**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# TEKİL YÜK ETKİSİ ALTINDAKİ ANKASTRE MESNETLİ KİRİŞİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Müh. Mustafa ATEŞ**

**Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ**

**HAZİRAN 2007**

**<u>İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>**

# TEKİL YÜK ETKİSİ ALTINDAKİ ANKASTRE MESNETLİ KİRİŞİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Müh. Mustafa ATEŞ**
**(501041082)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007**
**Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı :** **Prof.Dr. Reha ARTAN**

**Diğer Jüri Üyeleri** **Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)**

**Doç.Dr. Ünal ALDEMİR (İ.T.Ü.)**

**HAZİRAN 2007**

# ÖNSÖZ

Altı yıllık eğitimin bir ürünü olan yüksek lisans tezi çalışmamda "Tekil Yük Etkisi Altındaki Ankastre Mesnetli Kirişin Yerel Olmayan Elastisite Yöntemiyle İncelenmesi" konusunu inceledim. Amacım son depremlerin ardından çok önemli bir konu haline gelen sağlamlık ve dayanım konusunda yerel olrnayan elastisiteyi kullanarak tekil yükle yüklenmiş ankastre mesnetli kirişlere klasik kuramlardan farklı bir bakış açısıyla yaklaşmaktı.

Bu konuda bana yardımcı olarak değerli zaman ve görüşlerini benimle paylaşan danışmanım Prof. Dr. Reha Artan'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**İÇİNDEKİLER**

## ŞEKİL LİSTESİ

**SEMBOL LİSTESİ**

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a}$ | **:** Atomik mesafe |
| $\boldsymbol{B}$ | **:** Çekirdek katsayısı |
| $\xi_1, \xi_2, \lambda$ | **:** Çözüm sabitleri |
| $\boldsymbol{E}$ | **:** Elastisite modülü |
| $\varepsilon(z')$ | **:** Şekil değiştirme |
| $\boldsymbol{L}$ | **:** Çubuk uzunluğu |
| $K(z,z')$ | **:** Kernel fonksiyonu |
| $\boldsymbol{p}$ | **:** Tekil yük |
| $\sigma(z)$ | **:** $z$ noktasındaki gerilme |
| $\boldsymbol{I}$ | **:** Atalet momenti |
| $\boldsymbol{M_x}$ | **:** $x$ ekseni etrafındaki moment |

## ÖZET

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite yöntemi ile tekil yükle yüklenmiş bir kirişin şekil değiştirmesinin hesaplanması için yeni fonksiyon elde edilmiştir. Bunun için bir çekirdek (kernel) fonksiyonuna sahip Eringen'in esas denklemi kullanılmıştır. Fonksiyonlar geometrik ve dinamik sınır koşullarını da içermektedir. Bu yeni formülasyon, tekil yük etkisi altındaki ankastre mesnetli kirişler için geçerlidir. Buradaki amaç, eğilmeye çalışan kirişin yerel olmayan elastisite yöntemi ile bulunan şekil değiştirme değerlerinin klasik yöntemlerle bulunan değerlerle karşılaştırılmasıdır. Sonuçları literatürdeki çalışmalarla karşılaştırdığımızda, önerilen yöntemlerle geliştirilen şekil değiştirme formülasyonunun yeterli yakınsaklığı sağladığı gözlenmiştir.

Bu çalışmada, bünye (esas) denklemi olarak Fredholm tipi bir integral denklemi kullanılmıştır. Bu denklemin tersi alınarak parça türevli bir diferansiyel denklem ortaya çıkar.

Yerel olmayan elastisite teorisi, klasik elastisite teorisinin bir uzantısıdır. Yerel olmayan elastisite teorisinin kapsamı ilk olarak Kröner, Edelen, Eringen ve Kunin tarafından sunulmuştur. Yerel olmayan teoriler, malzemenin nanometre ölçeğindeki davranışlarını açıklamak üzere geliştirilmişlerdir. Bu teoriler, maddenin iç yapısını göz önünde bulundurarak uzak mesafedeki etkileşimeri de hesaba katmaktadırlar.

Yerel olmayan elastisite uygulamalarının nanomateryallere örnek teşkil etmesi, nanoteknoloji konusunda çalışan bilim insanları tarafından son zamanlarda dikkate değer görülmüştür. Peddieson, Euler–Bernoulli kiriş teorisinin formülasyonunu yerel olmayan elastisite teorisi ile ele almıştır. Eringen'e göre yerel olmayan elastisite teorisinde referans noktasındaki gerilme, her z' noktasında birim şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak ele alınır.

**SUMMARY**

In this study the deformation in a cantilvered bar subjected to a point load is investigated within the framework of nonlocal elasticity. The constitutive relation proposed by Eringen for the nonlocal linear elastic material is used in this study. The functional also contains both the geometric and the dynamic boundary conditions. This new formulation is valid for the cantilevered bar which subjected to a point load. The aim is to compare the deformation in a cantilevered bar using nonlocal elasticity with the classic evaluation. The comparison of the results with the examples given in the literature was in a good agreement.

In this paper, the Fredholm integral equation of the second kind with a triangular kernel, describing the the boundary value problem, is approximately solved.

An extension of classical elasticity theory is the theory of nonlocal elasticity. The concept of nonlocal elasticity was originally proposed by Kröner, Edelen, Eringen, Kunin and some others. Nonlocal theories were introduced to explain the material behaviour on the nanoscale. Such a theory considers the inner structure of materials and takes into account longrange (nonlocal) interactions.

The application of nonlocal elasticity models to nanomaterials has received attention from the nanotechnology community only recently. Peddieson, proposed a version of nonlocal elasticity for the formulation of an Euler–Bernoulli beam theory. According to the Eringen's theory of nonlocal elasticity, the stress at a reference point z' is considered to be a functional of the strain field at every point in the body.

# 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite çerçevesinde tekil yük etkisi altında bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş incelenmiştir. Bunun için bir çekirdek (kernel) fonksiyonuna sahip Eringen'in esas denklemi kullanılmıştır. Yerel olmayan teorinin temel denklemleri kısaca verildikten sonra, problemin yerel olmayan elastisitedeki cözümü yapılmış ve sonuçlar klasik teorinin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Geçen yüzyılın son çeyreğinde bilişim ve iletişim teknolojilerinde başlayan hızlı gelişmeler nanoteknolojiye yönelişi tetiklemiştir. Nanoteknoloji, nanometre ölçeğindeki fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayların anlaşılması, kontrolü ve üretimi amacıyla, fonksiyonel materyallerin, cihazların ve sistemlerin geliştirilmesidir. Nanoteknoloji, atom ve molekül ölçeğinde özel yöntem ve tekniklerle yapıların, materyallerin ve araçların inşa edilmesini; bu ölçekte ölçme, tahmin etme, izleme ve yapım faaliyetlerinde bulunmayı ve bu ölçeğin bazı temel özelliklerinden yararlanma kabiliyetini ifade eder. Gelecekte bu teknoloji sayesinde, çok hafif ve dayanıklı olacak nano materyallerden meydana gelen yapılar inşa edilebilecektir.

Yerel olmayan elastisite uygulamalarının nanomateryallere örnek teşkil etmesi, nanoteknoloji konusunda çalışan bilim insanları tarafından son zamanlarda dikkate değer görülmüştür. Peddieson[19], Euler–Bernoulli kiriş teorisinin formülasyonunu yerel olmayan elastisite teorisi ile ele almıştır. Sudak[16], nano ölçekteki karbon nanotüplerinin Van der Waals kuvvetleri ve çok küçük etkiler altındaki sonsuz küçük burkulma davranışını, yerel olmayan elastisite teorisi ile incelemiştir. Zhang[20], çok küçük karbon nanotüplerinin eksenel basınç altındaki eksenel burkulmalarını, yerel olmayan elastisitede yerel olmayan çoklu kabuk modeli ile incelemiştir. Nitelik bakımından geçerli bunun gibi çalışmalar, yerel olmayan teoriye dayalı sonuçların bu alandaki deneysel sonuçlarla örtüştüğünü göstermektedir.

Klasik fizik teorileri, tüm denge kanunlarının madde gövdesinin her noktasında geçerli olduğuna dayanmaktadır. Halbuki yerel olmayan elastisite teorisinde referans noktasındaki gerilme, her z' noktasında birim şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak ele alınır. Yerel olmayan teoriler, malzemenin nano ölçekteki davranışlarının anlaşılması için ortaya çıkmıştır. Bu teoriler, maddenin iç yapısını göz önünde bulundurarak uzak mesafedeki etkileşimeri de hesaba katmaktadırlar. Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak tekil yük etkisindeki kirişin gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonlarının genel denklemleri bulunacaktır.

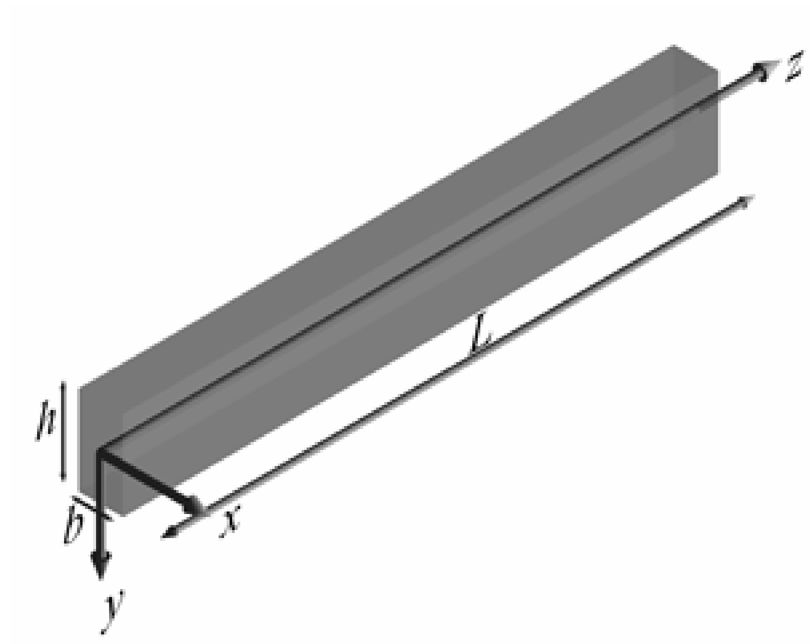
Yerel olmayan elastisite teorisinde yaklaşım yöntemi olarak kullanılan çekirdek (kernel) fonksiyonları çok çeşitlidir. Çekirdek fonksiyonları benzer (veya benzer olmayan) girdilerin benzer (veya benzer olmayan) sonuçlar oluşturduğu varsayımından yola çıkılarak hazırlanmış yaklaşım fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada hesap kolaylığı bakımından üçgen çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır.

Yerel olmayan elastisite teorisinin gelişimi Kröner[5], Kunin[6], Krumhansl[7], ve Edelen'e kadar tarihlendirilebilir. Gelişmiş formüller Edelen[8] ve Laws[9] ile Eringen[10,11,12] tarafından sunulmuştur. Bu teorinin temel düşüncesi makroskopik mekanik büyüklüklerle mikroskopik fiziksel büyüklükler arasında bir ilişki kurmaktır.

Tüm fiziksel teoriler, fiziksel fenomenine bağlı uygun doğruluk payı ile sınırlandırılmış bir uygulanabilirlik alanına sahiptir. Bunun altında yatan neden tüm fiziksel teorilere özgü temel kavramlardır. Bu çalışmadaki fiziksel teori olan klasik elastisite teorisinin uygulanabilirliği, gövdenin iç yapısı ve karakteristik toplam uzunluğa bağlı olarak karakteristik bir uzunluk ölçüsüne ($l$-$a$) kadar indirgenebilir. Yerel olmayan elastisite teorisinin uygulanabilirlik sınırıda buna bağlı olarak ($a$) kadardır.

Yapılan çalışmalar sonucunda klasik elastisite teorisinin, malzemenin nano ölçekteki davranışlarının anlaşılması için yeterli olmadığı görülmüştür. Yerel olmayan elastisite teorisinin bu konuda daha anlamlı sonuçlar ortaya çıkardığı görülmektedir.

# 2. ERİNGEN DENKLEMİ




**Şekil 2.1:** Kiriş ve Koordinat Sistemi

Eringen'in esas denklemi aşağıdaki gibidir[13]:

$$\sigma(z) = E\left[\xi_1 \varepsilon(z) + \xi_2 \int_V K(z,z')\varepsilon(z')dz'\right] \tag{2.1}$$

Bu denklemde $E$, Young Modülü'dür. $K(z,z')$, $z$ noktasında merkezlenmiş yaklaşım (çekirdek) fonksiyonudur. $\sigma(z)$, klasik elastisitede z noktasındaki gerilme değeridir. $\varepsilon(z')$, yerel olmayan elastisitedeki çekme alanıdır. $\xi_1$ ve $\xi_2$ sabittirler ve aşağıdaki şartı sağlarlar:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{2.2}$$

Bu ilişki kullanılarak denklem (2.1) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

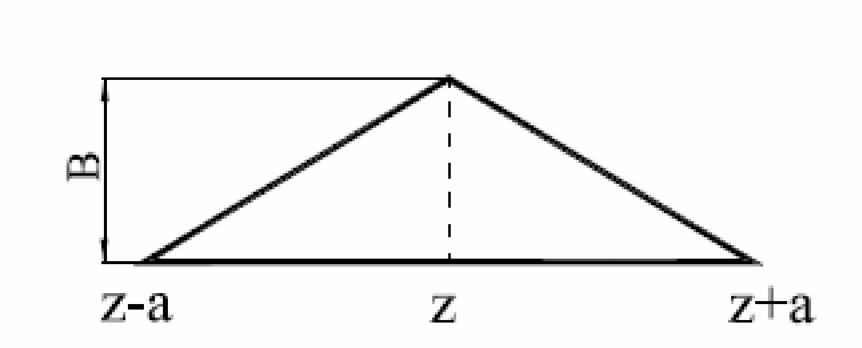
$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{\xi_1 E} - \frac{\xi_2}{\xi_1}\int_V K(z,z')\varepsilon(z')dz' \tag{2.3}$$

Çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlamalıdır[15]:

$$\int_V K(z, z')dz' = 1 \tag{2.4}$$

Bu çalışmada çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilmiştir[1,2]:

$$K(z, z') = \begin{cases} B\left(1 - \dfrac{|z - z'|}{a}\right) & , \ |z - z'| < a \\ 0 & , \ |z - z'| > a \end{cases} \tag{2.5}$$



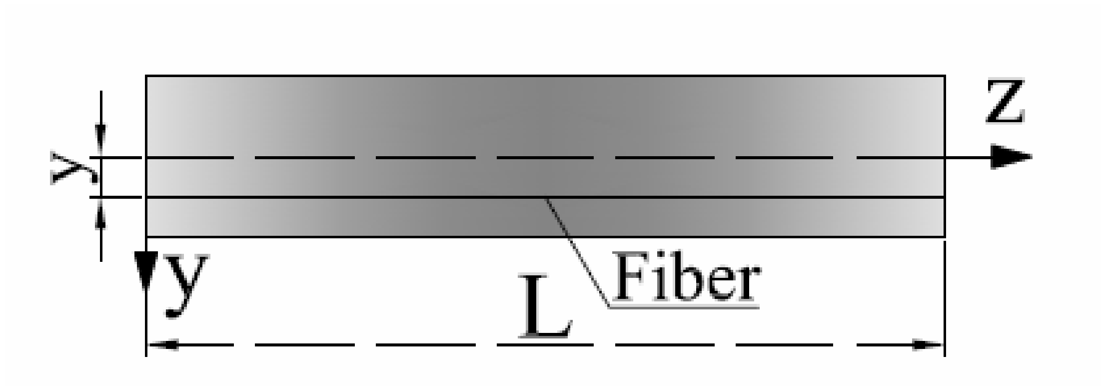

**Şekil 2.2:** Üçgen Çekirdek (Kernel)

Bu fonksiyon üçgen çekirdek olarak adlandırılmaktadır. Şekildeki *B*, bir sabittir ve *a* katsayısı da atomik mesafeyi simgelemektedir ( $a$ = 0.00000004 *cm*). Denklem (2.4) kullanılarak *B* katsayısı aşağıdaki gibi bulunur:

$$B = \frac{1}{a} \tag{2.6}$$

Aşağıdaki şekilde görülen eğilmeye çalışan kirişin boylamasına liflerden oluştuğunu varsayalım. *z* ekseni boyunca herhangi bir lifteki gerilme aşağıda verilmiştir:

$$\sigma(z) = \frac{M_x}{I_x} y \tag{2.7}$$




**Şekil 2.3:** Kiriş ve Lifleri

Böylece integral formülü aşağıdaki biçimi alır:

$$\varepsilon(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E}-\frac{\xi_2}{a\xi_1}\left[\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon(z')\,dz'\right] \tag{2.8}$$

(2.8) denklemindeki $M_x$, $x$ ekseni etrafındaki momenttir. $I_x$, $x$ eksenindeki atalet momentidir.

$$\lambda=-\frac{\xi_2}{a\xi_1} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanırsa, genel denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\varepsilon(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E}+\lambda\left[\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon(z')\,dz'\right] \tag{2.10}$$

Çözümün aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım:

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0(z)+\lambda\varepsilon_1(z)+\lambda^2\varepsilon_2(z)+\lambda^3\varepsilon_3(z)+\lambda^4\varepsilon_4(z)+...+ \tag{2.11}$$

Denklemin her bir teriminin çözümü bulunur:

$$\varepsilon_0(z)=\frac{M_x y}{I_x \xi_1 E}, \qquad \varepsilon_1(z)=\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_0(z')\,dz',$$

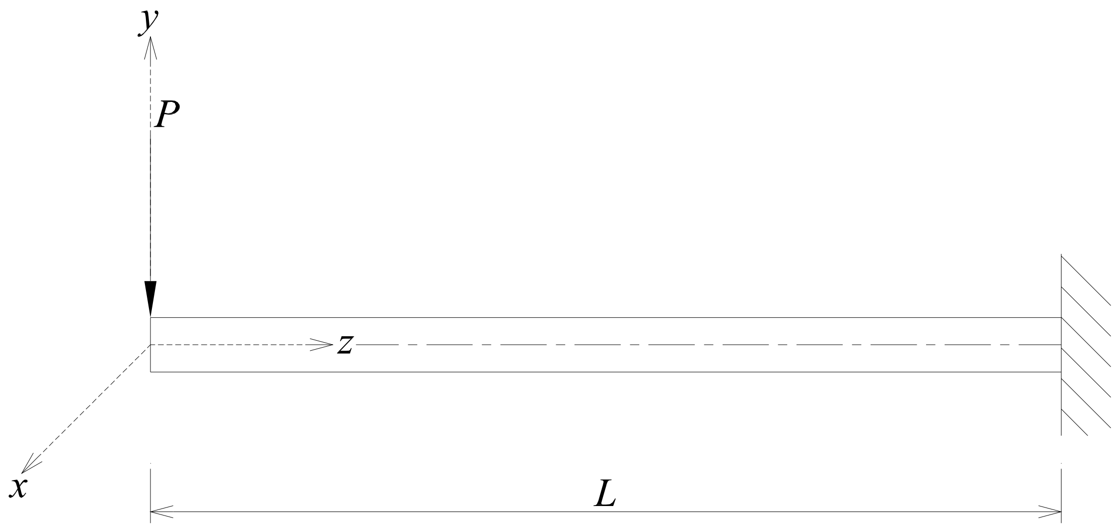
$$\varepsilon_2(z)=\int_{z-a}^{z+a}\left(1-\frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')\,dz',... , \tag{2.12}$$

Bundan sonraki hesaplarda iki durum söz konusudur. Birinci durum, çubuğun uç noktalarından uzaktaki herhangi bir yer için olacaktır. Daha önce yapılan çalışmalarda çubuğun uç noktalarından uzaktaki herhangi bir noktadaki gerilme ve şekil değiştirme değerlerinin klasik elastisite teorisindeki çözümle aynı olduğu kanıtlanmıştır[14].

İkinci durum ise çubuğun uç bölgelerindeki gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonlarının bulunmasıdır.

Bu çalışmada birinci durum için genel formül bulunacaktır. İkinci durum için sonuçlar bulunup, grafik üzerinde klasik elastisite teorisindeki çözümle karşılaştırılacaktır. Buna göre uç bölgelerdeki çözüm için sınır değerleri değişecektir[3,4].

# 3. TEKİL YÜK ETKİSİNDEKİ ÇUBUĞUN UÇLARINDA VE UÇLARINDAN UZAKTAKİ GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİNİN HESABI




**Şekil 3.1:** Tekil Yük Etkisindeki Çubuk

## 3.1. Çubuğun uçlarından uzaktaki herhangi bir noktadaki gerilme değerinin bulunması (*a* ≤ *z* ≤ *L-a*):

Çubuk tekil yük etkisi altında olduğu için (2.10) denklemindeki moment aşağıdaki gibi olur:

$$M_x = -pz \tag{3.1}$$

Bu durumda (2.12) ifadesindeki $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$, "Mathematica" programı kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{apzy}{I_x\xi_1 E}, \qquad \varepsilon_2(z) = -\frac{a^2 pzy}{I_x\xi_1 E},$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{a^3 pzy}{I_x\xi_1 E}, \qquad \varepsilon_4(z) = -\frac{a^4 pzy}{I_x\xi_1 E} \tag{3.2}$$

Bu bağıntılar kullanılarak (2.11) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varepsilon(z) = -\frac{pzy}{I_x\xi_1 E}\left(1+\lambda a+\lambda^2 a^2+\lambda^3 a^3+\lambda^4 a^4+\ldots+\right) = -\frac{pzy}{I_x\xi_1 E}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n a^n \tag{3.3}$$

### 3.2. Çubuğun $z$=0 komşuluğunda gerilme değerinin bulunması ($0 \le z \le a$):

Bu durumda (2.12) denklemindeki integral ifadelerindeki limit değerleri değişerek aşağıdaki hali alır:

$$\varepsilon_0(z) = \frac{M_x y}{I_x \xi_1 E} = -\frac{pzy}{I_x \xi_1 E}, \qquad \varepsilon_1(z) = \int_0^{z+a} \left(1 - \frac{|z-z'|}{a}\right) \varepsilon_0(z')\, dz'$$

$$\varepsilon_2(z) = \int_0^{z+a} \left(1 - \frac{|z-z'|}{a}\right) \varepsilon_1(z')\, dz', \ldots, \tag{3.4}$$

Denklem (3.1)'de tanımlanan $M_x$ momenti, (3.4) ifadelerinde yerine konulursa $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varepsilon_0(z') = \frac{M_x y}{I_x \xi_1 E} = -\frac{pz'y}{I_x \xi_1 E} \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{\left(a^3 py + 3a^2 pyz + 3apyz^2 - pyz^3\right)}{6 I_x a E \xi_1} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_2(z) = -\frac{\left(24a^5 py + 65a^4 pyz + 40a^3 pyz^2 - 10apyz^4 + pyz^5\right)}{120 I a^2 E \xi_1} \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{5040^{-1}}{I a^3 E \xi_1} \times \begin{pmatrix} 1086a^7 py + 2856a^6 pyz + 1512a^5 pyz^2 - \\ 140a^4 pyz^3 - 315a^3 pyz^4 - 63a^2 pyz^5 + \\ 21apyz^6 - pyz^7 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Bu bağıntılar kullanılarak (2.11) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) = & -\frac{pzy}{I_x \xi_1 E} - \frac{\lambda}{6aI_x \xi_1 E}(a^3 py + 3a^2 pyz + 3apyz^2 - pyz^3) - \\ & \frac{\lambda^2 (24a^5 py + 65a^4 pyz + 40a^3 pyz^2 - 10apyz^4 + pyz^5)}{120 a^2 I_x \xi_1 E} \\ & - \frac{\lambda^3}{5040 a^3 I_x \xi_1 E}(1086a^7 py + 2856a^6 pyz + 1512a^5 pyz^2 \\ & - 140a^4 pyz^3 - 315a^3 pyz^4 - 63a^2 pyz^5 + 21apyz^6 - pyz^7) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9) ifadesi basitleştirilerek aşağıdaki duruma gelir:

$$\varepsilon(z) = -\frac{py}{5040a^3 I_x \xi_1 E}[1086a^7\lambda^3 - z^7\lambda^3 + 21az^5\lambda^2(2+z\lambda)) +$$
$$168a^6\lambda^2(6+17z\lambda) - 140a^4 z\lambda(-18-12z\lambda+z^2\lambda^2) -$$
$$21a^2z^3\lambda(40+20z\lambda+3z^2\lambda^2) + 42a^5\lambda(20+65z\lambda+36z^2\lambda^2) -$$
$$315a^3z(-16-8z\lambda+z^3\lambda^3)] \quad (3.10)$$

**3.3. Çubuğun $z$=$L$ komşuluğunda gerilme değerinin bulunması ($L$-$a \le z \le L$):**

Bu durumda (2.12) denklemindeki integral ifadelerindeki limit değerleri değişerek aşağıdaki hali alır:

$$\varepsilon_0(z) = \frac{M_x y}{I_x \xi_1 E} = -\frac{pzy}{I_x \xi_1 E} \qquad \varepsilon_1(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1 - \frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_0(z')\,dz'$$

$$\varepsilon_2(z) = \int_{z-a}^{L}\left(1 - \frac{|z-z'|}{a}\right)\varepsilon_1(z')\,dz' ,... , \quad (3.11)$$

Burada $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ bulunarak, $\varepsilon(z)$ şekil değiştirme fonksiyonu iki terimli ve üç terimli olarak elde edilerek aynı grafik üzerinde klasik elastisite teorisi çözümüyle karşılaştırılacaktır.

$$\varepsilon_0(z') = \frac{M_x y}{I_x \xi_1 E} = -\frac{pz'y}{I_x \xi_1 E} \quad (3.12)$$

"Mathematica" programı kullanılarak $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varepsilon_1(z) = -\frac{\left(-a^3py + 3aL^2py - 2L^3py + 3a^2pyz + 3L^2pyz - 3apyz^2 - pyz^3\right)}{6I_x aE\xi_1} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_2(z) = \frac{-1}{120Ia^2E\xi_1} \times \begin{pmatrix} -24a^5py - 20a^4Lpy + 60a^3L^2py - 30aL^4py + \\ 4L^5py + 65a^4pyz - 20a^3Lpyz + 80aL^3pyz - \\ 15L^4pyz - 40a^3pyz^2 - 60aL^2pyz^2 + 20L^3pyz^2 - \\ 10L^2pyz^3 + 10apyz^4 + pyz^5 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_3(z) = -\frac{5040^{-1}}{Ia^3E\xi_1}\times\begin{pmatrix} -1086a^7py - 1288a^6Lpy + 2100a^5L^2py + \\ 560a^4L^3py - 1085a^3L^4py - 252a^2L^5py + \\ 105aL^6py - 6L^7py + 2856a^6pyz - 588a^5Lpyz - \\ 1260a^4L^2pyz + 2940a^3L^3pyz + 945a^2L^4pyz - \\ 504aL^5pyz + 35L^6pyz - 1512a^5pyz^2 + \\ 840a^4Lpyz^2 - 2310a^3L^2pyz^2 - 1260a^2L^3pyz^2 + \\ 945aL^4pyz^2 - 84L^5pyz^2 - 140a^4pyz^3 - pyz^7 + \\ 140a^3Lpyz^3 + 630a^2L^2pyz^3 - 840aL^3pyz^3 + \\ 105L^4pyz^3 + 315a^3pyz^4 + 315aL^2pyz^4 - \\ 70L^3pyz^4 - 63a^2pyz^5 + 21L^2pyz^5 - 21apyz^6 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Bulunan $\varepsilon_0(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $\varepsilon_2(z)$ ve $\varepsilon_3(z)$ değerleri (2.11) ifadesinde yerine konulursa çubuğun herhangi bir yerindeki yer değiştirme fonksiyonu bulunmuş olur. Aşağıda iki ve üç terimli olarak elde edilen yer değiştirme fonksiyonları bulunmuştur.

$$\varepsilon(z) = \sum_{i=0}\lambda^i\varepsilon_i(z)$$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0(z) + \lambda\varepsilon_1(z) + \lambda^2\varepsilon_2(z) + \lambda^3\varepsilon_3(z) + \lambda^4\varepsilon_4(z) + \ldots +$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(z)_{iki\ terimli} = &-\frac{pzy}{I_x\xi_1E} - \frac{\lambda}{6aI_x\xi_1E}(-a^3py + 3aL^2py - 2L^3py + 3a^2pyz + \\ &3L^2pyz - 3apyz^2 - pyz^3) - \frac{\lambda^2}{120a^2I_x\xi_1E}(-24a^5py - \\ &20a^4Lpy + 60a^3L^2py - 30aL^4py + 4L^5py + 65a^4pyz - \\ &20a^3Lpyz + 80aL^3pyz - 15L^4pyz - 40a^3pyz^2 - \\ &60aL^2pyz^2 + 20L^3pyz^2 - 10L^2pyz^3 + 10apyz^4 + pyz^5) \end{aligned}$$

(3.16)

Gerekli düzenlemeler yapılarak (3.16) ifadesi basitleştirilerek aşağıdaki duruma gelir:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z)_{iki\ terimli} = &\frac{py}{120a^2I_x\xi_1E}[24a^5\lambda^2 - (L-z)^4\times(4L+z)\lambda^2 + \\ &5a^4\lambda(4 + 4L\lambda - 13z\lambda) + 60a^2(-2z - L^2\lambda + z^2\lambda) + \\ &20a^3\lambda(-3L^2\lambda + 2z^2\lambda + z(-3 + L\lambda)) + \\ &10a(L-z)^2\lambda(3L^2\lambda + L(4 - 2z\lambda) + z(2 - z\lambda))] \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\varepsilon(z)_{\text{üç terimli}} = -\frac{pzy}{I_x\xi_1 E} - \frac{\lambda}{6aI_x\xi_1 E}(-a^3py + 3aL^2py - 2L^3py + 3a^2pyz +$$
$$3L^2pyz - 3apyz^2 - pyz^3) - \frac{\lambda^2}{120a^2 I_x\xi_1 E}(-24a^5py -$$
$$20a^4Lpy + 60a^3L^2py - 30aL^4py + 4L^5py + 65a^4pyz -$$
$$20a^3Lpyz + 80aL^3pyz - 15L^4pyz - 40a^3pyz^2 -$$
$$60aL^2pyz^2 + 20L^3pyz^2 - 10L^2pyz^3 + 10apyz^4 + pyz^5)$$
$$-\frac{\lambda^3}{5040a^3I_x\xi_1E}(-1086a^7py - 1288a^6Lpy +$$
$$2100a^5L^2py + 560a^4L^3py - 1085a^3L^4py - 252a^2L^5py +$$
$$105aL^6py - 6L^7py + 2856a^6pyz - 588a^5Lpyz -$$
$$1260a^4L^2pyz + 2940a^3L^3pyz + 945a^2L^4pyz - 504aL^5pyz +$$
$$35L^6pyz - 1512a^5pyz^2 + 840a^4Lpyz^2 - 2310a^3L^2pyz^2 -$$
$$1260a^2L^3pyz^2 + 945aL^4pyz^2 - 84L^5pyz^2 - 140a^4pyz^3 +$$
$$140a^3Lpyz^3 + 630a^2L^2pyz^3 - 840aL^3pyz^3 + 105L^4pyz^3 +$$
$$315a^3pyz^4 + 315aL^2pyz^4 - 70L^3pyz^4 - 63a^2pyz^5 + \qquad (3.18)$$
$$21L^2pyz^5 - 21apyz^6 - pyz^7)$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak (3.18) ifadesi basitleştirilerek aşağıdaki duruma gelir:

$$\varepsilon(z)_{\text{üç terimli}} = \frac{1}{5040a^3I_x\xi_1E}[py(1086a^7\lambda^3 + (L-z)^6(6L+z)\lambda^3 +$$
$$56a^6\lambda^2(18 + 23L\lambda - 51z\lambda) - 21a(L-z)^4\lambda^2(5L^2\lambda +$$
$$L(8 - 4z\lambda) + z(2 - z\lambda)) + 42a^5\lambda(20 - 65z\lambda - 50L^2\lambda^2 +$$
$$36z^2\lambda^2 + 2L\lambda(10 + 7z\lambda)) + 140a^4\lambda(z^3\lambda^2 - 6z^2\lambda(-2 +$$
$$L\lambda) - 2L^2\lambda(9 + 2L\lambda) + 3z(-6 + 2L\lambda + 3L^2\lambda^2)) + \qquad (3.19)$$
$$21a^2(L-z)^2\lambda(12L^3\lambda^2 + 3L^2\lambda(20 - 7z\lambda) + z(40 -$$
$$20z\lambda + 3z^2\lambda^2) + L(80 - 40z\lambda + 6z^2\lambda^2)) - 35a^3(72L^2\lambda -$$
$$31L^4\lambda^3 + 4Lz^3\lambda^3 + 9z^4\lambda^3 - 6z^2\lambda(12 + 11L^2\lambda^2)$$
$$+12z(12 + 7L^3\lambda^3)))]$$

(3.17) ve (3.19) denklemlerinde *a, E, q, I, L* değişkenleri belirli sayılardır ve yerlerine konulduğunda bu ifadeler daha basite indirgenebilir.

Çubuğun uçlarındaki gerilmeler inceleneceğinden dolayı denklem (2.2) göz önünde bulundurularak $\xi_1$ ve $\xi_2$, $z=a$ ve $z=L-a$ noktalarındaki süreklilik şartları çerçevesinde aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\xi_1 = 0.99$$
$$\xi_2 = 0.01 \tag{3.20}$$

$a = 4\times10^{-8}$ cm'dir ve çubuğun boyu $L = 100a$ seçilmiştir.

$$L = 100a = 4\times10^{-6}cm \tag{3.21}$$

Denklem (2.9) kullanılarak $\lambda$ aşağıdaki gibi bulunur:

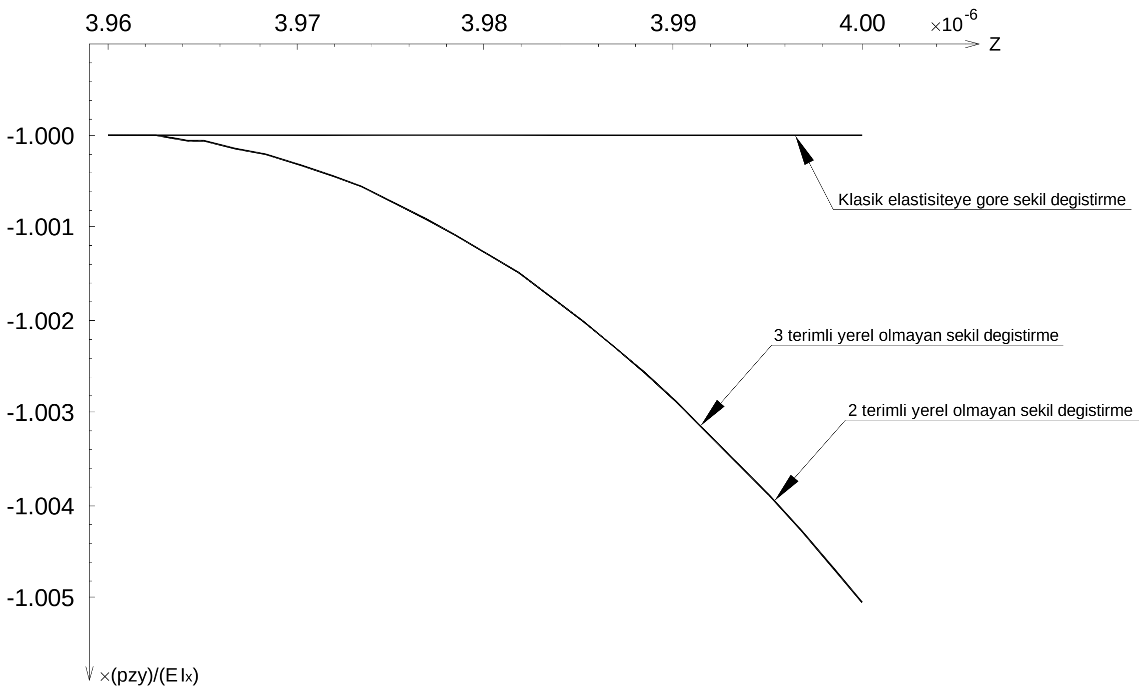
$$\lambda = -\frac{\xi_2}{a\xi_1} = -\frac{0.01}{4\times10^{-8}\times0.99} = -252525.25 \tag{3.22}$$

Bulunan değerler (3.17) ve (3.19) denklemlerinde yerlerine konularak aşağıdaki biçimi alır:

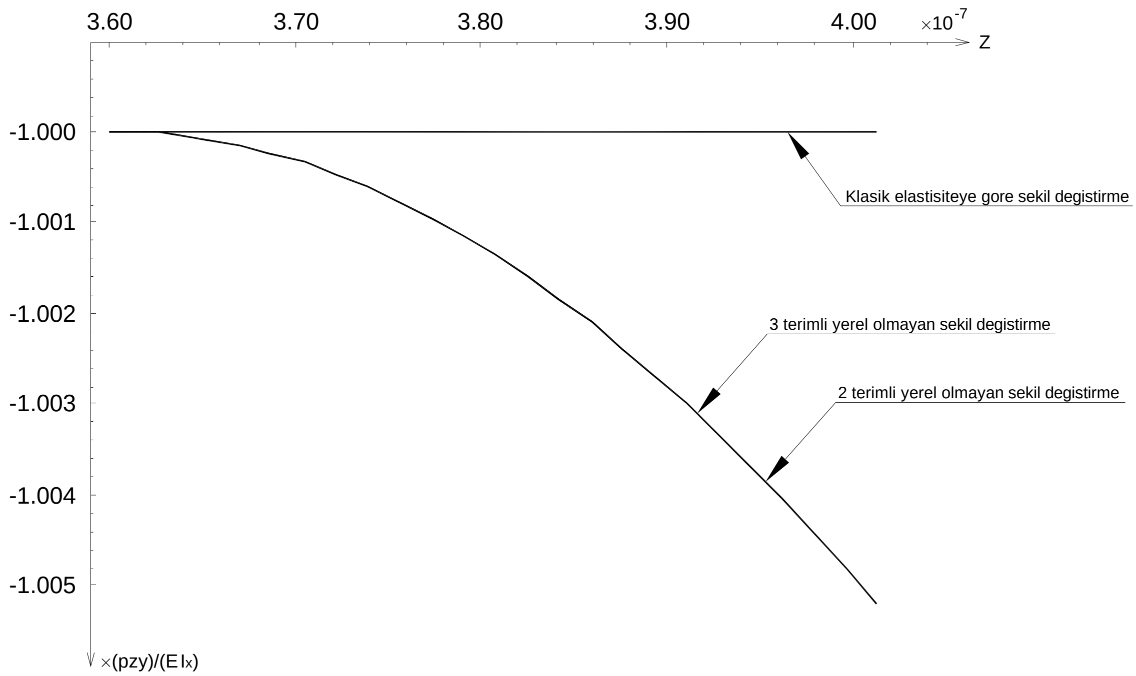
$$\begin{aligned}\varepsilon(z)_{iki\ terimli} = {} & \frac{5.26094\times10^{12}\,py}{I_xE}[1.56719\times10^{-25} - 6.37690\times10^{10}\times \\ & (4\times10^{6}-z)^4\times(0.000016+z) - 3.232323\times10^{-24}\times \\ & (-0.040404+3.28283\times10^{6}z) - 3.23232\times10^{-16}\times \\ & (0.000012-4.01010z-505050.5051z^2) + 9.6\times10^{-14}\times \\ & (4.040404\times10^{-6}-2z-252525.25253z^2) - 0.10101\times \\ & (4\times10^{-6}-z)^2\times(-0.000012+z(2+252525.25253z)+ \\ & 4\times10^{-6}\times(4+505050.505051z))]\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(z)_{\text{üç } terimli} = \frac{3.131514\times10^{18}\,py}{I_x E}[&-2.86526\times10^{-33} - 1.61033\times10^{16}\times \\
&(4\times10^{-6}-z)^6(0.000024+z)+1.46271\times10^{-32}(-5.23232+ \\
&1.28788\times10^{7}z)-1.08606\times10^{-30}(-31.01520-2.020202\times \\
&(10-1.76768\times10^{6}z)+1.64141\times10^{7}z+2.2957\times10^{12}z^2)- \\
&9.05051\times10^{-23}(0.0000564-14.87787z-4.56076\times10^{6}z^2+ \\
&6.37690\times10^{10}z^3)-2.24\times10^{-21}(-0.000163+57.42875z+ \\
&3.518689\times10^{7}z^2-2.57653\times10^{11}z^3-1.449296\times10^{17}z^4)- \\
&53565.962657(4\times10^{-6}-z)^4\times(-0.0000202+z(2+ \\
&252525.25253z)+4\times10^{-6}(8+1.0101\times10^{6}z))-8.48485\times \\
&10^{-9}\times(4\times10^{-6}-z)^2\times(0.00004898-0.00001212\times(20+ \\
&1.76768\times10^{6}z)+z(40+5.05051\times10^{6}z+1.91307\times \\
&10^{11}z^2)+4\times10^{-6}(80+1.0101\times10^{7}z+3.82614\times10^{11}z^2))]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

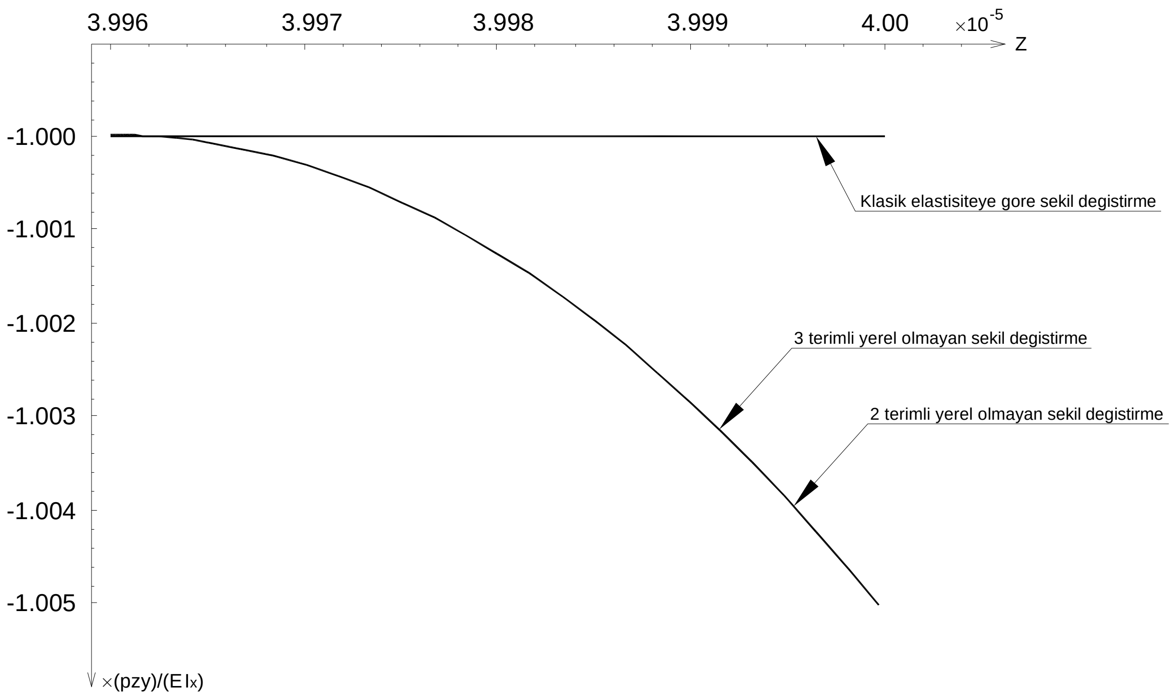
(3.23) ve (3.24) ifadelerinin grafiği aşağıdaki gibi bulunur:



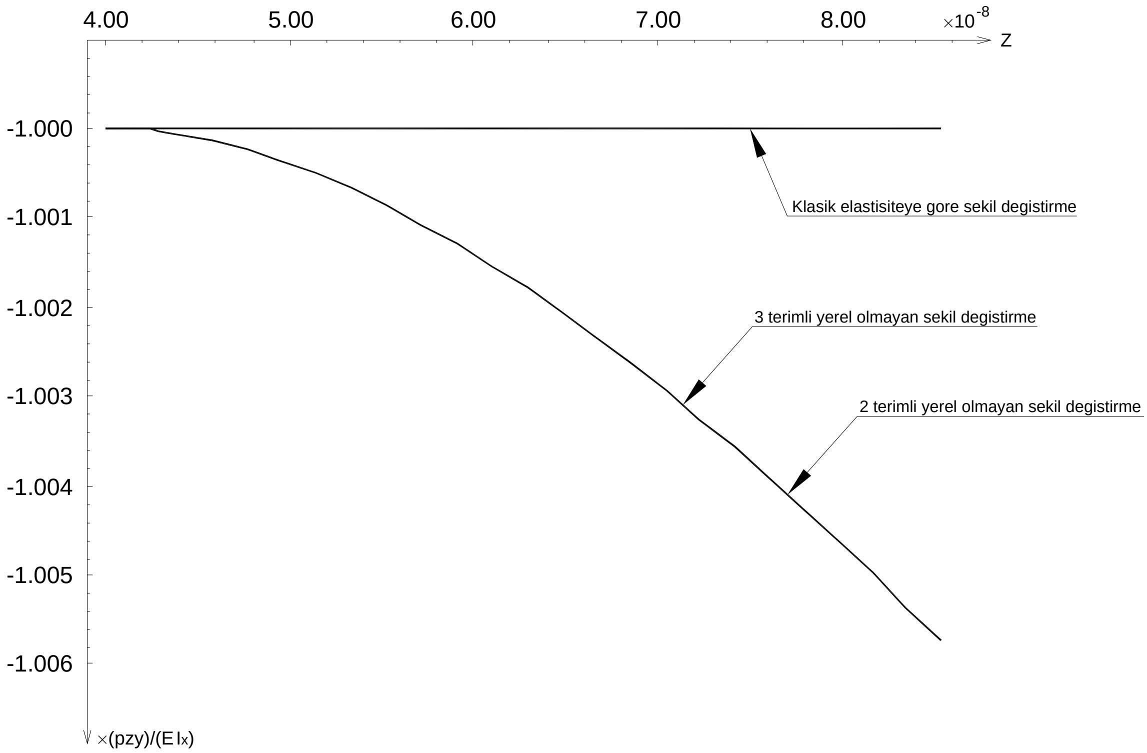

**Şekil 3.2:** Çubuk boyu *L=100a* için şekil değiştirme grafiği




**Şekil 3.3:** Çubuk boyu *L=10a* için şekil değiştirme grafiği




**Şekil 3.4:** Çubuk boyu *L=1000a* için şekil değiştirme grafiği




**Şekil 3.5:** Çubuk boyu $L=2a$ için şekil değiştirme grafiği

# 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, tekil yük etkisindeki ankastre mesnetli bir çubuğun eğilme davranışına ait klasik elastisite teorisi ile yerel olmayan elastisite teorisi çözümlerinin birbirlerinden farklı olduğu anlaşılmıştır. Her iki hesap yöntemiyle elde edilen sonuçların çubuğun uç bölgelerinden uzakta aynı, uç bölgelerinde ise birbirinden farklı olduğu görülmüştür. Yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde yapılan hesapların daha kesin bir sonuç verdiği ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada bünye (esas) denklemi olarak Fredholm tipi bir integral denklemi kullanılmıştır. Bu denklemin tersi alınarak parça türevli bir diferansiyel denklem ortaya çıkar. Bu denklem kullanılarak benzer problemlerin çözümleri üzerinde yapılan çalışmalar literatürde mevcuttur[19].

Nanoteknoloji, atom ve molekül ölçeğinde özel yöntem ve tekniklerle yapıların, materyallerin ve araçların inşa edilmesini; bu ölçekte ölçme, tahmin etme, izleme ve yapım faaliyetlerinde bulunmayı ve bu ölçeğin bazı temel özelliklerinden yararlanma kabiliyetini ifade eder. Bu alanda amaç; yeni uygulamalar için malzeme özelliklerinin nano ölçüde kontrolü, nano ölçüdeki teknolojilerin entegrasyonu, nano-motorlar, temel malzemelerin ve bileşenlerin imalatı için nano duyarlıklı teknolojiler, yeni ürünler ve süreçler için yüksek performanslı yüzeyler ve malzemeler, bilgiye dayalı malzemeler ve öngörülen performans, daha yüksek karmaşıklık, nano-kompozitler, biyo-malzemeler, doğada bulunmayan elektromanyetik özellikli yapay malzemeler ve hibrit malzemeler de dahil olmak üzere yeni nano-malzemeler konularında yeni bilgi üretmektir.

**KAYNAKLAR**


[1] **Artan R, Altan BS,** 2002, Propagation of SV waves in a periodically layered media in nonlocal elasticity INT J SOLIDS STRUCT 39 (24): 5927-5944 2002

[2] **Artan R, 1999,** The nonlocal solution of the elastic half plane loaded by a couple , INT J ENG SCI 37 (11): 1389-1405

[3] **Artan, R, 1996,** Unsymmetrical Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane, Int. J. Engng. Sci., 34, 933-941.

[4] **Artan, R., 1996,** Rectangular Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane", Int. J. Solids Structures, 33, 3577-3586

[5] **Kröner E.,** 1967. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. Int. J. Solids Struct. 3, 731-742.

[6] **Kunin, I.A.,** 1967, The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocation. In: Kröner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, ProcEdings of IUTAM Symposium 1967, Springer, New York, 1968.

[7] **Krumhansl J.A.,** 1968. Some consideration on the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics. In: Kröner, E., (Ed.), Mechanics of Genaralized Continua. Springer-Verlag, Berlin,pp. 298-331

[8] **Edelen D.G.B., 1969,** Protoelastic bodies with large deformations. Arch, Rat. Mech. Anal. 34, 283-300

[9] **Edelen D.G.B., Laws, N.,** 1971, On the thermodynamics of systems with nonlocality. Arch. Rat. Mech. Anal. 43. 24-35.

[10] **Eringen. A.C.,** 1972a, Nonlocal polar elastic continua. Int. J. Engng. Sci. 10, 1-16

[11] **Eringen. A.C.,** 1972b, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. Int. J. Engng. Sci. 10, 425-435.

[12] **Eringen. A.C.,** 1976, Nonlocal micropolar field theory. In: Eringen A.C. (Ed.), Continuum Physics, vol. 4. Academic press, Newyork, pp. 205-267

[13] **Eringen. A.C., Speziale C. G., Kim B.S.,** 1977, Crack-tip problem in nonlocal elasticity. J. Mech. Phys. Solids 25, 339-355

[14] **Pisano A.A., Fuschi P.,** 2003. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension, Int. J. Sol. Str. 40. 13-23

[15] **Eringen. A.C.,** 1987, Theory of nonlocal elasticity and some applications. Res. Mechanica 21, 313-342

[16] **Sudak, L. J.,** 2003, "Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics", J. Appl. Phys. 94:11, 7281–7287

[17] **Wang Q., Shindo Y.,** 2006, Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. J. Mech. Vol 1, No.4

[18] **Wang Q., Varadan V. K.,** 2005, Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics, *Smart Mater. Struct.* **15** 659-666

[19] **Peddieson J., Buchanan G. R., McNitt R. P.,** 2003, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, Int. J. Eng. Sci. 41:3–5, 305–312.

[20] **Zhang Y. Q., Liu G. R., Wang J. S.,** 2004, "Small scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression", Phys. Rev. B70, 205430

**ÖZGEÇMİŞ**

Mustafa Ateş, 1980 yılında İstanbul'da doğdu. İstanbul'da 1992 yılında Nişanca Mehmet Paşa İlkokulu'ndan mezun olduktan sonra aynı yıl İSTEK Vakfı Kaşgarlı Mahmut Lisesi'ne başladı. Burada 7 yıllık orta öğrenimini tamamladıktan sonra Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'ne girerek başarıyla mezun olmuştur. 2004 yılında da İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimi alma hak ve onuruna erişmiştir. Kendisi aynı zamanda bir inşaat firmasında inşaat mühendisi olarak görev yapmaktadır.