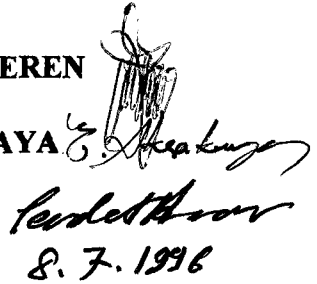


ELASTİK KİRİŞLERİN ELEKTRİKSEL SİMÜLASYON**YOLU İLE MODELLENMESİ****YÜKSEK LİSANS TEZİ****Müh. H. Burcu ERDEM****Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 Mayıs 1996****Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 1996****Tez Danışmanı****: Prof. Dr. Ali Nur GÖNÜLEREN****Diğer Jüri Üyeleri****: Prof. Dr. Ergül AKÇAKAYA****: Prof. Dr. Cevdet ACAR**
8. 7. 1996**HAZİRAN 1996**

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında benden değerli yardımlarını esigemeyen ;
Sayın hocam Prof. Dr. Ali Nur GÖNÜLEREN ve Sayın hocam Prof. Dr.Ergül
AKÇAKAYA'ya teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Mayıs, 1996

B. Erdem



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. ÇOK UÇLU MEKANİKSEL VE ELEKTRİKSEL SİSTEMLER	2
2.1 Bir Boyutlu Mekaniksel Sistemler	2
2.2 Yerdeğiştirme	5
2.3 İki Uçlu Yay Elemanları	9
2.4 Eğilmeye Çalışan Kirişlerin Oluşturdukları Çok Uçlu Yaylar	13
2.5 Eğilmeye Çalışan Kirişlerde Dönmelerin de Gözönüne Alınması	18
2.6 Çok Uçlu Yaylardan Oluşan Eğilmeye Çalışan Kirişlerin Elektriksel Sistem Biçiminde Gösterimi	27
2.7 Çok Uçlu İdeal Olmayan Transformatörlerin İdeal Eşdeğer Devresi	30
2.8 Çok Uçlu İdeal Mekanik Sistemler	46
2.9 Üç Uçlu İdeal Kaldıraçlar	47
2.10 Üç Uçlu İdeal Makaralar	50
2.11 Üç Uçlu İdeal Dişli Kutuları	51
SONUÇLAR ve ÖNERİLER	56
KAYNAKLAR	59
EKLER	60
EK A Hidrolik Sistem Elemanları	60
EK A.1 Hidrolik Sistem Elemanlarına Giriş	60
EK A.2 Bir Vektörün Farklı Dik Eksen Takımlarındaki Matrisel Gösterilişleri	61
EK A.3 T-Dönüşüm Matrisi Hakkında Euler Teoremi	65
ÖZGEÇMİŞ	68

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı; Elektrik devreleri ile mekanik sistemler arasında bir paralellik kurulması yada ortak bir noktada birleşmektir. Böyle bir benzerliği hedeflemek için öncelikle elektrik devrelerini oluşturan en az iki uçlu yada çok uçlu elemanlara karşılık mekanik sistemler de hangi elemanların bulunduğunu, mekanik sistemler belirlendikten sonra da uç büyüklüklerinin tanımlanması gerekir. Ancak bu uç büyüklüklerinin elektrik devrelerinde kullanılan akım yada gerilim büyüklüklerinden farkı skaler değil de vektörel karakterde olmalıdır. Elektrik ve mekanik sistemler de kullanılan bağıntıların önemi; bazı uçlarında elektriksel değişkenler, diğerlerinde ise mekanik değişkenlerin sözkonusu olduğu "elektro-mekanik" çok uçluların gözönüne alınması halinde işlev kazanmaktadır. Bu tür çok uçluların ani güç ifadesi yazıldığında, elektrik ve mekanik güçlerin toplamına eşit olacağından, bu toplamdaki her terimin aynı birimle ölçülmesi zorunluluğu vardır.

Bu çalışma da iki uçlu yaylarla oluşturulan, çok uçlu yay kutularından meydana gelen mekanik sistemlerin matematiksel modelleri ele alınmıştır. Daha sonra mekanik sistemdeki büyüklüklerin elektriksel karşılıkları yerleştirilerek ele alınan mekanik sistem elektriksel sistem şeklinde modellenmiştir. Devre analizindeki gerekli tanımlardan faydalanarak bu sistem birden fazla biçimde ifade edilmiştir. Spice programını kullanarak bulunan devrelerdeki akım değerleri ile mekanik sistemdeki denge ve moment denklemleri yardımı ile hesaplanan kuvvet değerleri nümerik olarak aynı sonuçları vermiştir. Böylelikle de ilgili sistemler arasında paralellik kurulabilir. Daha sonra üç uçlu ideal kaldıraç, makara ve dişli kutusu ele alınarak ideal bağ elemanlarının özellikleri incelenmiştir. Çünkü bu mekanik elemanların uç denklemlerinin elektriksel sistem karşılıkları; birbirini magnetik yoldan etkileyen iki endüktansın oluşturduğu, iki kapılı bir düzenin idealleştirilmesi ile elde edilen transformatöre aittir.

Çok uçlu mekanik elemanların, özellikle üç boyutlu uzayda hareketi sözkonusu olduğunda katı cismin modellenmesi büyük önem taşımaktadır. Örneğin dönen bir katı cismin hareketi incelenirken, farklı eksen takımlarının kullanılması inceleme de bazı kolaylıkları beraberinde getirmektedir. Bu eksen takımları arasındaki bağlantıyı da Ek bölümünde incelenen T dönüşüm matrisi sağlamaktadır.

SUMMARY

ELECTRICAL MODELING AND SIMULATION
OF ELASTIC BEAM

The target of this work is to find similarities between mechanical and electrical systems and represents the mechanical systems, as electrical circuits to find numerical solutions. For this reason; each elements of the mechanical systems should be simulated with a component of the electrical circuits. If components that use in mechanical systems are motion, it could be selected "F" force and "v" velocity variables or if it turns, selected "M(t)" moment and "w(t)" angular velocity variables. In order to write the terminal equations representing the non - linear capacitor and non-linear inductance, "q(t)" electrical charge, "Φ(t)" magnetic flux are used. The variables used in electrical and mechanical systems are given in table.

Table 1: The variables used in electrical and mechanical systems.

Electrical Variables			Mechanical Variables (Transition)			Mechanical Variables (Rotation)		
Voltage	v(t)	(v)	Velocity	v(t)	(m/sn)	Velocity	w(t)	(rad/s)
Current	i(t)	(A)	Force	f(t)	(N)	Moment	M(t)	(N.m)
Power	v(t).i(t)	(W)	Power	v(t).f(t)	(W)	Power	(t).M(t)	(N.m/s)
Energy	ε	(J)	Energy	ε _m	(N.m)	Energy	ε _m	(N.m)
Electrical charge	q(t)	(C)	Linear Momentum	p(t)	(N.s)	Angular Momentum	h(t)	(N.m.sn)
Magnetic flux	Φ(t)	(Wb)	Displacement	x(t)	(m)	Rotation Angle	θ(t)	(rad)

These equations are very useful for the analysis of the electro-mechanical multi port devices which have electrical variables at some ports while having mechanical variables at the others. Materials are tested in tension, in compression, in twist, in bending or in

combinations of these loadings. Machines in which two or more of these tests can be performed are called universal testing machines. By reason of its simplicity, the tension test is most commonly and easily performed. A major portion of strength theory rests on assumption gleaned from the tension test. Beams may be classified according to material composition and unstrained form.

In statics, the subject that is basic and preparatory to this one, there is a group of problems on frames and trusses that require determination of tension and compression forces in the component parts of these structures induced by specified loads. The process involved in the solution of such problems is one of analysis. If the problems were so changed as to necessitate calculation of the proper sizes for the component parts in order that the structure as a whole could safely carry the given loads, then the process involved in their solution would be one of design. Analysis and design are inverse processes. On the other hand, to design a structure is to determine, from given or assumed loads and major dimensional limitations, the appropriate sizes and forms of the component parts (sometimes also the proper material to use when there are two or more materials to choose from) in order that the structure will function effectively and safely.

Thus a simple beam is one that is made of one material, is straight in the unstrained state, and is of uniform cross section. It is quite distinct from, say, a compound beam that may be composed of two or more materials (for example, a reinforced concrete beam), or from a uniformly stressed beam that may have a varying cross section, or from a curved beam such as a hook or an arch.

Beams may also be classified after their manner of support. A simply supported beam rests on supports that permit rotation freely. It is implied that the support is capable of reacting in one sense only, as suggested by the knife edge. If it is desired to imply the possibility of either sense for the reaction, a hinge may be depicted. A simply supported beam that extends beyond a support is called a beam with an overhang. A beam that is supported at one end only is called cantilever beam, the supported end shown embedded in a wall, is referred to as a built in end. A cantilever beam is all overhang.

Beams may be classified according to whether or not the reactions at the support may be determined without recourse to principles other than those of equilibrium. A statically determinate beam is one which involves reactive forces that can be uniquely solved for from the equilibrium equations alone. If equations other than those of equilibrium are needed to effect a solution for these reactive forces, then the beam involved is a statically indeterminate one. A beam that rests on several simple supports, called a continuous beam is statically indeterminate.

If a beam may be subjected to different patterns of loading through the expected useful life of the structure, many of which cannot be accurately predicted, then it is obviously impractical to design it as variable cross section beam. The sensible act in such a situation is to design the beam with a uniform cross section whose strength should be governed by the probable maximum bending moment or maximum shear force that could be expected.

Two pointed beam that built in supported force to be bended by force P in figure 1 can be modeled by six pointed spring box and terminal equations can be shown at eq. 1.

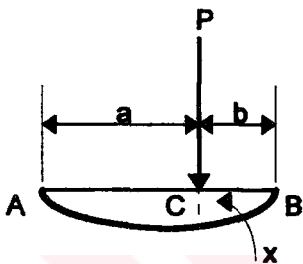


FIGURE 1: Two pointed beam that built in supported force to be bended by force P.

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ x_3(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ f_3(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$F=K \cdot X \quad (2)$$

This model is simplest for spring. where K is a constant called the force constant of the spring. Equation (2) is the force law for springs. The direction of the force is always opposite to the displacement of the endpoint from the origin. when the spring is stretched, $x > 0$ and F is negative; when the spring is compressed, $x < 0$ and F is positive. The force exerted by the spring is a restoring force in that it always points toward the origin. Real springs will obey Eq. (2), known as Hooke's law, if we do not stretch them beyond a limited range, We can think of K as the magnitude of the force per unit elongation. Thus very stiff springs have large values of K.

$$X=S \cdot F \quad (3)$$

Eq. (2) may also be represented such as Eq. (3) This condition S (K^{-1}) coefficient is flexibility coefficient of spring box.

The quantity E is known as Young's modulus, or the modulus of elasticity. It is essentially a constant for a given material. Heat treatment, cold working, alloying and moderate temperature changes have little effect on the value. For steel it is common to use a value of $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ in calculations. I is known as moment of inertia. The moment of inertia with respect to the impartial axis (z axis) will be

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{bh^3}{12} \quad (4)$$

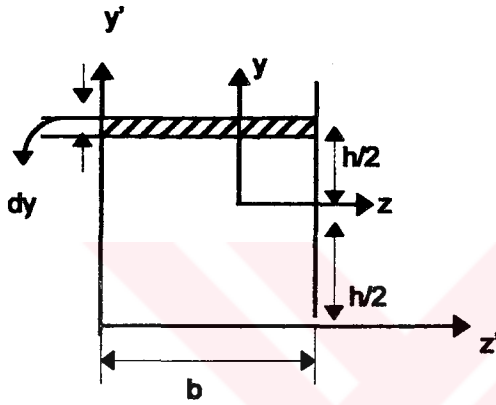


Figure 2: Calculation of inertia moment in analytical plane.

$$s_{22}=s_{11}=(l/3EI), \quad s_{12}=s_{21}=(-1/6EI), \quad s_{31}=s_{13}=-ab(l+b)/6EI, \quad s_{14}=s_{24}=(1/l)$$

$$s_{15}=s_{25}=-(1/l), \quad s_{23}=s_{32}=ab(l+a)/6EI, \quad s_{34}=(b/l), \quad s_{44}=s_{55}=0, \quad s_{35}=(a/l),$$

$$s_{41}=s_{42}=-(1/l), \quad s_{51}=(1/l), s_{52}=-(1/l), \quad s_{54}=s_{45}=0, \quad s_{33}=(a.b)^2/3EI$$

$$s_{43}=-(b/l), \quad s_{53}=-(a/l)$$

It is possible to represent an elastic beam which is designed as a six pointed spring box, an electrical circuit consist of six pointed ideal and nonideal transformers and other electrical circuit elements. Numerical solution can be found by using Pspice electronic circuit analysis program. As a result of simulation the force values which are calculated from moment and equilibrium equations at mechanical system should be identical to the current values obtained from Pspice simulation of electrical circuits.

The mathematical model of the inductances consist of the transformer can be given as follows;

$$L=[L_{ij}]_n=L_dKL_d \quad (5)$$

$$L_d=\text{diag} [L_{11}^{1/2}, L_{22}^{1/2}, \dots, L_{nn}^{1/2}] \quad (6)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{12} & 1 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$k_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_{ii} \cdot L_{jj}}}$$

The coefficient k_{ij} is called a coupling coefficient and the matrix K is called the coupling coefficient matrix. The diagonal entries in L are called self-inductances while the off diagonal ones are called mutual inductances. Note that since L_d is diagonal Eq. (5) is a congruent transformation hence K is also a positive semidefinite matrix. This implies at once the fact that,

$$|k_{ij}| = \frac{|L_{ij}|}{\sqrt{L_{ii} \cdot L_{jj}}} \leq 1$$

The magnitude of coupling coefficients cannot exceed unity. The case where $|k_{ij}|=1$ is characterized by saying that coils L_{ii} and L_{jj} are perfectly coupled.

Many system models require only the basic active and passive 1-ports joined at 0 and 1 junctions but we sometimes also need two ports. We now consider two ideal port elements, both of which are ideal in the sense of power conservation, just as the junctions are. One of the ideal two ports is called a transformer (TF); in fact, the ideal electric transformer is modeled by a bond graph transformer. In mechanical systems a variety of devices are represented in idealized form as transformers, including the rigid, massless lever shown in fig. 3. The transformer has two ports, and the efforts (forces) at two ports are proportional to each other, as are flows (velocities). For the lever, if F_1 and F_2 are vertical forces as shown and the pivot is frictionless, by taking moments about the pivot that found the equilibrium relation,

$$\begin{aligned} aF_1 &= bF_2 \\ F_1 &= (b/a)F_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Another relation is found for the vertical velocities V_1 and V_2 (assuming small angular rotation) by computing the angular velocity of the rod as,

$$-(V_1/a) = \omega = (V_2/b)$$

$$-(b/a)V_1 = V_2 \quad (9)$$

The ratio (b/a) is called a modulus of transformer. If eq. (8) and (9) are multiplied together appropriately and the common factor (b/a) is canceled out,

$$F_1 \cdot V_1 = P_1 = P_2 = F_2 \cdot V_2 \quad (10)$$

A lever represented as an ideal transformer which indicates that power flowing into port 1 is always equal to power flowing out of port 2. This power relation is embodied in the bond graph symbol in Fig.3, which shows the sign convention of half arrows pointing through the TF symbol. Since both forces are shown pointing down in Fig.3, Eq. (8) must be written with

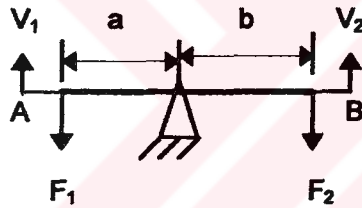


Figure 3: A lever represented as a transformer.

a positive proportionality factor b/a . Then V_1 and V_2 up Eq.(9) is written with the same proportionality factor (b/a) . The result is that $F_1 \cdot V_1$ is power being supplied to the left hand end of the lever and $F_2 \cdot V_2$ is power being expended by the right-hand end of the lever on whatever is connected to it.

Similarly; Mathematical models of ideal roller and ideal gearbox have also same properties of the mathematical model of ideal transformer. Although no actual systems are truly linear, control-system design leans heavily on linear models. This is understandable, since only for linear systems is there a generally complete set of available tools for design. However We must keep in mind that what linear models tell us is possible only may be possible only to a limited extent. Physical limitations or nonlinearities, often provide constraints not obvious in the mathematical model.

BÖLÜM 1

1.1. Giriş

Elektrik devreleri ile mekanik sistemler arasında bir benzerlik kurabilmek için öncelikle bu sistemler için tanımlanan, iç ve uç büyüklükler arasında bir benzerlik kurulması, sonra da iki sistem arasında bu değişkenlere bağlı olarak tanımlanabilen iki ve çok uçlu sistem elemanlarının modellerini karşılaştırmak gerekir. Bu anlamda yapılan basit bir karşılaştırma sonucu tablo 2.1. de elektrik ve mekanik sistemler için verilmiştir. Bu benzerliğin kurulmasında en önemli nokta iç ve uç büyüklükler çarpımının güç (watt) boyutunda olmasıdır. Öteleme ve dönme hareketi yapan 2 uçlu mekanik elemanlara ilişkin uç denklemlerini şekil 2.1. ve 2.2. 'deki işaret akış diyagramları üzerinde göstermek mümkündür. Mekanik sistemler de kullanılan kuvvet ve moment büyüklükleri kesitleme denklemlerini, hız büyüklükleri de çevre denklemlerini sağlamalıdır. Bu denklemlerin; sistem grafında bir ağaç seçilerek hangi hızların (açısal hız) ve kuvvetlerin (momentlerin) bağımsız oldukları belirlenir. Mekanik sistemler de, bağımsız hızlar ağacının dallarına, bağımsız kuvvetler de girişlerine ilişkin uç büyüklüklerdir. Ağaç seçimi, sistem denklemlerini elde etmek üzere, uygulanacak değişik yöntemlere bağlı olarak yapılmaktadır. Bu yöntemlerin amacı; çevre ve kesitleme denklemleri ile mekanik sistemleri oluşturan elemanlara ilişkin uç denklemlerinin birlikte gözönüne alınarak, içinde daha az sayıda bilinmeyen uç büyüklükleri bulunan durum denklemlerinin yazılmasını sağlamaktır.

BÖLÜM 2

2. ÇOK UÇLU MEKANİKSEL VE ELEKTRİKSEL SİSTEMLER

2.1. Bir Boyutlu Mekanik Sistemler

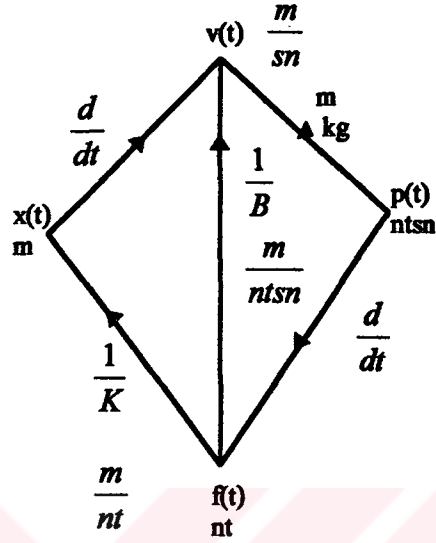
Elektrik devrelerinin analizi için kullanılan metotlardan bazıları mekanik sistemlerin analizi içinde kullanılabilir. Mekanik sistemlerde yer alan uç büyüklükleri, bu elemanların öteleme yapmaları halinde kuvvet $f(t)$ ve hız $v(t)$, dönme hareketi yapmaları halinde ise moment $M(t)$ ve açısal hız $w(t)$ olarak seçilmektedir.

Elektrik devrelerinde lineer olmayan endüktans ve kapasitelere ilişkin uç denklemlerini yazabilmek amacı ile $i(t)$ ve $v(t)$ nin entegralleri olan, sırası ile $q(t)$ elektrik yükü ve $\Phi(t)$ magnetik akı büyüklüklerini kullanmak yararlı olacaktır. Mekanik sistemlerde bunlara karşı gelen büyüklükler ise öteleme hareketi yapan elemanlar için lineer momentum $p(t)$ ve yerdeğiştirme $x(t)$, dönme hareketi yapan mekanik elemanlar için açısal momentum $h(t)$ ve dönme miktarı yada açısal yerdeğiştirme $\theta(t)$ olmaktadır.

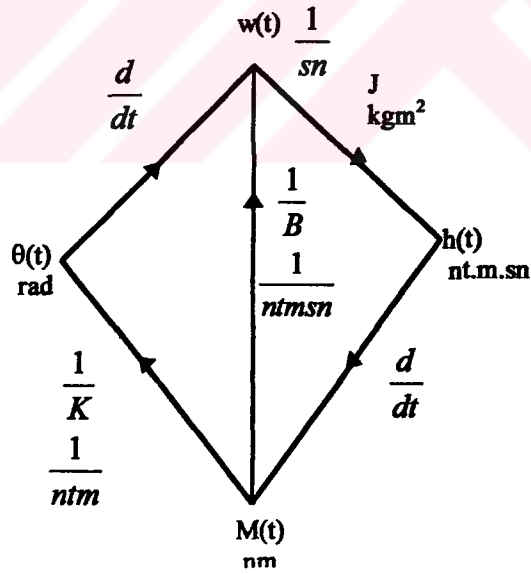
Sistemlerin analizinde verilen problem ile ilgili en önemli nokta; o sistemi oluşturan elemanların matematik modellerinin bilinmesidir. Diğer bir husus da bu elemanların sistemdeki dağılım noktalarının belirlenmesidir. Bu ikinci husus sistemin grafının çizilmesi şartını gerektirmektedir. Aşağıda; Tablo 2.1. de bir boyutlu hareket yapan elektriksel ve mekaniksel sistem elemanlarının uç denklemleri, şekil 2.1. ve şekil 2.2. de ise uç denklemleri işaret akış diyagramı üzerinde gösterilmektedir. Diyagramda , dönme hareketi yapan elemanlar farklı birimlerle ifade edilmektedir. Burada B,K,J elemanları için (N.m.sn), (N.m) ve (N.m.sn²) birimleri geçerlidir.

Tablo 2.1: Elektrik ve Mekanik sistemlerde kullanılan büyüklükler.

Elektrik	Mekanik (Öteleme)	Mekanik (Dönme)
Direnç: R ohm $v(t)=R.i(t)$ volt	Sönüm B N-sn/m $v(t)=\frac{1}{B} f(t)$ m/sn	Sönüm B $w(t)=\frac{1}{B} M(t)$ rad/sn
Endüktans L henry $v(t)=L \frac{d}{dt} i(t)$	Yay K N/m $v(t)=\frac{d}{K dt} f(t)$	Yay K $w(t)=\frac{d}{K dt} M(t)$
Kapasite C farad $i(t)=C \frac{d}{dt} v(t)$ amper	Kütle m kg $f(t)=m \frac{d}{dt} v(t)$ Nt	Atalet J kgm^2 $M(t)=J \frac{d}{dt} w(t)$ N.m



Şekil 2.1: Öteleme hareketi yapan 2- uçlu mekanik elemanlara ilişkin işaret akış diyagramı.



Şekil 2.2: Dönme hareketi yapan 2- uçlu mekanik elemanlara ilişkin işaret akış diyagramı.

2.2. Yerdeğiştirme

Üç boyutlu uzayda noktaların konumlarını belirlemek için bu uzayda seçilmiş genellikle bir kartezyen oxyz koordinat sistemi gözönüne alınır. Böylece uzayda ki herhangi bir A noktasının konumu, bu noktanın koordinatlarından oluşan (x,y,z) üçlüsü ile belirlenmiş olur. A noktasının konumunu, üç boyutlu uzayda gelişigüzel seçilen başka bir o noktasına göre $\vec{OA}$ yer vektörü ile tanımlamak mümkündür. Buna göre , örneğin: A, B, C gibi üç noktanın konumları sırası ile $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ yer vektörleri ile gösterilebilir. Bu durum şekil 2.3.(a) da verilmiştir. Şimdi A, B, C noktaları uzayda gelişigüzel hareket ederek şekil 2.3.(b) de , gösterilen sırası ile; A', B' ve C' konumlarında bulunsunlar. Noktaların bu yeni durumları $\vec{OA'}, \vec{OB'}, \vec{OC'}$ yer vektörleri ile gösterilebilir. Tanım olarak $\vec{AA'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}$ ile A,B ve C noktalarının "yerdeğiştirme vektörleri" yada kısaca "şekil üzerinden sırası ile $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ ile gösterilmiş olup yer vektörleri cinsinden;

$$\begin{aligned}\vec{e}_A &= \vec{OA'} - \vec{OA} \\ \vec{e}_B &= \vec{OB'} - \vec{OB} \\ \vec{e}_C &= \vec{OC'} - \vec{OC}\end{aligned}\tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilebilirler. Şimdi uzayda A ve B gibi sadece iki nokta gözönüne alınırsa; şekil

(2.3.d) de bu noktaların yerdeğiştirme vektörleri $\vec{e}_A, \vec{e}_B$ ile gösterilmiştir.

Şekil 2.3.(d)' de;

$$\vec{e}_{BA} = \vec{e}_B - \vec{e}_A\tag{2.2}$$

bağıntısı ile tanımlanan vektöre, B noktasının A noktasına göre "yerdeğiştirme vektörü" adı verilir. Bu bağıntı, şekil 2.3.(d) 'deki vektör diagramını özetlemektedir. Bu vektör diagramını daha basit biçimde göstermek amacı ile "lineer graftan" yararlanılabilir. Bunun için uzayda şekil

2.3.(a) da gösterilen A,B,C noktaları ve bunlara ilişkin $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ vektörleri gözönüne alınır. A, B, C noktalarının $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ vektörlerine şekil 2.3.(e)'deki gibi yönelmiş graf elemanları (ao, bo, co) karşılık düşürülür. Bir ağaç görünümünde olan bu grafın a,b,c düğümleri arasına

bazı yeni elemanlar şekil 2.3.(f) deki gibi bağlandığında, (2.1) bağıntısı bu grafta uygun biçimde yeni graf elemanı (b,a) ile temsil edilebilir. Şekil 2.3. (f) de olduğu gibi grafta (ao), (bo) ve (co) graf elemanları dal olarak seçildiğinde (ba) giriş olur ve bu giriş elemanının tanımladığı çevreye ilişkin çevre denklemleri (2.2) bağıntısını verir. Bu vektörel bağıntı bir oxzyz kartezyen eksen sisteminin eksenleri üzerine izdüşürülürse, yerdeğiştirme vektörlerinin aynı türden bileşenleri için de:

$$\begin{aligned}(\epsilon_{BA})_x &= (\epsilon_B)_x - (\epsilon_A)_x \\ (\epsilon_{BA})_y &= (\epsilon_B)_y - (\epsilon_A)_y \\ (\epsilon_{BA})_z &= (\epsilon_B)_z - (\epsilon_A)_z\end{aligned}\quad (2.3)$$

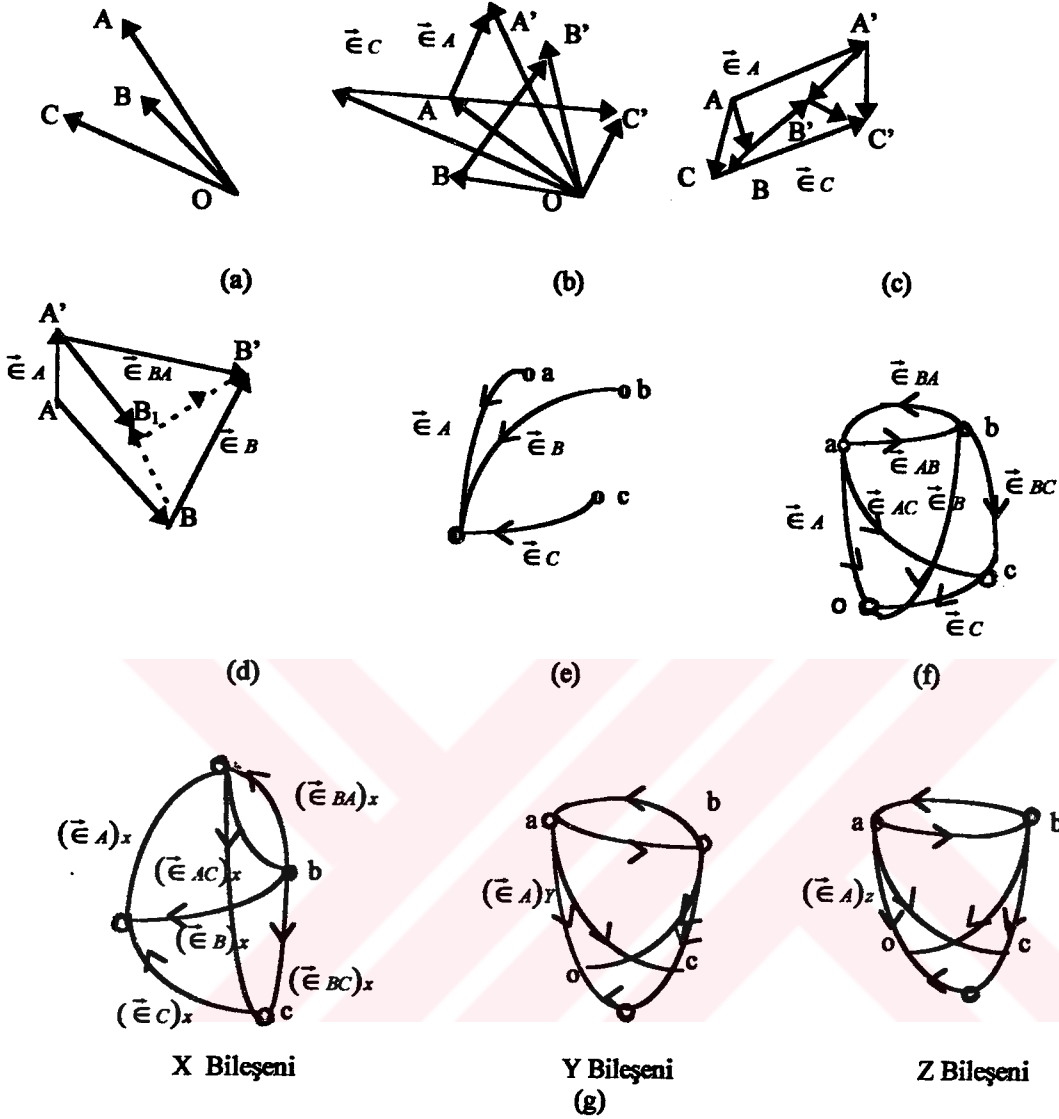
bağıntıları geçerli olur. Bunların herbiri (2.3.f) deki grafta (ba) girişinin tanımladığı çevre denklemlerine karşılık düşerler. Gerçekte (2.3) skaler bağıntıları şekil 2.3.(f) deki vektör grafin kopyaları olan şekil 2.3.(g) bileşen graflardaki (ab) elemanının tanımladıkları çevre denklemleridir. Şekil 2.3.(f) deki vektör graf ile şekil 2.3.(g) de birlikte gözönüne alınan üç bileşen graf arasında bir karşılaştırma yapılırsa taşıdıkları bilgiler yönünden her iki grafin birbirine denk olduğu anlaşılır. Şekil 2.3.(g) den yerdeğiştirmelerin x bileşenleri için aşağıdaki çevre denklemleri yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\epsilon_A)_x \\ (\epsilon_B)_x \\ (\epsilon_C)_x \\ (\epsilon_{CA})_x \\ (\epsilon_{AB})_x \\ (\epsilon_{BC})_x \\ (\epsilon_{AC})_x \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Bu denklemler $B(\epsilon)_x=0$ biçiminde de yazılabilir. Burada B dört satır ve yedi sütunlu temel çevreler matrisini $(\epsilon)_x$ de graftaki bütün elemanlara ilişkin yer değiştirmelerin x eksenindeki izdüşümlerden oluşan (2.4) deki sütun matrisi göstermektedir. Diğer bileşenler içinde aynı çevre matrisi söz konusu olup, her üç bileşen için;

$$\begin{aligned}B(\epsilon)_x &= 0 \\ B(\epsilon)_y &= 0 \\ B(\epsilon)_z &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

bağıntıları geçerlidir.



Şekil 2.3: (a) Uzayda , A , B ve C noktalarının konumlarını belirleyen $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ yer vektörleri.

- (b) A,B ve C noktalarına ilişkin $\vec{e}_A = \vec{AA'}, \vec{e}_B = \vec{BB'}, \vec{e}_C = \vec{CC'}$ yerdeğiştirme vektörleri.
- (c) Çeşitli yerdeğiştirme vektörleri.
- (d) B noktasının A noktasına göre yerdeğiştirme vektörü olan $\vec{e}_{BA}$ nın tanımı.
- (e) (b) deki $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ yerdeğiştirme vektörlerinin yönlendirilmiş bir graf. üzerinde gösterimi.
- (f) A nın B ve C noktalarına göre, B nin C ye ve B nin A ya göre yerdeğiştirme vektörlerinin graf üzerinde gösterimi.
- (g) (f) deki vektör grafa eşdeğer bileşen graflar.

(2.5) çevre denklemleri;

$$\begin{bmatrix} B & & \\ & B & \\ & & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\epsilon)_x \\ (\epsilon)_y \\ (\epsilon)_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

biçimine getirildikten sonra. yerdeğiştirme bileşenleri yeniden düzenlenerek bu denklemler;

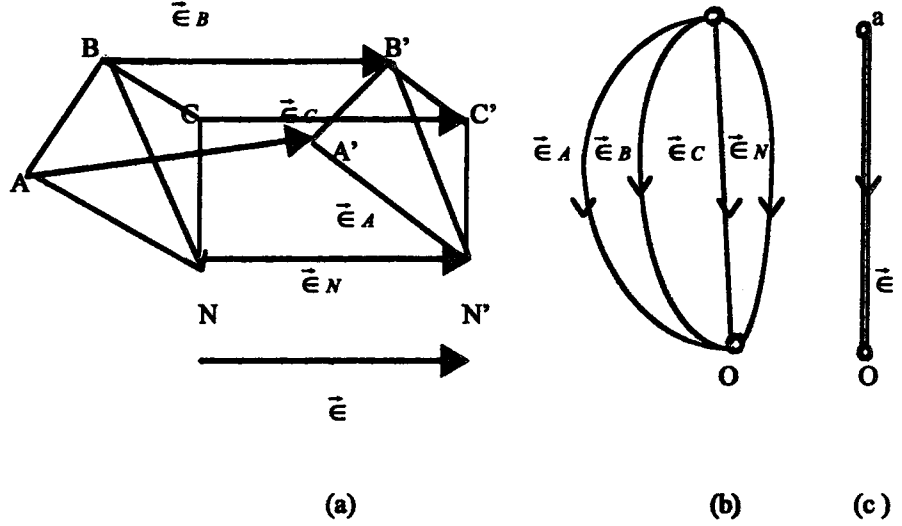
$$\vec{B} \cdot \epsilon = 0 \quad (2.7)$$

formunu alır. Bu denklemlerde görülen ϵ sütun matrisinin elemanları 3'er 3'er bölünerek her bir üç elemanlı alt matris yerdeğiştirme vektörünün seçilen oxyz dik eksen sisteminin üç eksenindeki izdüşümlerine karşı düşmektedir. B matrisi ise şekil 2.4. deki matrise ; benzetmekte, ancak B' nin 1,-1 ve 0 elemanlarına B matrisinde sırası ile, 3*3 boyutlu, U, -U, 0 matrisleri karşı düşmektedir. Buna göre (2.7) bağıntısının ayrıntılı ifadesi aşağıdaki gibi olur;

$$B \cdot \epsilon = \begin{bmatrix} U & -U & 0 & U & & \\ -U & U & 0 & & U & \\ 0 & -U & U & & & U \\ -U & 0 & U & & & U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_A \\ \epsilon_B \\ \epsilon_{BA} \\ \epsilon_{AB} \\ \epsilon_{BC} \\ \epsilon_C \\ \epsilon_{AC} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

Şimdi, uzayda sabit bir o noktası ile A,B,...; N noktaları ve $\vec{\epsilon}_A, \vec{\epsilon}_B, \dots, \vec{\epsilon}_N$ yerdeğiştirme vektörleri gözönüne alındığında, A,B,...,N noktalarının, $\vec{\epsilon}_A = \vec{\epsilon}_B = \dots = \vec{\epsilon}_N = \vec{\epsilon}$ yerdeğiştirmeleri arasında , bu noktaların hepsi $\vec{\epsilon}$ vektörü ile belirlenebilen bir öteleme hareketi yapmaktadır. A,B,...,N noktalarının birbirilerine göre yerdeğiştirmeleri, (2.2) bağıntısı gereğince sıfır vektörleridir, Şekil 2.4.(a) da ; A,B,..., N noktalarından oluşan çok yüzlü hacmin uzayda bütünüyle ve bozulmadan yerdeğiştirdiği gözlenmektedir. Şekil değiştirmeyen kendisine ait herhangi 2 noktası arasındaki uzaklığın değişmediği çok yüzlü hacme "katı cisim" denir. Yerdeğiştirme vektörleri ile ilgili olarak şekil 2.3.(e) ve şekil 2.3.(f) 'dekine benzer bir graf verilebilir. Burada graf şekil 2.4.(b)' deki gibi olacaktır. A,B,...,N noktaları bir katı cisme ait noktalar olarak gözönüne alındıklarından, bu katı cismin uzayda ϵ kadar öteleme yapması ile kendisine ait bütün noktaları da aynı ötelemeleri yapacaktır. Eğer öteleme yapan katı cismin

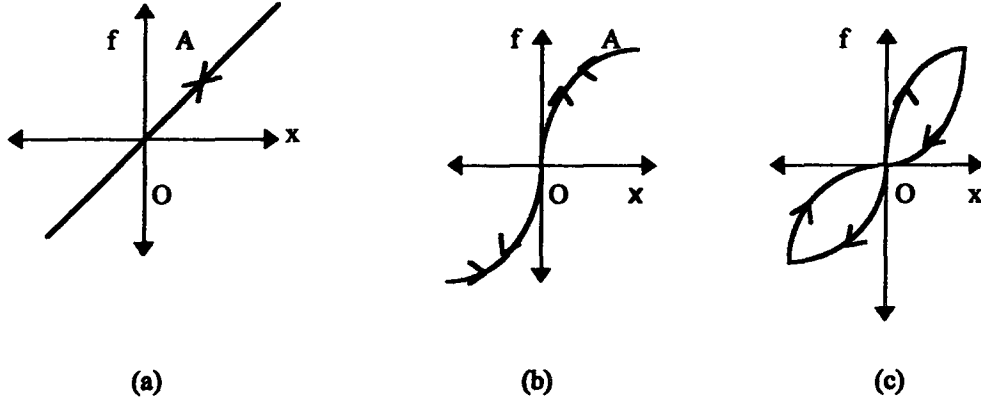
hareketi gözlenirse, sabit herhangi bir noktasından ; örneğin : A noktası ile o noktasını incelemek yeterlidir. Sonuç olarak öteleme hareketi yapan bir katı cisim için şekil 2.4.(c) ' deki uç graf kullanılabilir.



Şekil 2.4 : (a) ABCN çok yüzlüsünün (dört yüzlü hacmin) $\vec{E}$ ile tanımlanan yer değiştirmesi.
 (b) Öteleme hareketi yapan ABCN çokyüzlüsüne ilişkin yerdeğistirmeler grafi.
 (c) Katı cismin uç grafi.

2.3. İki Uçlu Yay Elemanları

Gerçekte yay için verilen en ideal model ,(2.11) de tanımlanan uç denklemleridir. Burada kuvvet ve yerdeğistirme belirli bir sınırı geçmediği takdirde, fiziksel bir yay elemanının özellikleri oldukça iyi temsil edilmektedir. Bu uç denkleminin grafiği $x(t)$ ve $f(t)$ ' nin artan ve eksilen değerleri için uç büyüklükleri değistiği takdirde başlangıçtan geçen bir doğrudur. Şekil 2.5.(a) Bu tür $x-f$ karakteristiğine sahip yay çeşidine 'lineer ve elastik yay ' adı verilir. Yayların bir başka çeşidi de, elastik olup da lineer olmayan yaylardır. Bu tür yaylara ilişkin $x-f$ karakteristiği Şekil 2.5.(b) de gösterilmiştir. Burada yayın boyunu uzatan yada kısaltan kuvvet ortadan kalktığı takdirde, lineer elastik , bir yayda olduğu gibi uçları arasındaki yerdeğistirmede sıfır olur, yay eski şeklini alır. Pratikte, şekil değışmesine uğramış yay az yada çok ısınır ve yayın şeklini değıştirmek üzere yapılan iş ,(yaya verilen enerji) yay eski şekline döndürüldüğünde geriye aynen alınmaz. Bu tür yaylara, lineer olmayan elastik fakat 'kayıplı yay' denir. Şekil 2.5.(c) de bu tür yaya ilişkin $x-f$ karakteristiği çizilmiştir. Yayın uçları arasına şiddeti sıfırdan başlayarak gittikçe artan bir kuvvet uygulandığında , yayın uzaması da artar ve kuvvet belirli bir değere eriştiğinde uzama durur.



Şekil 2.5: (a) Lineer elastik yay karakteristiği.
 (b) Lineer olmayan elastik yay karakteristiği.
 (c) Lineer olmayan elastik ve kayıplı yayın tek değerli olmayan karakteristiği.

.Bu durum şekil 2.5.(c) de $(OA)_1$ eğrisi ile gösterilmiştir. Bu durumda yaya verilen enerji $(OA)_1$ eğri parçası ile OX eksenı arasında kalan alana eşittir. Şimdi yayın şekil değiştirmesine neden olan kuvvet yavaş yavaş azaltılarak sıfır değerine getirilirse, yayın uzaması da azalarak sıfır olur. Ancak değişim şekil 2.5.(c) de $(OA)_2$ eğrisi boyunca olduğundan, yayın vereceği enerji $(OA)_2$ eğri parçası ile OX eksenı arasındaki alana eşittir. Buna göre yayın bir kez yüklenmesi durumunda $(OA)_1$ ve $(OA)_2$ eğrileri arasındaki alana eşit enerji; ısı olarak kaybolmuştur. Bir boyutlu mekanik sistemlerde 2 uçlu yay elemanlarının uçları Şekil 2.6.(a) da gösterildiği gibi bir OX eksenı üzerindeki hareket edebilmektedir. Yayın A ve B uçları, ox eksenı üzerinde A' ve B' konumlarına geldiğinde, bu uçlardaki yerdeğiştirmeler sırası ile $x_A(t)$ ve $x_B(t)$ ile gösterildiğinde, bu yer değıştirmelere ilişkin Şekil 2.6.(b)' deki grafitan ,B ucunun A'ya göre olan yerdeğıştirmesi ;

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t) \quad (2.9)$$

bağıntısı ile verilebilir. Şekil 2.6.(d)' deki uç grafitana ilişkin uç denklemlerinde, x_A , x_B , F_A , F_B ölçü aletlerinin gösterdikleri büyüklükler, x_a , x_b , f_a , ve f_b ' ler arasındaki bağıntıları oluşacaktır.

$$\begin{bmatrix} f_A(t) \\ f_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_A(t) \\ x_B(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

k_{AA} katsayısının belirlenmesi için (2.10)' daki ilk denklemde $x_B(t)=0$ alınarak $f_A(t)$ ile $x_a(t)$ ölçmeleri arasında bağıntı aranmalıdır. Böylelikle $f_b(t)$ ile $x_A(t)$ ölçmeleri arasındaki bağıntı

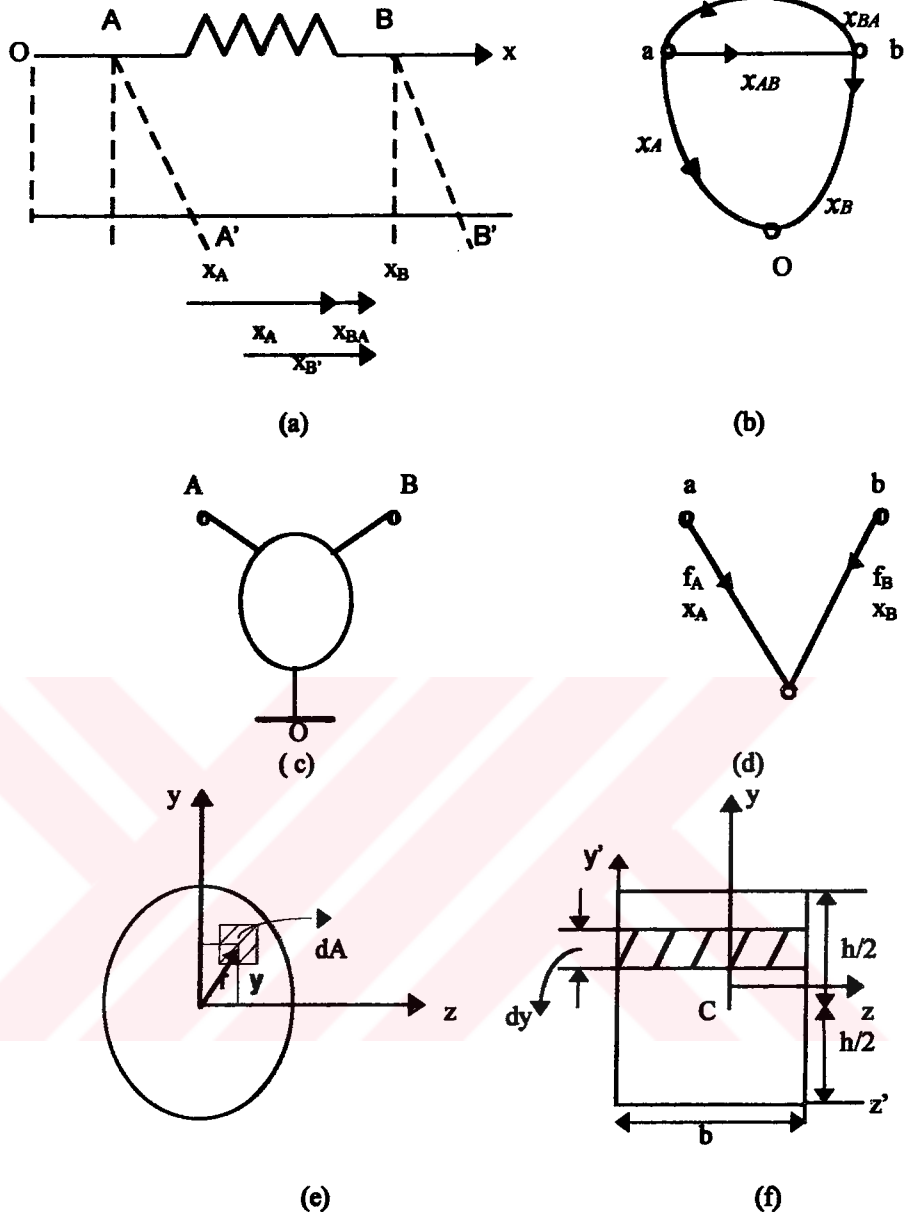
k_{AB} katsayısını belirler. Benzer şekilde (2.10)'daki katsayılar matrisinin ikinci sütunundaki k_{AB} ve k_{BB} elemanlarını elde etmek üzere, $x_a(t)=0$ alınıp $f_b(t)$ ve $x_b(t)$ ölçmelerinden k_{BB} , $f_A(t)$ ve $x_B(t)$ ölçmelerinden de k_{AB} katsayısı belirlenmiş olur. Art arda yapılan deneyler de çeşitli x değerleri için bulunacak f_A değerlerinin biribiri ile orantılı olduğunu, bir başka deyişle; $x_a(t)$ ve $(f_a(t))$ arasındaki bağıntının;

$$f_A(t) = K \cdot x_A(t) \quad (2.11)$$

ifadesi ile verilebileceğini gösterir. Bu basit lineer bağıntı "Hooke Yasası" adı ile bilinir. Genelde elastik malzemeler için geçerli olan Hooke yasasına göre; helis şeklinde bir yay gerilirse, yaydaki gerilme, pratik olarak sadece burulmadır. Yayın uzama miktarı olan x , geren k kuvveti ile doğru orantılıdır. Kuvvetin uzama miktarına oranı olan K sabiti; 'kuvvet çarpanı' veya 'yayın sertliği' adını alır. Bu bağıntı yalnız statik koşullar da doğrudur. Dinamik koşullar da yayın ataleti de dikkate alınacak şekilde değiştirilmelidir. Bununla birlikte yayın kütlesi, hareket eden kütlelere göre küçük olursa, kinetik problemlerin çözümünde bağıntıyı kullanmakla yapılan hata küçüktür, Çok uçlu yay kutularının, uç denklemlerini de ifade eden bu bağıntı da K katsayılar matrisleri simetrik ve yarı kesin pozitif matrislerdir. Böyle matrisler de K' lara, çok uçlu yay kutusunun 'yay katsayıları' veya 'rijidlik matrisleri' (stiffness) adı verilmektedir. K matrislerinin tersleri olmaları halinde uç denklemler:

$$x(t) = s f(t) \quad (s = K^{-1}) \quad (2.12)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu durum da S matrisine yay kutusunun "esneklik yada elastiklik (flexibility) matrisi" adı verilir.



Şekil 2.6: (a) 2 uçlu yay elemanın bir ox ekseninde hareketi.

(b) Yer değiştirmelere ilişkin graf.

(c) Yay elemanın bir 3 uçlu olarak gözönüne alınması.

(d) 3-uçlu yay elemanına ilişkin uç-grafi.

(e) Tarafsız eksene göre atalet momentinin gösterimi.

(f) Atalet momentinin analitik düzlemde hesaplanması.

2.4. Eğilmeye Çalışan Kirişlerin Oluşturdukları Çok Uçlu Yaylar

Şekil 2.7.(b)' de bir ucu ankastre bağlı, diğer ucu serbest olan bir konsol kiriş gösterilmiştir. İki ucu mesnedli kirişin A ve B uçları mafsallı olup, kiriş kendisine etki eden P kuvveti nedeni ile eğilmeye çalıştığından bu uçlar serbestçe dönebilmektedir. Kirişin B ucunda kayar mesned kullanılarak A ve B uçlarındaki tepki kuvvetlerinin düşey olmaları ve dolayısı ile bu kuvvetlerin, yalnız statik (denge) denklemleri yardımıyla hesaplanmaları sağlanmıştır. Konsol kirişin ise A ucu, kiriş eğilmeye çalıştığına rijid olarak bağlandığı referansa göre dönme yapamamaktadır Çubuğun şekil 2.7.(a) , 2 ucundan sabit mesnedli (bir açıklıklı) elastik kiriş yada çubuk , CB kısmı eğilmeden sonra şekil değiştirmeden bir doğru olarak kalacaktır. Bu durumda çubuklar da yalnız P kuvvetinin uygulandığı, C noktalarının küçük yerdeğiştirmeleri gözönüne alınırsa, elastik sınırlar içinde kalındığı sürece 2 uçlu yay elemanı olarak verilen uç grafına ilişkin uç denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$x(t) = \frac{(a.b)^2}{3EI} \times f(t) \quad \text{(Bir açıklıklı kiriş)} \quad (2.13.a)$$

$$x(t) = \frac{a^3}{3E.I} \times f(t) \quad \text{(konsol kiriş)} \quad (2.13.b)$$

Kirişlerin eğilmesi incelenirken şu tipteki integrallere rastlanır;

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (2.14)$$

Burada her dA elemanının alanı, bu elemanın z ekseninden olan uzaklığının karesi ile çarpılarak kirişin A kesit alanı içinde entegre edilmektedir.(şekil 2.6.(e)) İşte bu entegrale A alanının z eksenine göre "atalet momenti"denir. Atalet momenti analitik yoldan kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin ; bir dikdörtgen alınırsa, (şekil 2.6.(f)) ağırlık merkezinden geçen z yatay eksenine göre, atalet momentini bulmak için bu dikdörtgen, şekilde taralı olarak gösterilen sonsuz küçük elemanlara ayrıldığında:

$$I_z = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{h^3 b}{12} \quad (2.15)$$

ve aynı şekilde dikdörtgenin y eksenine göre atalet momenti de; $I_y = 2 \int_0^{b/2} z^2 h dz = \frac{h \cdot b^3}{12}$ olarak

bulunur.

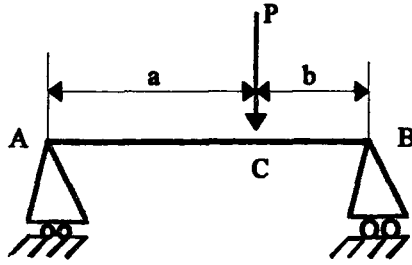
Basit eğilme teorisinden tarafsız eksen çubuğun; dik kesitinin ağırlık merkezinden geçmektedir. Bu doğru çubuğun ekseninden geçen asal eğilme düzlemine diktir. Çubuğun dik kesitinin bir simetri eksenini olması halinde, bu eksenin, zorunlu olarak kesitin ağırlık merkezinden geçen asal eksenlerinden biri olması nedeni ile bu tarafsız eksende, bu simetri eksenine dik olan öteki asal eksenini oluşturacaktır. Çubuk kesitinin tarafsız eksene göre atalet momenti I ve çubuğun yapıldığı malzemenin elastiklik modülü E ile gösterilirse, $E \cdot I$ çarpımına çubuğun "eğilme rijidliği" adı verilir. Elastisite modülünün değeri malzemelere göre farklılık gösterir. Yapı içindeki kusurlardan etkilenmez. Ve yüksek ısılarda azalarak değişir. Bazı malzemelerin elastisite sabitleri aşağıdaki tabloda verilmektedir. Burada akma sınırı, kırışta yükün kalkmış olmasına rağmen 0.02 oranının da meydana gelen şekil değişikliğidir.

Tablo 2.2 : Bazı malzemelerin mekanik özellikleri.

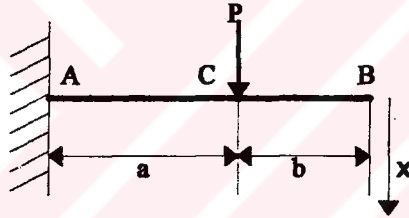
	Akma Sınırı	Çekme Mukavemeti	Elastisite Modülü
Çelik (st-37)	min 22 kg/mm ²	37-45 kg/mm ²	2.1*10 ⁴ kg/mm ²
Dökme Çelik	26 kg/mm ²	52 kg/mm ²	2.1*10 ⁴ kg/mm ²
Pirinç	12 kg/mm ²	32 kg/mm ²	1.05*10 ⁴ kg/mm ²
Kızıl Çam	-	900 kg/cm ²	10 ⁵ kg/cm ²
Meşe	-	900 kg/cm ²	12.5* 10 ⁴ kg/cm ²

Şekil 2.8.(a)'daki çubuğu (DCO) uçlarına sahip 3 uçlu bir yay kutusu olarak gözönüne almak mümkündür. Bu yay kutusu şekil 2.8.(c) de çizilmiş olup , şekil 2.8.(d)'deki uç grafına ilişkin uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} x_D(t) \\ x_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{DD} & s_{DC} \\ s_{CD} & s_{CC} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_D(t) \\ f_C(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$



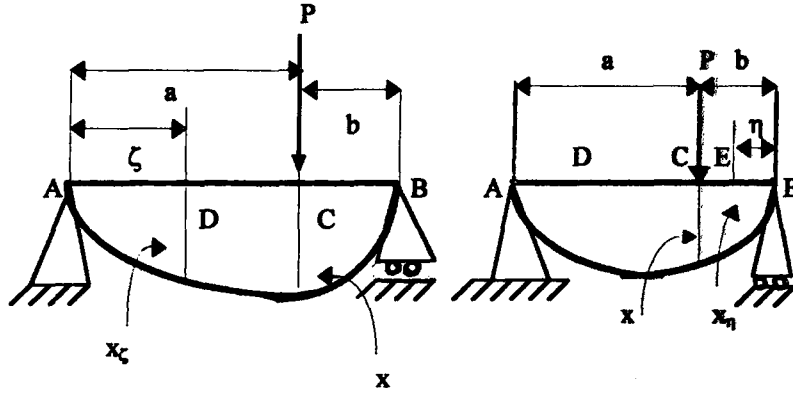
(a)



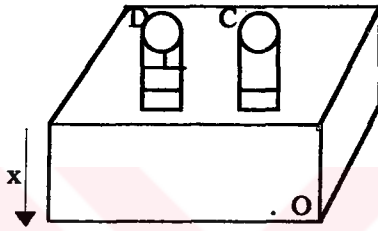
(b)

Şekil 2.7: (a) İki ucundan sabit mesnedlenmiş kiriş.
(b) Bir ucu ankastre mesnedlenmiş konsol kiriş.

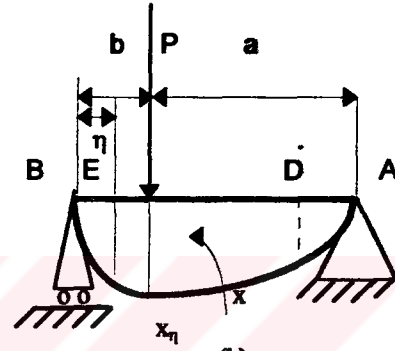
biçiminde yazılabilir. Bu modelde D ucunun kiriş üzerindeki yeri ϵ parametresi ile belirlendiğinden, ϵ 'nin değiştirilmesi ile kiriş üzerindeki D 'nin yeri değiştirilebilir. Bu özellik kullanılarak ϵ 'nin bazı sabit değerlerine karşı düşen kiriş üzerinde çok sayıda noktalar gözönüne alınarak kirişi çok uçlu bir yay kutusu olarak modellemek mümkündür. Bu amaçla şekil 2.9.(a) da gösterildiği üzere, elastik kiriş üzerinde $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktaları seçilerek kirişin $(n+1)$ uçlu bir yay kutusu olarak modeli elde edilecektir.



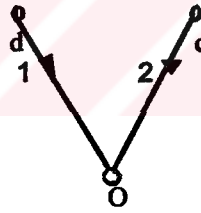
(a)



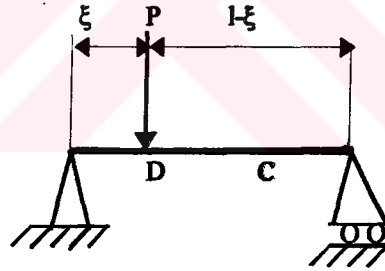
(c)



(b)

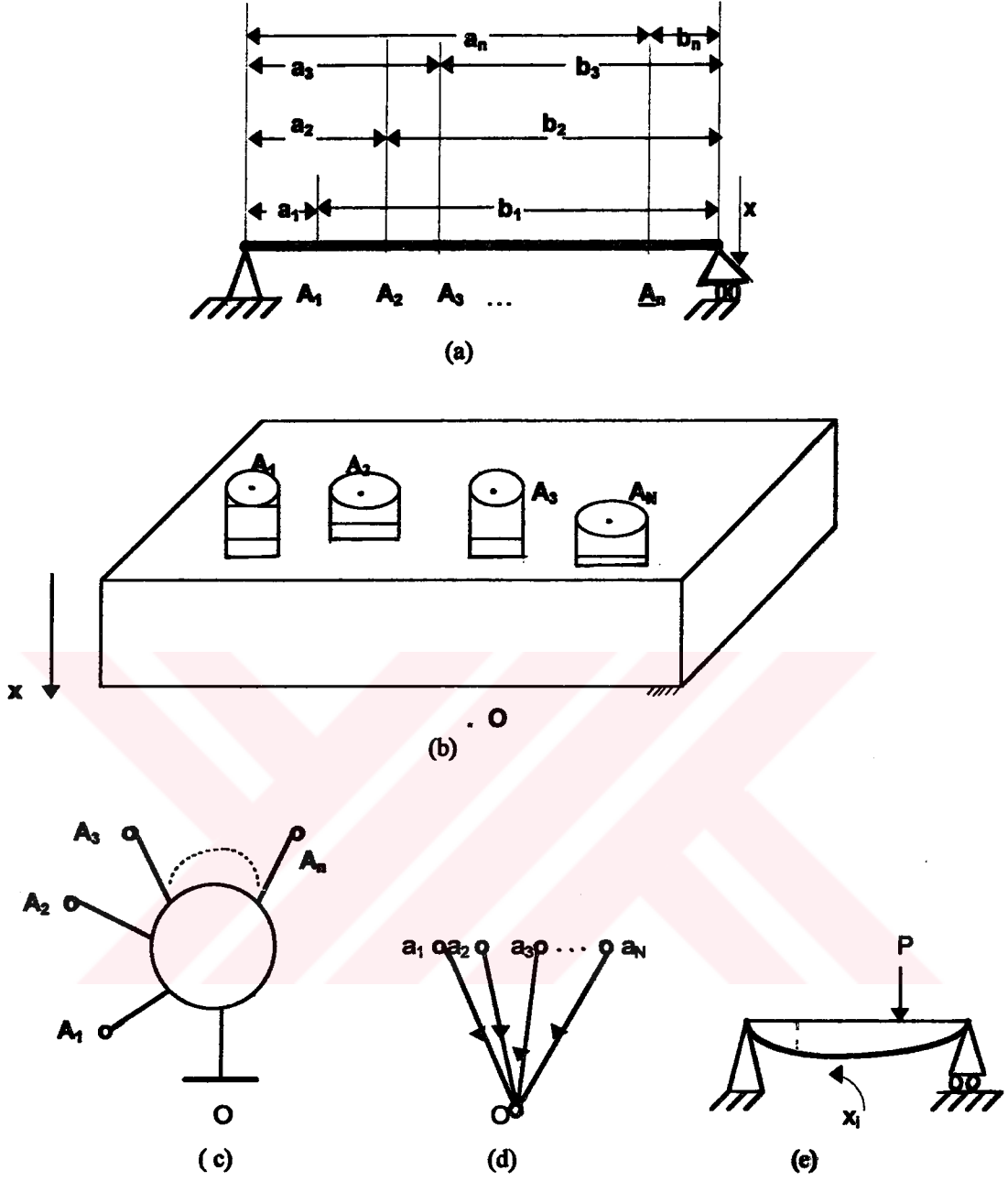


(d)



(e)

Şekil 2.8: (a) Elastik eğri yardımı ile çubuğun C den farklı D noktasındaki ($0 \leq \zeta \leq a$) yerdeğiştirmesi.
 (b) Çubuk üzerinde $0 \leq \eta \leq b$ uzaklığı ile tanımlanmış E noktası ve bu noktadaki x_η değişimi.
 (c) (a) daki çubuğun 3 uçlu bir yay kutusu olarak düşünülmesi.
 (d) 3 uçlu yay kutusuna ilişkin uç graf.
 (e) (a) daki çubukta P yükünün C den D noktasına taşınması hali.



Şekil 2.9: (a) İki uçundan sabit mesnedlenmiş kiriş ve üzerinde seçilen sabit $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktaları.

(b) (a) daki elastik kirişin $(n+1)$ uçlu bir yay kutusu olarak gösterimi.

(c) $(n+1)$ uçlu yay kutusunun sembolü.

(d) Yay kutusuna ilişkin uç graf.

(e) Resiprosite teoreminin gösterilişi.

Bu (n+1) uçlu elemana ilişkin uç graf şekil(2.9.d)' deki gibi seçildiğinde (n+1) uçlu elemanın uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$S_{II} = \frac{(a_I \cdot b_I)^2}{3EI} \quad S_{IJ} = \frac{(a_I b_J)^2}{3EI} \quad (2.18)$$

$$S_{II} = S_{IJ} = \frac{a_I b_J}{6EI} (l^2 - b_J - a_I^2) \quad (2.19)$$

olarak verilir. (2.18) denklemlerindeki S katsayılar matrisi simetrik ve elemanlar (2.19) bağıntıları ile belirlenebilir.

2.5. Eğilmeye Çalışan Kirişlerde Dönmelerinde Gözönüne Alınması

Şekil 2.7' de elastik kiriş P kuvvetinin etkisi altında eğilmeye çalışırken kiriş A ve B uçlarından serbestçe dönebilmektedir. Küçük olduğu varsayılan dönme açıları kirişin içinde bulunduğu kağıt düzlemine dik ve bize doğru yönelmiş bir oz eksenine göre ölçüldüklerinde;

$$\theta_A = \frac{-ab(l+b)}{6EI} P \quad \theta_B = \frac{ab(l+a)}{6EI} P \quad (2.20)$$

bağıntıları ile belirlenebilir. Şekil 2.10.(a)'daki çubuğun A,B,C uçlarına döndürme momentleri uygulandığında, çubuk eğilecek ancak uçlarda bir yerdeğiştirme olmaksızın, sadece bu mesnedler de tepki ortaya çıkacaktır. Kirişin eğildikten sonra alacağı durumlardan biri şekil 2.10.(b) de gösterilmiştir. Pozitif işaretli M_1, M_2, M_3 momentleri ,z eksenini yönünde "döndürme momenti " adını almakla beraber , bu momentler çubuğun eksenine (y eksenini) göre düşünülürse "eğilme momenti" adını alır. Şekil 2.10.(c) de gösterilen iki ucundan sabit mesnedli kiriş , yalnız A ve B uçlarından uygulanan M_1, M_2 eğilme momentleri etkisiyle eğilmeye

çalışmaktadır. Bu kiriş 3 uçlu bir yay elemanı (kutus) olarak modellenebilir. Yay kutusunun şekil 2.10 daki uç grafına ilişkin uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

şeklindedir. Burada esneklik matrisinin elemanları ;

$$s_{11} = s_{22} = \frac{1}{3EI}, s_{12} = s_{21} = -\frac{1}{6EI}$$

bağıntıları ile bellidir. Şimdi şekil 2.10.(c) deki kiriş üzerinde seçilen bir C noktasına P yükü uygulandığında bu noktada yer değiştirme $x_3(t)$ ve kuvvet $f_3(t)$ ise kiriş şekil 2.10.(f) deki gibi 4 uçlu bir yay kutusu olarak gözönüne alınabilir. Bu yay kutusunun uç grafına ilişkin uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

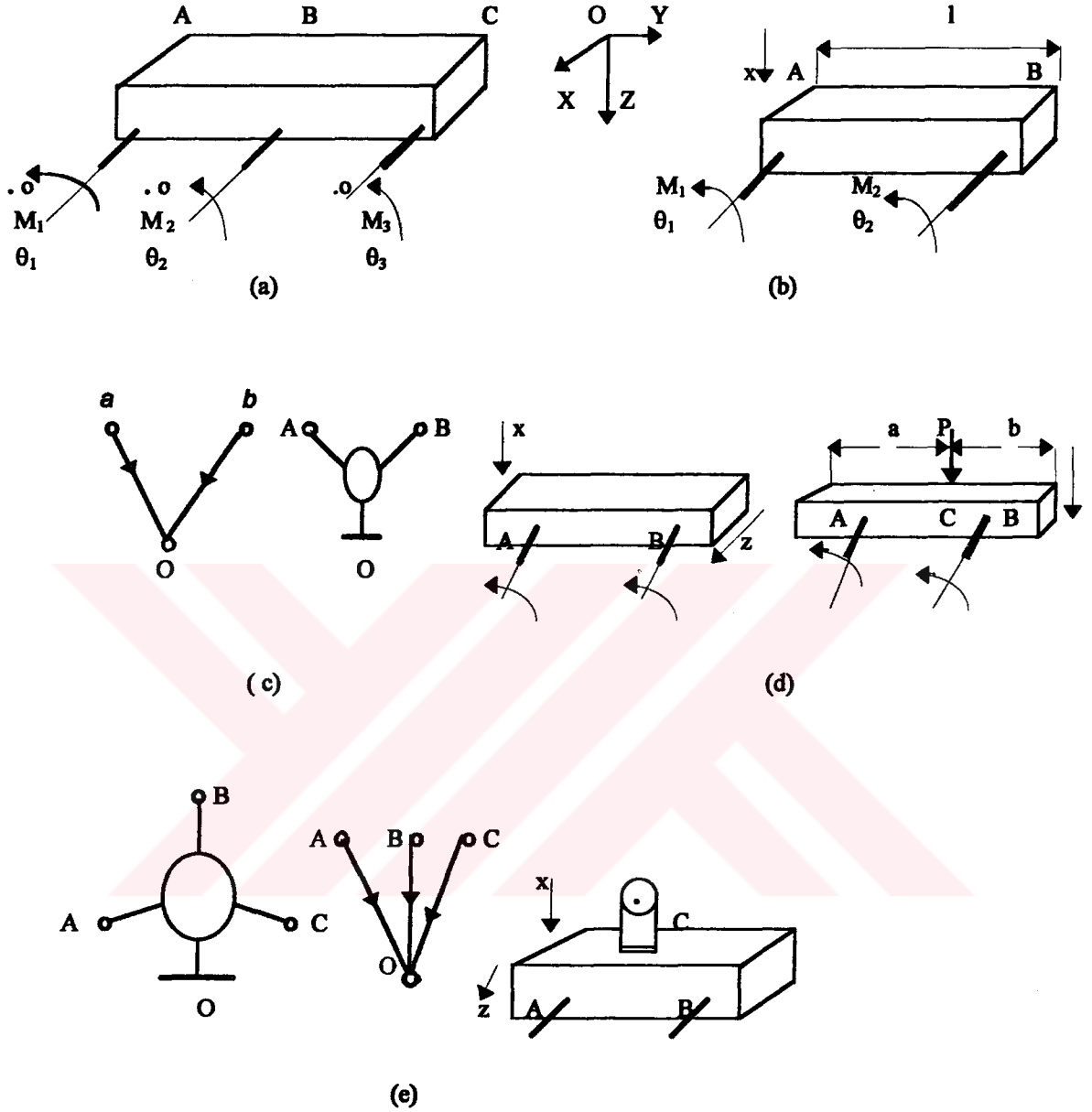
biçiminde olacaktır. Eğer $M_1 = M_2 = 0$ alınırsa çubuk sadece P yükünün etkisi altında eğilecektir. Bu durumda (2.22) uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{bmatrix} P \quad (2.23)$$

biçiminde olur. Elastik sınırlar içinde olması koşulu ile C noktasındaki yerdeğişimlerinin hesaplanması mümkündür. O halde ;

$$s_{33} = \frac{(a.b)^2}{3EI} \quad (2.24)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.20) bağıntılarından;



Şekil 2.10: (a) Üç mesnedli elastik kiriş. Burada kiriş A,B,C uçlarında y yönünde herhangi bir yerdeğiştirme yapamamakta ancak dönme yapabilmektedir.

(b) Bir açıklıklı kirişin yalnız uçlarındaki momentlerin etkisi altında eğilmesi.

(c) (b) deki kirişin 3-uçlu bir yay kutusu olarak gözönüne alınması ve uç grafi.

(d) (c) deki çubukta ayrıca C noktasının gözönüne alınması.

(e) (d) deki kirişin 4-uçlu bir yay kutusu olarak ele alınması ve uç grafi.

$$s_{13} = -\frac{ab(l+b)}{6EI}, s_{23} = \frac{ab(l+a)}{6EI} \quad (2.25)$$

- katsayıları hesaplanabilir.(2.22)' deki esneklik matrisinin simetriklik özelliğini kullanılarak denklemlerin açık formu aşağıdaki biçimde olur;

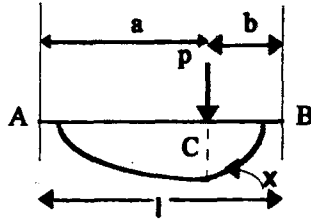
$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{3EI} & -\frac{ab(l+b)}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & \frac{ab(l+a)}{6EI} \\ \frac{ab(l+b)}{6EI} & -\frac{ab(l+a)}{6EI} & \frac{(b+a)^2}{3EI} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Şekil 2.10.(e)' deki kiriş için elde edilen , modelden yararlanılarak çeşitli kiriş problemleri çözülebilir.Ancak matematiksel model, kirişin A ve B mesnedlerindeki tepki kuvvetleri hakkında yeterli bilgi taşımamaktadır. Bu modelin bir uygulaması aşağıdaki örnekte gösterilebilir. Şekil 2.11.(a) da iki ucu ankastre mesnedlenmiş kirişin C ucundaki çökme ile A ve B mesnedlerindeki tepki momentleri hesaplanırsa; öncelikle uç koşulları (2.26)' daki uç denklemlerine yerleştirilmelidir. Böylelikle: $\theta_1(t)=0$, $\theta_2(t)=0$ ve $f_3(t)=0$ olur.(2.26) ifadesinden;

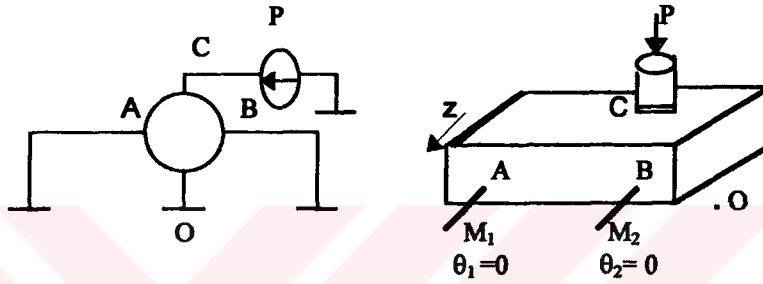
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ P \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

yazılabilir. Burada katsayılar matrisinin simetriklik özelliği kullanılarak; ilk iki denklemden tepki momentleri;

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = -\frac{\begin{bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}} \times P \quad (2.28)$$



(a)



(b)

Şekil 2.11: (a) İki ucu ankastre mesnedlenmiş ve P kuvveti ile eğilmeye çalışan kiriş.
 (b) (a) daki kirişin $\theta_1=\theta_2=0$ ve $f_3=P$ uç koşulları altında şekil (2.10.f) deki 4 uçlu yay kutusundan elde edilmesi.

elde edilir. (2.26)' dan s_{13} ve s_{23} katsayılarının ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{ab}{l^2} \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} ab^2/l^2 \\ a^2b/l^2 \end{bmatrix} \times P \quad (2.29)$$

bulunur. (2.29) ifadeleri (2.27) de yerine konularak ; kirişin C ucundaki x_3 çökmesi,

$$\begin{aligned} x_3 &= \begin{bmatrix} s_{13} & s_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} + s_{33}P \\ &= \frac{(a.b)^3}{3E.I.l^3} \times P \end{aligned} \quad (2.30)$$

biçiminde bulunur. Matematiksel modelin gereği, kirişin A ve B mesnedlerindeki tepki momentleri hesaplanabildiği halde, bu mesnedlerdeki tepki kuvvetleri hesaplanamamaktadır. Bunun için şekil 2.12.(a) da bir açıklıklı kiriş ,A ve B uçlarındaki yerdeğiştirmeler de gözönünde tutularak yeniden incelenmektedir. Burada kiriş 4 uçlu bir yay kutusu gibi düşünülebilir. Ancak kirişte dönme ve öteleme hareketleri birlikte ortaya çıkmaktadır. Bu sebeple kirişin A ucu Gerçekte A_0 (öteleme) ve A_4 (dönme) olarak iki ayrı uç gibi düşünülebilir. Aynı düşünce B ucu içinde geçerlidir. Kirişin C ucunda ise var olmasına rağmen, dönme gözönüne alınmamıştır. Bu nedenle çubuğun A ve B uçları dışında herhangi bir noktada eğilme momenti hesaplanamamaktadır. Buna göre şekil 2.12.(a)'daki çubuğu, şekil 2.12.(c)'deki yıldız uç grafi kullanılarak şekil 2.12.(b) de gösterilen 6 uçlu bir yay kutusu olarak tasarlanırsa; uç denklemleri aşağıdaki biçimde ele alınmıştır;

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_3(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & S_{14} & S_{15} \\ & S & S_{24} & S_{25} \\ & & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ f_3(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Eğer kirişin A ve B uçlarında öteleme olmazsa $x_1(t)=0, x_2(t)=0$ olduğundan (2.31)' deki ilk üç denklemin (2.26)' dakilere dönüşür. Bu özellik sebebiyle kirişin uç denklemleri için (2.31) ' deki hibrid seçim yapılmıştır. Katsayılar matrisinde görülen S elemanlarının değerleri $f_3(t)=0$ ve $x_1(t)=x_1, x_2(t)=x_2$ verilirse;

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{14} & S_{15} \\ S_{24} & S_{25} \\ S_{34} & S_{35} \\ S_{44} & S_{45} \\ S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

matrisi elde edilir.(2.32)'deki 6 katsayı;

$$\begin{aligned} s_{14}=s_{24}=1/l & & s_{15}=s_{25}=-1/l \\ s_{34}=b/l & & s_{35}=a/l \end{aligned} \quad (2.33)$$

biçiminde yazılabilir. Gözönüne alınan durumda kirişe etkiyen hiç bir kuvvet yada moment bulunmadığından,(2.32) de $f_1 = f_2 = 0$ olmalıdır. x_1 ve x_2 gelişigüzel değiştiğinden bu koşul sadece $s_{44} = s_{45} = s_{54} = s_{55} = 0$ alınırsa sağlanabilir. s_{41} , s_{42} , s_{43} , s_{51} , s_{52} ve s_{53} katsayılarının belirlenmesi için bu defa $X_1(t)=0$, $X_2(t)=0$ alınarak üç ayrı durum için değerleri A ve B mesnedlerindeki f_1 ve f_2 tepki kuvvetleri için hesaplanacaktır. Şekil(2.12) (e),(f) ve (g) de belirlenen ; durumlar için bağıntılar:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{42} \\ s_{52} \end{bmatrix} M_2, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{43} \\ s_{53} \end{bmatrix} xP \quad (2.34)$$

biçimindedir. Şekil 2.12.(e)' den kirişin denge denklemleri, $M_1-f_2.l = 0$ ve $f_1+f_2=0$ olup bilinmeyen kuvvetler için $f_2=(1/l)M_1$, $f_1=-f_2=(-1/l)M_1$ ' dir.(2.34)'deki ilk bağıntı:

$$s_{41}=(-1/l) \quad s_{51}=(1/l)$$

biçimindedir. Şekil 2.12.(f)' den ise denge denklemleri $M_2+f_1.l=0$ ve $f_1+f_2=0$ verir. Buna göre (2.34) deki ikinci bağıntıdan;

$$s_{42}=(-1/l) \quad s_{52}=(-1/l) \quad (2.35)$$

elde edilir.Şekil 2.12.(g) 'den A ve B uçlarına göre moment alınırsa $f_2=(-a/l)P$, $f_1=(-b/l)P$ bulunur.(2.34)'deki son bağıntı da,

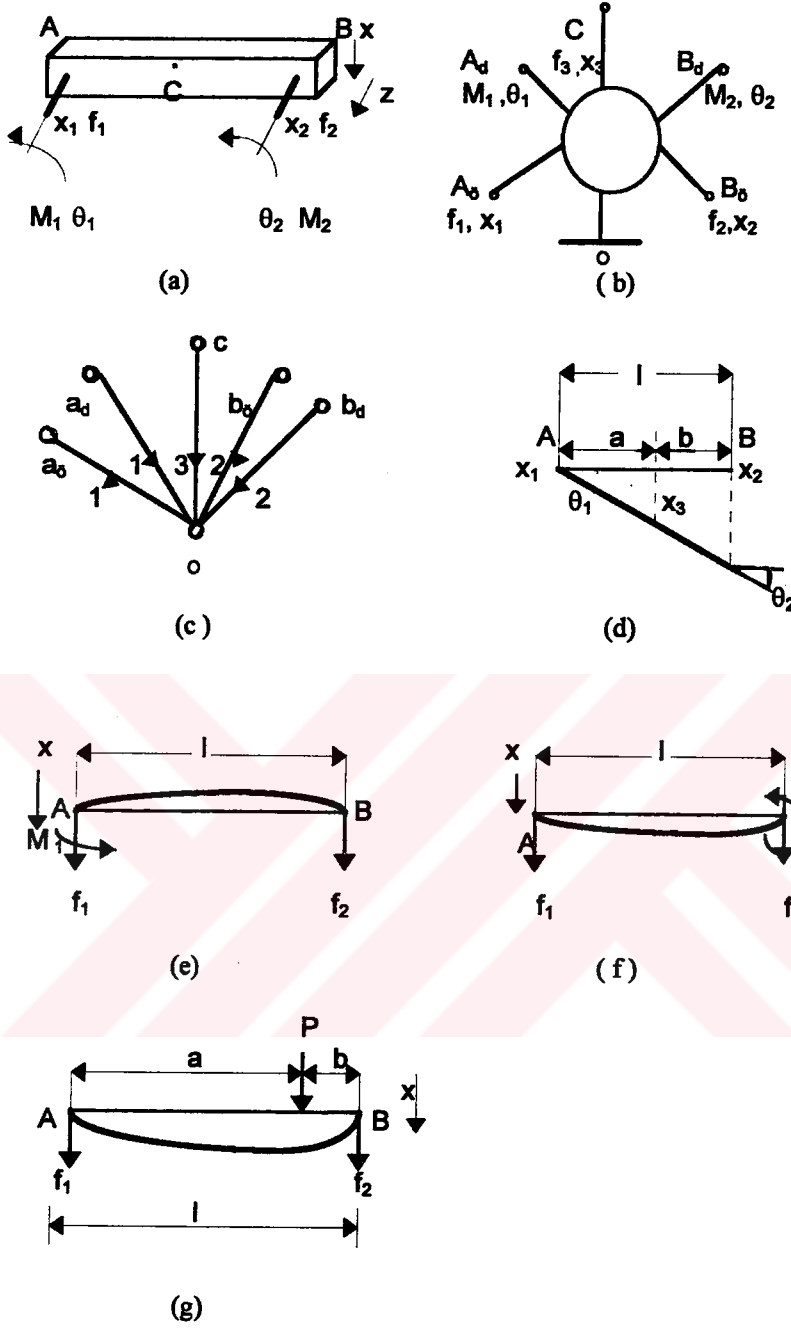
$$s_{43}=-(b/l) \quad s_{53}=(-a/l) \quad (2.36)$$

şeklinde olur.(2.34)'deki bağıntılar da tüm s katsayıları (2.31) de yerlerine konulursa uç denklemlerinin ifadesi aşağı da verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ x_3(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1/l & -1/l \\ & S & 1/l & -1/l \\ & & b/l & a/l \\ -1/l & -1/l & -b/l & 0 & 0 \\ 1/l & 1/l & -a/l & 0 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ f_3(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Burada S matrisi 3*3 boyutunda simetriklik matrisidir ve açık formu (2.26) da gösterilmiştir.





Şekil 2.12: (a) Bir açıklıklı elastik kiriş.

(b) (a) daki elastik kirişin 6-uçlu bir yay kutusu olarak gözönüne alınması.

(c) 6-uçlu yay kutusuna ilişkin yıldız biçimindeki uç graf.

(d) Kirişin $M_1=M_2=0, f_3=0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ durumuna ilişkin yerdeğiştirmeleri.

(e) Kirişin $x_1=x_2=0, f_3=0, M_2=0, M_1 \neq 0$ durumuna ilişkin dengesi.

(f) Kirişin $x_1=x_2=0, f_3=0, M_1=0, M_2 \neq 0$ durumuna ilişkin dengesi.

(g) Kirişin $x_1=x_2=0, M_1=M_2=0, f_3=P$ durumuna ilişkin dengesi.

2.6. Çok Uçlu Yaylardan Oluşan Eğilmeye Çalışan Kirişlerin Elektriksel Sistem Biçiminde Gösterimi

Başlangıçta da belirttiği gibi mekanik de her büyüklük , elektrikte ki bir başka büyüklük ile modellenebilir. Şekil 2.12. (a) ve (b) de kapılarında dönme ve ötelemelerin olduğu, 6 uçlu yay kutusu olarak tasarlanan elastik kiriş yine 6 uçlu bağımlı ve bağımsız akım ve gerilim kaynakları ile çeşitli devre elemanlarından meydana gelen bir elektrik devresi olarak gösterilebilir. Öncelikle doğru analiz sonuçlarını elde etmek için notasyon değişikliği yapılması şarttır. Çünkü (2.31) de verilen uç denklemlerinde kirişin A ve B noktalarında dönme ve ötelemelerden dolayı oluşan M_1 , M_2 momentleri ile f_1 , f_2 kuvvet büyüklüklerinin her ikisi de elektrikte "akım" değişkeni ile modellenmektedir. Bu gösterimin spice programına aktarımında ki analiz sonucunda ise farklı düğümlerde, farklı sonuçlar bulunmaktadır. Bir başka deyişle; f_1 ve f_2 kuvvetlerine, karşı düşen akım değerleri devre de akımın hesaplanması istenilen düğümler de değildir. Bu sebep ile (2.31) de " f_1 " ve " f_2 " kuvvetleri " f_4 " ve " f_5 " olarak değiştirilmelidir. Elastik kirişe ait uç denklemdeki eşitliklerin her iki tarafının türevi alındığında:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} x \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ f_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

ve sistemdeki mekanik büyüklüklere karşı düşen elektriksel değişkenler tablo 2.1. de seçildikten sonra uç denklemler (2.39)' da aşağıdaki formuna dönüşür: Bu uç denklemlere ait eşdeğer devre şekil 2.13. de gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \frac{d}{dt} i_4 \\ \frac{d}{dt} i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_1 \\ \frac{d}{dt} i_2 \\ \frac{d}{dt} i_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Burada, 8-0 düğüm noktaları arasına bağlanan alternatif akım kaynağı; şekil 2. 11.(a)' daki iki yanı mesnedlenmiş ahşap kirişe uygulanan C noktasındaki P kuvvetine karşılık düşmektedir. Ancak devre de ;3-4, 6-7, 18-11, 2-19, 13-20 düğümleri arasındaki 1' er ohm'luk

dirençler, verilen mekanik sistem de hiç bir eleman ile modellenmemektedir. Bu dirençler gerçekte; fiziksel endüktansların sargı dirençlerine karşılık gelmektedir. Spice simülasyonun da öncelikle dc analizi yapıldığından ve çalışma nokasında (perating point) endüktanslar kısa devre görüldüğünden devreye seri dirençler eklenmiştir. Elastik kirişin uzunluğu ile kesit alanına (2.40) daki gibi çeşitli değerler verilerek teoride bulunan mekanik büyüklüklere ilişkin sonuçlar ile spice analizinde, elektriksel büyüklüklere dair sonuçlar; nümerik olarak aynı olacak biçiminde ayarlanabilir. Örneğin; Elastik kirişi tablo 2.2.' de ahşap malzemesinden, uzunluğu 1 m olan çubuğun ağırlık merkezinden geçen tarafsız eksene göre ataleti; $a=60$ cm, $b_1=40$ cm, $b_2=1$ cm, ve $h=2$ cm seçilerek (2.15)'den, esneklik katsayıları ise (2.26) ve (2.31) formüllerinden hesaplanarak bu sabitlere bağlı olarak bulunan f_4 , f_5 kuvvetleri ile spice analizindeki i_4 , i_5 değerleri, Analiz 2.3.' de gözlemlendiği gibi aynıdır.

$$s_{11}=s_{22}=0.05 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{41}=-1 \text{ m./kg-kuv}$$

$$s_{12}=s_{21}=-0.025 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{51}=1 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{33}=2.88 \cdot 10^{-3} \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{42}=-1 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{23}=9.6 \cdot 10^{-3} \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{52}=-1 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{13}=s_{31}=-8.4 \cdot 10^{-3} \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{43}=-0.4 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{14}=s_{24}=1 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{53}=-0.6 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{15}=s_{25}=-1 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{34}=2.5 \text{ m/kg-kuv}$$

$$s_{35}=1.66 \text{ m/kg-kuv}$$

$$P=250 \text{ kg-kuv}$$

$$f_4=-100 \text{ kg-kuv}$$

$$f_5=150 \text{ kg-kuv}$$

$$k_{23} = \frac{s_{23}}{\sqrt{s_{22} \cdot s_{33}}} = 0.8$$

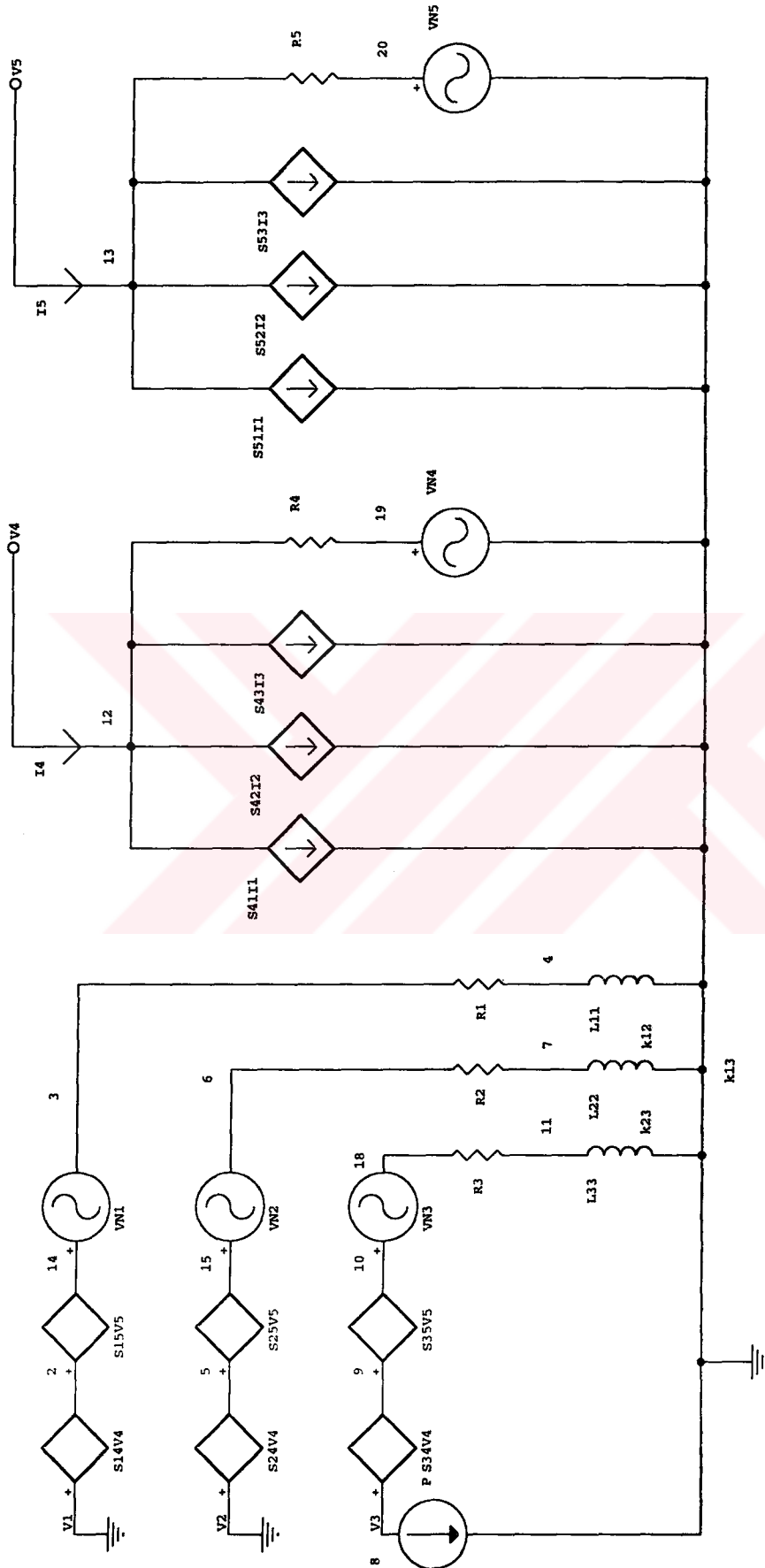
$$k_{12} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11} \cdot s_{22}}} = |-0.5| = 0.5$$

$$k_{13} = \frac{s_{13}}{\sqrt{s_{11} \cdot s_{33}}} = |-0.7| = 0.7$$

$$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=1 \text{ ohm}$$

(2.40)

Genel de kuplaj katsayısı $1 \geq k \geq -1$ değerleri arasında değişmekle beraber ,pspice programında bu katsayı $1 \geq k \geq 0$ değerleri arasında sınırlandırıldığı için, hesaplamalar da k_{12} ve k_{13} 'teki "-" işaret farkı dikkate alınmamaktadır. Şekil 2.13. de ideal olmayan transformatörler yerine yine (2.39)' daki uç denklemlerinden yararlanarak ideal transformatörler kullanılabilir. Ancak bu gerçekleştirme için bazı tanım ve değişikliklerin yapılması gereklidir.



Sekil 2.13 : İki ucu ankastre mesnetlenmiş kuvvet ile eğilmeye palisan elastik kirisin esdeğer devresi.

Size A	Document Number	REV
Date:	July 4, 1996	Sheet of

2.7. Çok Uçlu İdeal Olmayan Transformatörlerin İdeal Eşdeğer Devresi

İki uçlu endüktanslardan oluşan $(n+1)$ uçlu, D endüktans devresinin verilen uç grafına ilişkin uç denklemleri, eğer var ise şu biçimde gösterilebilir:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{1n} \\ L_{12} & L_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

D devresinin birleşik olmaması halinde, bu uç denklemlerinin geçerli olması sadece uç grafın parçalı şekilde seçilmesi ile mümkündür. L katsayılar matrisi simetrik bir matristir. Burada uç denklemlerini gösterirken, birbirilerine magnetik yoldan bağlı bulunan endüktansların uçlarının elektriksel bakımdan yalıtılmış olduğu kabul edilmiştir. Magnetik devrenin topolojisine bağlı olarak (2.41)'deki katsayılar matrisi singüler olabilmektedir. Bu durumda, n kapılı endüktansın yalıtılmış olan kapıları bir ağaç oluşturacak şekilde bağlanırsa, n kapılı endüktans, $(n+1)$ uçlu bir endüktansa dönüşmektedir. Bu bağlantı devre de, elektriksel bakımdan bir fark oluşturmaz. Bu sebeple, $(n+1)$ uçlu endüktansa ilişkin uç denklemleri (2.41)'deki gibi değişmeden kalır. n kapılı endüktansın yalıtılmış olan kapıları bir ağaç oluşturacak şekilde değil de, içinde çevreler de bulunacak biçimde bağlanırsa, uç sayısı n' den küçük olan çok uçlu endüktans elde edilecektir. (2.41)'deki endüktans matrisi simetrik ve genellikle yarı kesin pozitif bir matristir. Bu nedenle köşegen üzerindeki L_{ii} elemanları negatif olamaz. Eğer L_{ii} sıfır ise, i. satır ve i. sütunda ki bütün elemanlar da sıfır olmak zorunluluğundadır. Bu sebep ile $L_{ii} = \sqrt{L_{li}} \sqrt{L_{li}}$ ($i=1,2,\dots,n$) alınarak (2.41)'deki katsayılar matrisi yeniden yazılabilir:

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{L_{11}} & & & & \\ & \sqrt{L_{22}} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \sqrt{L_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{12} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{L_{11}} & & & & \\ & \sqrt{L_{22}} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \sqrt{L_{nn}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$L = L_d K L_d$

$$k_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_{ii} \cdot L_{jj}}} \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (2.43)$$

Burada K matrisi simetrik olup, elemanları (2.43) bağıntısında tanımlıdır. $i=j$ ise $k_{11}=k_{22}=\dots=k_{nn}=1$ olur. Lyan kesin pozitif bir matris olduğundan K matrisi de aynı özelliğe sahip simetrik ve yarı kesin pozitifdir. K matrisinin bu özelliği aşağıda ki eşitsizlikler de gösterilebilir;

$$|k_{ii}| \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{ij} \\ k_{ji} & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{ij} & k_{il} \\ k_{ij} & 1 & k_{il} \\ k_{il} & k_{il} & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

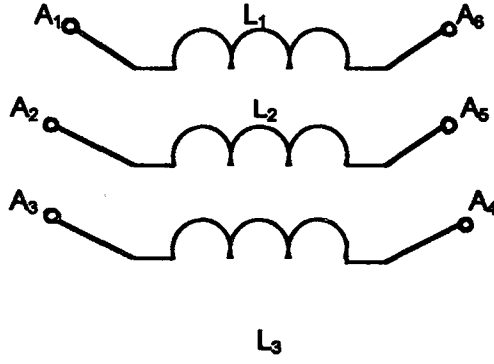
$$|k_{ij}| \geq 0$$

Yalnız ikinci mertebeden determinantlar gözönünde tutulursa ;

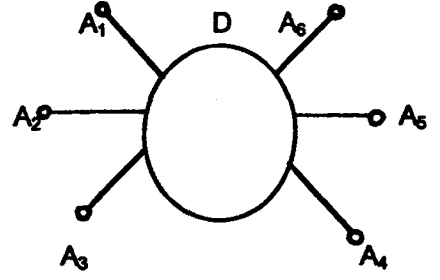
$$\begin{bmatrix} 1 & k_{ij} \\ k_{ij} & 1 \end{bmatrix} = 1 - k_{ij}^2 \geq 0 \quad (2.45)$$

$$|k_{ij}| \leq 1$$

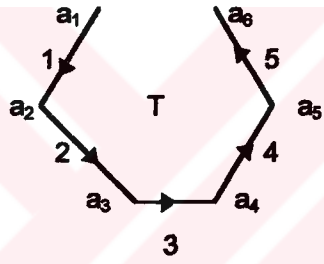
şartını gerektirir. (2.41) denklemlerinin, magnetik devre yardımı ile birbirine bağlı olan 2 uçlu n endüktanstan oluşan bir n kapılının uç denklemleri olduğu kabul edilirse ; k_{ij} katsayısı, i ve j. endüktanslar arasındaki magnetik bağın ölçüsü olarak kullanılabilir.(2.43) Magnetik bağ katsayısının mutlak değeri en fazla 1 değerini almalıdır.Eğer k_{ij} katsayısı 0 ise i. ve j. endüktanslar arasında magnetik bir bağ yoktur. Bu sebep ile k_{ij} katsayılarına "magnetik bağ katsayısı" veya " bağ katsayısı",K matrisine de "bağ katsayıları matrisi" adı verilir. $k = \pm 1$ olması durumunda ise 2 sargı arasındaki bağıntının"mükemmel" (mutual) olduğu şeklinde bir sonuca ulaşılmaktadır. (2.41) uç denkleminde n=3 alınırsa;



(a)



(b)



(c)

Şekil.2.14: (a) Birleşik olmayan 6 uçlu bir D devresi.

(b) T grafi.

(c) G devre grafi içinde seçilen ağaç.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{L_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{L_{33}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & 1 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{L_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{L_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{L_{33}} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

(2.43)' deki eşitsizlikler de K matrisinin yarı kesin pozitif özelliği kullanılırsa;

$$k_{12}^2 = k_{11}k_{22}$$

$$k_{13}^2 = k_{11}k_{33}$$

$$k_{23}^2 = k_{22}k_{33}$$

$$k_{12}^2 - 1 = 0$$

$$k_{13}^2 - 1 = 0$$

$$k_{23}^2 - 1 = 0$$

Bu aşama da $L'_{22} = \frac{L_{12}^2}{L_{11}}$ olarak tanımlanırsa;

$$L'_{11} L'_{33} - L_{13}^2 = 0$$

$$L'_{22} L'_{33} - L_{23}^2 = 0$$

Buradan $L'_{11}, L'_{22}, L'_{33}$ endüktanslarının eşitlikleri yerlerine konularak hesaplandığında;

$$(L'_{11})^2 \frac{L_{23}^2}{L_{12}^2} = L_{13}^2 \Rightarrow L'_{33} = \left| \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12}} \right|$$

$$L'_{11} = \left| \frac{L_{13}L_{12}}{L_{23}} \right|$$

$$L'_{22} = \left| \frac{L_{12}L_{23}}{L_{13}} \right|$$

olarak bulunur. Köşegen elemanları yeniden (2.41) uç denkleminde yerleştirilirse ;

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L'_{21} & L'_{22} & L_{23} \\ L'_{31} & L'_{32} & L'_{33} \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{L_{13}}{L'_{33}} \\ 0 & 1 & -\frac{L_{23}}{L'_{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{L_{13}}{L'_{33}} \\ 0 & 1 & -\frac{L_{23}}{L'_{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L'_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L'_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L'_{33} \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 - \frac{L_{13}}{L'_{33}} v_3 \\ v_2 - \frac{L_{23}}{L'_{33}} v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_{13} & L_{23} & L'_{33} \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

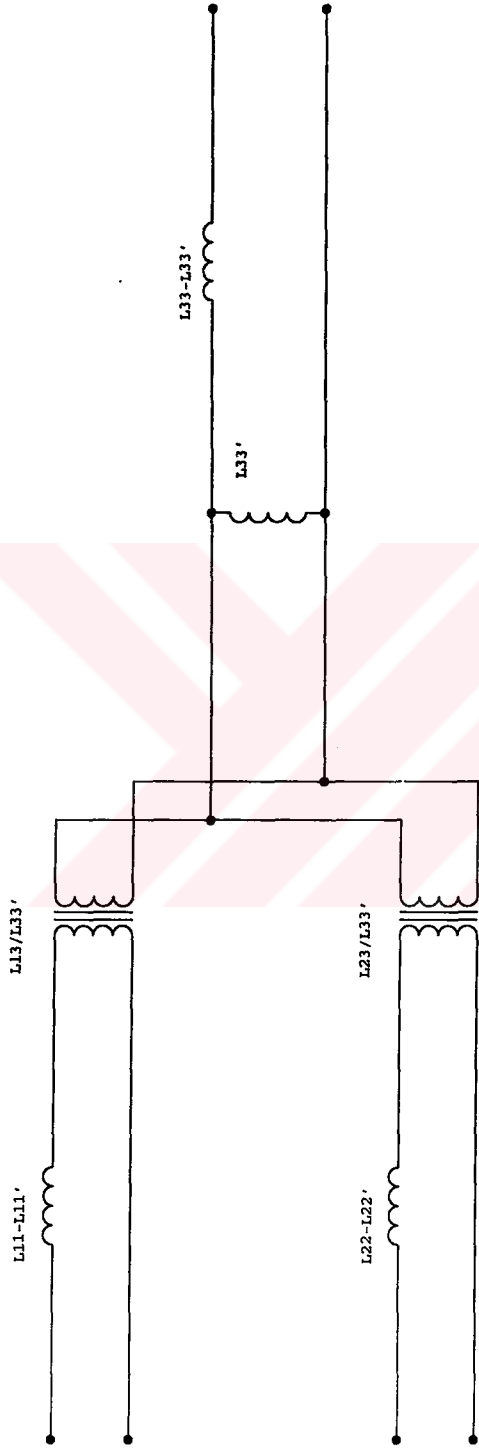
$$v_1 = \frac{L_{13}}{L'_{33}} v_3$$

$$v_2 = \frac{L_{23}}{L'_{33}} v_3$$

$$v_3 = L_{13} \frac{d}{dt} i_1 + L_{23} \frac{d}{dt} i_2 + L'_{33} \frac{d}{dt} i_3 \quad \text{olarak bulunur.}$$

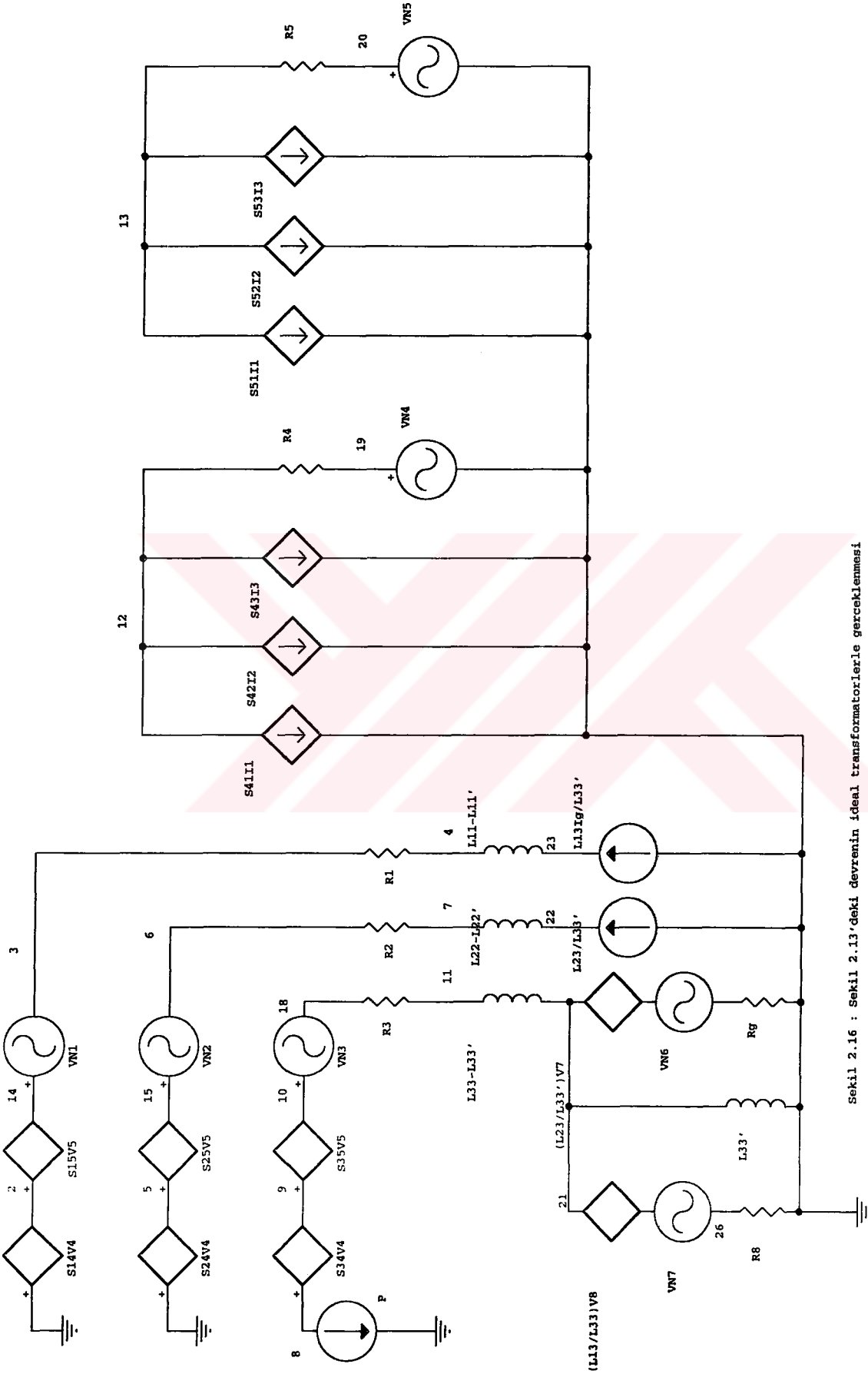
(2.48)'deki uç denkleminin eşdeğer devresi şekil 2.15. de gösterilmiştir. Sonuç olarak; Şekil 2.13. de kullanılan ideal olmayan transformatörler yerine ;(2.47), (2.48) ifadeleri kullanılarak şekil 2.15.'deki alt devre elde edilebilir. Bu devrenin yeni durumu şekil 2.16. da verilmiştir. Sayısal değerler; (2.40)'daki gibi aynı seçildiği takdirde, Analiz 2.4.'deki Pspice analiz sonuçlarının Analiz 2.3.'deki değerler ile aynı olduğu gözlenmektedir.

Ayrıca yine (2.37) uç denklemlerinden hareketle elde edilen Analiz 2.4.'deki sonuçlarına Pspice' da alt devre yardımı ile de ulaşmak mümkündür. Bu sebeple (2.40)'daki veriler subcircuit durumuna uygulandığında Analiz 2.5. de; analiz sonuçlarının yine aynı olduğu gözlenmektedir.



Sekil 2.15 : Çok uclu ideal olmayan transformatorlerin ideal esdeger devresi.

Size	Document Number	REV
A		
Date:	July 4, 1996	Sheet of



Sekil 2.16 : Sekil 2.13'deki devrenin ideal transformatörlerle gerçekleştirilmesi

Size	Document Number	REV
A		
Date:	July 4, 1996	Sheet of

**** 05/26/96 01:02:36 ***** PSpice 5.0a (Sep 1991) *****

**** CIRCUIT DESCRIPTION

** ANALIZ (2.3)

E14 0 2 12 0 1
 E15 2 14 13 0 -1
 E24 0 5 12 0 1
 E25 5 15 13 0 -1
 E34 8 9 12 0 2.5
 E35 9 10 13 0 1.66
 IP 8 0 AC 250
 R1 3 4 1
 R2 6 7 1
 R3 18 11 1
 R4 12 19 1
 R5 13 20 1
 VN4 19 0 AC 0
 VN5 20 0 AC 0
 L11 4 0 0.05
 L22 7 0 0.05
 K12 L11 L22 0.5
 L33 11 0 2.88E-3
 K23 L33 L22 0.8
 K13 L33 L11 0.7
 F41 12 0 VN1 -1
 F42 12 0 VN2 -1
 VN1 14 3 AC 0
 F51 13 0 VN1 1
 F52 13 0 VN2 -1
 F43 12 0 VN3 -0.4
 F53 13 0 VN3 -0.6
 VN2 15 6 AC 0
 VN3 10 18 AC 0

.OPTIONS NOMOD
 .WIDTH OUT=80
 .OP
 .AC DEC 20 1 1000
 .PRINT AC I(VN4) I(VN5)
 .END

**** AC ANALYSIS TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	I(VN4)	I(VN5)
1.000E+00	1.316E+02	1.497E+02
1.122E+00	1.312E+02	1.497E+02
1.259E+00	1.307E+02	1.496E+02
1.413E+00	1.300E+02	1.495E+02
1.585E+00	1.292E+02	1.493E+02
1.778E+00	1.282E+02	1.492E+02
1.995E+00	1.269E+02	1.490E+02
2.239E+00	1.254E+02	1.487E+02
2.512E+00	1.236E+02	1.484E+02
2.818E+00	1.215E+02	1.481E+02
3.162E+00	1.189E+02	1.477E+02
3.548E+00	1.160E+02	1.472E+02
3.981E+00	1.126E+02	1.467E+02
4.467E+00	1.088E+02	1.462E+02
5.012E+00	1.046E+02	1.455E+02
5.623E+00	1.001E+02	1.449E+02
6.310E+00	9.531E+01	1.442E+02
7.079E+00	9.035E+01	1.435E+02
7.943E+00	8.534E+01	1.428E+02
8.913E+00	8.037E+01	1.422E+02
1.000E+01	7.556E+01	1.416E+02
1.122E+01	7.100E+01	1.410E+02
1.259E+01	6.675E+01	1.405E+02
1.413E+01	6.286E+01	1.401E+02
1.585E+01	5.936E+01	1.397E+02
1.778E+01	5.626E+01	1.394E+02
1.995E+01	5.355E+01	1.392E+02
2.239E+01	5.121E+01	1.389E+02
2.512E+01	4.922E+01	1.388E+02
2.818E+01	4.754E+01	1.386E+02
3.162E+01	4.614E+01	1.385E+02
3.548E+01	4.497E+01	1.384E+02
3.981E+01	4.402E+01	1.383E+02
4.467E+01	4.323E+01	1.382E+02
5.012E+01	4.260E+01	1.382E+02
5.623E+01	4.208E+01	1.382E+02
6.310E+01	4.167E+01	1.381E+02
7.079E+01	4.133E+01	1.381E+02
7.943E+01	4.106E+01	1.381E+02
8.913E+01	4.085E+01	1.381E+02
1.000E+02	4.067E+01	1.381E+02
1.122E+02	4.054E+01	1.380E+02
1.259E+02	4.043E+01	1.380E+02
1.413E+02	4.034E+01	1.380E+02
1.585E+02	4.027E+01	1.380E+02
1.778E+02	4.022E+01	1.380E+02
1.995E+02	4.017E+01	1.380E+02
2.239E+02	4.014E+01	1.380E+02
2.512E+02	4.011E+01	1.380E+02

2.818E+02	4.009E+01	1.380E+02
3.162E+02	4.007E+01	1.380E+02
3.548E+02	4.005E+01	1.380E+02
3.981E+02	4.004E+01	1.380E+02
4.467E+02	4.003E+01	1.380E+02
5.012E+02	4.003E+01	1.380E+02
5.623E+02	4.002E+01	1.380E+02
6.310E+02	4.002E+01	1.380E+02
7.079E+02	4.001E+01	1.380E+02
7.943E+02	4.001E+01	1.380E+02
8.913E+02	4.001E+01	1.380E+02
1.000E+03	4.001E+01	1.380E+02

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME .49



**** 05/17/96 16:44:08 ***** PSpice 5.0a (Sep 1991) *****

**** CIRCUIT DESCRIPTION

** ANALIZ (2.4)

E14 0 2 12 0 1
 E15 2 14 13 0 -1
 E24 0 5 12 0 1
 E25 5 15 13 0 -1
 E34 8 9 12 0 2.5
 E35 9 10 13 0 1.66
 IP 8 0 AC 250
 R1 3 4 1
 R2 6 7 1
 R3 18 11 1
 R4 12 19 1
 R5 13 20 1
 VN4 19 0 AC 0
 VN5 20 0 AC 0
 F41 12 0 VN1 -1
 F42 12 0 VN2 -1
 VN1 14 3 AC 0
 F51 13 0 VN1 1
 F52 13 0 VN2 -1
 F43 12 0 VN3 -0.4
 F53 13 0 VN3 -0.6
 VN2 15 6 AC 0
 VN3 10 18 AC 0
 L1 4 23 0.03
 L2 7 22 0.03
 L3 11 21 0.3E-3
 L4 21 0 3.2E-3
 E7 21 24 24 0 3
 E8 21 25 25 0 -2.6
 R8 26 0 1
 R9 27 0 1
 VN7 25 26 AC 0
 VN6 24 27 AC 0
 F6 22 0 VN6 -3
 F9 23 0 VN7 2.6
 .OP
 .AC DEC 20 1 1000
 .PRINT AC I(VN4) I(VN5)
 .END

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	I(VN4)	I(VN5)
1.000E+00	1.008E+02	1.500E+02
1.122E+00	1.010E+02	1.500E+02
1.259E+00	1.013E+02	1.501E+02
1.413E+00	1.016E+02	1.501E+02
1.585E+00	1.020E+02	1.501E+02
1.778E+00	1.025E+02	1.501E+02
1.995E+00	1.031E+02	1.501E+02
2.239E+00	1.039E+02	1.502E+02
2.512E+00	1.049E+02	1.502E+02
2.818E+00	1.062E+02	1.502E+02
3.162E+00	1.077E+02	1.503E+02
3.548E+00	1.096E+02	1.504E+02
3.981E+00	1.120E+02	1.505E+02
4.467E+00	1.149E+02	1.506E+02
5.012E+00	1.184E+02	1.508E+02
5.623E+00	1.227E+02	1.510E+02
6.310E+00	1.280E+02	1.512E+02
7.079E+00	1.342E+02	1.516E+02
7.943E+00	1.417E+02	1.520E+02
8.913E+00	1.506E+02	1.525E+02
1.000E+01	1.611E+02	1.531E+02
1.122E+01	1.734E+02	1.539E+02
1.259E+01	1.877E+02	1.548E+02
1.413E+01	2.041E+02	1.561E+02
1.585E+01	2.231E+02	1.576E+02
1.778E+01	2.447E+02	1.594E+02
1.995E+01	2.692E+02	1.617E+02
2.239E+01	2.970E+02	1.646E+02
2.512E+01	3.283E+02	1.680E+02
2.818E+01	3.633E+02	1.722E+02
3.162E+01	4.023E+02	1.772E+02
3.548E+01	4.456E+02	1.831E+02
3.981E+01	4.933E+02	1.902E+02
4.467E+01	5.456E+02	1.983E+02
5.012E+01	6.023E+02	2.077E+02
5.623E+01	6.635E+02	2.184E+02
6.310E+01	7.288E+02	2.302E+02
7.079E+01	7.976E+02	2.432E+02
7.943E+01	8.692E+02	2.572E+02
8.913E+01	9.425E+02	2.719E+02
1.000E+02	1.017E+03	2.871E+02
1.122E+02	1.090E+03	3.024E+02
1.259E+02	1.161E+03	3.175E+02
1.413E+02	1.229E+03	3.322E+02
1.585E+02	1.293E+03	3.460E+02
1.778E+02	1.351E+03	3.588E+02
1.995E+02	1.403E+03	3.703E+02
2.239E+02	1.449E+03	3.806E+02
2.512E+02	1.489E+03	3.895E+02

2.818E+02	1.524E+03	3.973E+02
3.162E+02	1.553E+03	4.038E+02
3.548E+02	1.577E+03	4.093E+02
3.981E+02	1.597E+03	4.138E+02
4.467E+02	1.614E+03	4.176E+02
5.012E+02	1.628E+03	4.207E+02
5.623E+02	1.639E+03	4.232E+02
6.310E+02	1.647E+03	4.252E+02
7.079E+02	1.655E+03	4.268E+02
7.943E+02	1.660E+03	4.281E+02
8.913E+02	1.665E+03	4.292E+02
1.000E+03	1.669E+03	4.300E+02

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME .49



**** 01/14/96 19:51:52 ***** PSpice 5.0a (Sep 1991) ****

**** CIRCUIT DESCRIPTION

ANALIZ (2.5)

```

I1 3 0 AC 250
VN4 4 0 AC 0
VN5 5 0 AC 0
X1 0 0 3 4 5 0 6-UCLU
.SUBCKT 6-UCLU 28 29 8 19 20 31
E14 28 2 12 31 1
E15 2 14 13 31 -1
E24 29 5 12 31 1
E25 5 15 13 31 -1
E34 8 9 12 31 2.5
E35 9 10 13 31 1.66
R1 3 4 1
R2 6 7 1
R3 18 11 1
R4 12 19 1
R5 13 20 1
F41 12 31 VN1 -1
F42 12 31 VN2 -1
VN1 14 3 AC 0
F51 13 31 VN1 1
F52 13 31 VN2 -1
F43 12 31 VN3 -0.4
F53 13 31 VN3 -0.6
VN2 15 6 AC 0
VN3 10 18 AC 0
L1 4 23 0.03
L2 7 22 0.03
L3 11 21 0.3E-3
L4 21 31 3.2E-3
E7 21 24 24 31 3
E8 21 25 25 31 -2.6
R8 26 31 1
R9 27 31 1
VN7 25 26 AC 0
VN6 24 27 AC 0
F6 22 31 VN6 -3
F9 23 31 VN7 2.6
.ENDS 6-UCLU
.OP
.AC DEC 20 1 1000
.PRINT AC V(3) I(VN4) I(VN5)
.OPTIONS NOMOD
.END

```

**** AC ANALYSIS TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	V(3)	I(VN4)	I(VN5)
1.000E+00	7.493E+02	1.008E+02	1.500E+02
1.122E+00	7.494E+02	1.010E+02	1.500E+02
1.259E+00	7.495E+02	1.013E+02	1.501E+02
1.413E+00	7.497E+02	1.016E+02	1.501E+02
1.585E+00	7.498E+02	1.020E+02	1.501E+02
1.778E+00	7.500E+02	1.025E+02	1.501E+02
1.995E+00	7.503E+02	1.031E+02	1.501E+02
2.239E+00	7.506E+02	1.039E+02	1.502E+02
2.512E+00	7.511E+02	1.049E+02	1.502E+02
2.818E+00	7.516E+02	1.062E+02	1.502E+02
3.162E+00	7.523E+02	1.077E+02	1.503E+02
3.548E+00	7.531E+02	1.096E+02	1.504E+02
3.981E+00	7.541E+02	1.120E+02	1.505E+02
4.467E+00	7.555E+02	1.149E+02	1.506E+02
5.012E+00	7.571E+02	1.184E+02	1.508E+02
5.623E+00	7.592E+02	1.227E+02	1.510E+02
6.310E+00	7.618E+02	1.280E+02	1.512E+02
7.079E+00	7.651E+02	1.342E+02	1.516E+02
7.943E+00	7.692E+02	1.417E+02	1.520E+02
8.913E+00	7.744E+02	1.506E+02	1.525E+02
1.000E+01	7.807E+02	1.611E+02	1.531E+02
1.122E+01	7.887E+02	1.734E+02	1.539E+02
1.259E+01	7.986E+02	1.877E+02	1.548E+02
1.413E+01	8.108E+02	2.041E+02	1.561E+02
1.585E+01	8.258E+02	2.231E+02	1.576E+02
1.778E+01	8.442E+02	2.447E+02	1.594E+02
1.995E+01	8.667E+02	2.692E+02	1.617E+02
2.239E+01	8.939E+02	2.970E+02	1.646E+02
2.512E+01	9.266E+02	3.283E+02	1.680E+02
2.818E+01	9.655E+02	3.633E+02	1.722E+02
3.162E+01	1.012E+03	4.023E+02	1.772E+02
3.548E+01	1.065E+03	4.456E+02	1.831E+02
3.981E+01	1.127E+03	4.933E+02	1.902E+02
4.467E+01	1.198E+03	5.456E+02	1.983E+02
5.012E+01	1.279E+03	6.023E+02	2.077E+02
5.623E+01	1.368E+03	6.635E+02	2.184E+02
6.310E+01	1.465E+03	7.288E+02	2.302E+02
7.079E+01	1.570E+03	7.976E+02	2.432E+02
7.943E+01	1.682E+03	8.692E+02	2.572E+02
8.913E+01	1.798E+03	9.425E+02	2.719E+02
1.000E+02	1.917E+03	1.017E+03	2.871E+02
1.122E+02	2.036E+03	1.090E+03	3.024E+02
1.259E+02	2.153E+03	1.161E+03	3.175E+02
1.413E+02	2.265E+03	1.229E+03	3.322E+02
1.585E+02	2.370E+03	1.293E+03	3.460E+02
1.778E+02	2.467E+03	1.351E+03	3.588E+02
1.995E+02	2.555E+03	1.403E+03	3.703E+02
2.239E+02	2.632E+03	1.449E+03	3.806E+02
2.512E+02	2.700E+03	1.489E+03	3.895E+02

2.818E+02	2.759E+03	1.524E+03	3.973E+02
3.162E+02	2.808E+03	1.553E+03	4.038E+02
3.548E+02	2.850E+03	1.577E+03	4.093E+02
3.981E+02	2.886E+03	1.597E+03	4.138E+02
4.467E+02	2.915E+03	1.614E+03	4.176E+02
5.012E+02	2.940E+03	1.628E+03	4.207E+02
5.623E+02	2.961E+03	1.639E+03	4.232E+02
6.310E+02	2.979E+03	1.647E+03	4.252E+02
7.079E+02	2.995E+03	1.655E+03	4.268E+02
7.943E+02	3.009E+03	1.660E+03	4.281E+02
8.913E+02	3.023E+03	1.665E+03	4.292E+02
1.000E+03	3.037E+03	1.669E+03	4.300E+02

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME	14.61
----------------	-------



2.8. Çok Uçlu İdeal Mekanik Sistemler

Genel de mekanik sistemler de, çok uçlu elemanlar olarak girişler gözönüne alınmaktadır. Ancak bu sistemlerin bazı alt sistemlerine ayrılarak incelemeleri halinde, bu sistemlerin "çok uçlular" olarak modellenmeleri gerekmiştir. Çok uçlu elemanlar olarak gözönüne alınan yay kutularına, 2 uçlu yay elemanları ile oluşturulmuş gözüyle bakmak mümkündür. Ancak bu görüşü uçlarında, uçlarında hem öteleme hem dönme büyüklükleri bulunan çok uçlu yay kutuları için uygulamak mümkün değildir.

Devreler teorisinde incelenen elektrik devrelerinde olduğu gibi, mekanik sistemlerin analizinde de bu sistemleri oluşturan temel mekanik elemanların tanımlanması ve özelliklerinin çok iyi belirlenmiş olması gerekir. Bunlara çok uçlu yeni temel elemanlar eklenerek, verilen bir mekanik sistem bu temel elemanlarla oluşturulmuş gibi düşünülebilir. Böylelikle bir boyutlu mekanik sistemlerin incelenmesinde gözönüne alınabilecek bütün mekanik elemanlar, 2 uçlu yada bazı çok uçlu temel mekanik elemanlardan oluşmuş olarak incelenmektedir. Bu tür bir yaklaşım; elektrik devrelerinin durum denklemlerinin elde edilmesinde bazı kolaylıklar sağlamaktadır.

(s) n kapılı, mekanik bir eleman, bu elemanın kapılarında ki hız (açısal hız) ve kuvvet (moment) büyüklüklerinin oluşturdukları sütun matrisler $v(t)$ ve $f(t)$ ile gösterilirse (s) n uçlusunun ani gücü ;

$$P_m(t) = v^T(t) f(t) = f^T(t) v(t) \quad (2.49)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Öyle mekanik elemanlar vardır ki (2.49) ifadesi ile verilen ani güç bu eleman için, bütün t aralıklarının da özdeş olarak sıfırdır. Bu özelliğe sahip elemanlara "enerjik olmayan (non-energetic) elemanlar" adı verilmektedir. Örneğin n kapılı mekanik bir elemanın uç hızları arasında ;

$$v_1(t) = N v_2(t) \quad (2.50)$$

bağıntısının olduğu varsayılırsa N $n_1 \times n_2$ boyutunda sabit bir dikdörtgen matris olup, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ n kapılının bütün uç hızlarını içermektedir. $(n_1 + n_2 = n)$ n kapılı eleman enerjik olmadığından, ani gücü özdeş olarak sıfırdır.

$$\begin{aligned}
 p_m(t) &= f^T(t) v(t) = [f_1^T(t) f_2^T(t)] \times \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \\
 &= f_1^T(t) v_1(t) + f_2^T(t) v_2(t) = 0
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

(2.50) bağıntısı (2.51) de yerine konulursa;

$$f_1^T(t) = N \cdot v_2(t) + f_2^T(t) v_2(t) = 0 \tag{2.52}$$

elde edilir. (2.50) ve (2.52) bağıntıları bütün $v_2(t)$ değerleri için geçerli olduğundan, (2.52) bağıntısı;

$$\begin{aligned}
 f_1^T(t) N + f_2^T(t) &= 0 \\
 f_2(t) &= -N^T f_1(t)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

(2.50) ve (2.53) denklemleri birlikte aşağıdaki şekilde yazılırsa, n kapılı mekanik elemanın uç denklemleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Bu tür elemanlara "ideal bağ elemanları" denir. (2.54)' den katsayılar matrisi ters simetrik bir matristir. İşte ani güğün özdeş olarak sıfır olması katsayılar matrisinin bu özelliğinin bir sonucudur.

2.9. Üç Uçlu İdeal Kaldıraçlar

En basit ideal kaldıraç; şekil 2.17.(a.) da gösterildiği gibi sabit bir düzlem içinde bulunan rijid ve kütlesi ihmal edilebilen elastik bir kirişle gerçekleştirilebilir. Kiriş üzerinde seçilen sabit bir C noktasından geçen ve düzleme dik olan bir eksen etrafında dönme hareketi yapmaktadır. Kiriş rijid varsayıldığından A ve B noktalarının sabit düzlemde x doğrultusundaki yerdeğiştirmeleri arasında şekil 2.17.(a)'daki benzer üçgenlerden;

$$x_1(t) = -\frac{a}{b} x_2(t) \tag{2.55}$$

bağıntısı vardır. Bağıntıda ki (-) işareti, x_1 ve x_2 yerdeğiştirmelerinin ters yönlerde ortaya çıktığını göstermektedir. (2.55) denkleminin her iki yönde türevi alınırsa, kirişin A ve B uçlarının x yönünde olan hızları arasında ki bağıntıyı verir.;

$$v_1(t) = -\frac{a}{b} v_2(t) \quad (2.56)$$

Rijid kaldırıcı, şekil 2.17.(b) de gösterildiği üzere 3 uçlu bir eleman olarak modellenecektir. Bu eleman için seçilen uç grafi şekil 2.17.(c) de gösterilmiştir. şekil 2.17.(a)'daki θ açısı çok küçük tutulmaktadır. Ters halde kaldırıcın A ve B uçları sabit düzlemde daire yayları üzerinde hareket etmekte olduğundan, bu uçlarda ki gerçek yerdeğiştirmeler ve hızlar sadece x doğrultusunda olmayacaktır.

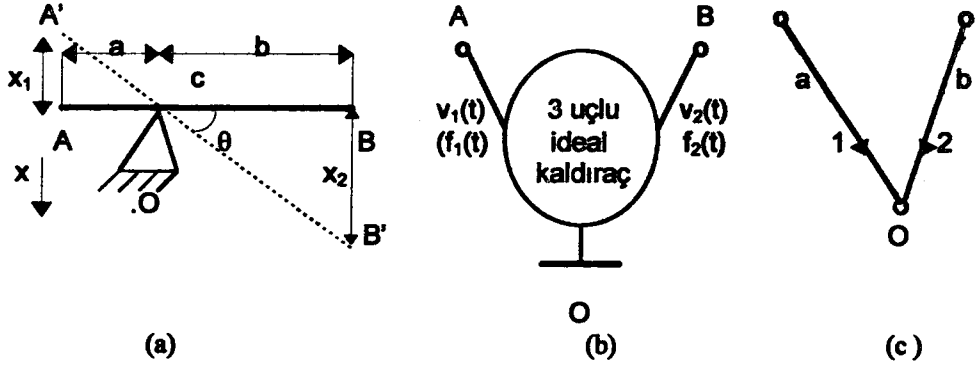
şimdi 3 uçlu rijid kaldırıcın A ve B uçlarında x yönünde uygulanan uç kuvvetleri arasında ki bağıntıyı elde etmek üzere C noktasına göre moment alınır; $-af_1(t) + bf_2(t) = 0$ yazılabilir. şekil 2.17.(c)'deki uç grafiğine ilişkin uç denklemleri (2.55) ve (2.56)'nın biraraya getirilmesi ile aşağıda ki biçimde elde edilmiştir:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

(2.57)'deki denge ve moment denklemlerini kullanarak bulunan uç denklemlerine, 2.5. bahsinde gösterilen (2.37) denklemleri ile de ulaşılabilir. Ancak bunun için bazı değişikliklerin yapılması gereklidir. Bu model ideal olmayan kaldırıcıya uygulanır; A ve B uçları açıkta olduğu için bir eylem sözkonusu değildir. Bu sebeple M_1, M_2 momentleri ile θ_1, θ_2 dönmeleri sıfırdır. C noktasına da kuvvet uygulanmadığı için x_3 yerdeğiştirmesi veya elastik kirişte bir çökme yoktur. Böylelikle matris ;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 b^2}{3EI} & b/l & a/l \\ -b/l & 0 & 0 \\ a/l & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

şeklini alır. Buradan $f_3 = -\frac{3EI}{(a.b)^2} (x_1 + x_2 a)^{\frac{1}{l}}$ dir. Matriste x_1 yerdeğiştirmesi ile f_2 kuvveti ;



Şekil 2.17: (a) 3-uçlu ideal kaldıraç.
 (b) 3-uçlu ideal kaldıraçın şematik gösterimi.
 (c) 3-uçlu ideal kaldıraç için kullanılan uç-grafi.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33} & -a/b \\ a/b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

olarak bulunur. Eşitliklerin her iki tarafının türevi alınır ;

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{d}{dt} f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33} & -a/b \\ a/b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} f_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

biçimini alır. s_{33} elastiklik katsayısının (2.40)' daki değeri $2.88 \cdot 10^{-3}$ m/kg-kuv olarak bulunmuştur. Mekanik s_{33} katsayısı sıfırdan çok daha küçük değerler de bulunabilir. Bu sebeple (2.60) ' da bu katsayı ihmal edilebilir ve matris ,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a/b \\ a/b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

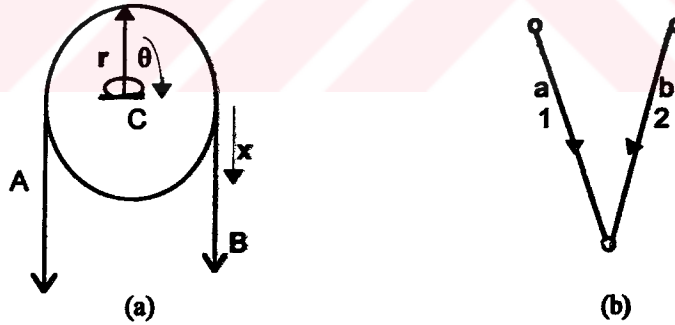
şeklini alır. (2.61) ifadesi (2.57)' deki ideal kaldıraçın uç denklemleri ile aynıdır. Ancak (2.37) denklemleri sadece 3 uçlu kaldıraç modelleri için aynı sonucu verir. Uç sayısının 3' den fazla olduğu durumlar için geçerli değildir,

2.10. Üç Uçlu İdeal Makaralar

Şekil 2.18.(a) da düşey düzlem içinde dönme yapabilen 3 uçlu bir makara çizilmiştir. Makaranın kütlesi ve yatağında ki viskoz sürtünme ihmal edilmektedir. Ayrıca makara üzerine sarılı ve uçları A,B olan ipin kolaylıkla bükülebildiği ve hareket sırasında uzunluğun değişmediği varsayılacaktır. Bu koşullar altında ideal makaranın şekil 2.18.(b)'deki uç grafa ilişkin uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

şeklinde. Makara eksenı etrafında bir miktar döndüğünde A ucu x_1 kadar yerdeğiştirmiş, B ucu ise ters yönde aynı miktarda ($x_2 = -x_1$) yerdeğiştirecektir. Bu (2.62)'deki ilk bağıntıyı verir. Uç kuvvetleri arasındaki bağıntı ise makaranın denge şartından elde edilebildiği gibi, ideal makaranın enerjik olmayan bir eleman olması özelliğinden de yazılabilir. (2.62) uç denklemleri, 3 uçlu ideal makaranın a ve b kol uzunlukları birbirine eşit olan şekil 2.17.(a) 'daki ideal kaldıraçın bu özel durumunda ki gibi davrandığını gösterir.



Şekil: 2.18: (a) 4-uçlu hareketli ideal makara.
(b) Hareketli ideal makaraya ilişkin uç grafi.

2.11. Üç Uçlu İdeal Dişli Kutuları

Uç değişkenleri yalnız açısal hız ve döndürme momentleri olan dişli kutularının en basiti; şekil 2.19.(a) da gösterilen iki dişli çarktan oluşan 3 uçlu mekanik elemandır. Eğer dişli çarkların kavramsal olarak dönen kütleleri, dişliler arasında ve dişli milleri içinde döndükleri yataklar arasında ki kuru yada viskoz sürtünmeler, dişliler arasında ki boşluklar, millerinin ve dişlilerinin esneklikleri ihmal ediliyorsa bu sistem "ideal bir bağ elemanı" yada "ideal bir dişli" kutusudur, Şekil 2.19.(a)'daki 3 uçlu ideal bir dişli kutusunun, verilen uç grafına göre dönme yerdeğiştirmeleri arasında;

$$\theta_1(t) = \frac{N_2}{N_1} \theta_2(t) \quad (2.63)$$

bağıntısı vardır. Şekil 2.19.(a) da üstteki dişli z dönme eksenine göre ; pozitif yönde dönüyorsa alttaki dişli bu eksene göre negatif yönde döner, Bu nedenle de (2.63)'deki bağıntı da işaret negatif olmaktadır. İdeal dişli kutusunun uç momentleri arasında ki bağıntı, 3 uçlu elemanın ani gücünün sıfır olması özelliğinden, (2.53) de verildiği üzere , (2.63)'den yararlanılarak düzenlenirse;

$$M_2(t) = - (N_1/N_2) M_1(t) \quad (2.64)$$

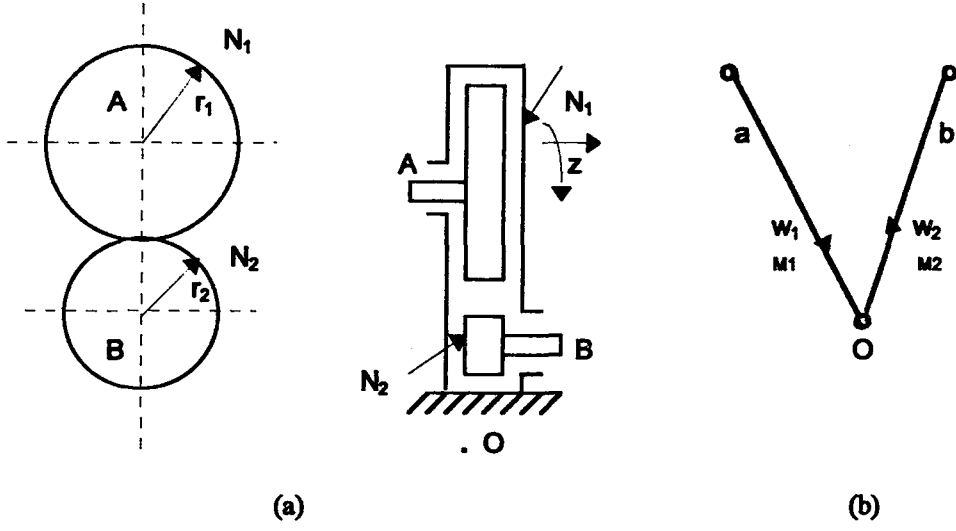
elde edilir. (2.63)'deki bağıntının türevi alınarak ve (2.64) bağıntısı da birlikte düzenlenerek ;

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

şeklini alır. Burada $n = N_2 / N_1$ diş sayıları oranıdır. (2.65) denklemlerindeki mekanik büyüklükler tablo 2.1' den elektriksel elemanlar olarak modellenirse ;

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

formunu alır. (2.66)'daki devre elemanı ; birbirini magnetik yoldan etkileyen iki endüktansın oluşturduğu, iki kapılı düzenin idealleştirilmesi ile elde edilen transformatöre aittir.



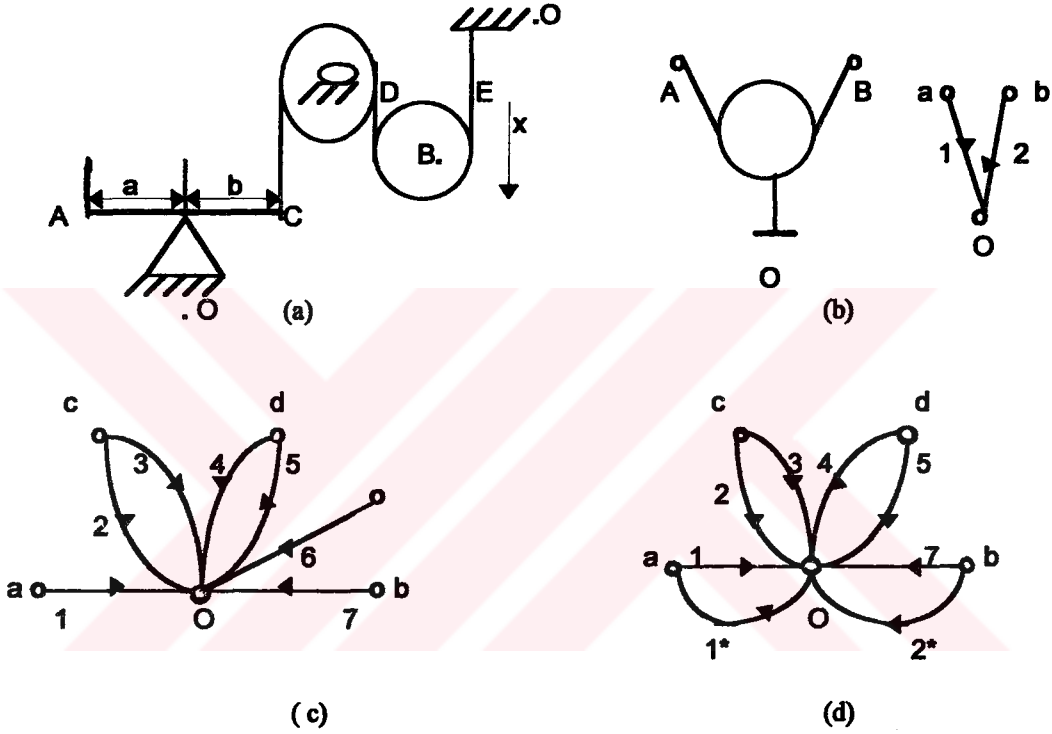
Şekil 2.19: (a) İki dişli çarktan oluşan 3-üçlü ideal dişli kutusu. Dişli çarkların yarıçapları r_1 ve r_2 , diş sayıları ise N_1 ve N_2 ile gösterilmiştir.
(b) 3-üçlü ideal dişli kutusu için seçilen uç-graflı.

İdeal transformatörün en önemli özelliği, ani gücün özdeş olarak sıfır olmasıdır. Böylelikle ideal transformatör kayıpsız bir eleman ve (t_0, t) zaman aralığında , başlangıç enerjisi sıfır, enerji fonksiyonu; $E(t) \geq 0$ olan n uçlu pasif bir devre elemanıdır. Pasif bir eleman ; başlangıç anından sonra ki her anda, belirli bir değerde enerji biriktirir. Bu enerji sıfır değerini alabilir, ancak hiç bir zaman negatif ve buna bağlı olarak da dışarıya enerji veremez. Eğer enerji fonksiyonu t aralığında ki bazı değerler için ,negatif ise eleman artık "pasif" değil "aktif" olarak tanımlanmaktadır.

Mekanik sistemler de ideal kaldıraç ve makaraların uç denklemlerinin elektriksel değişkenleri ile modellenen eşdeğer devreleri, ideal transformatörün karakteristiklerini taşımaktadır.

Temel de uç sayısı ikiden fazla olan bir devre elemanına "çok uçlu eleman" yada uç sayısı n ise " n uçlu devre elemanı" adı verilmiştir. Çok uçlu ideal bağ elemanlarından oluşan sistemlerin en önemli iki özelliği şunlardır:

(n_1+n_2) kapılı (n_1+n_2+1) uçlu ideal bir bağ elemanının, belirli bir uç grafına ilişkin uç denklemleri (2.54)'deki gibi k tane uç çifti birbirine rijid bağlanarak daha az sayıda uca sahip çok uçlu eleman elde edilmiş ise m uca sahip eleman yine bir bağ elemanıdır. Diğer bir özelliği ise; birbirileriyle uçlarından gelişigüzel bağlanmış k sayıda çok uçlu ideal bağ elemanının oluşturduğu bir sistem de yalnız n tane uçla ilgilenerek, sistem n uçlu bir eleman olarak gözönüne alınır, "n uçlu eleman" ideal bir bağ elemanıdır. Aşağıda bu özellikleri içeren mekanik sistemlere bir örnek verilmiştir.



Şekil2.20: (a) 3-uçlu ideal bir kaldıraç, 3-uçlu ideal bir makara ve 4-uçlu hareketli bir ideal makaradan oluşan sistem.
 (b) (a) daki sistemin 3-uçlu bir ideal eleman olarak gözönüne alınması ve seçilen uç grafi.
 (c) Sisteme ilişkin uç grafi.
 (d) Hareketli makaranın E ucu referansa bağlandıktan sonra elde edilen sistem grafi.

Burada ;şekil 2.20.(a.) da iki ideal makara ve ideal kaldıraçtan oluşan sistem gözönüne alınmaktadır. Bu mekanik sistem, şekil 2.20.(b) deki gibi 3 uçlu bir eleman olarak modellenenecektir. Şimdi 3uçlu elemanın seçilen uç grafına göre uç denklemlerini elde edelim.Sistemi oluşturan ideal bağ elemanlarının uç grafları ile oluşturulan ve bağlantı biçimini

veren graf, şekil 2.20.(c) de çizilmiştir. Bu graftaki numaralara göre ideal bağ elemanlarının uç denklemleri şu şekilde olacaktır.

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a/b \\ a/b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\begin{bmatrix} v_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} f_5(t) \\ f_6(t) \\ v_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_5(t) \\ v_6(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

(2.67) 3 uçlu ideal kaldırmaç,(2.68) 3 uçlu ideal makara,(2.69) ise 4 uçlu hareketli ideal makara için geçerli ideal bağ elemanlarının uç denklemleridir. 4 uçlu hareketli ideal makaranın E ucu referansa bağlanacağından $v_6(t)=0$ olur ve uç denklemleri; 3 uçlu ideal bir bağ elemanı olarak;

$$\begin{bmatrix} f_5(t) \\ v_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_5(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

elde edilecektir.Bu durum aslında ilk özelliğin bir uygulamasıdır. Şekil (2.20.a)'daki sistemde ideal bağ elemanları için (2.67),(2.68) ve (2.70) uç denklemleri kullanılacaktır. Sistem, şekil 2.20.(b)'deki uç graf ile belirlenen kapılardan kaynaklarla sürülürse şekil 2.20.(d)'deki sistem grafı elde edilecektir. İdeal bağ elemanlarından oluşan sistemlerin ikinci özelliğine göre sistem grafında yalnız $\dot{v}_1(t)$ ve $\dot{v}_2(t)$ hızları arasında bağıntının kurulması yeterlidir.Öncelikle sistem grafından $\dot{v}_1(t)=\dot{v}_1(t)$ yazılabilir. $\dot{v}_1(t)$ (2.67) bağıntısından $(-a/b)\dot{v}_2(t)$ 'ye eşittir. Sistem grafından $\dot{v}_2(t)=\dot{v}_3(t)$ ve (2.68)'dende $\dot{v}_3(t)=-\dot{v}_4(t)$ 'ye eşittir.Yine sistem grafından $\dot{v}_4(t)=\dot{v}_5(t)$ ve (2.70) 'dende $\dot{v}_5(t)=2\dot{v}_7(t)$ son olarak da $\dot{v}_7(t)=\dot{v}_2(t)$ yazılabilir. Bütün bu bağıntılar birleştirilirse:

$$\dot{v}_1(t) = 2(a/b)\dot{v}_2(t) \quad (2.71)$$

elde edilir. O halde örnekteki 3-uçlu ideal bağ elemanın uç denklemleri;

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2a/b \\ -2a/b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

şeklinde bulunur.



SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde üç boyutlu uzayda genel olarak, katı cismin hareketi incelenmiş ve çok uçlu elektriksel ve mekanik sistemlerin aralarındaki benzerlikler gözönüne alınmıştır. Mekanik sistemlerde çok uçlu elemanlar olarak çoğunlukla elastik kirişler söz konusu olmuştur. Ancak bu kirişlerin birden fazlasının birarada kullanılması ile meydana gelen mekanik sistemler de vardır. Birbirlerine üçgen oluşturacak şekilde uçlarından mafsallanmış ve her yeni mafsal için iki çubuk eklenip üretilen böyle sistemlere "kafes sistem" adı verilir. Örneğin; köprünün kendi ağırlığı ile beraber köprü döşemesine etkileyen yükler kafes kirişlerin esas itibarı ile kendi düzlemleri içinde eğilmesine sebep olur. Sistemde şekil değiştirmesi sonucu çubukların boylarındaki değişimlerden, çekme ve basınç kuvvetleri oluşur.

(birinci ve ikinci mertebe gerilimleri) Bir kafes sistemindeki çubuk sayısı;

$$m=2j$$

formülü ile bulunabilir. "j" burada sistemdeki düğüm noktası sayısıdır. Aşağıda kafes sistemlere ilişkin bir örnek verilmiştir.

Şekildeki kafes sistemin çubuk kuvvetlerinin hesaplanması için önce sistemin geometrisinden denklemleri yazılarak mesnet tepkileri hesaplanır.

$$\tan \alpha = 2/4.8 \quad \sin \alpha = 0.384 \quad \cos \alpha = 0.923$$

$$\Sigma M_A = 0 : (R_B \cos \alpha) \cdot 4 - 1500 \cdot 9.6 = 0 \Rightarrow R_B = 3900 \text{ kg-kuv}$$

$$\Sigma X_i = 0 : A_x - R_B \cos \alpha = 0 \Rightarrow A_x = 3600 \text{ kg-kuv}$$

$$\Sigma Y_i = 0 : A_y + R_B \sin \alpha - 1500 = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

A düğüm noktası:

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_2 \sin \alpha = 0, S_2 = 0$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 \cos \alpha + A_x = 0, S_1 = -3600 \text{ kg-kuv}$$

C düğüm noktası:

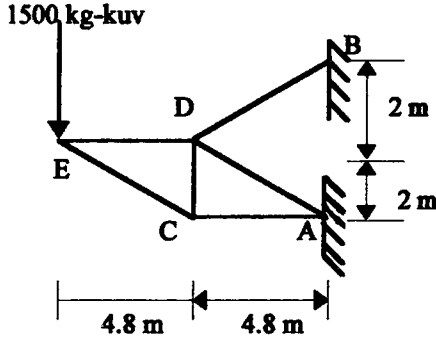
$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_4 \cos \alpha - S_1 = 0, S_4 = -3900 \text{ kg-kuv}$$

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S_3 + S_4 \sin \alpha = 0, S_3 = 1500 \text{ kg-kuv}$$

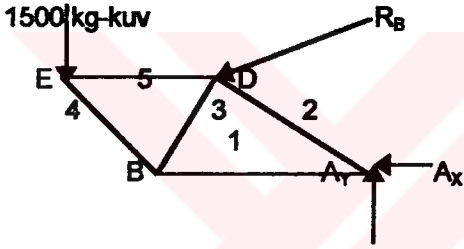
D düğüm noktası:

$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow S \sin \alpha - S_3 = 0, S = 3900 \text{ kg-kuv}$$

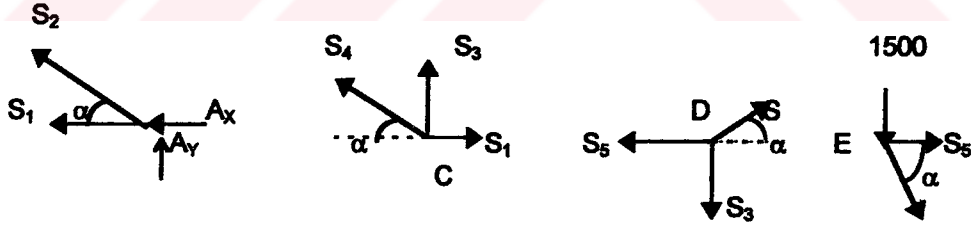
$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_5 - S \cos \alpha = 0, S_5 = 3600 \text{ kg -kuv}$$



(a)



(b)



(c)

- Şekil 1: (a) Altı tane çubuktan meydana gelen basit kafes sistem.
 (b) Kafes sistemdeki mesnet kuvvetlerinin gösterimi.
 (c) A, C ve D düğüm noktalarındaki çubuk kuvvetlerinin gösterimi.

Kafes sistemlerin yada bazı mekanik sistemlerin tepki kuvvetleri veya diğer büyüklükleri işlem sayısının çok fazla olduğu durumlarda denge ve moment denklemlerinin yazılması ile kolaylıkla hesaplanamaz. Böyle mekanik sistemlerin analizi "ansys" adı verilen bilgisayar programı yardımı ile de yapılabilir. Ansys sonlu elemanlar yöntemi ile problemin çözümünü

gerçekleştirmektedir. Sonlu elemanlar yönteminde amaç bütün sistem için denklemlerin yazılması ve sınır koşulları yerine, sürekli ortamı önce daha küçük parçalara ayırarak çok daha basit olan bu parçalara ilişkin analizlerin yapıldıktan sonra parçaların modellenmesi ve sistemin sonlu sayıda alt sistemlerden oluştuğunu kabul ederek çözümün elde edilmesidir. Ansys programı temel olarak üç bölümden oluşur. "Preprocessing" programın modelleme bölümüdür. Burada sistemde kullanılan element cinsi, girişin özellikleri (boyutu,...), ve sistemin kesit alanı, atalet momenti, elastisite modülü gibi özellikleri tanımlanır. "Solution" sistemde var olan düğümlerdeki büyüklüklerin (örneğin-basınç gerilmesi) değerlerinin verildiği kısımdır. "post-processing" ise programda hesaplanması istenilen büyüklüklerin görüldüğü kısımdır. Bu programda analiz yapılmadan önce sisteme ait özelliklerin doğru tanımlanarak sistemin, görüntülenmesi gerekmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, devre analizine uygulandığında "parçalama ve yeniden birleştirme" yönteminden yararlanır. Devre iç yapısı daha basit olan alt devrelere ayrılır. Böylelikle verilen devrenin analizi, alt devrelerin analizine indirgenmiş olur. Sonra bu alt devrelere ilişkin matematiksel modeller elde edilir ve alt devrelerdeki çok uçlu elemanların akım ve gerilimleri bulunur. Buradaki büyüklükler devre analizinde kullanılan yöntemlerle elde edilir veya sayısal metotlar uygulanır. Özellikle çok uçlu makro modeller gözönüne alındığında Pspice elektronik devre analizi programı çoğunlukla kullanılır. Çünkü Pspice ile elektriksel sistemlerin analizi ve istenilen sonuçların hesaplanması çok daha basit ve idealdir.

KAYNAKLAR

- [1] BEER, F. P. , JOHNSTON, E. R. , Dynamics, Mc Graw Hill, pp. 96, (1962).
- [2] KARNOPP, D. C. , ROSENBERG, R. C. , Introduction to Physical System Dynamics, Mc Graw Hill, pp. 37-39, (1983).
- [3] TOKAD, Y. , Mühendislik Sistemlerinin Analizi- Kısım 2, Yıldız Üniversitesi Yayınları, pp. 1-114, (1985).
- [4] TOKAD, Y. , Mühendislik Sistemlerinin Analizi- Kısım 3, Bilkent Üniversitesi, pp. 149-182, (1990).
- [5] TOKAD, Y. , Devre Analizi Dersleri- Kısım 2, Çağlayan Kitabevi, pp. 238-240, (1987).

EK A : HİDROLİK SİSTEM ELEMANLARI

EK A1 : Hidrolik Sistem Elemanlarına Giriş

Hidrolik sistemler, genel olarak 3 boyutlu uzayda sürekli bir ortam oluşturan sıvı yada gaz gibi akışkan cisimlerin hareketleri ile ilgili incelemeleri içermektedir. Bu incelemeler de kullanılan büyüklükler basınç $[p(t)]$ ve akış hızı (debi) 'dir. Bu büyüklüklerin çarpımı ani (hidrolik) gücü içermektedir. Böylelikle; hidrolik bir sisteme ilişkin sistem grafi kolaylıkla çizilerek buradan $p(t)$ basınç değişkenlerinin sağladıkları çevre denklemleri ve $Q(t)$ debi değişkenlerinin gerçekledikleri kesitleme denklemleri yazılmakta ve sisteme ilişkin durum denklemlerinin eldesi "elektriksel ve mekanik " sistemler de olduğu gibi mümkün olmaktadır. Tablo A1' den yararlanarak, hidrolik sistemlerde bulunması gereken hidrolik kapasite, hidrolik endüktans ve hidrolik direnç gibi 2 uçlu temel temel elemanları kavramsal olarak uç denklemleri yardım ile tanımlanır. Bu elemanlar tablo A2 de verilmiştir. Çok uçlu mekanik elemanların özellikle 3 boyutlu uzayda hareketi söz konusu olduğunda katı cismin modellenmesi büyük önem taşımaktadır. Hareket 3 boyutlu uzayda olduğundan, mekanik elemanların kapılarındaki vektörel uç büyüklükleri belirgin hale gelmektedir.

Tablo A1: Elektriksel ve Hidrolik Büyüklükler.

Elektriksel Büyüklükler				Hidrolik Büyüklükler			
Gerilim	$v(t)$	volt	V	Basınç	$p(t)$	paskal	$P_a = N/m^2$
Akım	$i(t)$	amper	I	Debi	$Q(t)$	akış hızı	m^3/s
Güç	$v(t).i(t)$	watt	W	Güç	$p(t).Q(t)$	watt	W
Enerji	E_e	joule	J	Enerji	E_h	joule	J
Elektrik yükü	$q(t)$	coulomb	C	Hacim	$V(t)$		m^3
Magnetik akı	$\Phi(t)$	weber	Wb	Özgül kütle	ρ		kg/m^3

Tablo A2: İki uçlu hidrolik ve elektriksel elemanların uç denklemleri.

2-uçlu Elektriksel Elemanlar			2-uçlu Hidrolik Elemanlar		
Direnç	R	$v(t) = R.i(t)$	Hidrolik Direnç	R_H	$p(t) = R_H.Q(t)$
Endüktans	L	$v(t) = L.\frac{d}{dt}i(t)$	Hidrolik Endüktans	L_H	$p(t) = L_H\frac{d}{dt}Q(t)$
Kapasite	C	$i(t) = C.\frac{d}{dt}v(t)$	Hidrolik Kapasite	C_H	$Q(t) = C_H\frac{d}{dt}p(t)$

EK A2 : Bir Vektörün Farklı Dik Eksen Takımlarındaki Matrisel Gösterilişleri

3-boyutlu uzayda S ile gösterilen sabit dik eksen takımı gözönüne alındığında; verilen bir $\vec{a}$ vektörünün bu uzaydaki geometrik gösterilişi olan yönlendirilmiş doğru parçasının başlangıç noktası şekil A.1.(a.) da gösterildiği gibi, S' nin O başlangıç noktasında olsun. Şekilde $\vec{a}$ vektörünü temsil eden OP yönlü doğru parçasının uzunluğu a ile ve P noktasının koordinatları a_1, a_2, a_3 ile gösterilmiştir. S takımının eksenlerini belirleyen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörleri ile $\vec{a}$ vektörünün yapmış olduğu açılar sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olsun. Şekilden ;

$$a_1 = a \cos \alpha_1$$

$$a_2 = a \cos \alpha_2$$

(A1)

$$a_3 = a \cos \alpha_3$$

bağıntıları yazılabilir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ açılarının üçü birden gelişigüzel seçilemezler. Öte yandan bunların yalnız iki tanesi biliniyorsa üçüncüsü tek olarak belirlenemez. Şimdi 3 boyutlu uzayda gösterildiği biçimde S ile aynı başlangıç noktasını paylaşan, ikinci bir Σ dik eksen takımının S' ye göre durumunu belirlemek için Σ 'ya ilişkin $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ birim vektörlerinin S takımındaki gösterimlerini belirlemek yeterlidir. S ve Σ gibi iki eksen takımı söz konusu

olduğunda, bir vektörün hangi takımındaki gösterimi gözönüne alınırsa, bu gösterimde kullanılan eksen takımını bir indisle belirtmek yararlı olacaktır. $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ birim vektörlerinin Σ eksen takımındaki gösterilişleri;

$$(e_1')_{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (e_2')_{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (e_3')_{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

biçimindedir. Aynı $\vec{e}_i'$ ($i=1,2,3$) birim vektörlerinin S'nin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörleri ile yapmış olduğu açılara $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}$ ise;

$$\vec{e}_i' = (\cos \alpha_{1i})\vec{e}_1 + (\cos \alpha_{2i})\vec{e}_2 + (\cos \alpha_{3i})\vec{e}_3 \quad (A3)$$

yazılabilecektir. Bu vektörel bağıntı S takımında matrisel olarak ;

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} \\ \cos \alpha_{2i} \\ \cos \alpha_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ t_{3i} \end{bmatrix} \quad (A4)$$

biçimini alır, Elde edilen sütun matrisin normu ;

$$\left\| (e'_i)_S \right\|^2 = (e'_i)_S \cdot (e'_i)^T)_S = t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + t_{3i}^2 \quad (A5)$$

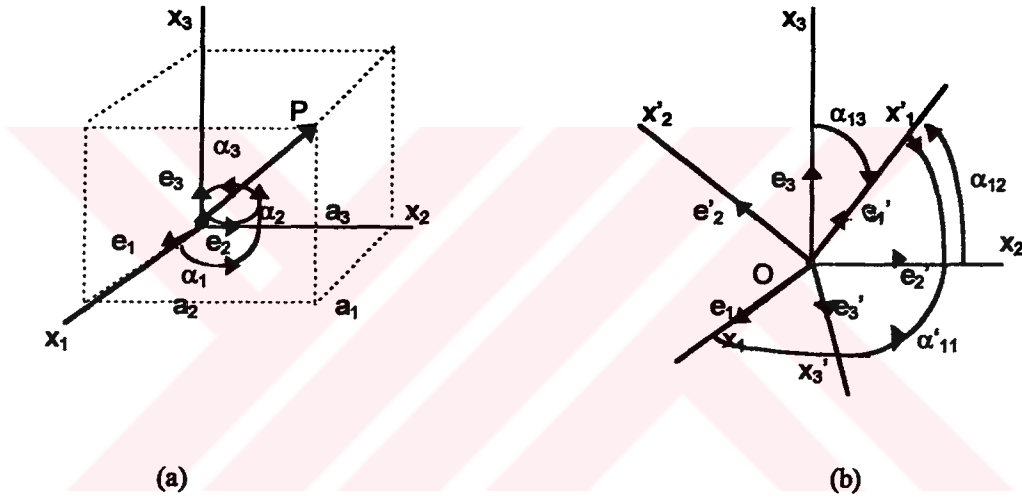
yazılabilir. Benzer biçimde, S eksen takımının Σ' ya göre durumu belirlenmek istenirse, bu defa S'ye ilişkin $\vec{e}_l$ ($l=1,2,3$) birim vektörlerinin Σ' 'daki gösterilişlerini gözönüne almak gerekir. Şekil (3.1,b)'den görüleceği üzere $\vec{e}_l$ vektörünün Σ' ya ilişkin $\vec{e}_l'$ birim vektörleri ile yapmış olduğu açılar $\alpha_{1l}, \alpha_{2l}, \alpha_{3l}$ 'dür. Buna göre ;

$$\vec{e}_l = (\cos \alpha_{1l})\vec{e}_1' + (\cos \alpha_{2l})\vec{e}_2' + (\cos \alpha_{3l})\vec{e}_3'$$

vektörel bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntının matrisel karşılığı;

$$\begin{aligned}
(e_i)_\Sigma &= (\cos \alpha_{i1})(\vec{e}_1')_\Sigma + (\cos \alpha_{i2})(\vec{e}_2')_\Sigma + (\cos \alpha_{i3})(\vec{e}_3')_\Sigma \\
&= (\cos \alpha_{i1}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (\cos \alpha_{i2}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\cos \alpha_{i3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha_{i1} \\ \cos \alpha_{i2} \\ \cos \alpha_{i3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \\ t_{i3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A6}$$

şeklindedir. Bu sütun matris içinde (A.5)'deki bağıntıya benzer olarak;



Şekil A.1: (a) S dik eksen takımında bir a vektörünün kosinüslerinin tanımı.

(b) S ve \$\Sigma\$ dik eksen takımlarının birbirilerine göre olan durumlarının birim vektörler yardımı ile belirlenmesi.

$$\left\| (e_i)_\Sigma \right\|^2 = (e_i)_\Sigma \cdot (e_i)^T_\Sigma = t_{i1}^2 + t_{i2}^2 + t_{i3}^2 \tag{A7}$$

ifadesi geçerlidir. Bu aşama da şimdi de uzayda gelişigüzel seçilen bir \$\vec{a}\$ vektörünün S ve \$\Sigma\$ takımlarına ilişkin birim vektörleri cinsinden, aşağıdaki lineer kombinasyonlarla verilen ifadeleri gözönüne alınırsa ;

$$\vec{a} = a_{1S}.\vec{e}_1 + a_{2S}.\vec{e}_2 + a_{3S}.\vec{e}_3 \quad (\text{A8})$$

$$\vec{a} = a_{1\Sigma}\vec{e}_1' + a_{2\Sigma}\vec{e}_2' + a_{3\Sigma}\vec{e}_3' \quad (\text{A9})$$

$\vec{a}$ 'nın S takımına göre gösterilişi (A.8)' den, Σ takımına gösterilişi (A.9)'dan yazılırsa;

$$(a)_S = a_{1S}(e_1)_S + a_{2S}(e_2)_S + a_{3S}(e_3)_S = \begin{bmatrix} a_{1S} \\ a_{2S} \\ a_{3S} \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

$$(a)_\Sigma = a_{1\Sigma}(e_1')_\Sigma + a_{2\Sigma}(e_2')_\Sigma + a_{3\Sigma}(e_3')_\Sigma = \begin{bmatrix} a_{1\Sigma} \\ a_{2\Sigma} \\ a_{3\Sigma} \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

elde edilir. Öte yandan (A.9) vektörel bağıntısının S takımında, (A.8) vektörel bağıntısının da Σ takımındaki matrisel gösterilişi gözönüne alınırsa, önce (A.9)' un S takımında ki matris gösterimi ,

$$(a)_S = a_{1\Sigma}(e_1')_S + a_{2\Sigma}(e_2')_S = \sum_{I=1}^3 a_{I\Sigma}(e_I')_S \quad (\text{A12})$$

bulunur, bu ifade de $(e_i')_S$ için (A.6)'daki gösterim kullanılırsa ;

$$\begin{aligned} (a)_S &= \sum_{i=1}^3 a_{I\Sigma}(t_{1i}(e_1)_S + t_{2i}(e_2)_S + t_{3i}(e_3)_S) \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 a_{I\Sigma}t_{1i}\right)(e_1)_S + \left(\sum_{i=1}^3 a_{I\Sigma}t_{2i}\right)(e_2)_S + \left(\sum_{i=1}^3 a_{I\Sigma}t_{3i}\right).(e_3)_S \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

yazılabilir. (k=1,2,3) ise;

$$a_{KS} = \sum_{i=1}^3 a_{i\Sigma} . t_{Ki} = a_{1\Sigma} . t_{K1} + a_{2\Sigma} . t_{K2} + a_{3\Sigma} . t_{K3} \quad (A14)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı matrisel biçimde düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} a_{1S} \\ a_{2S} \\ a_{3S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{1\Sigma} \\ a_{2\Sigma} \\ a_{3\Sigma} \end{bmatrix} \quad (A15)$$

matrisi yada $(a)_S = T(a)_\Sigma$ bağıntısı elde edilir. T katsayılar matrisi $\vec{a}$ vektörünün Σ eksen takımındaki gösterilişinin S'deki gösterilişine, T^T matrisi de $\vec{a}$ vektörünün S eksen takımındaki gösterilişinin Σ 'daki gösterilişine dönüşmektedir. Bu nedenle T'ye "dönüşüm matrisi" adı verilmektedir. T matrisi $\vec{a}$ vektöründen bağımsız, determinanı 1'e eşit, reel elemanlı ortogonal bir matristir. Elemanları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$\begin{bmatrix} (t_{22}t_{33} - t_{32}t_{23}) & -(t_{12}t_{33} - t_{32}t_{13}) & (t_{23}t_{12} - t_{22}t_{13}) \\ -(t_{21}t_{33} - t_{31}t_{23}) & (t_{11}t_{33} - t_{31}t_{13}) & -(t_{11}t_{23} - t_{21}t_{13}) \\ (t_{21}t_{32} - t_{31}t_{22}) & -(t_{11}t_{32} - t_{31}t_{12}) & (t_{22}t_{11} - t_{12}t_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (A16)$$

Bu ifade diklik koşulunun açık ifadesidir. (A.16)'nın sol yanı T^{-1} matrisine karşı düşmektedir. Burada matrisin tersi hesaplanırken, $|T|=1$ özelliği gözönüne alınmıştır.

EK A3: T Dönüşüm Matrisi Hakkında Euler Teoremi

Burada T dönüşüm matrisinin diğer bir yorumu incelenerek , bunun uzayda belirli bir eksen etrafında sonlu bir dönme işlemine karşı düştüğü görülecektir. Bu amaçla ; örneğin; şekil A.2.(a) da S ve Σ eksen takımlarının birbirilerine göre özel bir durumu gösterilmiştir. S dik eksen takımı ox_1 eksen etrafında pozitif yönde θ açısı kadar döndürülerek bundan T matrisinin sütunları (A.4) de açıklandığı üzere Σ eksen takımına ilişkin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin S üzerindeki bileşenlerinden oluşmuştur. Şekil: A.2.(a)'dan birim vektörlere ilişkin sütun matrisler için;

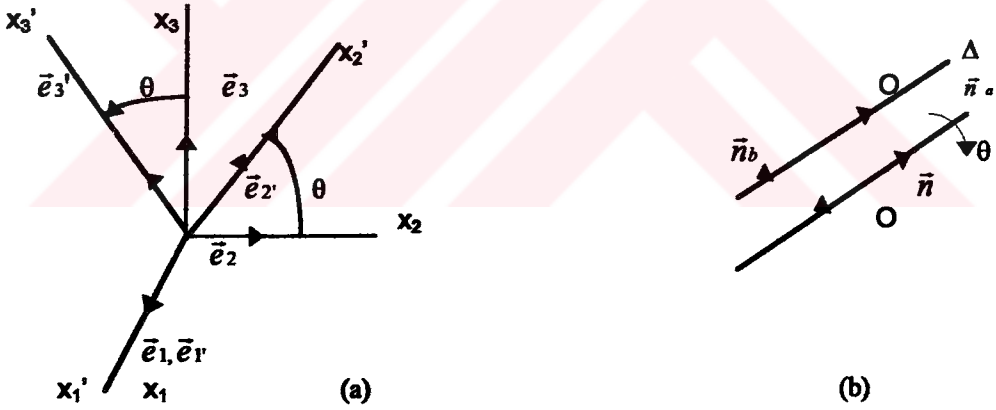
$$(e_1')_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (e_2')_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, (e_3')_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

ifadeleri yazılabilir. O halde ;

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

elde edilir. Diğer yandan T'nin satırları (A.6)'da verildiği üzere S'e ilişkin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin Σ üzerindeki bileşenlerinden oluşmuştur. Bu bileşenler satır matris biçiminde yazılırsa;

$$[1.0.0], [0, \cos \theta, -\sin \theta], [0, \sin \theta, \cos \theta] \quad (\text{A.19})$$



Şekil A.2: (a) Σ dik eksen takımının S takımından, S nin OX_1 eksenini etrafında θ açısı kadar yapılacak bir sonlu dönme ile elde edilmesi.

(b) Δ nın iki değişik biçimde, $\vec{n}_a, \vec{n}_b$ birim vektörleri ile elde edilmesi. $\vec{n}_a = -\vec{n}_b$

elde edilir. (A.18)' dede görüldüğü gibi bileşenler T'nin gerçekte de satırlarını oluşturmaktadır. Bu örnekte özel bir konuma sahip Σ dik eksen takımı, S dik eksen takımından ,S'nin ox_1 eksen etrafında θ kadar döndürmekle elde edilmiş, bu dönme işlemi de T dönüşüm matrisi ile (A.18) de belirlenmiştir. Özel bir durum için gösterilen bu özelliğin, gerçekte bir teoremle ifade edilen daha genel bir özelliğin özel bir hali olduğu görülecektir. Bu nedenle T dönüşüm matrisine "sonlu dönme matrisi" adı da verilmektedir. Bu teoreme 3 boyutlu uzayda S ve Σ dik eksen takımları aynı o başlangıç noktasını paylaşıyorlarsa, S dik eksen takımı O'dan geçen bir λ doğrusu (dönme eksen) etrafında θ açısı kadar bir dönme ile Σ takımına çakıştırılabilir, "Euler teoremi" adı verilen bu teoremde S' e rijid olarak bağlı böyle bir λ dönme ekseninin varlığı kabul edilir. λ doğrusu, üzerinde yatan ve $\vec{n}$ ile gösterilen birim vektör yardımı ile tanımlanabilir. S dik eksen takımının λ etrafında yapacağı dönme hareketi sırasında $\vec{n}$ vektörünün S'deki bileşenleri, konumu ne olursa olsun hep aynı kalacaktır. İşte bu önemli özellik nedeni ile ve S eksen takımının dönme hareketi yaparak Σ ile de çakışacağı varsayıldığından, $\vec{n}$ birim vektörünün her iki takımdaki bileşenlerinin aynı olacağı görülür.

Uzayda sabit bir S dik eksen takımı ve bununla aynı O başlangıç noktasına sahip, yine sabit fakat $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ dik eksen takımları gözönüne alındığında, Euler teoremine göre uzayda O başlangıç noktasından geçen öyle doğrular (eksenler) vardır ki bunlardan biri etrafında yapılacak sonlu bir dönme ile gözönüne alınan eksen takımlarından biri başka bir eksene çakıştırılabilir. Mümkün olan bütün bu çakışmaları gerçekleştirmek için gerekli olan dönme eksenlerinin sayısı $1/2 m(m+1)$ ' dir. Burada Σ_p eksen takımının Σ_w eksen takımına geçişini sağlayan T dönüşüm matrisini uygun bir biçimde indisleme gerekmektedir. Şimdiye kadar sadece S ve Σ gibi iki dik eksen takımı ele alındığından, T matrisi için böyle bir indisleme yapılmamıştır. Matrisin $(a)_\Sigma$ sütun matrisini, $(a)_S$ matrisine dönüştürme özelliği T üzerinden ; $(a)_S = T_{S,\Sigma}(a)_\Sigma$ biçiminde ifade edilir. ($p, w=0,1,2,\dots,m$)

ÖZGEÇMİŞ

Burcu Erdem, 1969' da İzmir' de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1986 -1987 öğretim yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başladı. Eylül 1990'da bu bölümü tamamlayan Burcu Erdem, aynı yıl Eylül ayında İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümünde yüksek Lisans programına girdi. Bir müddet Elektronik ve Haberleşme Lisans Bölümünden, gerekli temel dersleri aldıktan sonra, Eylül 1992' de yüksek lisans programına başladı.

