğitim zor veya imkansız olabilir, ağın gelecekteki performansını da tahmin etmek zordur.

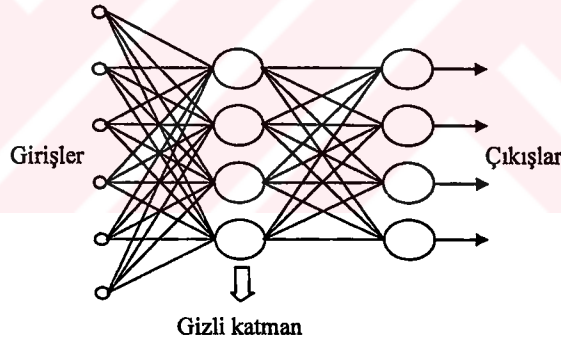
Bir YSA modelinde kullanılan bir işlemci Şekil 4.1'de gösterilmiştir. YSA işlemcisi, gelen uyarının sinaptik ağırlık vektörü ile skaler çarpımını bir doğrusal olmayan

fonksiyondan geçirerek aktivasyon değerini oluşturur. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ girişleri gösterirken; $w_1, w_2, \dots, w_n$ ise bağlantı ağırlık katsayılarına karşılık gelmektedir. y ise çıkışı göstermektedir (Yıldırım,2002).



şekil 4.1: Nöron modeli

En genel anlamda bir yapay sinir ağı modeli şekil 4.2' de gösterildiği gibidir. Bu şekilden de görülebileceği gibi her nöronun birçok girişi ve tek çıkışı vardır. Bu ıkış diğer nöronların girişlerini oluşturur ve sistem böylece paralel bir şekilde yayılır.



şekil 4.2: Tek gizli katmanlı YSA

Yapay sinir ağlarının görüntü işleme, işaret işleme, patern tanıma, tıp, askeri sistemler, finansal sistemler, planlama, kontrol ve araştırma, yapay zeka ve g sistemleri gibi uygulama alanları vardır.

Yapay sinir ağlarındaki öğrenme, sistemden yapılması istenen içe uygun olarak bağlantı ağırlık katsayılarının hesaplanması temeline dayanmaktadır. ğrenme kuralı ise, istenen

amaca yönelik olarak bağlantı ağırlık katsayılarının bazılarının veya tümünün değiştirilmesine yönelik olan bir denklem takımı olarak ifade edilebilir. Bu kural zamanla her bir nöronun cevabının değişmesine ve dolayısıyla ağı kendisini istenen cevaplara uyarlayabilmesine, bilgiyi kendi içinde istediği gibi düzenleyebilmesine veya kısaca öğrenmesine olanak tanır.

Yapay sinir ağı, programlama yerine örnekler ile eğitilir. Eğitme işlemi öğreticili ve öğreticisiz olmak üzere iki şekilde yapılır.

Öğreticili bir eğitimde, sisteme hem giriş bilgisi, hem de bu girişe karşın üretilmesi istenen çıkış bilgisi verilir. Böylece her denemeden sonra istenilen çıkış ile gerçek çıkış değerleri arasındaki fark öğrenme kuralına bağlı olarak uyarlanan ağırlık katsayıları ile en aza indirilmeye çalışılır. Çıkış hatası kabul edilebilir bir seviyeye gelince eğitim işlemine son verilir ve daha sonra eğitimde yer almamış yeni setler üzerinde elde edilen bu ağırlık katsayılarının veya başka bir deyişle ağı başarımına bakılır (Reed ve Marks, 1999).

Bu çalışmada öğrenme algoritması olarak öğreticili algoritmalar olan geriye yayılım algoritması kullanılmıştır.

Öğrenme sırasında öncelikle, gerçek değerden bulunan değer çıkarılarak hata elde edilir ve hatanın karesi alınır. Amaç, hatanın karesini minimum tutarak en iyi öğrenmeyi gerçekleştirebilmektir. Şekil 4.1'deki bir yapay sinir işlemcisi için hatanın karesi

$$\varepsilon^2 = (t - y)^2 \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Ağırlıkların bilinmeyen değerleri bir optimizasyon yöntemiyle bulunabilir. Genel olarak, gradyan alınarak optimizasyon yapılacağı için, hata yüzeyinin w ağırlıklar uzayındaki gradyanının hesaplanması gerekir.

$$\nabla_w \varepsilon^2 \equiv \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial w} \quad (4.2)$$

Daha önce, Bölüm 2.2.1'de klasik optimizasyon yöntemleri anlatılmıştır.

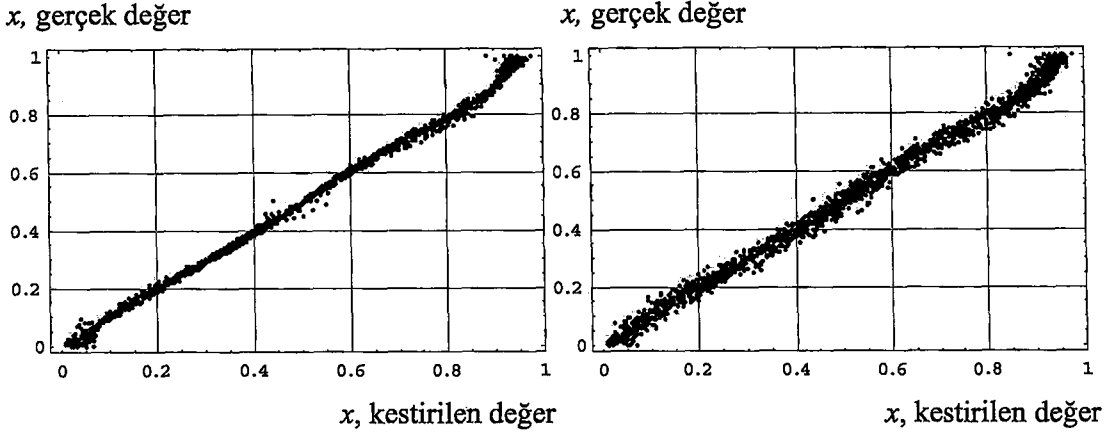
Geriye yayma algoritması, bu gradyan vektörünün bileşenlerini $\left(\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial w_i}\right)$, sistematik olarak , çıkıştan başlayarak girişe doğru hesaplar. Bu ters yöndeki hata sinyali akışı eşlenik-yapay sinir ağı şeklinde de ifade edilebilir (Reed ve Marks,1999).

4.2 Ters Isı Geçişi Problemi'nin YSA ile Çözümü

Problemi yapay sinir ağı yöntemi ile çözerken, gizli katmanda hiperbolik tanjant ve çıkış katmanında tek kutuplu sigmoid (lojistik) fonksiyonları, aktivasyon fonksiyonları olarak kullanılmıştır. Eğitim ve test amaçlı rastgele üretilen 2000'lik veri seti kullanılmıştır. Bu set, Şekil 3.1'de gösterildiği gibi, rastgele seçilen koordinatlarla üretilen verilerdir. Bu setin birinci yarısı eğitim için, diğer yarısı ise anında değerlendirme testi için kullanılmıştır. Eğitim, öğrenmenin bittiği ve ezberlemenin başladığı anda kesilmiştir. Yapay sinir ağı, $\mathcal{R}^2 [0,1] \leftarrow \mathcal{I}^2$ şeklindeki ters eşlemeyi öğrenmede başarısız olduğu için, $\mathcal{R}^2 [0,1] \leftarrow \mathcal{I}^4$ şeklindeki eşleme üzerinde durulmuştur. Bu iş için konfigürasyonu 4x10x2 olan bir YSA, geriye yayma yöntemiyle eğitilmiştir. Doyuma ulaşan düğümler hata sinyalinin geriye yayılmasını önledikleri için öğrenme durur (paraliz olayı). Bu durumu önlemek için, türevin sifıra yakın olduğu düğümlerde, türeve küçük pozitif değer ilave edilir. Eğitim süresince yakınsamada olabilecek salınımları söndürmek için momentum yöntemi kullanılmıştır.

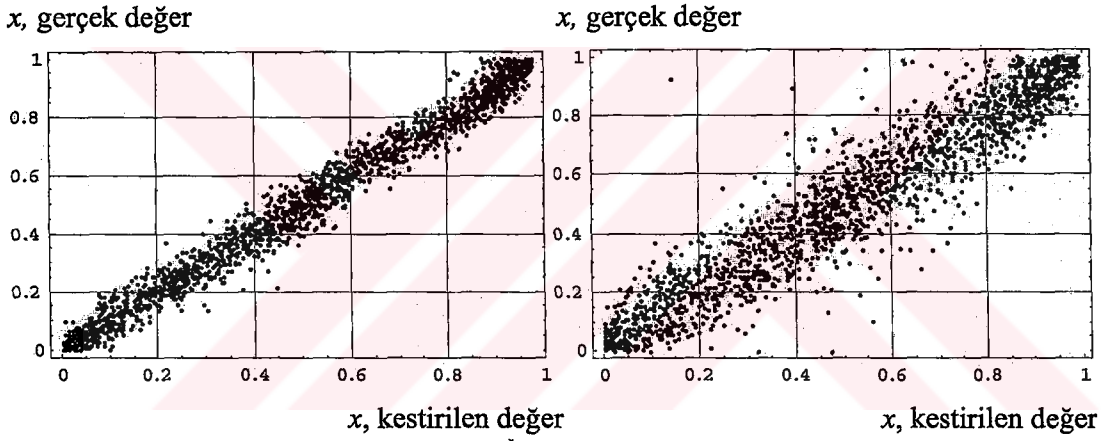
YSA'na giriş olarak dört adet sıcaklık ölçüm değerleri ve çıkışta hedef değer olarak nokta kaynağa ait koordinat değerleri uygulanmıştır. Eğitim için 75000 devir (1 devir=1000 iterasyon) gerekmiştir. Sonuçların gürültüye karşı dayanıklılığını görmek için giriş verilerine %5 , %10 ve %20 oranında beyaz gürültü katılmıştır (Yılmaz ve diğ., 2003).

Şekil 4.3'teki grafiklerden görülebileceği gibi, sonuçlar gürültü seviyesi ile orantılı olarak bozulmaktadır.



(a)

(b)



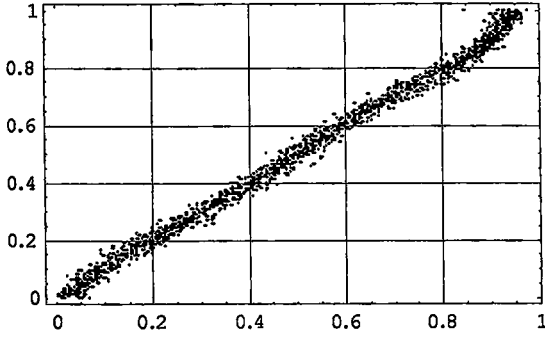
(c)

(d)

Şekil 4.3: Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA'larının, **a)** aynı tip verilerle, **b)** ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, **c)** ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle, **d)** ($\sigma = \%20$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi.

İkinci aşamada, eğitim için kullanılan giriş setine $\sigma = \%5, \%10$, ve $\%20$ oranında gürültü ilave edilmiş, ancak yakınsama için 200.000 devir gerekmiştir. Ulaşılan sonuçlar Şekil 4.4'deki grafiklerde görülmektedir.

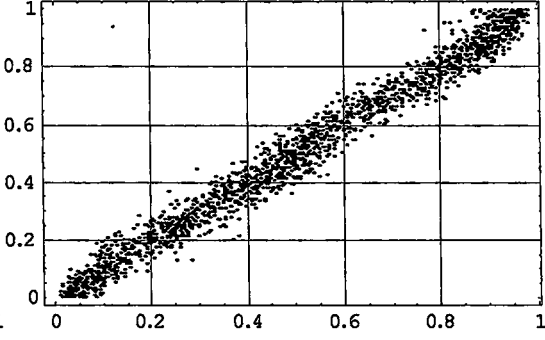
x , gerçek değer



x , kestirilen değer

(a)

x , gerçek değer



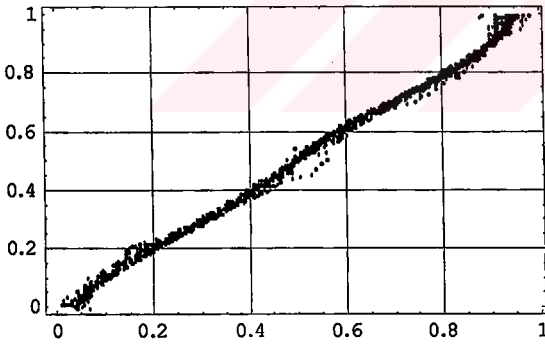
x , kestirilen değer

(b)

Şekil 4.4: a) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, b) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, aynı tip verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.

YSA'ları, $\sigma = \%10$ oranında hata içeren verilerle eğitilmiş, hata içermeyen ve $\sigma = \%5$ oranında hata içeren verilerle test edildiğinde ulaşılan neticeler Şekil 4.5'de görülmektedir.

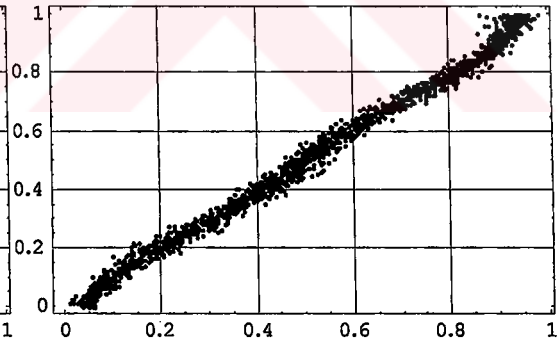
x , gerçek değer



x , kestirilen değer

(a)

x , gerçek değer

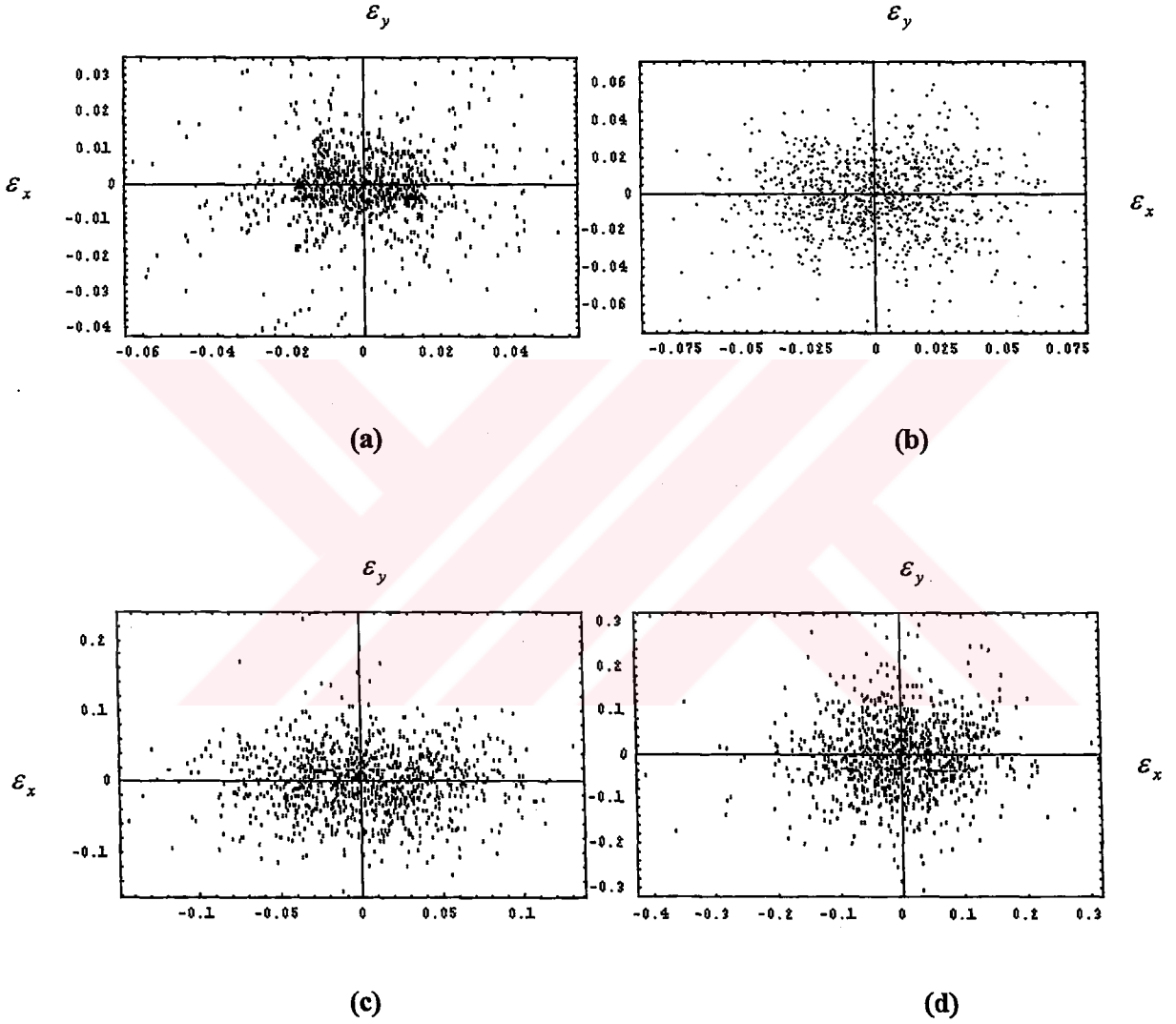


x , kestirilen değer

(b)

Şekil 4.5: ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle eğitilen YSA'larının, a) hata içermeyen verilerle test edilmesi sonucunda, b) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle test edilmesi sonucunda elde edilen netice.

Şekil 4.6’da hata içermeyen verilerle eğitilen YSA’larının sırasıyla $\sigma = 0, \%5, \%10, \%20$ gürültü ilave edilmiş olan verilerle yapılan test sonuçlarından elde edilen kestirim hataları grafik olarak verilmiştir. Tablo 4.1’de , eğitilmiş YSA’larının ölçüm gürültüsüne karşı hesaplanan σ (varyans) değerleri görülmektedir. Tablo 4.2’de de, $\%10$ hata sınırları içinde kabul edilebilir başarı yüzdeleri görülmektedir.



Şekil 4.6: Hata içermeyen verilerle eğitilen YSA’larının, a) aynı tip verilerle, b) ($\sigma = \%5$) hata içeren verilerle, c) ($\sigma = \%10$) hata içeren verilerle, d) ($\sigma = \%20$) hata içeren verilerle değerlendirilmesi sonucu elde edilen kestirim hata dağılımları.

Tablo 4.1. Eğitilmiş YSA'nın ölçüm gürültüsüne karşı toleransı, hata için σ .

Test verilerine Eğitim verilerine katılan gürültü, σ	% 0	% 5	% 10	% 20
% 0	0.0223	0.0333	0.0627	0.1300
% 5	-	0.0302	-	-
% 10	0.0250	0.0345	0.0611	-

Tablo 4.2. $|\Delta x|, |\Delta y| = 0.1$ kabul edilebilir hata sınırları içinde başarı yüzdeleri.

Test verilerine Eğitim verilerine katılan gürültü, σ	% 0	% 5	% 10	% 20
% 0	99	99	89	55
% 5	-	99	-	-
% 10	99	99	89	-

4.3. Ters Isı Geçiş Problemi'nin Çözümü için Kullanılan “Kendinden Organize Olan Haritalama Yöntemi” ile Elde Edilen Sonuçlar

Doğrudan problem iki boyutlu kaynak koordinat uzayını iki boyutlu sıcaklık ölçüm uzayına taşımaktadır: $f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{J}^2$. Bu tür doğrusal olmayan fonksiyonu kendinden organize olan haritalama yöntemi ile temsil etmek mümkün olabilir, ancak gerek şart fonksiyonun topolojik ilişkileri korumasıdır (Haykin, 1999). Bu duruma doğadan örnek olarak duyu organlarının beynin kabuğu (korteks) üzerindeki bölgelerle ilişkilendirilmiş olması gösterilebilir. Korteks üzerindeki bölgeler arasındaki topolojik ilişki, duyu organları arasındaki topolojik ilişkiyi yansıtır, ancak bölgelerin işgal ettiği alan duyu organının ayırma gücüyle orantılıdır (Rojas, 1999). MATLAB altında çalışan bir SOM (Self Organizing Map) programı denenmiş ve sonuçlar başarılı olmamıştır.

Bundan sonraki bölümde, bu çalışmada varılan sonuçlar tartışılacaktır.

5.BÖLÜM

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Oldukça basit ve doğrusal bir ters ısı geçişi problemi ele alındı ve problemin çeşitli çözümleri incelendi. Örnek olarak seçilen iki boyutlu sürekli rejim ısı geçişi problemi, içinde noktasal ısı kaynağı bulunan üniform bir kareden oluşmaktadır. Karenin kenarlarına III. tip sınır koşulları uygulanmıştır. Doğrudan ısı geçişi problemimiz Poisson denklemi ile ifade edilir. Ters ısı geçişi probleminde ise amacımız, karenin dört kenarında bulunan sıcaklık ölçerler yardımıyla elde edilen sıcaklık değerlerini kullanarak, karenin içinde bulunan ısı kaynağının konumunun tespit edilmesidir. Eğer ölçüm değerlerimiz mükemmel olsaydı, ters problemin çözümü ilginç olmayacaktı. Rastgele ölçüm hatalarının daima var olduğu kabul edilerek, ölçüm verilerine bir miktar gürültü ekleyerek ulaşılan sonuçların ne şekilde bir değişime uğradığı gözlemlenmeye çalışıldı. Çözüm için denenen metodlar içinde en iyi sonuç yapay sinir ağları ile elde edildi; kendinden organize olan haritalama yönteminde ise, topoloji korunmadığı için istenilen sonuçlara ulaşılamadı .

Yapılan çalışmanın sonuçları için şunlar söylenebilir. Ters eşleme Şekil 3.5’de görüldüğü gibi tek değilse YSA öğrenemez. Sınır verilerinin sayısı artırıldığında, YSA’ larından ters problemi öğrenmesi beklenebilir. Başlangıçta, YSA hatasız verilerle eğitildi ve test edildi. Bunun amacı YSA’ larının neler yapabileceğini görmektir. Green fonksiyonları yardımı ile bir seri şeklinde ifade edilen çözüm, kenarlarda iyi yakınsamamaktadır. Bu nedenle, grafiklerin köşelerine gidildikçe, doğrusallıktan sapma gözlenmektedir. Giriş verilerine eklenen gürültü miktarıyla orantılı olarak saçılmalarda artış görülmektedir. Eğitimin gürültülü verilerle yapılmasının, gürültüsüz verilerle yapılmasına kıyasla biraz daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Eğitim gürültülü verilerle yapılırca, YSA lokal minimuma takılmaz, ve global minimumu daha kolay yakalar ve hata yüzeyi daha düzgün olur (Reed ve Marks,1999.) Ayrıca eğitim sırasında giriş verileriyle beraber çıkışta

uygulanan talep verilerine de gürültü ilavesinin ezberlemeyi veya aşırı öğrenmeyi önlediği bilinmektedir (Karystinos, 2000).

Ancak eğitimde kullanılan giriş verilerine gürültü uygulanması Tikhonov'un önerdiği regülarizasyon etkisine neden olur (Reed ve Marks, 1999).

Bu çalışmada ayrıca, ters ısı geçişi probleminin çözümüne YSA dışında, optimizasyon yöntemi ve sonlu farklar yöntemi ile de yaklaşıldı.

Optimizasyon için, ters problem bir minimizasyon problemine dönüştürüldü ve hata yüzeyleri çizdirildi. Hata yüzeyleri, nokta kaynak (0.3, 0.4) koordinatlarında iken; yüzey sıcaklıklarının, karenin iki noktasında ve karenin her kenarının orta noktasına yerleştirilen sensörler yardımıyla olmak üzere, iki farklı durum için çizdirildi. Bu hata yüzeylerinden görüldü ki, kaynak konumunun az bir hata payıyla tespit edilebilmesi için, sensörlerin çalışılan kare bölgenin tüm kenarlarına yerleştirilmesi uygun olmaktadır. Sensörler karenin iki kenarına yerleştirildiğinde, yeteri kadar doğru kaynak konumu tespiti yapılamamaktadır.

Sonlu farklar yöntemi ile problemimizi çözmek için, Şekil 3.10'da gösterilen ızgara yapısı seçilmiştir. Bu yöntem ile ölçüm hatalarına karşılık kaynak kestirimindeki yüzdelik başarı oranları hesaplanarak, diğerleri ile kıyaslanmıştır. 2 numaralı kaynak konumu için çözümün gürültü duyarlılığının minimum olduğu görülmüştür.

Yapay sinir ağları, optimizasyon yöntemi ve sonlu farklar yöntemi ile kıyaslandığında, hem uygulama kolaylığı ve esnekliği açısından, hem de gürültüye karşı sonuçlarının dayanıklılığı açısından avantajlı olduğu anlaşılmıştır.

YSA çözümü, yüzey üzerinde dağılmış kaynak konfigürasyonları kullanılarak da genelleştirilebilir. Zamana bağlı kaynak durumları, geri beslemeli YSA ile çözülebilir. Ayrıca, geriye yayma metodu yerine kendinden regülarizasyon özeliği olan eşlenik gradyan metodu da denenebilir.

KAYNAKLAR

- Corson, D.R. and Lorrain, P.,** 1962. Introduction to Electromagnetic Fields and Waves W.t Freeman&Co.
- Engl, H.W., Hanke, M., and Neubauer, A.,** 2000. Regularization of Inverse Problems , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Frederic, L., Nilliot, C.L.,** 2002. Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion:application to experimental 2D problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, **45**, 1951-1964.
- Gencer, N.G., Tanzer, I.O.,** 1999. Forward problem solution of electromagnetic source imaging using a new BEM formulation with high-order elements,Phys. Med. Biol.,**44**,2275-2287.
- George, N.K., Dimitris, A.P.,** 2000. On overfitting, generalization, and randomly expanded training sets, IEEE Transactions on Neural Networks,**11**, 5.
- Haberman, R.,** 1987. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Department of Mathematics, Southern Methodist University. Englewood Cliffs; N.J.: Prentice-Hall.
- Haykin, S.,**1999. Neural Networks: A Comprehensive Foundation, 2nd ed., Prentice Hall International.
- Hensel, E.,** 1991. Inverse Theory and Applications for Engineers, Prentice-Hall.
- Holman, J.P.,** 1997.Heat Transfer, New York: McGraw-Hill .
- Johnson, C.R.,** 2001. Biomedical Engineering Handbook 2nd Ed., Ch 9, J.D. Bronzino,ed., CRC Press Electronic Edition.
- Kim, S.K., Lee, W.I.,** 2002. Solution of Inverse Heat Conduction Problems Using Maximum Entropy Method , International Journal of Heat and Mass Transfer,**45**,381-391.
- Kurpisz, K. and Nowak,A.J.,** 1995. Inverse Thermal Problems, Computational Mechanics Publications, Southhampton, UK.
- Kuzkaya, S.,**2003. Kaynak dağılımının kestirilmesini amaçlayan ters ısı geçişi probleminin çözümüne yapay sinir ağıları ile yaklaşım , *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- Monde, M.,** 2000. Analytical method in inverse heat transfer problem using Laplace transform technique , International Journal of Heat and Mass Transfer,**43**, 3965-3975.

- Monde, M., and Mitsutake Y.**, 2001. A new estimation method of thermal diffusivity using analytical inverse solution for one-dimensional heat conduction , *International Journal of Heat and Mass Transfer*,**44**, 3169-3177.
- Özışık, M.Necati and Helcio,R.B.**, 2000.*Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, New York: Taylor & Francis.
- Plonsey, R.**, 2001. *Biomedical Engineering Handbook* 2nd Ed., Ch 9, J.D. Bronzino,ed., CRC Press Electronic Edition.
- Prud'homme, M., and Nguyen T.H.**,1999. Fourier analysis of conjugate gradient method applied to inverse heat conduction problems , *International Journal of Heat and Mass Transfer*,**42**, 4447-4460.
- Reed, R.D., and Marks, R.J.**, 1999. *Neural Smithing: Supervised Learning in Feedforward Artificial Neural Networks*, The MIT Press.
- Rojas, R.**, 1999. *Neural Networks: A Systematic Introduction*, Springer.
- Shenefelt, J.R., Luck, R., Taylor, R.P., Berry,J.T.**, 2002. Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*,**45**, 67-74.
- Yıldırım, T.**, 2002. "Yapay Sinir Ağları ve Nöral Hesaplama" dersi notları, Yıldız Teknik Üniversitesi.
- Yılmaz,M., Şengül, M. and Geçkinli, M.**, 2003. On the Inverse Source Problem of the Poisson Equation, *International Conference on Signal Processing* , ÇOMÜ, Çanakkale, September 24-26.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. Lise eğitimini 1996 yılında Kabataş Erkek Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği bölümünden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Enerji Enstitüsü'nde yüksek lisansa girdi ve Kadir Has Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu kurumda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

