

55725

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI RASTGELE ALANLAR İÇİN
İKİ-BOYUTLU DİKGEN KAFES YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Aytaç Murat BAYBOL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Ocak 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 1996

Tez Danışmanı

: Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN

Diğer Jüri Üyeleri

: Doç. Dr. Melih PAZARCI

Y. Doç. Dr. Ertuğrul ÇELEBİ

OCAK 1996

ÖNSÖZ

Bir-boyutlu kafes süzgeçlerinin, gerçekleştirilen başarılı çalışmalar sonucunda, kullanım alanlarının arttığı görülmüştür. Elde edilen başarılı sonuçlar, kullanılan yöntemlerin iki-boyutlu durumlara da uygulanması yolundaki çalışmalara öncülük etmiştir.

Tezin konusu, Kayran tarafından geliştirilen iki-boyutlu özbağlanımlı modelden yola çıkarak, iki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalamalı modelin incelenmesidir.

Çalışmam süresince bana yardımlarını eksik etmeyen, dış bir ülkede tezimi tamamlamaya çalışırken, Türkiye 'den her konuda destek olan ve çalışmalarımı titizlikle yön veren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN 'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET		IV
SUMMARY		V
BÖLÜM 1. GİRİŞ		1
BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER		3
BÖLÜM 3. BİR-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAFES SÜZGEÇLERİ		8
3.1 Sonlu Geçmişe Dayalı Doğrusal Öngörü	...	9
3.2 Levinson-Durbin Özyinelemesi		9
3.3 Kafes Öngörücüler		13
BÖLÜM 4. İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAFES SÜZGEÇLERİ		16
BÖLÜM 5. BİR-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI KAFES SÜZGEÇLERİ		30
5.1 Bir İzdüşüm Problemi Olarak ARMA Modellemesi		30
5.2 İzdüşümler ve Dikgen Ayrıştırma		31
5.3 Bir-Boyutlu ARMA Kafes Süzgeçleri		33
BÖLÜM 6. İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI KAFES SÜZGEÇLERİ		49
6.1 Analiz Modeli		50
6.2 Sentez Modeli		70
SONUÇLAR		75
KAYNAKLAR		76
ÖZGEÇMİŞ		80

ÖZET

Bir-boyutta geliştirilen kafes yapısının bir uzantısı olarak, Kayran tarafından iki-boyutlu özbağımlı dikgen kafes süzgeçleri geliştirilmiştir. Önerilen yöntem çeyrek düzlem veya simetrik olmayan yarı düzleme uygulanabilmektedir.

Bu metod ile matris tersi alınmadan, iki-boyutlu genişletilmiş normal denklemden, kafes parametreleri kullanılarak öngörü yanığı süzgeç katsayılarını hesaplamak için matris formunda Levinson algoritmasının tam çözümü sunulmaktadır.

Bu çalışmada, sınırlı veri uzunluğuna sahip, bir-boyutlu rastgele alanların özbağımlı (Autoregressive, AR) modellenmesi Burg Yöntemi ile gösterilmiştir. Daha sonra, iki-boyutlu özbağımlı rastgele alanların Kayran tarafından geliştirilen model ile gösterilmesi açıklanmıştır.

Çalışmaya, özbağımlı kayan ortalımalı rastgele alanların (Autoregressive Moving Average, ARMA), bir-boyutlu kısmının, Karlsson 'un izdüşüm yöntemi ile gösterilmesiyle devam edilmiştir. Bir sonraki aşamada ise, tezin ana konusu olan, iki-boyutlu özbağımlı kayan ortalımalı rastgele alanlarının, Kayran 'ın iki-boyutlu özbağımlı alanları modellediği yöntem kullanılarak, analiz ve sentezi yapılmıştır.

SUMMARY

TWO DIMENSIONAL ORTHOGONAL LATTICE STRUCTURES FOR AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE RANDOM FIELDS

The two-dimensional (2-D) digital signal processing has been developing in recent years quite rapidly due to confluence of a number of trends. Digital computational capability is growing at a tremendous rate, with an increase in parallel processing capability. The theoretical developments in this field have been expedited by different areas such as image processing, seismic prospecting, visual data communications, robotics and target tracking.

The one-dimensional (1-D) lattice filter theory is well developed and found numerous applications in various disciplines, especially for the analysis and synthesis of speech. Lattice form algorithms are simple to implement and have a modular structure, which can be easily used in VLSI implementations. If an order increase for the predictor is needed, one can simply add one or more stages without changing earlier computations.

The most important facility of lattice approach is its property of orthogonality. This property allows the filter to be updated in order, without recalculation of the previous lower order filter coefficients. Orthogonality is also appropriate for efficient hardware or software implementations. Lattice algorithms owes their robust numerical behavior to this property of orthogonality [1].

In recent years, there has been quite a lot of research activities directed to the development of 2-D equivalent lattice structures. But, all these formulations are capable of implementing only a restricted class of transfer functions. In the literature, a fundamental approach to the modeling 2-D fields by the reflection coefficients was realized by Marzetta who has extended some results in 1-D linear prediction to the 2-D case [3]. He proposed a half-plane support which is infinite in one of the two dimensions. This approach, while keeping several characteristics, such as correlation matching and producing a minimum phase

filter, leads to very long delay filters [4]. Marzetta's algorithm has been successfully applied to 2-D recursive filter design [5] and to linear predictive coding of images [6].

A different approach, proposed by Parker and Kayran [7], simultaneously introduces many points into the support when the model order is increased. The filter uses a quarter-plane support and introduces three parameter at each order update. That's why, it lacks sufficient parameters to represent all classes of 2-D AR quarter-plane filters and it lacks the property of orthogonality so that the cascading of stages may not lead to an optimum filter.

Later, Ertüzün presented a new and improved lattice structure developed from the three-parameter lattice filter [21]. It was shown that this new structure approximates the maximum entropy more closely compared to the three-parameter structure. The increase in entropy leads to a more reliable and better modeling of AR fields [22].

Therrien proposed a relation between multi-channel AR model and single channel 2-D models with quadrant support, where simultaneous computation of parameters of all four quarter-plane filters is possible [23].

Lenk and Parker have extended the well-known Levinson and Schur algorithms to the 2-D case for modeling stationary random fields [8],[26]. Kwan and Lui showed that this structure inherits most of the nicer characteristics of the 1-D lattice filter such as high modularity, low coefficient sensitiveness, low roundoff noise and elimination of internal flow.

Türe [30], recently investigated the theory developed by Kayran [29] about the orthogonal 2-D lattice structure for AR modeling of random fields. He showed the validity of the mentioned theory for the given covariance case and by using sample autocorrelation values of the original data fields. The result of his simulations showed that the computing of sample autocorrelations would not give sufficient results for short data records. As the data record gets longer, it was observed that the resulting estimation spectrums closely converged the original ones.

In this thesis, the theory developed by Kayran about the orthogonal 2-D lattice structure for autoregressive modelling of random fields is used to make an analysis and synthesis of orthogonal 2-D autoregressive-moving average random fields.

A linear causal time-varying ARMA(N,M) filter may be characterized by an equation that expresses the filter output at time n, y_n , as a linear combination of the previous outputs $y_{n-1}, \dots, y_{n-N}$ and the current and previous inputs $u_n, \dots, u_{n-(M-1)}$, i.e.,

$$y_n = \sum_{i=1}^N a_{n,N,M}(i) y_{n-i} + \sum_{j=0}^{M-1} b_{n,N,M}(j) u_{n-j}$$

Like in the AR modelling, in the 2-D ARMA modelling as well, a stationary random field $y(k_1, k_2)$ is predicted by a linear combination of its neighboring samples. The procedure starts with creating the ARMA data field according the prediction region mask which may be quarter-plane or asymmetric half-plane. The 2-D ARMA data field can be considered as a 1-D array if the appropriate indexing is chosen. To show the output prediction, the equation above can be reformulated as shown below :

$$y'(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^N a_i y((k_1, k_2) - i) + \sum_{i=0}^{N-1} b_i u((k_1, k_2) - i)$$

where the notation $y((k_1, k_2) - i)$ denotes the i^{th} element behind $y(k_1, k_2)$.

In the Levinson order-update recursions, one can find general expressions for lattice parameters, forward and backward prediction error fields and error powers in more compact form. For $p=1, 2, \dots, m$ and $n=1, 2, \dots, p$ lattice parameters can be written as:

$$\Gamma_{f_{p-n}}^{(n)} = \mathbf{P}_{b_p}^{(n-1)^{-1}} \Delta_{fb_p}^{(n-1)^T}$$

$$\Gamma_{b_p}^{(n)} = \mathbf{P}_{f_{p-n}}^{(n-1)^{-1}} \Delta_{fb_p}^{(n-1)}$$

where the skaler is defined as:

$$\Delta_{fb_p}^{(n)} = E[f_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_p^{(n)T}(k_1, k_2)]$$

The error propagation equations or general form of the orthogonal 2-D lattice filters is given by:

$$\mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) = \mathbf{f}_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{f_{p-n}}^{(n)T} \mathbf{b}_p^{(n-1)}(k_1, k_2)$$

$$\mathbf{b}_p^{(n)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_p^{(n-1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{b_p}^{(n)T} \mathbf{f}_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2)$$

$p=1,2,\dots,m$; $n=1,2,\dots,p$ and starting with

$$\mathbf{f}_0^{(0)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_0^{(0)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

For $p=0,1,\dots,m$ algorithm starts from the 0th order and continues up to m^{th} order. The forward and backward prediction error powers can be written as:

$$\mathbf{P}_{f_i}^{(n+1)} = \mathbf{P}_{f_i}^{(n)} \left[\mathbf{I} - \Gamma_{b_{i+1}}^{(n+1)} \Gamma_{f_i}^{(n+1)} \right]$$

$$\mathbf{P}_{b_{i+1}}^{(n+1)} = \mathbf{P}_{b_{i+1}}^{(n)} \left[\mathbf{I} - \Gamma_{f_i}^{(n+1)} \Gamma_{b_{i+1}}^{(n+1)} \right]$$

In this thesis, also an example has been given in order to explain the outline of the model by means of a first quadrant support third order quarter-plane model.

As a future research, the Karlsson projection method explained in fifth section of the thesis for 1-D autoregressive-moving average modelling can be utilized to derive 2-D lattice ARMA models as well.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İki-boyutlu işaret işleme, son yıllarda bir çok konuda uygulama alanı bulduğundan, oldukça önem kazanmıştır [1]. Bu alandaki teorik gelişmeler, görüntü işleme [2], jeofizik araştırmaları, hedef izleme ve görsel veri haberleşmesi, robotik gibi konularda uygulama alanı bularak hızlanmıştır.

Kafes algoritmalarının modüler yapıları, onların VLSI gerçekleştirmelerinde kullanımlarını arttırmıştır. Kafes yaklaşımının en büyük kolaylığı dikgenlik özellikleridir. Bu özellik sayesinde, önceki daha düşük dereceli filtre katsayılarını hesaplamaksızın, filtrenin derecesi güncellenebilir. Ayrıca dikgenlik özelliğinin kaskad yapısı etkin donanım ve yazılım gerçeklemelerine de olanak sağlar.

İlk olarak Marzetta [3] iki-boyutlu alanları yansıma katsayıları ile modellemiş ve minimum fazlı sayısal süzgeçleri geliştirmiştir. Marzetta, iki boyuttan biri sonsuz olan, yarı-düzlem modeli önermiştir. Bu yaklaşım, çok uzun gecikme süzgeçlerinin oluşması sonucunu doğurmuştur [4]. Marzetta 'nın algoritması, iki-boyutlu özyinelemeli süzgeç tasarımlarında [5] ve görüntünün lineer öngörülü kodlanmasında [6] başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

Parker ve Kayran tarafından önerilen farklı bir yaklaşımda, iki-boyutlu çeyrek düzlem kafes süzgeçleri sunulmuştur [7]. Ancak önerilen modelin diklik özelliği taşımaması süzgecin yapısal kararlılığı [8] ve optimum süzgeç [1] olması açısından bir eksikliktir. Fakat basitliğinden dolayı, bu yaklaşımla iyi sonuçların alınabileceği de gösterilmiştir [9] - [20].

Daha sonra, Ertüzün, Parker ve Kayran 'ın üç parametrelili kafes süzgecini [7] kullanarak, yeni ve iyileştirilmiş bir kafes yapısı sunmuştur [21]. Bu yeni yapının, üç parametrelili modelle karşılaştırılırsa, maksimum entropiye daha yakın olduğu gösterilmiştir. Entropideki artış, özbağımlı veri alanlarının daha güvenli ve iyi bir şekilde modellenmesini sağlar [22].

Bir-boyutlu çok kanallı özbağımlı model ile tek kanal çeyrek düzlem destekli iki-boyutlu model arasındaki ilişki, Therrien [23] tarafından sunulmuştur. Buna göre dört çeyrek düzleme ilişkin parametrelerin aynı anda hesaplanması mümkün olmaktadır. Bu yöntem çok kanallı iki-boyutlu modeller için genelleştirilmiş ve çeşitli frekans spektrumu kestirim modellerine uygulanmıştır [24], [25].

Literatürdeki, diğer temel farklı yaklaşım da iki-boyutlu lineer öngörü süzgecinin dikgen derece-özyinelemeli kafes gerçekleştirmesidir. Birçok araştırmacı [8], [9], [26], [27], [28] bu problemi çözmeye çalışmıştır. Lenk ve Parker [8], [26] bilinen Levinson ve Schur algoritmasını genişleterek durağan rastgele alanların modellenmesi için kullanmışlardır.

Kayran [29], rastgele alanların özbağımlı modellenmesi için iki-boyutlu dik kafes yapılarını sunmuştur. Elde edilen sonuçlar, herhangi iki-boyutlu genişletilmiş normal denklemden, kafes parametrelerini kullanarak öngörü yanılığ süzgeç katsayılarını hesaplamak için Levinson tipi algoritmanın tam çözümünü ortaya koymaktadır. Levinson türü özyinelemenin elde edilebilmesi için Burg matris çözümü kullanılmıştır. Bu model çeyrek düzlem ve asimetric yarı düzleme uygulanabilmektedir. Kayran [29] tarafından sunulan bu makalede rastgele alana ait kovaryans matrisinin verildiği kabul edilerek örnek çözüm de yapılmıştır. Ayrıca modelin dikliği ve kararlılığı gösterilmiştir.

Türe [30], Kayran [29] tarafından geliştirilen teoriyi, kısmi özilişki yöntemini kullanarak incelemiş ve simülasyonları sonucunda başarılı sonuçlar elde etmiştir. Ancak veri boyutuna getirilen sınırlama ile yöntemin verimliliğinin azaldığı gözlenmiştir.

Daha sonra Yıldız [31], Kayran [29] tarafından geliştirilen modelin birinci, ikinci ve üçüncü derecelerden çeyrek düzlem ve simetrik olmayan yarı düzlem için doğruluğunu simülasyonla ispatlamıştır.

Bu çalışmada, Kayran 'ın [29], iki-boyutlu özbağımlı alanları modellediği yöntem kullanılarak, iki-boyutlu özbağımlı kayan ortalamalı rastgele alanlarının analiz ve sentezi yapılmıştır.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Günümüzde, filtre terimi, elde etmek istediğimiz bilginin içinde bulunduğu, ancak gürültüyü de içeren bir dataya uygulanan elektronik bir devre veya bilgisayar yazılımı olarak karşımıza çıkar.

Gürültünün birçok kaynağı olabilir. Örneğin, data, gürültülü bir sensordan geçmiş olabilir, veya bir iletişim kanalından geçerken bozulmuştur. Her durumda, filtrelerin kullanımında üç temel bilgi işleme düzeneği vardır [1] :

- **Filtreleme** : Herhangi bir t anında, t anına kadar olan ve t anını da içeren bir datadan, ilgilendiğimiz bilgiyi çıkartmaktır.

- **Yumuşatma** : Filtrelemeden farkı, ilgilendiğimiz bilgi miktarını, t anında elde etme imkanının olmadığı durumda, t anından sonra ölçülen datanın kullanılmasıdır. Bu durumda bir gecikme söz konusu olacaktır.

- **Öngörü** : Herhangi bir t anına kadar olan ve t anını da içeren bir datadan, gelecekte $t + T$ anındaki bilginin ne olacağını bulma problemidir.

Filtrenin lineer olması ise, cihazın çıkışındaki işaretin, cihazın girişindeki işaretin lineer bir fonksiyonu olması demektir.

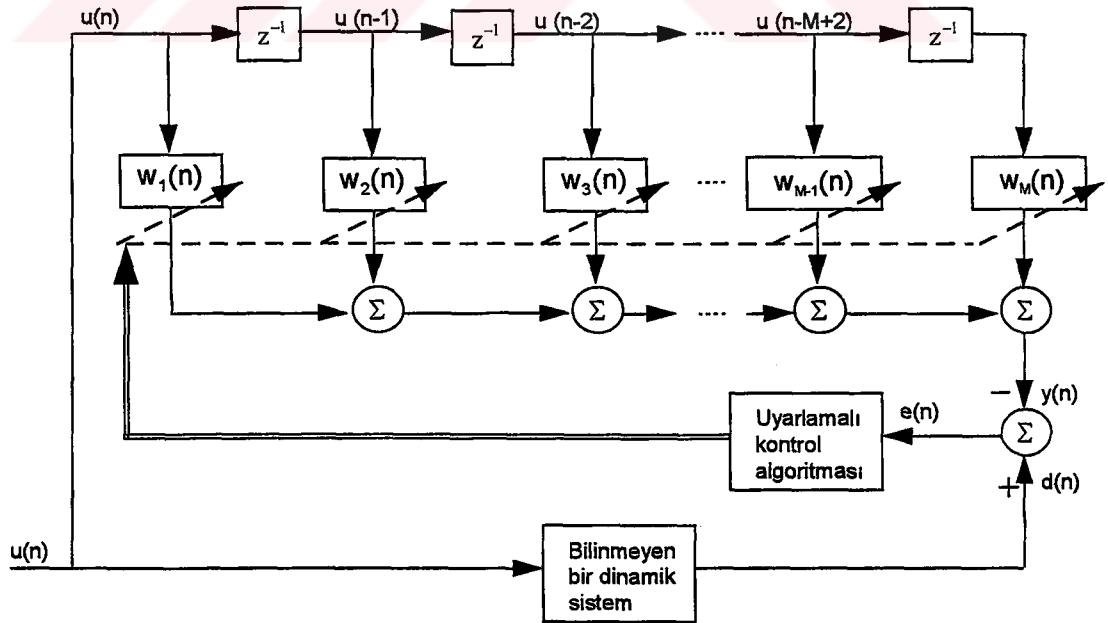
Lineer filtreleme probleminin çözümüne istatistiksel olarak yaklaşılsa, işaretin ve istenmeyen gürültünün ortalama ve korelasyon fonksiyonlarının bilindiği varsayılır. İstatistiksel kriterler uygulanarak, girişte gürültülü datanın olduğu durumda, çıkıştaki datada gürültünün etkisi en aza indirilmeye çalışılır.

Bunun için en uygun yaklaşım, filtrenin çıkışındaki işaret ile arzu ettiğimiz filtre cevabı arasındaki fark olan, hata işaretinin, karesel ortalama değerini en aza indirmektir. Durağan girişler için, bu çözüm Wiener filtresi olarak bilinir ve karesel ortalama anlamında optimum olarak görülür.

Wiener filtresinin tasarımı, işlenecek datayla ilgili bir takım istatistiksel bilgilerin önceden bilinmesini gerektirir. Filtrenin optimum olması ise, girişteki datanın istatistiksel özelliklerinin, filtrenin tasarımında rol oynayan önceki özellikleriyle uyum sağlaması durumunda mümkündür. Bu, tam olarak gerçekleştirilemezse Wiener filtresini tasarlamak mümkün olmaz, tasaransa bile sonuç optimum olmaz. Bu problemin çözümünde başvuru en uygun metot, uyarlamalı filtrelerdir. Bu terimle, işaretin özelliklerinin tam olarak bilinmediği durumda, kendi kendini özyinelemeli bir algoritmaya göre ayarlayabilen bir aygıt anlatılmak istenir. Uyarlamalı filtreler, çıkıştaki bilgi, girişteki bilginin lineer bir kombinasyonu olarak uyarlamalı bir şekilde elde edildiğinden lineer olarak görülür.

Uyarlamalı filtrelerin, bilinmeyen ortamlarda etkin bir şekilde çalışabilme ve giriş istatistiklerinin zamanla değişimini izleyebilme özellikleri, onları istatistiksel işaret işlemenin önemli bir parçası haline getirmiştir.

İletişim, kontrol, radar, sismoloji, görüntü işleme, şekil tanıma, hedef izleme, görsel veri haberleşmesi gibi alanlarda uyarlamalı filtrelerin başarılı uygulamaları görülmektedir.



Şekil 2.1. Bilinmeyen dinamik bir sistemin uyarlamalı bir filtre ile modellenmesi

Uyarlamalı filtrelerde iki temel süreç vardır :

- **Uyarlamalı süreç** : Bazı algoritmalara göre, filtrenin katsayı ağırlıklarını otomatik olarak ayarlar.

- **Filtreleme süreci** : Bu işlemde, ilk olarak uyarlamalı süreçte belirlenen katsayı ağırlıkları ile çarpılan girişlerden, arzulanan cevabın bir tahmini üretilir. İkinci olarak, arzulanan cevabın gerçek değeri ile yapılan tahminin farkından, tahmin hatası bulunur. Daha sonra da bu hata, hatayı en aza indirecek şekilde yeni katsayıların belirlenmesi için, uyarlamalı sürece geri döndürülür.

Uyarlamalı filtrelerin kullanıldığı konuşma, televizyon ve radar sinyalleri, sayısal bilgisayar datası, bir iletişim kanalının çıkışı, sismolojik data ve gürültü birer rasgele süreçtir.

Uyarlamalı filtrelerde, girişi beyaz gürültüyle sürülen lineer ayrık zamanlı bir filtrenin çıkışı, durağan ayrık-zamanlı rasgele bir süreç olarak görülür ve modellenmesine gidilir. Rasgele bir sürecin bir model ile gösterilmesi fikri Yule tarafından 1927 yılında ortaya atılmıştır.

Üç adet durağan rasgele işaret modeli vardır :

A - Özbağlanımlı Model (AR) :

Özbağlanımlı model, 1938 yılında Wold [1] tarafından önerilen teoreme dayanır . AR modelin parametreleri, Yule-Walker denklemleri olarak bilinen lineer denklem sisteminin çözümüyle hesaplanır.

$u(n)$, $u(n-1)$,..., $u(n-M)$ ile ifade edilen bir zaman serisinin

$$u(n) + a_1*u(n-1) + \dots + a_M*u(n-M) = v(n) \quad (2.1)$$

fark denklemini sağlaması M . dereceden özbağlanımlı bir sürecin gerçekleştirilmesi demektir.

Buradaki a_1 , a_2 , ..., a_M sabitleri AR parametreleri olarak adlandırılır, $v(n)$ ise beyaz gürültü sürecidir. Beyaz gürültünün ortalama değerinin sıfır, varyansının σ_v^2

olduğunu kabul ederiz.

$$E[v(n)] = 0$$

$$E[v(n) v^*(k)] = \begin{cases} \sigma_v^2, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

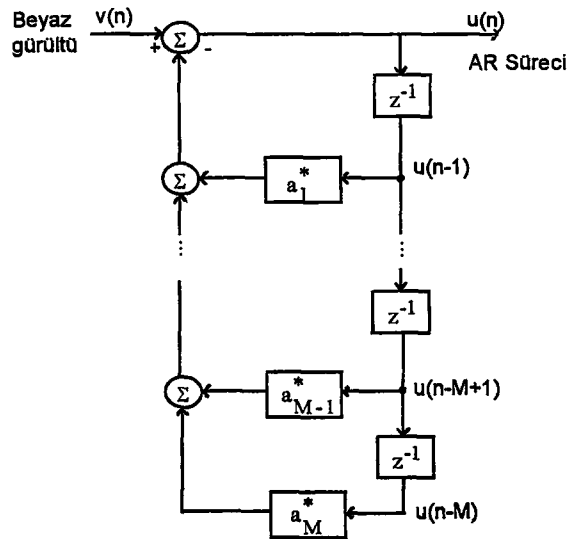
Özbağlanım deyiminin nedenini açıklamak için (2.1) denklemini

$$u(n) = w_1^* u(n-1) + w_2^* u(n-2) + \dots + w_M^* u(n-M) + v(n) \quad (2.2)$$

şeklinde yazarsak, $u(n)$ sürecinin şimdiki zamandaki değerinin, $u(n-1)$, ... , $u(n-M)$ geçmiş değerlerinin sonlu lineer kombinasyonu, $v(n)$ hata teriminden meydana geldiğini görürüz.

$$y = \sum_{k=1}^M w_k^* x_k + v \quad (2.3)$$

olarak ifade edilen lineer model, bir bağlanım modelidir ve y bağımlı değişkeni, $x_1, x_2, \dots, x_M$ bağımsız değişkenlerine bağlanımlıdır denir. (2.2) eşitliğindeki $u(n)$ değişkeni, kendisinin önceki değerlerine bağlı olduğu için özbağlanımlıdır.



Şekil 2.2. Özbağlanımlı işlem üreticinin blok diyagramı

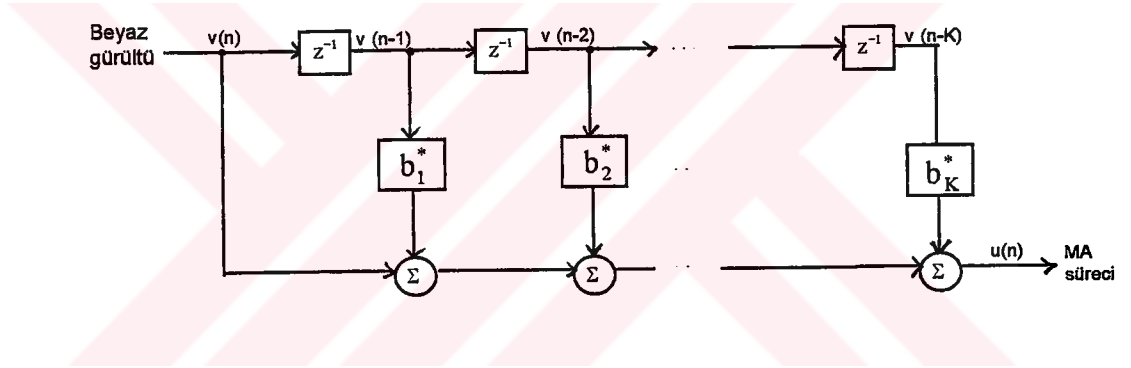
B - Kayan Ortalamalı Model (MA) :

Şekil 2.3 deki model, beyaz gürültü ile sürülen sıfır kutuplu bir filtredir. Sonuç ise, bir kayan ortalama sürecidir.

$$u(n) = v(n) + b_1^* v(n-1) + \dots + b_K^* v(n-K) \quad (2.4)$$

$b_1, b_2, \dots, b_M$, MA parametreleri, $v(n)$ varyansı σ_v^2 , ortalama değeri sıfır olan bir beyaz gürültü sürecidir.

MA sürecinin derecesi K 'dır.



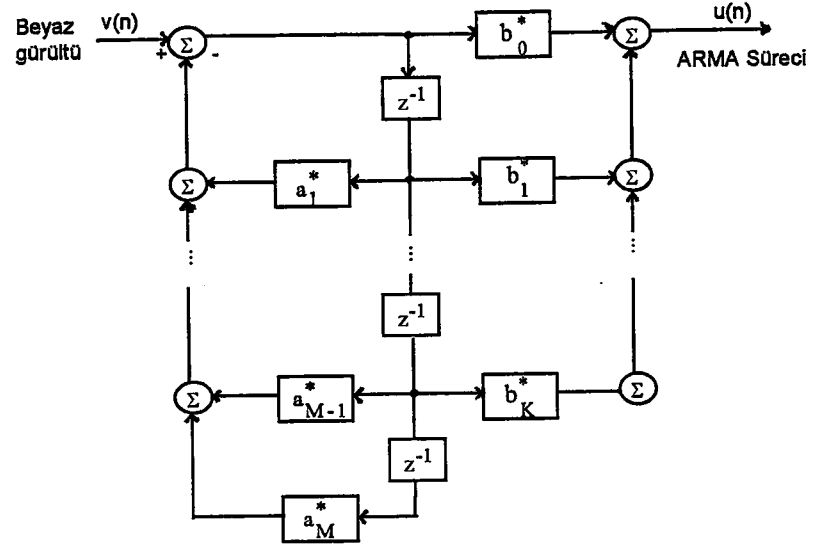
Şekil 2.3. Kayan ortalamalı işlem üreticinin blok diyagramı

C - Özbağlanımlı Kayan Ortalamalı Model (ARMA) :

Şekil 2.4 'deki model hem kutup, hem sıfırların kullanıldığı bir filtredir.

$$\begin{aligned} u(n) + a_1^* u(n-1) + a_2^* u(n-2) + \dots + a_M^* u(n-M) \\ = v(n) + b_1^* v(n-1) + \dots + b_K^* v(n-K) \end{aligned} \quad (2.5)$$

eşitliği ile gösterilen süreç, bir ARMA sürecidir. $a_1, a_2, \dots, a_M, b_1, b_2, \dots, b_K$ ARMA parametreleri olup, sürecin derecesi (M,K) 'dır.



Şekil 2.4. Özbağılanımlı kayan ortalama işlem üreticinin blok diyagramı

BÖLÜM 3

BİR-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAFES SÜZGEÇLERİ

3.1. Sonlu Geçmişe Dayalı Doğrusal Öngörü

Durağan, ayrık-zamanlı rasgele bir sürecin, geçmişteki örnek değerlerinden faydalananarak, gelecekteki bir değerini öngörmek, işaret işlemenin önemli problemlerinden biridir.

$u(n)$, $u(n-1)$, ... , $u(n-m)$ böyle bir sürecin $(m+1)$ örneği olsun. Öngörü probleminde, $u(n-1)$, $u(n-2)$, ... , $u(n-m)$ örnek değerleri kullanılarak, $u(n)$ değeri bulunmaya çalışılır.

U_{n-1} 'i, $u(n-1)$, $u(n-2)$, ... , $u(n-m)$ değerlerinden oluşan m -boyutlu uzay, $\hat{u}(n|U_{n-1})$ 'i ise $u(n)$ 'in öngörülen değeri olarak kabul edelim. $\hat{u}(n|U_{n-1})$ öngörülen değeri, (3.1) eşitliğinde gösterildiği gibi, $u(n-1)$, $u(n-2)$, ... , $u(n-m)$ değerlerinin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilirse, öngörü lineer olur.

$$\hat{u}(n|U_{n-1}) = \sum_{k=1}^M a_{ok}^* u(n-k) \quad (3.1)$$

Buradaki, a_{o1} , a_{o2} , ..., a_{ok} sabit katsayılarıdır.

Yukarıda, $u(n-1)$, $u(n-2)$, ..., $u(n-m)$ örnek değerlerinden, $u(n)$ değerinin öngörüsünden bahsedilmiştir. Bu işlem, ileriye doğru öngörü olarak adlandırılır. $u(n)$, $u(n-1)$, ..., $u(n-m+1)$ değerlerinden, $u(n-m)$ değerinin öngörümü ise geriye doğru öngörüdür.

3.2. Levinson-Durbin Özyinelemesi

İlk olarak Levinson 1947 yılında ve daha sonra da bağımsız olarak Durbin 1960 yılında, genişletilmiş normal denklemin çözümüyle, öngörü hata filtresi katsayılarının hesaplanması için bir yöntem önermişlerdir.

Özyinelemeli yapıya sahip algoritma, filtrenin katsayı girişlerinin özilişki matrisinin Toeplitz olma özelliğinden yararlanır. Bu süreçte, (n-1). dereceden genişletilmiş normal denklemin çözümleri kullanılarak, n. dereceden öngörücünün katsayıları hesaplanır. Süzgeç derecesi $n = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, m ulaşılmak istenen en son dereceyi belirtir. m büyüdükçe, yararlanılacak geçmişe ait bilişim miktarı arttığından, ortalama karesel hatanın küçülerek, $u(n)$ öngörümünün daha iyi olması beklenir.

Özilişki fonksiyonu $R(k) = E[u(n+k)u(n)]$ olan durağan bir $u(n)$ zaman serisi göz önüne alınsın. Verilen herhangi bir m değeri için, en iyi çözümü verecek m. dereceden doğrusal öngörücü (3.2) eşitliği ile gösterilmiştir.

$$\hat{u}(k) = - [a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots + a_m u(k-m)] \quad (3.2)$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ öngörü katsayıları, karesel ortalama öngörü hatasını en aza indirecek şekilde seçilir.

$$\varepsilon = E[f(k)^2] = \min \quad (3.3)$$

(3.3) eşitliğindeki $f(k)$, öngörü hatasını belirtmektedir.

$$f(k) = u(k) - \hat{u}(k) = u(k) + a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots + a_m u(k-m) \quad (3.4)$$

(3.3) eşitliğindeki her bir a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ katsayısına göre türev alınırsa, diklik denklemleri bulunur.

$$E[f(k) u(k-i)] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ için} \quad (3.5)$$

(3.4) ifadesindeki $f(k)$, (3.5) 'de yerine yerleştirilirse, hesaplanacak olan öngörücü katsayıları için m adet doğrusal denklem elde edilir.

$$\sum_{j=0}^m a_j E[u(k-j) u(k-i)] = \sum_{j=0}^m R(i-j) a_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

(3.5) 'deki koşullar kullanılarak,

$$\sigma_e^2 = \varepsilon = E[f(k)^2] = E[f(k) u(k)] = \sum_{i=0}^m R(i) a_i \quad (3.7)$$

değeri de hesaplanır.

(3.6) ve (3.7) denklemleri, $(m+1) \times (m+1)$ boyutlu bir matris denklemi şeklinde yazılırsa aşağıdaki matris eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \dots & R(m) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \dots & R(m-1) \\ R(2) & R(1) & R(0) & \dots & R(m-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R(m) & R(m-1) & R(m-2) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(3.8) 'deki normal denklemleri doğrudan çözmek yerine, $n=1, n=2, n=3, \dots$, ve $n=m$. derecelerden en iyi doğrusal öngörücüleri belirleme yoluna gidilir. Bu yaklaşımla, Levinson algoritması ya da başka bir isimle, doğrusal öngörü süzgeçlerinin kafes yapısı ile gerçekleştirilmesi elde edilir. Yöntem aşama aşama incelendiğinde,

$$f^{(1)}(k) = u(k) + a_{11} u(k-1)$$

$$f^{(2)}(k) = u(k) + a_{21} u(k-1) + a_{22} u(k-2)$$

$$f^{(3)}(k) = u(k) + a_{31} u(k-1) + a_{32} u(k-2) + a_{33} u(k-3)$$

.

.

.

$$f^{(m)}(k) = u(k) + a_{m1} u(k-1) + a_{m2} u(k-2) + \dots + a_{mm} u(k-m) \quad (3.9)$$

olduğu görülür.

Burada $(1, a_{11})$, $(1, a_{21}, a_{22})$, $(1, a_{31}, a_{32}, a_{33})$, ... katsayıları sırasıyla $n = 1, 2, 3, \dots$ dereceleri için en iyi öngörücüleri göstermektedir. Levinson Algoritması, bir sonraki öngörücüyü, bir önceki öngörücüden yararlanarak oluşturan iteratif bir algoritmadır. Bu algoritmada, istenilen dereceye ulaşılan

kadar, daha düşük dereceli bütün optimal öngörücüler hesaplanır.

İlk kez Burg tarafından 1968 yılında kullanılan Levinson algoritmasının matris formu ile, ileri ve geri öngörücüler daha biçimsel bir şekilde gösterilmiştir.

Levinson-Durbin özyinelemesi aşağıda gösterilen iki eşdeğer biçimden biri ile ifade edilebilir.

1 - İleri yönde bir öngörü hata süzgecinin katsayı ağırlık vektörü $\mathbf{a}_m$ 'e ilişkin derece güncellemesi aşağıdaki matris eşitliğinde gösterilmiştir.

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Burada, Γ_m bir sabittir. Bu derece güncelleme işleminin skaler gösterimi ise:

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + \Gamma_m a_{m-1,m-k}^* \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.11)$$

$a_{m,k}$, m.dereceden ileri yönde bir öngörü hata süzgecinin k. katsayı ağırlığıdır. $a_{m-1,m-k}^*$ ise (m-1). dereceden geri yönde bir öngörü hata süzgecinin k. katsayı ağırlığıdır. (3.11) bağıntısında, ayrıca, $a_{m-1,0} = 1$ ve $a_{m-1,m} = 0$ dir.

2 - Geri yönde bir öngörü hata süzgecinin katsayı ağırlık vektörü $\mathbf{a}_m^{B*}$ 'ye ilişkin derece güncellemesi ise aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\mathbf{a}_m^{B*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} + \Gamma_m^* \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Bu derece güncelleme işleminin skaler gösterimi ise:

$$a_{m,m-k}^* = a_{m-1,m-k}^* + \Gamma_m^* a_{m-1,k} \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.13)$$

$a_{m,m-k}^*$, m.dereceden geri yönde bir öngörü hata süzgecinin k. katsayı ağırlığıdır.

3.3. Kafes Öngörücüler

Bir-boyutlu işaretlerin kafes parametre modeli, doğrusal öngörü probleminin çözümüne bir alternatif oluşturur.

$u(k)$ skaler, ayrık zamanlı, sıfır ortalamalı durağan bir süreç olsun. $\{u(k-i), i=1, \dots, m\}$ bu sürecin geçmiş değerlerini oluşturan bir uzaydır ve $u(k)$ değerini doğrusal olarak öngörmek için kullanılır. $u(k)$ 'nın öngörüsü, bu uzaya olan izdüşüm veya $u(k-i)$ 'lerin doğrusal kombinasyonudur.

$$\hat{u}(k) = \sum_{i=1}^m a^{(m)}(i) u(k-i) \quad (3.14)$$

Burada $\hat{u}(k)$, $u(k)$ 'nın öngörülen değeridir. $\{a^{(m)}(i), i=1, \dots, m\}$ ler öngörücü katsayılarıdır. Gerçek değer ile öngörülen değer arasındaki fark, ileri öngörü hatasıdır.

$$f^{(m)}(k) = u(k) - \hat{u}(k) = u(k) - \sum_{i=1}^m a^{(m)}(i) u(k-i) \quad (3.15)$$

m indisi, süzgeç derecesini belirtmektedir. Bir kafes öngörücüyü karakterize eden m . ve $(m-1)$. derece filtrelerin katsayı vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilebilir.

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{a}_m^{B*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} + \Gamma_m^* \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$(m+1) \times 1$ boyutlu $\mathbf{a}_m$ ve $m \times 1$ boyutlu $\mathbf{a}_{m-1}$ vektörleri sırasıyla m . ve $(m-1)$. derecelerden ileri öngörü yanığı süzgeçlerine karşılık düşerler. $(m+1) \times 1$ boyutlu $\mathbf{a}_m^{B*}$ ve $m \times 1$ boyutlu $\mathbf{a}_{m-1}^{B*}$ vektörleri ise sırasıyla m . ve $(m-1)$. derecelerden geriye öngörü yanığı süzgeçlerine karşılık düşerler. Γ_m skaleri ise izdüşüm katsayısıdır.

İlkönce katsayı girişleri $u(k)$, $u(k-1)$, ..., $u(k-m)$ şeklinde gösterilen m . dereceden ileri yönde öngörü yanılığlı süzgecini ele alalım. Bu süzgecin, $(m+1) \times 1$ boyutlu katsayı giriş vektörü olan $u_{m+1}(k)$ vektörünü aşağıdaki gibi ikiye ayırmak mümkündür [1].

$$u_{m+1}(k) = \begin{bmatrix} u_m(k) \\ u(k-m) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

veya

$$u_{m+1}(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ u_m(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

(3.16) eşitliğinin sol tarafı için, $u_{m+1}(k)$ 'nin a_m 'nin Hermitian transpozesi olan a_m^H ile soldan çarpılması aşağıdaki sonucu verir.

$$f^{(m)}(k) = a_m^H u_{m+1}(k) \quad (3.20)$$

Burada, $f^{(m)}(k)$, m . dereceden ileri yönde öngörü yanılığlı süzgecinin çıkışındaki ileri öngörü hatasıdır.

(3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için, $u_{m+1}(k)$ 'nin (3.18) eşitliği ile verilen şekli kullanılırsa, aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\begin{aligned} [a_{m-1}^H \quad 0] u_{m+1}(k) &= [a_{m-1}^H \quad 0] \begin{bmatrix} u_m(k) \\ u(k-m) \end{bmatrix} \\ &= a_{m-1}^H u_m(k) \\ &= f^{(m-1)}(k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Burada, $f^{(m-1)}(k)$, $(m-1)$. dereceden ileri yönde öngörü yanılığlı süzgecinin çıkışındaki ileri öngörü hatasıdır.

(3.16) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci matris terimi için, $u_{m+1}(k)$ 'nin (3.19) eşitliği ile verilen şekli kullanılırsa, aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_{m-1}^{BT} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{m+1}(k) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_{m-1}^{BT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ \mathbf{u}_m(k-1) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{a}_{m-1}^{BT} \mathbf{u}_m(k-1) \\
 &= b^{(m-1)}(k-1)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Burada, $b^{(m-1)}(k-1)$, $(m-1)$. dereceden geri yönde öngörü yanılığı süzgecinin çıkışındaki geciktirilmiş geri yönde öngörü hatasıdır. (3.20), (3.21) ve (3.22) eşitliklerinden elde edilen sonuçlar birleştirilirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f^{(m)}(k) = f^{(m-1)}(k) + \Gamma_m^* b^{(m-1)}(k-1) \tag{3.23}$$

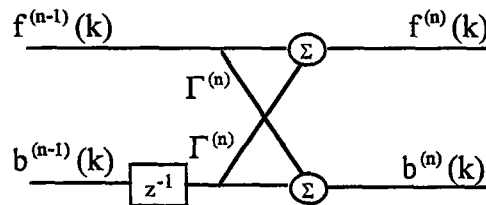
Aynı işlemler, geri yönde öngörü yanılığı süzgeci için de tekrarlanırsa aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$b^{(m)}(k) = b^{(m-1)}(k-1) + \Gamma_m f^{(m-1)}(k) \tag{3.24}$$

(3.23) ve (3.24) bağıntıları matris formunda yazılırsa aşağıdaki matris eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} f^{(m)}(k) \\ b^{(m)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_m^* \\ \Gamma_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{(m-1)}(k) \\ b^{(m-1)}(k-1) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

(3.25) eşitliği ile matematiksel tanımı verilen bir boyutlu kafes süzgeci Şekil 3.1 'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Bir-boyutta n. adım kafes süzgeci

BÖLÜM 4

İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAFES SÜZGEÇLERİ

İki-boyutlu doğrusal modellemede, durağan rasgele veri alanı $u(k_1, k_2)$ 'nin öngörüsü komşu örnek noktaların doğrusal kombinasyonu ile yapılır. Öngörü destek bölgesine bağlı olarak çeşitli nedensel modeller bulunmaktadır. Çeyrek-düzlem ve simetrik olmayan yarı-düzlem modelleri, en çok kullanılan modellerdir.

İki-boyutlu verilerde, nedenselliğin engelleyici bir durum oluşturmaması, yarı nedensel ve nedensel olmayan modellerin de uygulama alanı bulmasına yol açmıştır. Geçmişe ait değerlerin uygun tanımlanmasıyla, nedensel modeller özyinelemeli bir yapı oluştururlar.

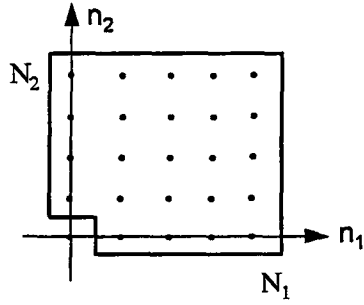
Çeyrek veya simetrik olmayan yarı düzlem için seçilen maskeye göre yaratılan özyinelemeli, özbağlanımlı, iki-boyutlu veri alanı, uygun indeksleme ile bir-boyutlu gibi düşünülebilir.

İki-boyutlu doğrusal öngörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir [7].

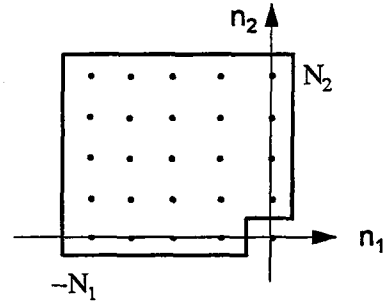
$$\hat{u}(k_1, k_2) = - \sum_{(n_1, n_2) \in \bar{S}} a(n_1, n_2) u(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \quad (4.1)$$

Burada $a(n_1, n_2)$, katsayı ağırlıklarını ve $\bar{S}$ ise, (0,0) noktasının içerilmediği öngörü destek bölgesini göstermektedir.

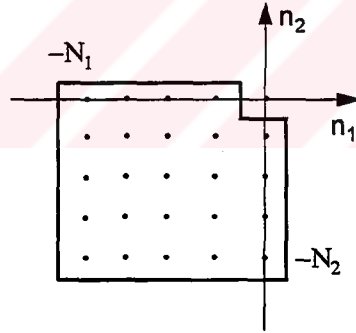
Simetrik olmayan yarı-düzlem ve çeyrek-düzleme ait farklı modeller için öngörü destek bölgeleri Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 'de verilmiştir.



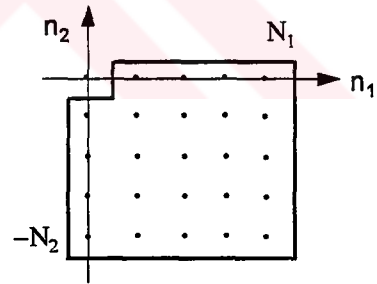
a) Birinci çeyrek-düzlem



b) İkinci çeyrek-düzlem

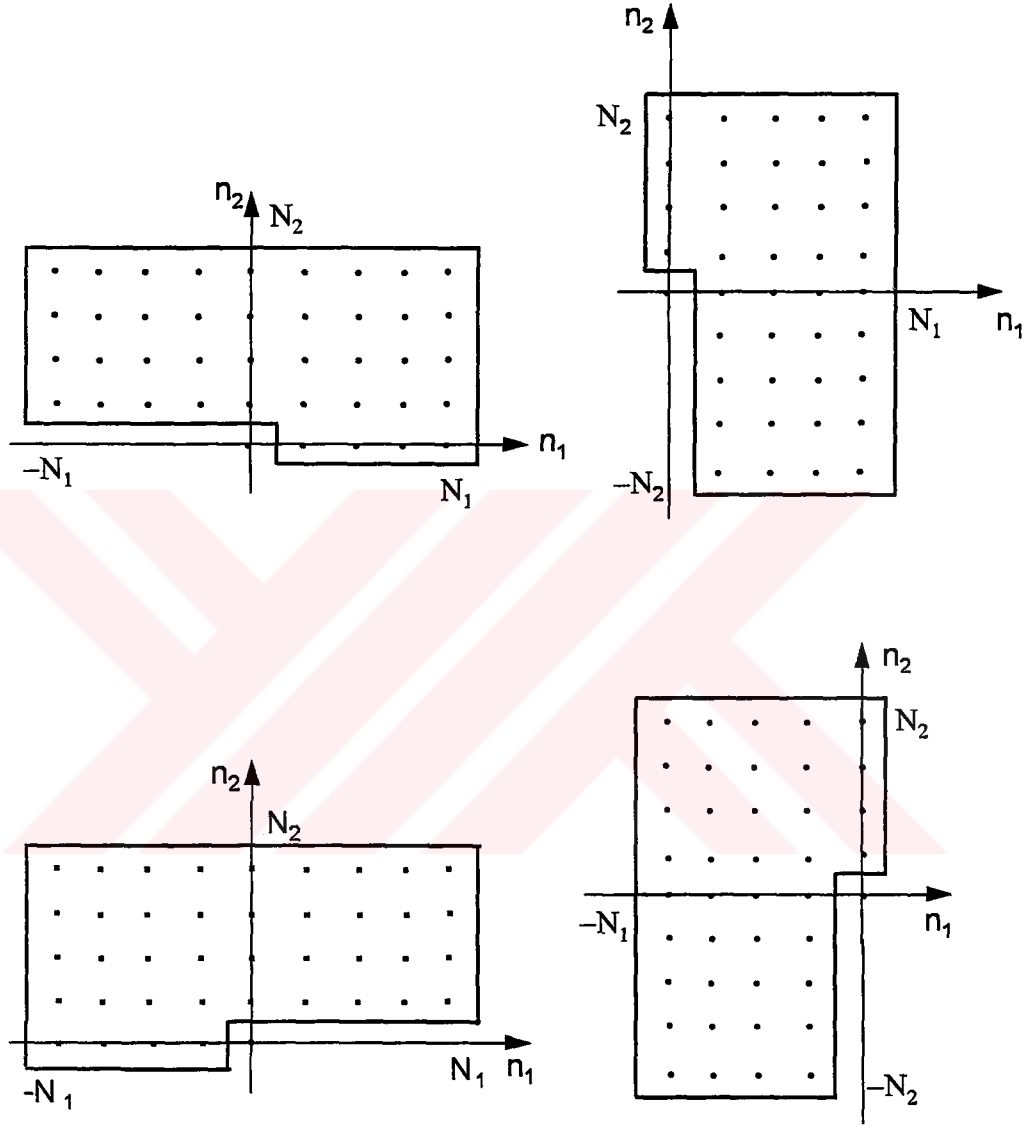


c) Üçüncü çeyrek düzlem

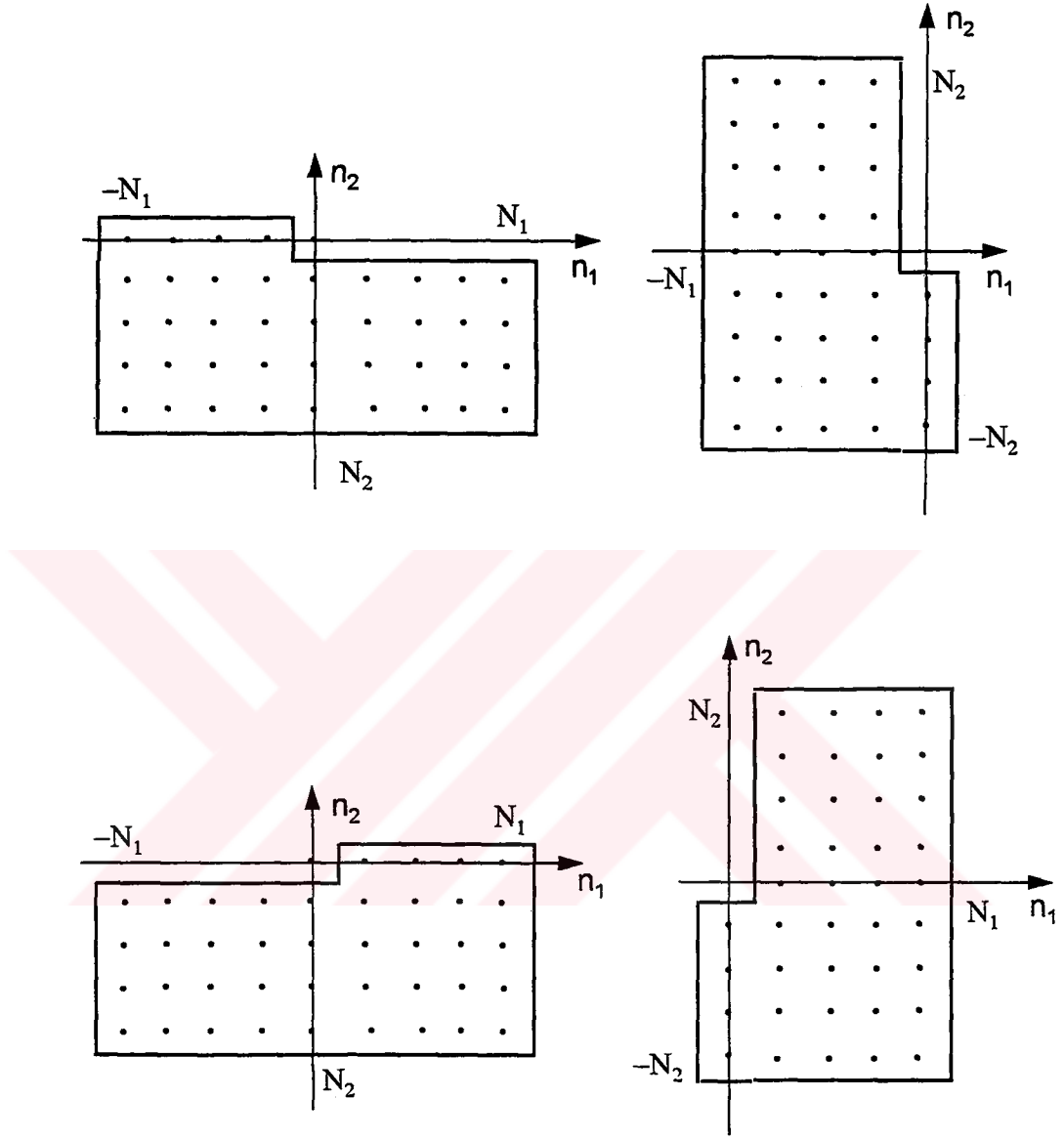


d) Dördüncü çeyrek düzlem

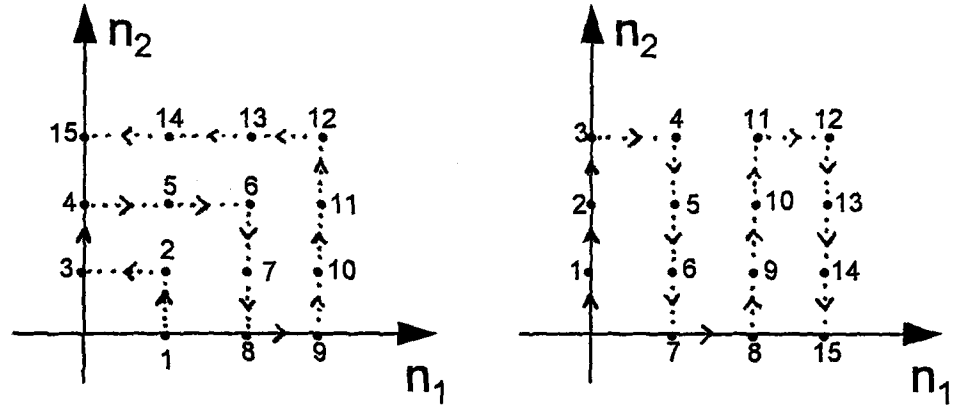
Şekil 4.1. Tek çeyrek-düzleme ilişkin öngörü modelleri



Şekil 4.2. Simetrik olmayan yarı-düzlem ileri-yönde öngörü modelleri için destek bölgeleri

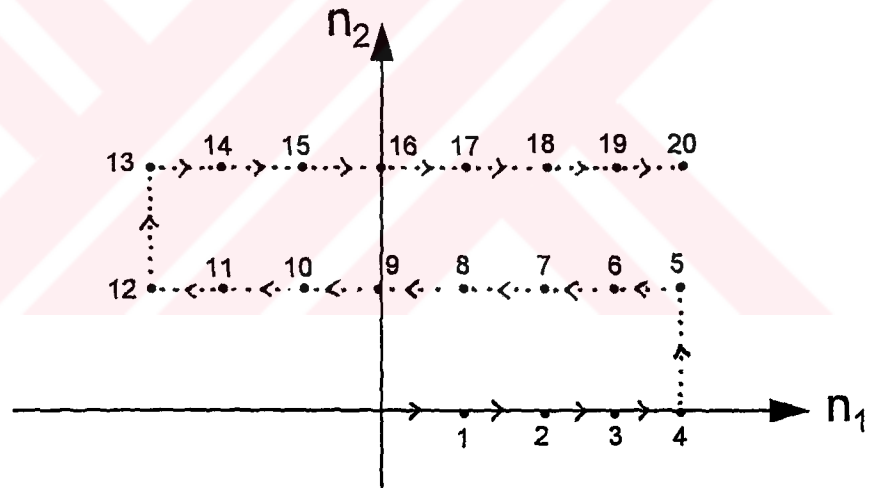


Şekil 4.3. Simetrik olmayan yarı-düzlem geri-yönde öngörü modelleri için destek bölgeleri



(a)

(b)



Şekil 4.4. Öngörü destek bölgesinde olası dizilimler

a,b) Tek çeyrek-düzlem c) Simetrik olmayan yarı düzlem

Öngörü hatası, bir boyuttakine benzer şekilde tanımlanır.

$$f^{(N)}(k_1, k_2) = u(k_1, k_2) - \hat{u}(k_1, k_2) \quad (4.2)$$

İşlemleri kolaylaştırmak için, öngörü destek bölgesi içindeki elemanlar, bir-boyutlu diziler halinde sıralanır. Şekil 4.4 'de çeyrek düzlem ve simetrik olmayan

yarı-düzlem modelleri için olası destek bölgeleri gösterilmiştir. Destek bölgelerinin elemanları, 0 'dan N 'e kadar numaralandırılmıştır. N. dereceden ileri yönde öngörü hatası, önceki N örneğin öngörüsüne bağlıdır. Aynı şekilde, N. dereceden geri yönde öngörü hatası, son örnekten N örnek öncesinin öngörüsüne bağlıdır. İleri yönde öngörücü, birinci çeyrek-düzlem modeli olarak düşünülürken, kullanılan dizilimine bağlı olarak geri yönde öngörücü ikinci veya dördüncü çeyrek-düzlem modeli olarak ele alınacaktır.

0. örneğin m geçmiş değere sahip öngörü destek bölgesiyle öngörülmesiyle oluşacak ileri yönde öngörü hatası

$$\begin{aligned} f_0^{(m)}(k_1, k_2) &= u(k_1, k_2) + \sum_{(n_1, n_2) = ((n_1, n_2) - 1)}^{((n_1, n_2) - m)} a_0^{(m)}(n_1, n_2) u(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \\ &= \mathbf{a}_0^{(m)T} \mathbf{u}_{0,m}(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (4.2a)$$

şeklinde verilir. Buradaki

$$\mathbf{a}_0^{(m)} = [1 \ a_0^{(m)}(1) \ \dots \ a_0^{(m)}(m)]^T \quad (4.2b)$$

ve

$$\mathbf{u}_{0,m}(k_1, k_2) = [u((k_1, k_2) - 0) \ u((k_1, k_2) - 1) \ \dots \ u((k_1, k_2) - m)]^T \quad (4.2c)$$

olarak tanımlıdır.

$u((k_1, k_2) - i)$ gösterimi, $u(k_1, k_2)$ 'den önceki i. elemanı göstermektedir. $u((k_1, k_2) - 0) = u(k_1, k_2)$, (4.2a) eşitliğindeki $\mathbf{u}_{0,m}(k_1, k_2)$ vektörünün birinci elemanıdır.

$f_0^{(m)}(k_1, k_2)$ 'nin z-dönüşümü alınırsa,

$$F_0^{(m)}(z_1, z_2) = \mathbf{a}_0^{(m)T} \mathbf{O}_{0,m}(z_1, z_2) \mathbf{U}(z_1, z_2) \quad (4.3a)$$

elde edilir. Dizilim vektörü,

$$\mathbf{O}_{0,m}(z_1, z_2) = [1 \ \delta_1(z_1, z_2) \ \dots \ \delta_m(z_1, z_2)]^T \quad (4.3b)$$

$$\delta_p(z_1, z_2) = Z [u((k_1, k_2) - p)] / U(z_1, z_2) , \quad p = 0, 1, \dots, m \text{ için} \quad (4.3c)$$

bağıntıları ile verilir. (4.3b) eşitliğindeki $\delta_i(z_1, z_2)$ 'ler, öngörü bölgesinde kullanılan örnek noktaların yerlerini göstermektedir. Bir boyutlu durumda, bu noktalar, $\delta_i(z) = z^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, N$ şeklinde doğal bir sıralanmaya sahiptirler. Ancak, iki-boyutlu öngöründe sıralanma değişik yollardan yapılabilir. Öngörü bölgesindeki elemanları sıralamak için, yalnızca dikey ve yatay yönler kullanılırsa, aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\frac{\delta_{i+1}(z_1, z_2)}{\delta_i(z_1, z_2)} = \begin{cases} z_2^{\pm 1} & , \text{ düşey yönde} \\ z_1^{\pm 1} & , \text{ yatay yönde} \end{cases} \quad (4.4)$$

$u((k_1, k_2) - m)$ veya m . örneğin m geçmiş değere sahip öngörü bölgesine göre oluşacak geri yönde öngörü hatası aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} b_m^{(m)}(k_1, k_2) &= u((k_1, k_2) - m) + \sum_{(n_1, n_2) = ((n_1, n_2) - 0)}^{((n_1, n_2) - m + 1)} g_0^{(m)}(n_1, n_2) u(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \\ &= g_0^{(m)T} u_{0,m}(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$g_m^{(m)} = [g_m^{(m)}(m) \ g_m^{(m)}(m-1) \ \dots \ g_m^{(m)}(1) \ 1]^T \quad (4.5b)$$

olarak tanımlıdır.

İleri yöndeki öngörü hatasına benzer şekilde, (4.5a) bağıntısının z-dönüşümü yazılırsa

$$B_m^{(m)}(z_1, z_2) = g_0^{(m)T} O_{0,m}(z_1, z_2) Y(z_1, z_2) \quad (4.6)$$

eşitliği bulunur.

($m-1$). dereceden ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerine ilişkin $m \times 1$ boyutlu katsayı ağırlık vektörlerini $a_0^{(m-1)}$ ve $g_m^{(m-1)}$ olarak gösterelim. İki-boyutlu, m . derece ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeçlerinin katsayıları derece aşaması yöntemiyle aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\mathbf{a}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{b_m}^{(m)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{g}_m^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} + \Gamma_{f_0}^{(m)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

(4.7) denklemlerindeki, $\Gamma_{f_0}^{(m)}$ ve $\Gamma_{b_m}^{(m)}$, m. dereceden ileri ve geri yönde öngörücülerin yansıma katsayılarıdır. (4.7) eşitliklerini, $u(k_1, k_2)$, $u((k_1, k_2) - 1)$, $u((k_1, k_2) - 2)$, ..., $u((k_1, k_2) - m)$ 'lerin $(m+1) \times (m+1)$ boyutundaki özilişki matrisi ile çarparsak, eşitliğin sol tarafında m. derece genişletilmiş normal denklemleri elde ederiz.

$$\mathbf{R}_{0,m} \mathbf{a}_0^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{f_0}^{(m)} \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{R}_{0,m} \mathbf{g}_m^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m \\ \mathbf{E}_{b_m}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$\mathbf{E}_{f_0}^{(m)}$ ve $\mathbf{E}_{b_m}^{(m)}$ sırasıyla ileri ve geri yönde öngörü hata güçleridir. (4.8) ifadesindeki, simetrik ilişki matrisi aşağıdaki gibi bölümlenebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,m} &= \mathbf{E}[\mathbf{u}_{0,m}(k_1, k_2) \mathbf{u}_{0,m}^T(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,m-1} & \mathbf{r}_{m,0} \\ \mathbf{r}_{m,0}^T & \mathbf{r}_{m,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0,0} & \mathbf{r}_{0,m}^T \\ \mathbf{r}_{0,m} & \mathbf{R}_{1,m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9a)$$

Burada,

$$\mathbf{R}_{p,q} = \mathbf{E}[\mathbf{u}_{p,q}(k_1, k_2) \mathbf{u}_{p,q}^T(k_1, k_2)] \quad (4.9b)$$

$$r_{0,q} = \mathbf{E}[u(k_1, k_2) \mathbf{u}_{1,q}(k_1, k_2)] \quad (4.9c)$$

$$r_{p,0} = \mathbf{E}[u((k_1, k_2) - p) \mathbf{u}_{0,p-1}(k_1, k_2)] \quad (4.9d)$$

$$r_{p,p} = \mathbf{E}[u^2((k_1, k_2) - p)] = r_{0,0} \quad (4.9e)$$

olarak tanımlıdır.

(4.7a) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,m} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,m-1} & \mathbf{r}_{m,0} \\ \mathbf{r}_{m,0}^T & r_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,m-1} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ \mathbf{r}_{m,0}^T \mathbf{a}_0^{(m-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

matris eşitliği elde edilir.

(m-1). dereceden, ileri yönde öngörü hata süzgeci için aşağıdaki genişletilmiş normal denklemi kullanabiliriz.

$$\mathbf{R}_{0,m-1} \mathbf{a}_0^{(m-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{f_0}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

(4.11) eşitliğindeki, $\mathbf{E}_{f_0}^{(m-1)}$ ileri yönde öngörü hata gücüdür. $\mathbf{O}_{m-1}$ ise sıfır vektördür. (4.10) bağıntısı ile elde edilen ifade için aşağıdaki $\Delta_{f_0}^{(m-1)}$ skalerini tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} \Delta_{f_0}^{(m-1)} &= \mathbf{r}_{m,0}^T \mathbf{a}_0^{(m-1)} = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{a}_0^{(m-1)}(i) r_{m,0}(i) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{a}_0^{(m-1)}(i) E[u((k_1, k_2) - m) u((k_1, k_2) - i)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12) bağıntıları, (4.10) 'da yerine konularak aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\mathbf{R}_{0,m-1} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{f_0}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ \Delta_{f_0}^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Benzer işlemler, (4.7b) bağıntısı için de gerçekleştirilirse, (m-1). dereceden geri yönde öngörü hata süzgeci için,

$$\mathbf{R}_{0,m-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{00} & \mathbf{r}_{0,m}^T \\ \mathbf{r}_{0,m} & \mathbf{R}_{1,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{b_m}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ E_{b_m}^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \Delta_{b_m}^{(m-1)} &= \mathbf{r}_{0,m}^T \mathbf{g}_m^{(m-1)} = \sum_{i=1}^m g_m^{(m-1)}(i) r_{0,m}(i) \\ &= \sum_{i=1}^m g_m^{(m-1)}(i) E[u(k_1, k_2) u((k_1, k_2) - i)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

olup, (4.13) ve (4.14) bağıntıları, (4.7) bağıntılarının sağ tarafında kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,m} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{b_m}^{(m)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} E_{f_0}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ \Delta_{f_0}^{(m-1)} \end{bmatrix} + \Gamma_{b_m}^{(m)} \begin{bmatrix} \Delta_{b_m}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ E_{b_m}^{(m-1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{f_0}^{(m)} \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16a)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,m} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-1)} \end{bmatrix} + \Gamma_{f_0}^{(m)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \Delta_{b_m}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ E_{b_m}^{(m-1)} \end{bmatrix} + \Gamma_{f_0}^{(m)} \begin{bmatrix} E_{f_0}^{(m-1)} \\ \mathbf{O}_{m-1} \\ \Delta_{f_0}^{(m-1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m \\ E_{b_m}^{(m)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16b)$$

bağıntıları elde edilir. (4.16) bağıntıları kullanılarak, ileri ve geri yönde yansım katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Gamma_{f_0}^{(m)} = - \frac{\Delta_{b_m}^{(m-1)}}{E_{f_0}^{(m-1)}}, \quad \Gamma_{b_m}^{(m)} = - \frac{\Delta_{f_0}^{(m-1)}}{E_{b_m}^{(m-1)}} \quad (4.17)$$

Minimum karesel ortalama hatalar ise

$$E_{f_0}^{(m)} = E[f_0^{(m)2}(k_1, k_2)] = E_{f_0}^{(m-1)} (1 - \Gamma_{f_0}^{(m)} \Gamma_{b_m}^{(m)}) \quad (4.18a)$$

$$E_{b_m}^{(m)} = E[b_m^{(m)2}(k_1, k_2)] = E_{b_m}^{(m-1)} (1 - \Gamma_{f_0}^{(m)} \Gamma_{b_m}^{(m)}) \quad (4.18b)$$

şeklindedir.

(4.12) ve (4.15) eşitlikleri ile tanımlanan Δ skalerleri, ileri ve geri yöndeki öngörü hataları arasındaki çapraz ilişki olarak yorumlanabilir.

$$\Delta_{f_0 b_m}^{(m-1)} = \Delta_{f_0}^{(m-1)} = \Delta_{b_m}^{(m-1)} = E[f_0^{(m-1)}(k_1, k_2) b_m^{(m-1)}(k_1, k_2)] \quad (4.19)$$

(4.2), (4.5) ve (4.7) bağıntılarından, m.dereceden ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerine ilişkin işlemler aşağıdaki gibi tek bir yapıda birleştirilebilir.

$$\begin{bmatrix} f_0^{(m)}(k_1, k_2) \\ b_m^{(m)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{b_m}^{(m)} \\ \Gamma_{f_0}^{(m)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{(m-1)}(k_1, k_2) \\ b_m^{(m-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Bir sonraki aşamada, $a_0^{(m-1)}$ ve $g_m^{(m-1)}$ katsayı vektörlerinin, (m-2). dereceden ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeçlerinin katsayı vektörleri kullanılarak hesaplanmasını inceleyelim. (4.10) ve (4.14) bağıntılarındaki $R_{0,m-1}$ ve $R_{1,m}$ matrisleri aşağıdaki gibi bölümlendirilebilir.

$$R_{0,m-1} = \begin{bmatrix} R_{0,m-2} & r_{m-1,0} \\ r_{m-1,0}^T & r_{m-1,m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,m-1}^T \\ r_{0,m-1} & R_{1,m-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{R}_{1,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,m-1} & \mathbf{r}_{m,m-1} \\ \mathbf{r}_{m,m-1}^T & \mathbf{r}_{m,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,1} & \mathbf{r}_{1,m}^T \\ \mathbf{r}_{1,m} & \mathbf{R}_{2,m} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$\mathbf{R}_{p,q}$, $\mathbf{r}_{0,q}$, $\mathbf{r}_{p,0}$ ve $\mathbf{r}_{pp}$ değerlerine ilişkin tanımlar, (4.9) bağıntıları ile verilmiştir. $\mathbf{r}_{m,m-j}$ ve $\mathbf{r}_{1,m}$ değerleri ise aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\mathbf{r}_{m,m-j} = E[u((k_1, k_2) - m) u_{j,m-j}(k_1, k_2)] \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \text{ için} \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{r}_{1,m} = E[u((k_1, k_2) - i) u_{i+1,m}(k_1, k_2)] \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \text{ için} \quad (4.23b)$$

(4.21) ve (4.22) bağıntıları kullanılarak elde edilen $\mathbf{a}_0^{(m-1)}$ ve $\mathbf{g}_m^{(m-1)}$ katsayı ağırlıklarının derece güncellemesi (4.24) bağıntısıyla verilmiştir.

$$\mathbf{a}_0^{(m-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-2)} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{b_{m-1}}^{(m-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_{m-1}^{(m-2)} \end{bmatrix} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{g}_m^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-2)} \end{bmatrix} + \Gamma_{f_1}^{(m-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{(m-2)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

Karşılaşılan $f_1^{(m-1)}(k_1, k_2)$ ileri yönde öngörü hatası ve $b_{m-1}^{(m-1)}(k_1, k_2)$ geri yönde öngörü hatası şu şekildedir.

$$\begin{aligned} f_1^{(m-1)}(k_1, k_2) &= u((k_1, k_2) - 1) + \sum_{(n_1, n_2) = ((k_1, k_2) - 2)}^{((k_1, k_2) - m)} \sum \mathbf{a}_1^{(m-1)}(n_1, n_2) u(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \\ &= \mathbf{a}_1^{(m-1)T} \mathbf{u}_{1,m}(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} b_{m-1}^{(m-1)}(k_1, k_2) &= u((k_1, k_2) - m + 1) + \sum_{(n_1, n_2) = ((k_1, k_2) - 0)}^{((k_1, k_2) - m + 2)} \sum \mathbf{g}_{m-1}^{(m-1)}(n_1, n_2) u(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \\ &= \mathbf{g}_{m-1}^{(m-1)T} \mathbf{u}_{0,m-1}(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (4.25b)$$

(4.25) bağıntıları ile tanımlanan, ileri ve geri yönde öngörü yanığı süzgeçleri için katsayı ağırlık vektörleri şu şekilde güncellenebilir.

$$\mathbf{a}_i^{(m-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(m-2)} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{b_m}^{(m-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_m^{(m-2)} \end{bmatrix} \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{g}_{m-1}^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_{m-1}^{(m-2)} \end{bmatrix} + \Gamma_{f_0}^{(m-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(m-2)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26b)$$

Bir önceki adımda olduğu gibi çapraz ilişkiler için

$$\Delta_{f_0 b_{m-1}}^{(m-2)} = \Delta_{f_0}^{(m-2)} = \Delta_{b_{m-1}}^{(m-2)} = E[f_0^{(m-2)}(k_1, k_2) b_{m-1}^{(m-2)}(k_1, k_2)] \quad (4.27)$$

ve yansıma katsayıları için

$$\Gamma_{f_0}^{(m-1)} = -\frac{\Delta_{f_0 b_{m-1}}^{(m-2)}}{E_{f_0}^{(m-2)}}, \Gamma_{b_{m-1}}^{(m-1)} = -\frac{\Delta_{f_0 b_{m-1}}^{(m-2)}}{E_{b_{m-1}}^{(m-2)}} \quad (4.28)$$

bağıntıları bulunur.

Bu işlemlere devam edilirse, (m-i). dereceden ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeçleri için, (i+1) adet kafes yapısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} f_0^{(m-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i}^{(m-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{b_{m-i}}^{(m-1)} \\ \Gamma_{f_0}^{(m-1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i}^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1^{(m-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i+1}^{(m-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{b_{m-i+1}}^{(m-1)} \\ \Gamma_{f_1}^{(m-1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i+1}^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_j^{(m-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i+j}^{(m-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{b_{m-i+j}}^{(m-1)} \\ \Gamma_{f_j}^{(m-1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \\ b_{m-i+j}^{(m-i-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

$j = 0, 1, \dots, i$ için

(4.29)

(4.29) eşitlikleri kullanılarak hata yayılım denklemleri daha toplu bir şekilde

$$\begin{bmatrix} f_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) \\ b_p^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{b_p}^{(n)} \\ \Gamma_{f_p}^{(n)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2) \\ b_p^{(n-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

yazılır. $p = 1, 2, \dots, m$ ve $n = 1, 2, \dots, p$ dir.

İlk koşullar ise,

$$f_0^{(p)}(k_1, k_2) = b_p^{(0)}(k_1, k_2) = u((k_1, k_2) - p) \quad , \quad p = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.31)$$

bağıntısı ile bulunur.

Önerilen algoritma 0. dereceden başlar ve m. dereceye kadar devam eder.

BÖLÜM 5

BİR-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI KAFES SÜZGEÇLER

5.1. Bir İzdüşüm Problemi Olarak ARMA Modellemesi

Doğrusal, zamanla değişen, (N,M) dereceli nedensel bir ARMA filtresi, $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-N}$ önceki çıkışlarıyla, $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)}$ önceki girişlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilir. n anındaki filtre çıkışını karakterize eden denklem aşağıdadır.

$$y_n = \sum_{i=1}^N a_{n,N,M}(i) y_{n-i} + \sum_{j=0}^{M-1} b_{n,N,M}(j) u_{n-j} \quad (5.1)$$

Bu fark denklemiyle gösterilen bir filtrenin gerçekleştirilmesine doğrudan filtre gerçekleştirilmesi denir. $a_{n,N,M}$ ve $b_{n,N,M}$ 'ler filtre katsayıları olarak adlandırılır. Kafes filtresi gibi diğer gerçekleştirmelerde, y_n çıkışı, $y_{n-1}, \dots, y_{n-N}$ ve $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)}$ değişkenlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilen yeni bir takım değişkenler kullanılarak gösterilir. Bu yapılar, farklı filtre katsayılarına sahip olmalarına rağmen, genel anlamda, verilen bir giriş için aynı çıkışı ürettiklerinden birbirlerine eşdeğerlerdir.

En az kareler ARMA modelleme probleminde, $\{u_n\}$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu bir giriş dizisi ve $\{y_n\}$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu bir çıkış dizisi verilir ve

$$y'_n = \sum_{i=1}^N \alpha_{n,N,M}(i) y_{n-i} + \sum_{j=0}^{M-1} \beta_{n,N,M}(j) u_{n-j} \quad (5.2)$$

çıkışı, $\|e_n\|^2 = E[e_n^2]$ olan L_2 normunu en aza indirecek şekilde doğrusal, zamanla değişen bir ARMA filtresi bulunmak istenir. Burada $e_n = y_n - y'_n$ dir.

$y_n, u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)}$ ve $y_{n-1}, \dots, y_{n-N}$ değişkenlerinin lineer bir kombinasyonu olduğundan, bu değişkenlerin oluşturduğu alt-uzayda yer alır.

$$y'_n \in S_{n,N,M} = \text{Sp}\{ y_{n-1}, \dots, y_{n-N} \text{ ve } u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)} \} \quad (5.3)$$

y'_n, y_n 'in $S_{n,N,M}$ alt uzayına olan izdüşümüne eşit olursa, e_n hata vektörünün L_2 normu en aza indirgenmiş olur [32]. Bu izdüşümü $P_{n,N,M}(y_n)$ olarak adlandıralım. $P_{n,N,M}(y_n)$ izdüşümü, en az kareler çözümüdür ve bu izdüşüm $S_{n,N,M}$ alt uzayını oluşturan herhangi bir vektör kümesi tarafından gerçekleştirilebilir. İleride de açıklanacağı gibi, ARMA kafes filtre yapısı da, $S_{n,N,M}$ alt-uzayını oluşturan dikgen vektör takımının izdüşümlerinin gerçekleştirilmesiyle elde edilir [33].

5.2. İzdüşümler ve Dikgen Ayırıştırma

Bir sonraki bölümde, bir Hilbert uzayındaki vektörlerin, doğrusal bir alt-uzaya izdüşümü göz önüne alınacağından, bu bölümde, izdüşümler, doğrusal bir alt-uzayın dikgen ayrıştırması ve bazı notasyonlar açıklanacaktır [32], [34].

x , bir H Hilbert uzayında bir vektör, $S = \text{Sp}\{ v_0, \dots, v_N \}$ de H 'nin bir alt-uzayı olsun. Eğer x 'in S üzerine izdüşümünü $P(x)$ ile gösterirsek, $P(x), v_0, \dots, v_N$ gerçekleştirme vektörlerinin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$P(x) = \sum_{i=0}^N c(i) v_i \quad (5.4)$$

İzdüşümü hesaplamak için $c(0), \dots, c(N)$ izdüşüm katsayıları belirlenmelidir. $P(x)$ izdüşümü, $e_x = x - P(x)$ izdüşüm hatasının S alt-uzayına dikgen olmasıyla ifade edildiğinden, tanım olarak, e_x vektörü $v_0, \dots, v_N$ gerçekleştirme vektörlerinin herbirine dikgen olmalıdır. Sonuç olarak ise v_i ve e_x iç-çarpımları da sıfır olmalıdır. Aşağıdaki bağıntılarda, " $\langle, \rangle$ " operatörü vektörlerin iç-çarpımını gösterir.

$$\langle v_i, e_x \rangle = \langle v_i, x - P(x) \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (5.5)$$

Buradan

$$\langle v_i, x \rangle = \langle v_i, P(x) \rangle \quad (5.6)$$

ve

$$\sum_{p=0}^N c(p) \langle v_i, v_p \rangle = \langle v_i, x \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (5.7)$$

olur.

$$\begin{bmatrix} \langle v_0, v_0 \rangle & \dots & \langle v_0, v_N \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_N, v_0 \rangle & \dots & \langle v_N, v_N \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(0) \\ \vdots \\ c(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v_0, x \rangle \\ \vdots \\ \langle v_N, x \rangle \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

(5.8) bağıntısını matris eşitliği şeklinde ifade edersek

$$R c = w \quad (5.9)$$

elde edilir. R 'nin tersinin alınabileceğini kabul edersek

$$c = R^{-1} w \quad (5.10)$$

bağıntısından izdüşüm katsayı vektörü c bulunur.

Bir S alt-uzayı diğer alt-uzayların toplamı şeklinde de yazılabilir. Örneğin

$$S = \text{Sp}\{v_0, \dots, v_N\} = \text{Sp}\{v_0, \dots, v_{k-1}\} + \text{Sp}\{v_k, \dots, v_N\} = S_1 + S_2 \quad (5.11)$$

bağıntısıyla S uzayındaki her vektörün S_1 alt-uzayından ve S_2 alt-uzayından birer vektörün toplamıyla gösterilebileceği açıklanmak istenir. Eğer, S_2 'nin her gerçekleştirme vektörü v_i 'yi, S_1 üzerine izdüşürür ve izdüşüm hatalarını

$$ev_i = v_i - P_1(v_i) \quad i = k, \dots, N \quad (5.12)$$

ile gösterirsek, aynı zamanda S uzayını aşağıda gösterildiği gibi de ifade ederiz.

$$S = \text{Sp}\{v_0, \dots, v_N\} = \text{Sp}\{v_0, \dots, v_{k-1}\} \oplus \text{Sp}\{ev_k, \dots, ev_N\} = O_1 \oplus O_2 \quad (5.13)$$

$\oplus$ operatörü, S uzayındaki her vektörün, $O_1 = \text{Sp}\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$ 'den ve $O_2 = \text{Sp}\{ev_k, \dots, ev_N\}$ 'den birer vektörün toplamı şeklinde yazılabileceğini gösterir. O_2 'deki her ev_k vektörü, O_1 'e dikgen olduğundan, (5.13) bağıntısı, S 'in O_1 ve O_2 dikgen alt-uzaylarına ayrıştırmasını ifade eder. Yukarıdaki O_1 ve O_2 'deki gerçekleştirme vektörlerini, S uzayının gerçekleştirme vektörleri olarak

$$S = \text{Sp}\{\{v_0, \dots, v_{k-1}\} \cup \{ev_k, \dots, ev_N\}\} \quad (5.14)$$

gösterirsek, x 'in S üzerine olan izdüşümünü

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c(i) v_i + \sum_{i=k}^N c(i) ev_i \quad (5.15)$$

olarak gösterebiliriz.

Bir x vektörünün, O_1 ve O_2 dikgen alt-uzaylarına ayrılmış S uzayına olan izdüşümü, x 'in her alt-uzaya olan izdüşümlerinin toplamına eşittir.

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (5.16)$$

5.3. Bir-Boyutlu ARMA Kafes Süzgeçleri

ARMA kafes süzgeçlerinin elde edilmesinde aşağıdaki yollar izlenecektir.

1. $S_{n,i,j}$ uzayını geçmiş $S_{n-1,i-1,j-1}$ uzayına ve dikgen bileşeni olan uzaya parçalayarak, dikgen gerçekleştirme vektör kümesi oluşturulur.

2. y_n 'in her $S_{n,i,j}$ uzayına olan izdüşümü, $S_{n,i,j}$ 'nin dikgen gerçekleştirme vektör kümesinin derecesinin yükseltilmesi ile gerçekleştirilir.

5.3.1. ARMA Dikgen Gerçekleme Vektörlerinin Oluşturulması

$S_{n,N,M}$ için dikgen bir temel oluşturulmasında birçok yol vardır, ancak burada, $y_{n-1}, \dots, y_{n-N}$ ve $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)}$ giriş ve çıkış vektörlerine Gram-Schmidt dikleştirme işlemi uygulanacaktır.

Bu dikgen gerçekleme vektörleri ile bir önceki dikgen gerçekleme vektörleri arasındaki bağıntı bulunur. Bunun için, $S_{n,i,j}$ uzayı, $S_{n-1,i-1,j-1}$ geçmiş alt-uzayına ve ona dikgen olan yeni bir alt-uzaya parçalanır. Bu amaçla, $S_{n,i,j}$ uzayından, u_n 'in içinde bulunduğu uzay çıkarılarak yeni alt-uzay elde edilir.

$$\begin{aligned} S_{n,i,j} &= \text{Sp}\{y_{n-1}, \dots, y_{n-i}, u_{n-1}, \dots, u_{n-(j-1)}\} + \text{Sp}\{u_n\} \\ &= S_{n,i,j-1} + \text{Sp}\{u_n\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

u_n 'i, biri $S_{n,i,j-1}$ uzayında, diğeri de ona dikgen olan uzayda yer alan iki kısma ayırırsak, u_n 'in $S_{n,i,j-1}$ uzayında yer alan bileşeni, $P_{n,i,j-1}(u_n)$ izdüşümüdür. $S_{n,i,j-1}$ uzayına dikgen olan bileşeni ise, ileri yönde izdüşüm hatası

$$f_{n,i,j-1} = u_n - P_{n,i,j-1}(u_n) \quad (5.18)$$

olup,

$$S_{n,i,j} = S_{n,i,j-1} \oplus \text{Sp}\{f_{n,i,j-1}\} \quad (5.19)$$

yazılabilir.

Böylece $y_{n-(i+1)}$ 'in $S_{n,i,j}$ üzerine olan izdüşümü, $y_{n-(i+1)}$ 'in $S_{n,i,j-1}$ üzerine izdüşümü ile geriye kalan izdüşüm hatası $b_{n,i,j-1} = y_{n-(i+1)} - P_{n,i,j-1}(y_{n-(i+1)})$ 'in $\text{Sp}\{f_{n,i,j-1}\}$ üzerine olan izdüşümlerinin toplamı şeklinde yazılabilir.

$$P_{n,i,j}(y_{n-(i+1)}) = P_{n,i,j-1}(y_{n-(i+1)}) + p_n^{bf}(i, j-1) f_{n,i,j-1} \quad (5.20)$$

Burada,

$$\rho^{bf}_n(i, j-1) = \frac{\langle \hat{f}_{n,i,j-1}, \hat{b}_{n,i,j-1} \rangle}{\|\hat{f}_{n,i,j-1}\|^2} \quad (5.21)$$

olup, "bf" üst-indisi izdüşüm katsayısının, b vektörünün, f vektörü üzerine izdüşümü ile elde edildiğini gösterir.

Geriye doğru izdüşüm hatası,

$$b_{n,i,j} = y_{n-(j+1)} - P_{n,i,j}(y_{n-(j+1)}) \quad (5.22)$$

ve (5.20) bağıntılarını kullanarak, $b_{n,i,j}$ ve $\hat{b}_{n,i,j-1}$ arasındaki ilişkiyi,

$$b_{n,i,j} = \hat{b}_{n,i,j-1} - \rho^{bf}_n(i, j-1) \hat{f}_{n,i,j-1} \quad (5.23)$$

şeklinde yazabiliriz.

Aynı şekilde, diğer geriye doğru izdüşüm hatası,

$$c_{n,i,j} = u_{n-j} - P_{n,i,j}(u_{n-j}) \quad (5.24)$$

da, (5.19) bağıntısı yardımıyla

$$c_{n,i,j} = \hat{c}_{n,i,j-1} - \rho^{cf}_n(i, j-1) \hat{f}_{n,i,j-1} \quad (5.25)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ρ^{cf} , aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\rho^{cf}_n(i, j-1) = \frac{\langle \hat{f}_{n,i,j-1}, \hat{c}_{n,i,j-1} \rangle}{\|\hat{f}_{n,i,j-1}\|^2} \quad (5.26)$$

Bir sonraki aşama olarak, $\hat{b}_{n,i,j-1}$ ile $b_{n-1,i-1,j-1}$ ve $\hat{c}_{n,i,j-1}$ ile $c_{n-1,i-1,j-1}$ arasında bir ilişki bulunmak istenir.

$$\begin{aligned} S_{n,i,j-1}^- &= Sp\{ y_{n-1} \} + Sp\{ y_{n-2}, \dots, y_{n-i}, u_{n-1}, \dots, u_{n-(j-1)} \} \\ &= Sp\{ y_{n-1} \} + S_{n-1,i-1,j-1} \end{aligned} \quad (5.27)$$

olduğundan ve ileriye doğru izdüşüm hatası

$$f_{n,i,j} = u_n - P_{n,i,j}^-(u_n) \quad (5.28a)$$

$$e_{n,i,j} = y_n - P_{n,i,j}(y_n) \quad (5.28b)$$

ve (5.19) bağıntıları yardımıyla $S_{n,i,j-1}^-$ 'i iki dikgen uzayın toplamı şeklinde yazabiliriz.

$$S_{n,i,j-1}^- = S_{n-1,i-1,j-1} \oplus Sp\{ e_{n-1,i-1,j-1} \} \quad (5.29)$$

Burada

$$e_{n-1,i-1,j-1} = y_{n-1} - P_{n-1,i-1,j-1}(y_{n-1}) \quad (5.30)$$

olup, sonuç olarak,

$$b_{n,i,j-1}^- = b_{n-1,i-1,j-1} - k_{n-1}^{be}(i-1, j-1) e_{n-1,i-1,j-1} \quad (5.31)$$

$$c_{n,i,j-1}^- = c_{n-1,i-1,j-1} - k_{n-1}^{ce}(i-1, j-1) e_{n-1,i-1,j-1} \quad (5.32)$$

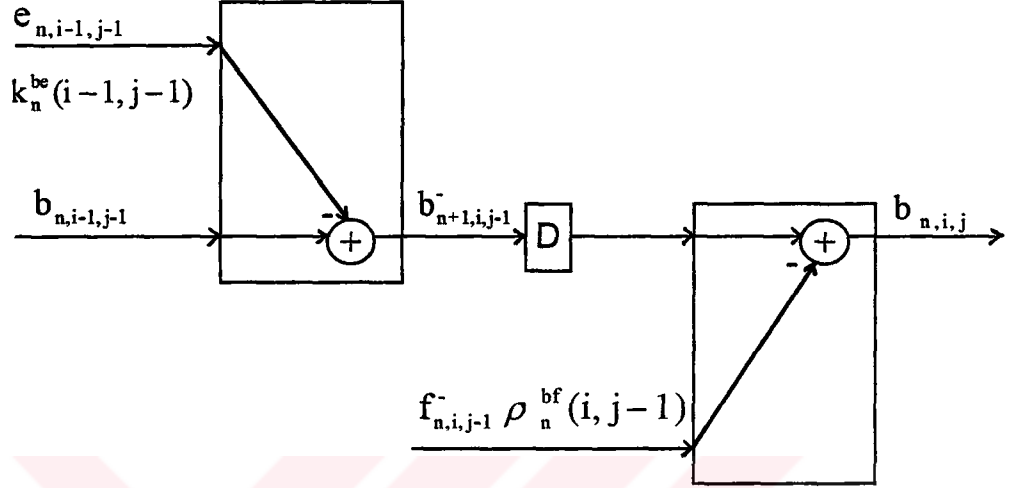
elde edilir ki, burada

$$k_{n-1}^{be}(i-1, j-1) = \frac{\langle e_{n-1,i-1,j-1}, b_{n-1,i-1,j-1} \rangle}{\|e_{n-1,i-1,j-1}\|^2} \quad (5.33)$$

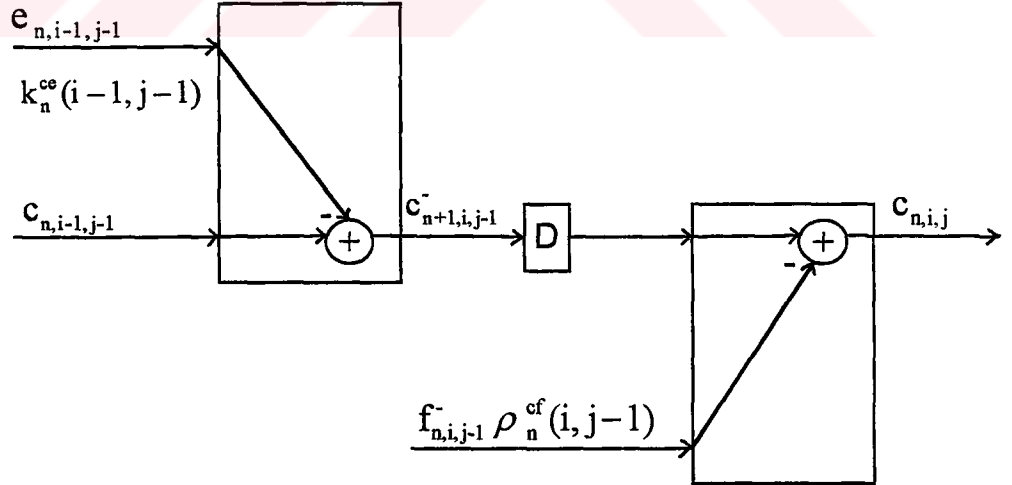
$$k_{n-1}^{ce}(i-1, j-1) = \frac{\langle e_{n-1,i-1,j-1}, c_{n-1,i-1,j-1} \rangle}{\|e_{n-1,i-1,j-1}\|^2} \quad (5.34)$$

olarak gösterilir.

(5.23), (5.25), (5.31) ve (5.32) bağıntılarını birleştirerek, Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 'de, $b_{n,i,j}$ ve $c_{n,i,j}$ için temel derece özyinelemelerini görebiliriz.



Şekil 5.1. $b_{n,i,j}$ ARMA dikgen gerçekleştirme vektörü için derece özyinelemesi



Şekil 5.2. $c_{n,i,j}$ ARMA dikgen gerçekleştirme vektörü için derece özyinelemesi

ARMA dikgen gerçekleme vektörlerinin bağıntılarını tamamlamak için, $e_{n,i,j}$ ve $f_{n,i,j}$ ileriye doğru izdüşüm hataları bağıntılarını da gerçekleştirmek gerekmektedir. $e_{n,i,j}$ bağıntıları için, $S_{n,i,j}$ 'de, biri AR derece özyinelemesi, diğeri MA derece özyinelemesi olmak üzere iki adet oluşum verilmiştir.

AR derece özyinelemesi için, $S_{n,i,j}$

$$\begin{aligned} S_{n,i,j} &= Sp\{ y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-(i-1)}, u_n, \dots, u_{n-(j-1)} \} + Sp\{ y_{n-i} \} \\ &= S_{n,i-1,j} + Sp\{ y_{n-i} \} \end{aligned} \quad (5.35)$$

y_{n-i} 'nin $S_{n,i-1,j}$ 'de yer alan bileşenini ayırarak, $S_{n,i,j}$ 'yi

$$S_{n,i,j} = S_{n,i-1,j} \oplus Sp\{ b_{n,i-1,j} \} \quad (5.36)$$

$$b_{n,i-1,j} = y_{n-i} - P_{n,i-1,j}(y_{n-i}) \quad (5.37)$$

şeklinde yazıp, y_n 'i, $S_{n,i,j}$ üzerine izdüşürerek,

$$P_{n,i,j}(y_n) = P_{n,i-1,j}(y_n) + k^{eb}_n(i-1, j) b_{n,i-1,j} \quad (5.38)$$

'yi elde ederiz. Burada

$$k^{eb}_n(i-1, j) = \frac{\langle b_{n,i-1,j}, e_{n,i-1,j} \rangle}{\|b_{n,i-1,j}\|^2} \quad (5.39)$$

$$e_{n,i,j} = y_n - P_{n,i,j}(y_n) \quad (5.40)$$

olduğundan, (5.38) 'den

$$e_{n,i,j} = e_{n,i-1,j} - k^{eb}_n(i-1, j) b_{n,i-1,j} \quad (5.41)$$

bulunur.

MA derece özyinelemesi için,

$$\begin{aligned} S_{n,i,j} &= Sp\{ y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-i}, u_n, \dots, u_{n-(j-2)} \} + Sp\{ u_{n-(j-1)} \} \\ &= S_{n,i,j-1} + Sp\{ u_{n-(j-1)} \} \end{aligned} \quad (5.42)$$

bağıntısından, $u_{n-(j-1)}$ 'i $S_{n,i,j-1}$ 'de yer alan bileşenini ayırarak, $S_{n,i,j}$ 'yi

$$S_{n,i,j} = S_{n,i,j-1} \oplus Sp\{ c_{n,i,j-1} \} \quad (5.43)$$

şeklinde yazabiliriz. y_n 'i, $S_{n,i,j}$ üzerine izdüşürerek, (5.43) bağıntısını kullanarak ve (5.38), (5.39), (5.41) bağıntılarında yaptığımız gibi ilerleyerek, $e_{n,i,j}$ ve $e_{n,i,j-1}$ arasında

$$e_{n,i,j} = e_{n,i,j-1} - k_n^{ec}(i, j-1) c_{n,i,j-1} \quad (5.44a)$$

$$k_n^{ec}(i, j-1) = \frac{\langle c_{n,i,j-1}, e_{n,i,j-1} \rangle}{\|c_{n,i,j-1}\|^2} \quad (5.44b)$$

bağıntılarını buluruz.

Şekil 5.1. ve Şekil 5.2 'deki bağıntılara, (5.41) ve (5.44) bağıntılarını da ekleyerek, Şekil 5.3. ve Şekil 5.4 'de gösterilen kafes bloklarını elde ederiz.

Son olarak, $f_{n,i,j}$ bağıntılarını bulmak isteriz. Burada da iki adet düzenleme vardır. Birincisi AR derece özyinelemesi, ikincisi MA derece özyinelemesidir.

AR derece özyinelemesi için,

$$\begin{aligned} S_{n,i,j}^- &= Sp\{ y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-(i-1)}, u_n, \dots, u_{n-j} \} + Sp\{ y_{n-i} \} \\ &= S_{n,i-1,j}^- + Sp\{ y_{n-i} \} \end{aligned} \quad (5.45)$$

şeklinde yazabiliriz. y_{n-i} 'nin $S_{n,i-1,j}^-$ 'de yer alan bileşenini ayırarak, $S_{n,i,j}^-$ 'yi

$$S_{n,i,j}^- = S_{n,i-1,j}^- \oplus Sp\{ b_{n,i-1,j}^- \} \quad (5.46)$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada

$$\bar{b}_{n,i-1,j} = y_{n-i} - \bar{P}_{n,i-1,j}(y_{n-i}) \quad (5.47)$$

olup, u_n 'i, $\bar{S}_{n,i,j}$ üzerine izdüşürerek ve (5.28a) 'da verilen $\bar{f}_{n,i,j}$ 'nin tanımını kullanarak, $\bar{f}_{n,i,j}$ ve $\bar{f}_{n,i-1,j}$ arasında aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\bar{f}_{n,i,j} = \bar{f}_{n,i-1,j} - \rho_{n,i-1,j}^{\text{fb}} \bar{b}_{n,i-1,j} \quad (5.48)$$

(5.48) bağıntısında

$$\rho_{n,i-1,j}^{\text{fb}} = - \frac{\langle \bar{b}_{n,i-1,j}, \bar{f}_{n,i-1,j} \rangle}{\|\bar{b}_{n,i-1,j}\|^2} \quad (5.49)$$

olup, aynı şekilde, $\bar{S}_{n,i,j}$ 'nin MA derece özyinelemesi için düzenlemesi

$$\begin{aligned} \bar{S}_{n,i,j} &= \text{Sp}\{ y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-i}, u_{n-1}, \dots, u_{n-(j-1)} \} + \text{Sp}\{ u_{n-j} \} \\ &= \bar{S}_{n,i,j-1} + \text{Sp}\{ u_{n-j} \} \end{aligned} \quad (5.50)$$

olarak yazılır. Daha sonra u_{n-j} 'nin $\bar{S}_{n,i,j-1}$ 'de yer alan bileşeni kaldırılarak

$$\bar{S}_{n,i,j} = \bar{S}_{n,i,j-1} \oplus \text{Sp}\{ \bar{c}_{n,i,j-1} \} \quad (5.51)$$

elde edilir.

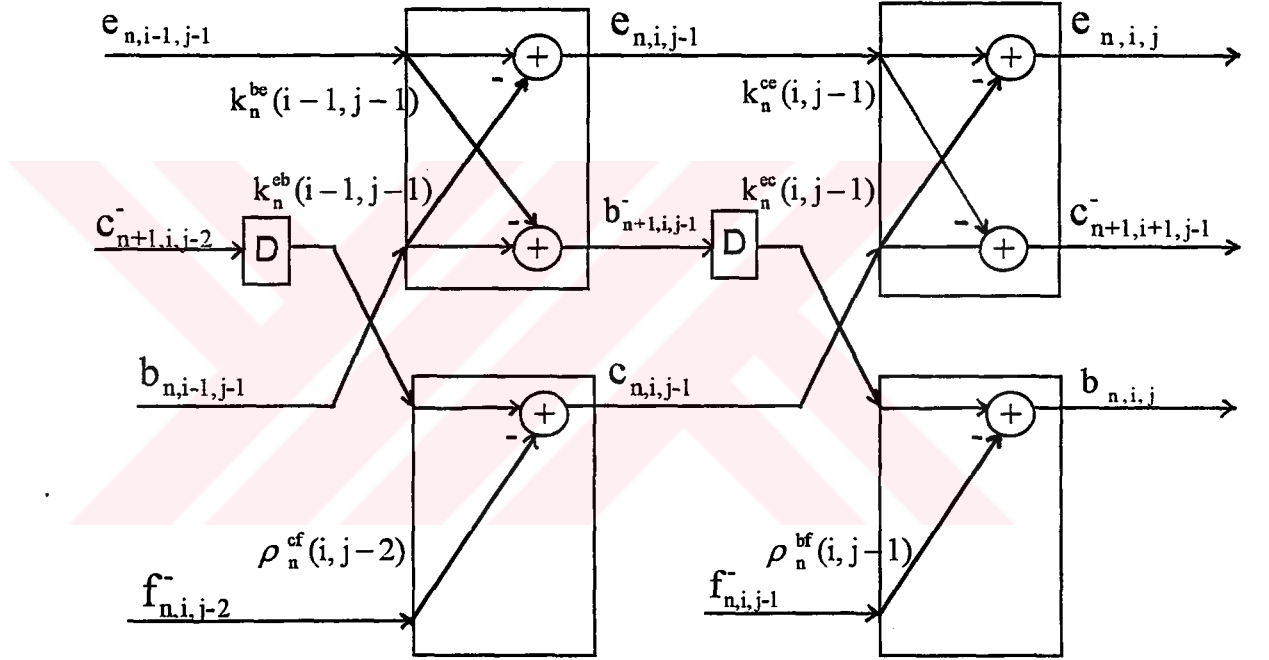
u_n 'i, yine $\bar{S}_{n,i,j}$ üzerine izdüşürerek ve $\bar{f}_{n,i,j}$ 'nin tanımını kullanarak, $\bar{f}_{n,i,j}$ ve $\bar{f}_{n,i,j-1}$ arasında aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\bar{f}_{n,i,j} = \bar{f}_{n,i,j-1} - \rho_{n,i,j-1}^{\text{fc}} \bar{c}_{n,i,j-1} \quad (5.52)$$

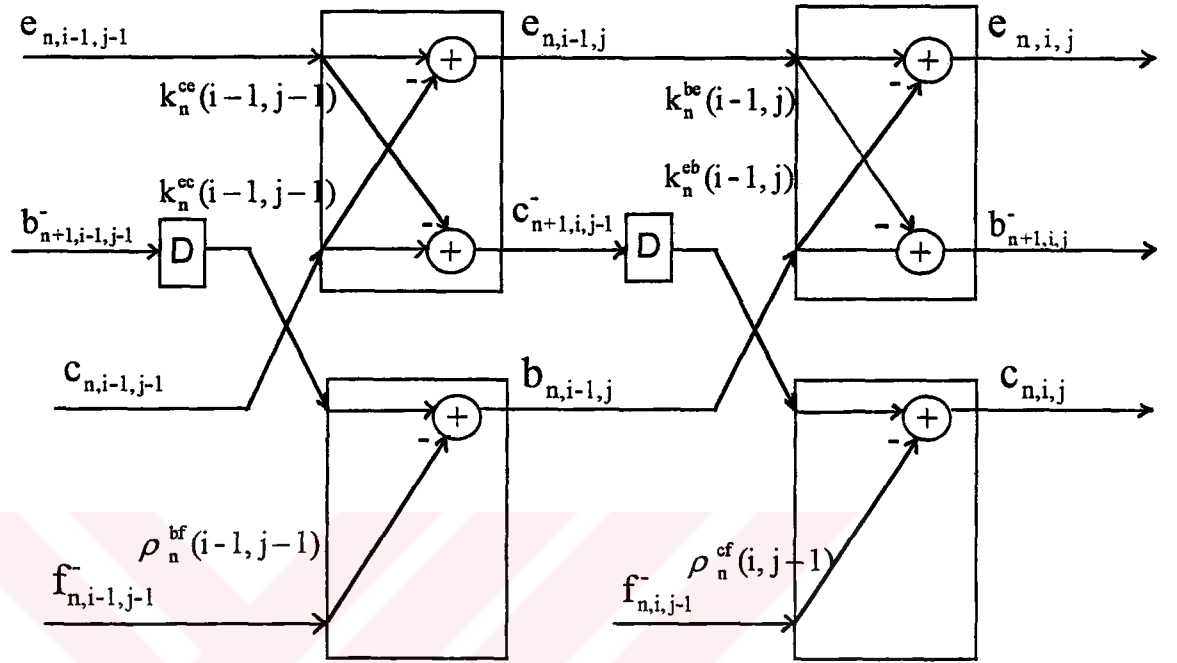
(5.52) ifadesinde

$$\rho_n^{ce}(i, j-1) = - \frac{\langle \mathbf{c}_{n,i,j-1}^-, \mathbf{f}_{n,i,j-1}^- \rangle}{\|\mathbf{c}_{n,i,j-1}^-\|^2} \quad (5.53)$$

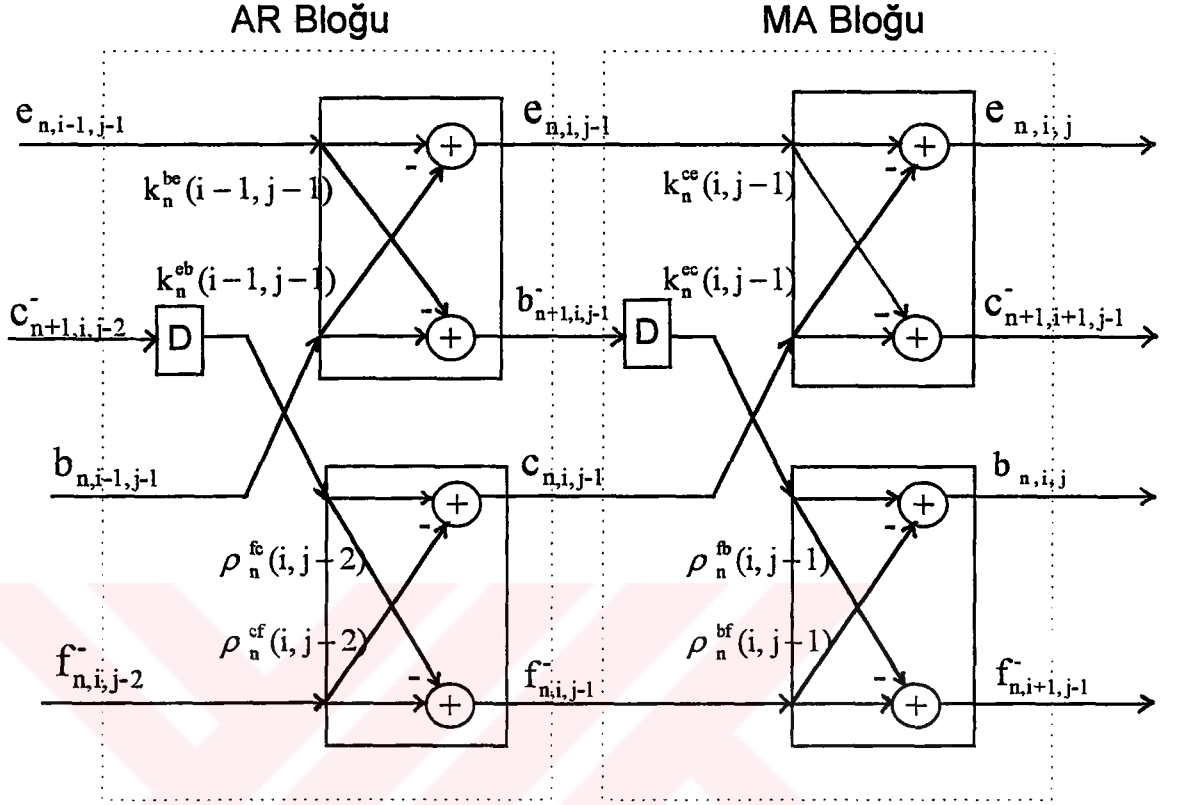
(5.49) ve (5.53) 'de verilen bağıntıları, Şekil 5.3. ve Şekil 5.4 'de gösterilen bağıntılara ekleyerek, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 'da verilen ARMA dikgen gerçekleştirme vektörlerini buluruz.



Şekil 5.3. $b_{n,i,j}$ ve $e_{n,i,j}$ ARMA dikgen gerçekleştirme vektörleri için bir sonraki derece özyinelemeleri



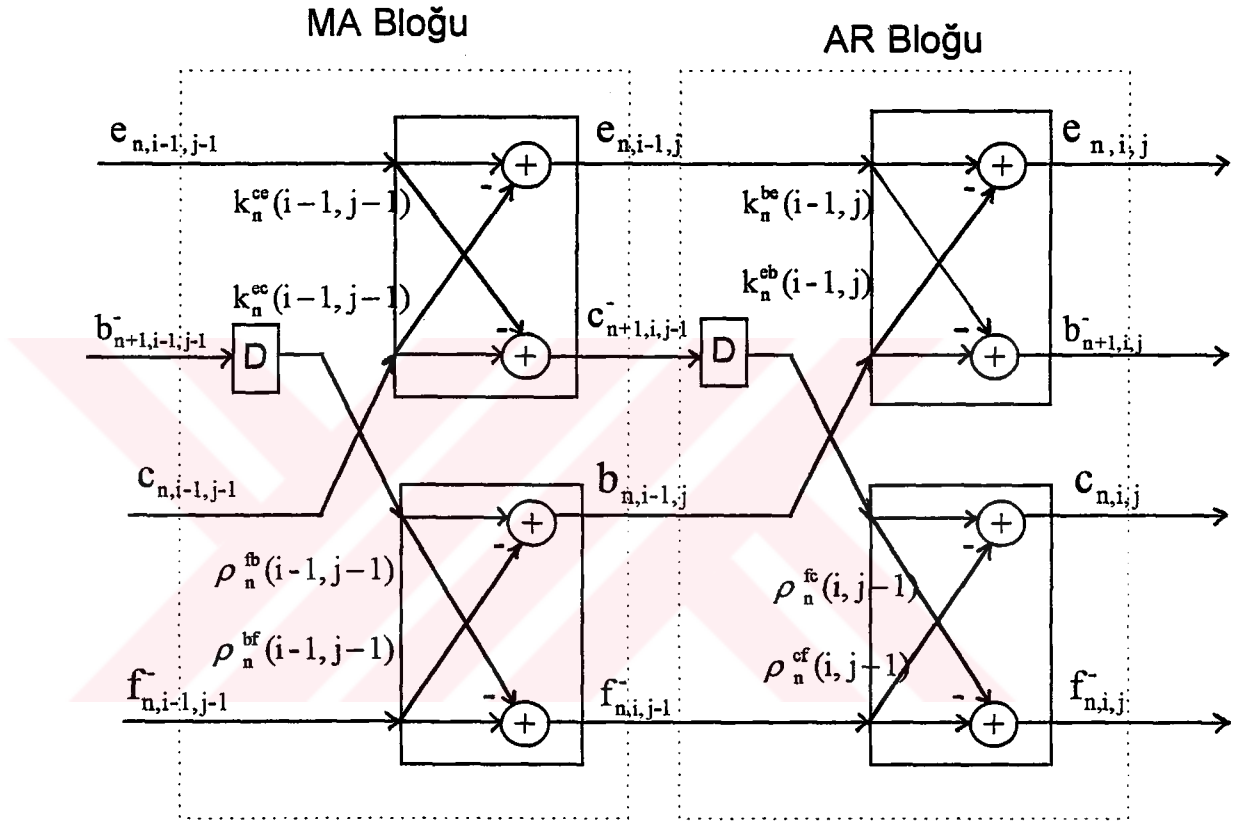
Şekil 5.4. $c_{n,i,j}$ ve $e_{n,i,j}$ ARMA dikgen gerçekleştirme vektörleri için bir sonraki derece özyinelemeleri



Şekil 5.5. ARMA Kafes beyazlatma süzgecinin $b_{n,i,j}$ ve $e_{n,i,j}$ için derece özyinelemeleri

ARMA kafes yapısının ana işlem blokları, MA ve AR kafes yapılarında bulunanlarla aynıdır. Bu blokların, iki vektör girişi vardır, her vektörün öbür vektöre izdüşümü hesaplanır ve çıkış ise izdüşüm hatalarıdır. Şekil 5.5 ve 5.6 'daki gerçekleştirme vektörleri derece özyinelemeleri, iki kattan oluşmaktadır, bir AR derece arttırım katı ve bir MA derece arttırım katı. Şekil 5.5.'de gösterildiği gibi, $b_{n,i,j}$ gerçekleştirme vektör derece özyinelemesi, bir AR derece arttırım katı ve devamında bir MA derece arttırım katından meydana gelir. $c_{n,i,j}$ gerçekleştirme vektör özyinelemesi ise, tersine olacak şekilde aynı yoldan oluşturulur. Bu AR ve MA derece arttırım katları, ARMA kafes yapısının ana bloklarıdır.

Tüm ARMA kafes yapısını oluşturmak için, $i=0$ ve $j=0$ olduğu durumlar için bazı değişiklikler yapmak gerekir. $j=0$ olduğu durum, AR kafes yapısıdır. Bu durumda $S_{n,i,0} = S_{n,i,0}^-$, $b_{n,i,0} = b_{n,i,0}^-$, $c_{n,i,0} = c_{n,i,0}^-$ ve $c_{n,i,0} = u_n - P_{n,i,0}(u_n) = u_n - P_{n,i,0}^-(u_n) = f_{n,i,0}$ dir.



Şekil 5.6. ARMA Kafes beyazlatma süzgecinin $c_{n,i,j}$ ve $e_{n,i,j}$ için derece özyinelemeleri

Bu yüzden, Şekil 5.5. ve 5.6 'daki AR bloğu, AR kafes bloğuna karşılık gelen sadece üst izdüşüm hata bloğunu içerecek şekilde basitleştirilmelidir. Yalnız bir sonraki kafes katları için $c_{n,i,0} = f_{n,i,0}$ vektörleri gerektiğinden, temel AR derece

bağıntısına $c_{n,i,0} = f_{n,i,0}$ bağıntısı eklenerek $j = 0$ için olan AR derece özyinelemesi bulunur. Bu bloğu AR0 bloğu olarak adlandıracağız (Şekil 5.7). Aynı şekilde $i = 0$ hali için, MA kafes yapısı göz önüne alınır. Bu durumda $s_{n-1,0,j} = \bar{s}_{n,0,j}$, $b_{n-1,0,j} = \bar{b}_{n,0,j}$, $c_{n-1,0,j} = \bar{c}_{n,0,j}$ ve $\bar{b}_{n,0,j} = y_{n-1} - P_{n,0,j}(y_{n-1}) = y_{n-1} - P_{n-1,0,j}(y_{n-1}) = e_{n-1,0,j}$ dir.

$c_{n,0,j} = \bar{f}_{n,0,j}$ bağıntılarını da eklersek, $i = 0$ için MA derece özyinelemelerini elde ederiz (Şekil 5.8). Bu bloğu MA0 olarak adlandıracağız.

AR0 filtresini, AR kafes, MA0 filtresini de MA kafes filtresi takip eder. Bütün bu parçalar bir araya getirilerek ARMA beyazlatma filtresi elde edilir (Şekil 5.9).

5.3.2. ARMA Kafes Filtresi

Şekil 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 ve 5.9 'da $S_{n,i,j}$ için dikgen gerçekleştirme vektörlerinin nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir. Şekil 5.5, 5.6, 5.7 ve 5.8 'de bloklar tek tek, 5.9 'da da ARMA kafes beyazlatma filtresinin makro yapısı gösterilmiştir. Kısmen de $S_{n,i,j}$ için dikgen gerçekleştirme vektörlerinin derecelendirilmesini göstermektedir. Örneğin $i \geq j$ ve $(i + j)$ nin çift olması durumu için, dikgen gerçekleştirme vektörleri

$$b_{n,0,0}, \dots, b_{n,i-j-1,0}, \{ b_{n,i-j,0}, c_{n,i-j+1,0} \}, \dots, \{ b_{n,i-1,j-1}, c_{n,i,j-1} \} \quad (5.53)$$

olup, $S_{n,i,j}$ 'nin dikgen gerçekleştirme vektörleri ile gerçekleştirilen $P_{n,i,j}(y_n)$ izdüşümü

$$P_{n,i,j}(y_n) = \sum_{(p,q) \in B_{n,i,j}} \alpha_n^b(p,q) b_{n,p,q} + \sum_{(p,q) \in C_{n,i,j}} \alpha_n^c(p,q) c_{n,p,q} \quad (5.54)$$

olarak gösterilir, burada

$$\alpha_n^b(p,q) = \frac{\langle b_{n,p,q}, y_n \rangle}{\| b_{n,p,q} \|^2} \quad (5.55)$$

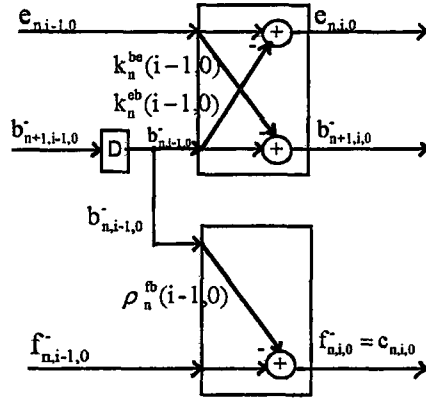
$$\alpha_n^c(p,q) = \frac{\langle c_{n,p,q}, y_n \rangle}{\|c_{n,p,q}\|^2} \quad (5.56)$$

olup, $B_{n,i,j}$ ve $C_{n,i,j}$ sıralama kümeleridir ve $b_{n,p,q}$ ve $c_{n,p,q}$ vektörlerinin hangisinin $S_{n,i,j}$ 'nin gerçekteleme vektör kümesi içinde yer aldığını tanımlar. $\alpha_n^b(p,q) = k_n^{ob}(p,q)$ ve $\alpha_n^c(p,q) = k_n^{oc}(p,q)$ olup, $k_n^{ob}(p,q)$ ve $k_n^{oc}(p,q)$, (5.39) ve (5.45) bağıntılarıyla verilmiştir. Böylece bu izdüşümü,

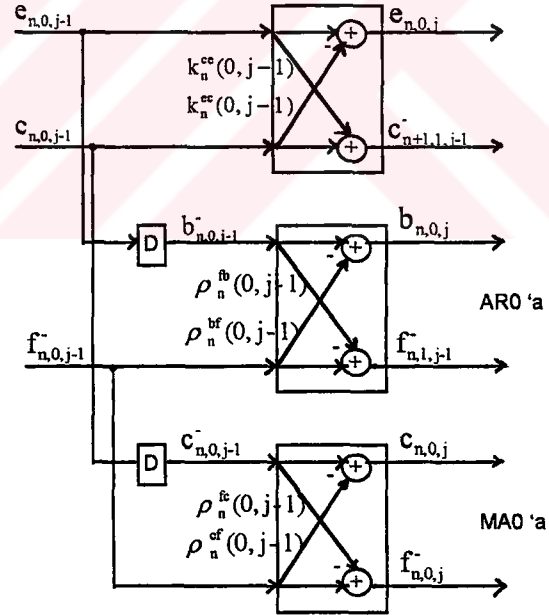
$$P_{n,i,j}(y_n) = \sum_{(p,q) \in B_{n,i,j}} k_n^{ob}(p,q) b_{n,p,q} + \sum_{(p,q) \in C_{n,i,j}} k_n^{oc}(p,q) c_{n,p,q} \quad (5.57)$$

şeklinde yazabiliriz.

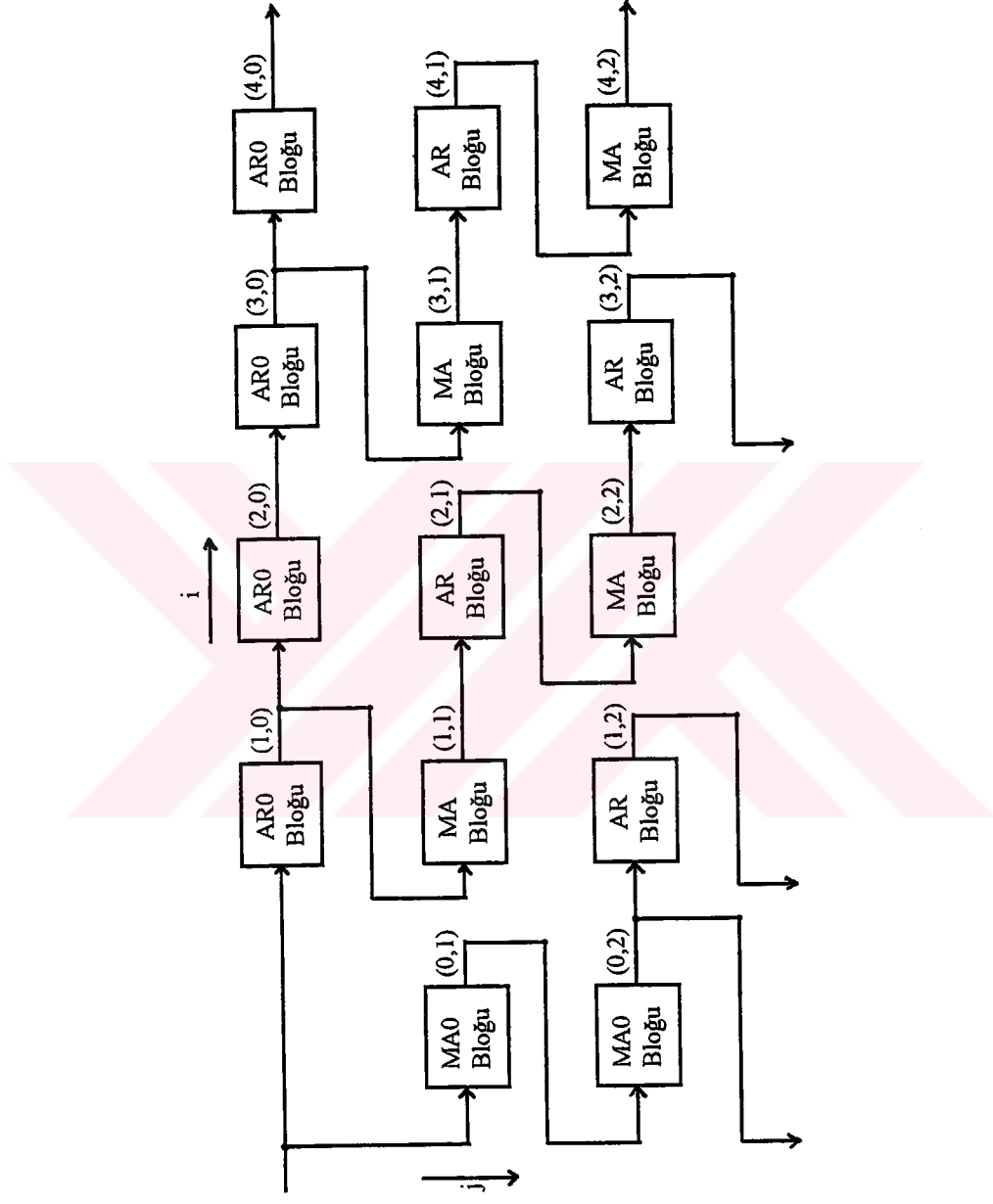
ARMA kafes filtresi, $i \leq N$ ve $j \leq M$ için tüm $P_{n,i,j}(y_n)$ izdüşümlerini gerçekler.



Şekil 5.7. $j=0$ olduğu durum için AR0 'ın blok diyagramı



Şekil 5.8. $i=0$ olduğu durum için MA0 blok diyagramı



Şekil 5.9. ARMA Kafes beyazlatma süzgecinin genel blok diyagramı

BÖLÜM 6

İKİ-BOYUTLU ÖZBAĞLANIMLI KAYAN ORTALAMALI KAFES SÜZGEÇLERİ

Çalışmanın bu bölümünde, dördüncü bölümde, tek-kanallı iki-boyutlu özbağlanımlı kafes süzgeçlerini modellemek için açıklanan yöntemden faydalanarak, iki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalımalı süzgeçlerin analiz ve sentez modelleri açıklanacaktır.

Bu amaçla, ilk olarak dördüncü bölümde tek-kanallı model için çıkarılmış olan bağıntılar kullanılarak, iki-kanallı, iki-boyutlu özbağlanımlı analiz modeli verilecektir.

Daha sonra, bu iki-kanallı, iki-boyutlu özbağlanımlı modellemeyen yararlanılarak, bir örnek üzerinde iki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalımalı modelin elde edilmesi gösterilecektir.

İki-boyutlu doğrusal modellemede, durağan rasgele veri alanlarının öngörüsünün, komşu örnek noktaların doğrusal kombinasyonu ile yapılmakta olduğu dördüncü bölümde açıklanmıştı. İşlemleri kolaylaştırmak için, öngörü destek bölgesi içindeki elemanlar bir-boyutlu diziler halinde sıralanmaktaydı. Dizilimin elemanlarının 0'dan N'e kadar numaralanıp, N. dereceden ileri yönde öngörü hatasının, önceki N örneğin öngörümüne bağlı olduğu; aynı şekilde, N. dereceden geri yönde öngörü hatasının da son örnekten N örnek öncesinin öngörüsüne bağlı olduğu belirtilmiş ve buna göre bağıntılar elde edilmişti.

Tek-kanallı yapı için geliştirilen bu yöntem, iki-kanallı yapı için bağıntılar vektörel olarak ele alınarak düzenlenebilir.

6.1 İki-kanallı İki-boyutlu AR Modelleme (Analiz Modeli)

Dördüncü bölümde, (4.20) matris bağıntısıyla n. dereceden ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerine ilişkin denklemler verilmişti. Tek-kanallı yapı için verilen bu denklemler, iki-kanallı yapı için düşünülürse vektörel olarak yazılır. Bu yöntem izlenerek, (n-1). derece ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerine ilişkin katsayı ağırlık vektörlerinin n. derece katsayıları derece aşaması yöntemiyle aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) = \mathbf{f}_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{f_{p-n}}^{(n)T} \mathbf{b}_p^{(n-1)}(k_1, k_2) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{b}_p^{(n)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_p^{(n-1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{b_p}^{(n)T} \mathbf{f}_{p-n}^{(n-1)}(k_1, k_2) \quad (6.2)$$

Buradaki katsayı ağırlık vektörleri daha genel bir şekilde,

$$\mathbf{f}_i^{(n)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} f_{1i}^{(n)}(k_1, k_2) \\ f_{2i}^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{b}_i^{(n)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} b_{1i}^{(n)}(k_1, k_2) \\ b_{2i}^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (6.3b)$$

şeklinde tanımlanır.

n. dereceden ileri ve geri yönde öngörücülerin yansıma katsayılarını ise $x=b$ veya f olmak üzere

$$\Gamma_{x_i}^{(n)} = \begin{bmatrix} \gamma_{x_i}^{(n)}(1,1) & \gamma_{x_i}^{(n)}(1,2) \\ \gamma_{x_i}^{(n)}(2,1) & \gamma_{x_i}^{(n)}(2,2) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

olarak gösterebiliriz.

(6.3) bağıntıları ile genel bir şekilde verilen katsayı ağırlık vektörlerini, ARMA modelinin giriş ve çıkış dizileri kanalları göstermek üzere, iki-kanallı yapı ile ARMA modeli arasında bir yakınlık kurmak amacıyla aşağıdaki şekilde yazabiliriz :

$$\mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} y((k_1, k_2) - i) \\ u((k_1, k_2) - i) \end{bmatrix} \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{b}_j^{(0)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} y((k_1, k_2) - j) \\ u((k_1, k_2) - j) \end{bmatrix} \quad (6.5b)$$

Dördüncü bölümde (4.7) eşitliklerinde uygulandığı gibi, (6.3) eşitliklerinin her iki tarafını $(n+1) \times (n+1)$ boyutundaki özilişki matrisi ile çarpalım. Eşitliğin sol tarafı n . derece genişletilmiş normal denklemleri verir. Sağ tarafı ise sırasıyla

$$\mathbf{P}_{f_{p-n}}^{(n)} = E[\mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) \mathbf{f}_{p-n}^{(n)T}(k_1, k_2)] \quad (6.6)$$

$$\mathbf{P}_{b_p}^{(n)} = E[\mathbf{b}_p^{(n)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_p^{(n)T}(k_1, k_2)] \quad (6.7)$$

olarak tanımlanan ileri ve geri yönde öngörü hata güçlerini verir. (4.17) ifadesinde olduğu gibi, ileri ve geri yöndeki yansıma katsayılarını

$$\Gamma_{f_{p-n}}^{(n)} = \mathbf{P}_{b_p}^{(n-1)-1} \Delta_{fb_p}^{(n-1)T} \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{b_p}^{(n)} = \mathbf{P}_{f_{p-n}}^{(n-1)-1} \Delta_{fb_p}^{(n-1)} \quad (6.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\Delta_{fb_p}^{(n)} = E[\mathbf{f}_{p-n}^{(n)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_p^{(n)T}(k_1, k_2)] \quad (6.10)$$

olarak tanımlıdır.

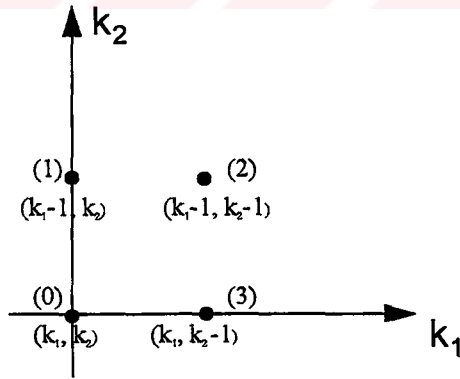
Şimdi, bu iki-kanallı iki-boyutlu özbağımlı modellemeden, dördüncü bölümde açıkladığımız iki-boyutlu dikgen AR yapılarını kullanarak, iki-boyutlu ARMA modellemesini elde etmek istiyoruz. Bunu açıklayabilmek için aşağıdaki örneği ele alalım.

ÖRNEK 6.1 :

Transfer fonksiyonu,

$$H(z_1, z_2) = \frac{a_0 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_1^{-1} z_2^{-1} + a_3 z_2^{-1}}{1 + b_1 z_1^{-1} + b_2 z_1^{-1} z_2^{-1} + b_3 z_2^{-1}} \quad (6.11)$$

olarak verilen, üçüncü dereceden, çeyrek düzlemde 3 destek noktalı iki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin analizi üç adımda yapılabilir. Dördüncü çeyrek düzlem modelini, geriye kestirimci hatası olarak elde etmek için, kestirim bölgesi içindeki dizilimi Şekil 6.1 'de gösterildiği gibi seçelim.



Şekil 6.1. Birinci çeyrek düzlem için örnek kestirim modeli

Burada

$$\begin{aligned} ((k_1, k_2) - 0) &= (k_1, k_2) \\ ((k_1, k_2) - 1) &= (k_1 - 1, k_2) \\ ((k_1, k_2) - 2) &= (k_1 - 1, k_2 - 1) \\ ((k_1, k_2) - 3) &= (k_1, k_2 - 1) \end{aligned} \quad (6.12)$$

olarak tanımlanır. Başlangıç koşulları ise aşağıdadır.

$$\mathbf{f}_0^{(0)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_0^{(0)}(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Bu başlangıç koşullarını kullanarak, birinci adıma geçilebilir.

1.Adım :

Dördüncü bölümde (4.20) matris bağıntısı ile gösterilen, tek-kanallı, ileri ve geri yöndeki katsayı ağırlık vektör bağıntılarını, iki-kanallı durum için vektörel şekilde şöyle gösterebiliriz:

$$\mathbf{f}_i^{(1)}(k_1, k_2) = \mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) - \Gamma_i^{(1)\top} \mathbf{b}_{i+1}^{(0)}(k_1, k_2) \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.14)$$

$$\mathbf{b}_{i+1}^{(1)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_{i+1}^{(0)}(k_1, k_2) - \Gamma_{b_{i+1}}^{(1)} \mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.15)$$

Bu ifadeler, daha toplu biçimde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(1)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_{i+1}^{(1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Gamma_i^{(1)\top} \\ -\Gamma_{b_{i+1}}^{(1)} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) \\ \mathbf{b}_{i+1}^{(0)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradaki $\Gamma_{f_i}^{(1)}$ ve $\Gamma_{b_i}^{(1)}$ yansıma matrisleri belirlenmelidir. (6.8) ve (6.9) denklemlerinden

$$\Gamma_{f_i}^{(1)} = \mathbf{P}_{b_{i+1}}^{(0)-1} \Delta_i^{(0)T} \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.19)$$

$$\Gamma_{b_{i+1}}^{(1)} = \mathbf{P}_{f_i}^{(0)-1} \Delta_i^{(0)} \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.20)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{f_i}^{(0)} &= E[\mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) \mathbf{f}_i^{(0)T}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[y^2((k_1, k_2) - i)] & E[y((k_1, k_2) - i)u((k_1, k_2) - i)] \\ E[u((k_1, k_2) - i)y((k_1, k_2) - i)] & E[u^2((k_1, k_2) - i)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{b_i}^{(0)} &= E[\mathbf{b}_i^{(0)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_i^{(0)T}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[y^2((k_1, k_2) - j)] & E[y((k_1, k_2) - j)u((k_1, k_2) - j)] \\ E[u((k_1, k_2) - j)y((k_1, k_2) - j)] & E[u^2((k_1, k_2) - j)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.22)$$

olarak gösterilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(0)} &= E[\mathbf{f}_i^{(0)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_{i+1}^{(0)T}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[y((k_1, k_2) - i)y((k_1, k_2) - i - 1)] & E[y((k_1, k_2) - i)u((k_1, k_2) - i - 1)] \\ E[u((k_1, k_2) - i)y((k_1, k_2) - i - 1)] & E[u((k_1, k_2) - i)u((k_1, k_2) - i - 1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.23)$$

olarak yazılır. Özilişki ve karşı ilişkileri ise aşağıdaki gibi belirtilir.

$$R_{yy}(0,0) = E[y^2((k_1, k_2) - i)]$$

$$R_{uu}(0,0) = E[u^2((k_1, k_2) - j)]$$

$$R_{yu}(0,0) = E[y((k_1, k_2) - j)u((k_1, k_2) - j)]$$

$$R_{uy}(0,0) = E[y((k_1, k_2) - j)u((k_1, k_2) - j)] \quad (6.24)$$

Bu bağıntıları kullanılarak, ileri yönde yansıma matrisini

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_0}^{(1)} &= P_{b_1}^{(0)-1} \Delta_0^{(0)T} \\ &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{f_{10}b_{11}}^{(0)} & R_{f_{10}b_{21}}^{(0)} \\ R_{f_{20}b_{11}}^{(0)} & R_{f_{20}b_{21}}^{(0)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (6.25)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} R_{f_{10}b_{11}}^{(0)} &= E[f_{10}^{(0)}(k_1, k_2)b_{11}^{(0)}(k_1, k_2)] \\ &= E[y((k_1, k_2) - 0)y((k_1, k_2) - 1)] \\ &= E[y(k_1, k_2)y(k_1 - 1, k_2)] \\ &= R_{yy}(1,0) \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} R_{f_{20}b_{11}}^{(0)} &= E[f_{20}^{(0)}(k_1, k_2)b_{11}^{(0)}(k_1, k_2)] \\ &= E[u((k_1, k_2) - 0)y((k_1, k_2) - 1)] \\ &= E[u(k_1, k_2)y(k_1 - 1, k_2)] \\ &= R_{uy}(1,0) \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} R_{f_{10}b_{21}}^{(0)} &= E[f_{10}^{(0)}(k_1, k_2) b_{21}^{(0)}(k_1, k_2)] \\ &= E[y((k_1, k_2) - 0) u((k_1, k_2) - 1)] \\ &= E[y(k_1, k_2) u(k_1 - 1, k_2)] \\ &= R_{yu}(1, 0) \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} R_{f_{20}b_{21}}^{(0)} &= E[f_{20}^{(0)}(k_1, k_2) b_{21}^{(0)}(k_1, k_2)] \\ &= E[u((k_1, k_2) - 0) u((k_1, k_2) - 1)] \\ &= E[u(k_1, k_2) u(k_1 - 1, k_2)] \\ &= R_{uu}(1, 0) \end{aligned} \tag{6.29}$$

olup, aynı şekilde geri yönde yansıma katsayı matrisi de

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_1}^{(1)} &= P_{f_0}^{(0)-1} \Delta_0^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(1,0) & R_{yu}(1,0) \\ R_{uy}(1,0) & R_{uu}(1,0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.30}$$

bağıntısıyla verilebilir. Benzer şekilde,

$$\Gamma_{f_1}^{(1)} = P_{b_2}^{(0)-1} \Delta_1^{(0)T} \tag{6.31}$$

$$\Gamma_{b_2}^{(1)} = P_{f_1}^{(0)-1} \Delta_1^{(0)} \tag{6.32}$$

$$P_{f_1}^{(0)} = P_{b_2}^{(0)} = P_{f_0}^{(0)} = P_{b_1}^{(0)} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1^{(0)} &= E[\mathbf{f}_1^{(0)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_2^{(0)T}(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} E[y(k_1 - 1, k_2)y(k_1 - 1, k_2 - 1)] & E[y(k_1 - 1, k_2)u(k_1 - 1, k_2 - 1)] \\ E[u(k_1 - 1, k_2)y(k_1 - 1, k_2 - 1)] & E[u(k_1 - 1, k_2)u(k_1 - 1, k_2 - 1)] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0, 1) & R_{yu}(0, 1) \\ R_{uy}(0, 1) & R_{uu}(0, 1) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

ve

$$\Gamma_{f_2}^{(1)} = \mathbf{P}_{b_3}^{(0)-1} \Delta_2^{(0)T} \tag{6.35}$$

$$\Gamma_{b_3}^{(1)} = \mathbf{P}_{f_2}^{(0)-1} \Delta_2^{(0)} \tag{6.36}$$

$$\mathbf{P}_{b_3}^{(0)} = \mathbf{P}_{f_2}^{(0)} = \mathbf{P}_{f_0}^{(0)} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^{(0)} &= E[\mathbf{f}_2^{(0)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_3^{(0)T}(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} E[y(k_1 - 1, k_2 - 1)y(k_1, k_2 - 1)] & E[y(k_1 - 1, k_2 - 1)u(k_1, k_2 - 1)] \\ E[u(k_1 - 1, k_2 - 1)y(k_1, k_2 - 1)] & E[u(k_1 - 1, k_2 - 1)u(k_1, k_2 - 1)] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R_{yy}(1, 0) & R_{yu}(1, 0) \\ R_{uy}(1, 0) & R_{uu}(1, 0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

yansım matrisleri bulunarak, birinci adım için gerekli $\mathbf{f}_0^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{f}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{f}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)}$ ileri ve geri yöndeki katsayı ağırlık vektörleri bulunabilir.

2. Adım :

$$\mathbf{f}_i^{(2)}(k_1, k_2) = \mathbf{f}_i^{(1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{f_i}^{(2)T} \mathbf{b}_{i+2}^{(1)}(k_1, k_2) \quad i = 0, 1 \tag{6.39}$$

$$\mathbf{b}_{i+2}^{(2)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_{i+2}^{(1)}(k_1, k_2) - \Gamma_{b_{i+2}}^{(1)} \mathbf{f}_i^{(1)}(k_1, k_2) \quad i = 0, 1 \tag{6.40}$$

Bu adımda $f_0^{(1)}$, $b_2^{(2)}$, $f_1^{(2)}$, $b_3^{(2)}$ ileri ve geri yöndeki katsayı ağırlık vektörleri bulunmak istenir. Birinci adımda olduğu gibi aynı yol izlenerek aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\Gamma_{f_0}^{(2)} = P_{b_2}^{(1)-1} \Delta_0^{(1)\top}, \quad \Gamma_{f_1}^{(2)} = P_{b_3}^{(1)-1} \Delta_1^{(1)\top} \quad (6.41)$$

$$\Gamma_{b_2}^{(2)} = P_{f_0}^{(1)-1} \Delta_0^{(1)}, \quad \Gamma_{b_3}^{(2)} = P_{f_1}^{(1)-1} \Delta_1^{(1)} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} P_{f_i}^{(1)} &= E[f_i^{(1)}(k_1, k_2) f_i^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{1i}^{(1)2}(k_1, k_2)] & E[f_{1i}^{(1)}(k_1, k_2) f_{2i}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{2i}^{(1)}(k_1, k_2) f_{1i}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{2i}^{(1)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.43)$$

(6.43) bağıntısında $i=0$ ve $i=1$ yerleştirilerek aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned} P_{f_0}^{(1)} &= E[f_0^{(1)}(k_1, k_2) f_0^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{10}^{(1)2}(k_1, k_2)] & E[f_{10}^{(1)}(k_1, k_2) f_{20}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{20}^{(1)}(k_1, k_2) f_{10}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{20}^{(1)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.43a)$$

$$\begin{aligned} P_{f_1}^{(1)} &= E[f_1^{(1)}(k_1, k_2) f_1^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{11}^{(1)2}(k_1, k_2)] & E[f_{11}^{(1)}(k_1, k_2) f_{21}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{21}^{(1)}(k_1, k_2) f_{11}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{21}^{(1)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.43b)$$

$$\begin{aligned} P_{b_{i+2}}^{(1)} &= E[b_{i+2}^{(1)}(k_1, k_2) b_{i+2}^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[b_{1,i+2}^{(1)2}(k_1, k_2)] & E[b_{1,i+2}^{(1)}(k_1, k_2) b_{2,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[b_{2,i+2}^{(1)}(k_1, k_2) b_{1,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[b_{2,i+2}^{(1)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44)$$

(6.44) bağıntısında da $i=0$ ve $i=1$ yerleştirilerek aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{b_2}^{(1)} &= E[\mathbf{b}_2^{(1)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_2^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[b_{12}^{(1)^2}(k_1, k_2)] & E[b_{12}^{(1)}(k_1, k_2)b_{22}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[b_{22}^{(1)}(k_1, k_2)b_{12}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[b_{22}^{(1)^2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{b_3}^{(1)} &= E[\mathbf{b}_3^{(1)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_3^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[b_{13}^{(1)^2}(k_1, k_2)] & E[b_{12}^{(1)}(k_1, k_2)b_{22}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[b_{23}^{(1)}(k_1, k_2)b_{13}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[b_{23}^{(1)^2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.44b)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(1)} &= E[\mathbf{f}_i^{(1)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_{i+2}^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{11}^{(1)}(k_1, k_2)b_{1,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{11}^{(1)}(k_1, k_2)b_{2,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{21}^{(1)}(k_1, k_2)b_{1,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{21}^{(1)}(k_1, k_2)b_{2,i+2}^{(1)}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Aynı şekilde (6.45) bağıntısında da $i=0$ ve $i=1$ yerleştirilerek ikinci adıma ilişkin bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= E[\mathbf{f}_0^{(1)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_2^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{10}^{(1)}(k_1, k_2)b_{12}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{10}^{(1)}(k_1, k_2)b_{22}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{20}^{(1)}(k_1, k_2)b_{12}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{20}^{(1)}(k_1, k_2)b_{22}^{(1)}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.45a)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(1)} &= E[\mathbf{f}_1^{(1)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_3^{(1)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{11}^{(1)}(k_1, k_2)b_{13}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{11}^{(1)}(k_1, k_2)b_{23}^{(1)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{21}^{(1)}(k_1, k_2)b_{13}^{(1)}(k_1, k_2)] & E[f_{21}^{(1)}(k_1, k_2)b_{23}^{(1)}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.45b)$$

3. Adım :

$$\mathbf{f}_0^{(3)}(k_1, k_2) = \mathbf{f}_0^{(2)}(k_1, k_2) - \Gamma_{f_0}^{(3)\top} \mathbf{b}_3^{(2)}(k_1, k_2) \quad (6.46)$$

$$\mathbf{b}_3^{(3)}(k_1, k_2) = \mathbf{b}_3^{(2)}(k_1, k_2) - \Gamma_{b_3}^{(3)} \mathbf{f}_0^{(2)}(k_1, k_2) \quad (6.47)$$

Son adımda $\mathbf{f}_0^{(3)}, \mathbf{b}_3^{(3)}$ vektörleri bulunacaktır. Bunun için gerekli $\Gamma_{f_0}^{(3)}, \Gamma_{b_3}^{(3)}$ katsayı matrisleri, $\mathbf{P}_{f_0}^{(2)}, \mathbf{P}_{b_3}^{(2)}$ güç vektörleri ve $\Delta_0^{(2)}$ skaleri aşağıdaki bağıntılarda verilmiştir.

$$\Gamma_{f_0}^{(3)} = \mathbf{P}_{b_3}^{(2)-1} \Delta_0^{(2)\top} \quad (6.48)$$

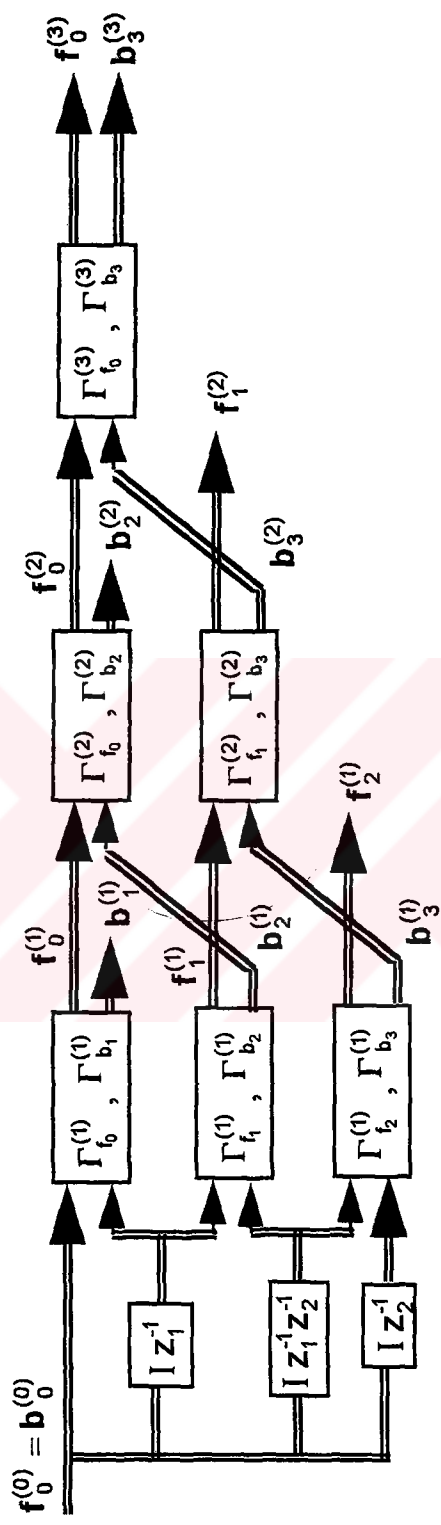
$$\Gamma_{b_3}^{(3)} = \mathbf{P}_{f_0}^{(2)-1} \Delta_0^{(2)} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{f_0}^{(2)} &= E[\mathbf{f}_0^{(2)}(k_1, k_2) \mathbf{f}_0^{(2)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{10}^{(2)2}(k_1, k_2)] & E[f_{10}^{(2)}(k_1, k_2) f_{20}^{(2)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{20}^{(2)}(k_1, k_2) f_{10}^{(2)}(k_1, k_2)] & E[f_{20}^{(2)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{b_3}^{(2)} &= E[\mathbf{b}_3^{(2)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_3^{(2)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[b_{13}^{(2)2}(k_1, k_2)] & E[b_{13}^{(2)}(k_1, k_2) b_{23}^{(2)}(k_1, k_2)] \\ E[b_{23}^{(2)}(k_1, k_2) b_{13}^{(2)}(k_1, k_2)] & E[b_{23}^{(2)2}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(2)} &= E[\mathbf{f}_0^{(2)}(k_1, k_2) \mathbf{b}_3^{(2)\top}(k_1, k_2)] \\ &= \begin{bmatrix} E[f_{10}^{(2)}(k_1, k_2) b_{13}^{(2)}(k_1, k_2)] & E[f_{10}^{(2)}(k_1, k_2) b_{23}^{(2)}(k_1, k_2)] \\ E[f_{20}^{(2)}(k_1, k_2) b_{13}^{(2)}(k_1, k_2)] & E[f_{20}^{(2)}(k_1, k_2) b_{23}^{(2)}(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Şekil 6.2. 'de yukarıda gerekli bağıntıları bulunan 3 destek noktalı iki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin analiz modeli verilmiştir.



Şekil 6.2. 3 destek noktalı iki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin analiz modeli

Birinci derece ileriye doğru ve geriye doğru tahmin hata vektörleri "düşey" ve "yatay" hata alanlarından da elde edilebilir. Bunun için sırasıyla ileriye ve geriye doğru birinci derece "yatay" katsayı ağırlık vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_h^{(1)}(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} - \Gamma_{f_h}^{(1)\top} \begin{bmatrix} y(k_1, k_2 - 1) \\ u(k_1, k_2 - 1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_h^{(1)}(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} y(k_1, k_2 - 1) \\ u(k_1, k_2 - 1) \end{bmatrix} - \Gamma_{b_h}^{(1)\top} \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.53)$$

ve "düşey" katsayı ağırlık vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v^{(1)}(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} - \Gamma_{f_v}^{(1)\top} \begin{bmatrix} y(k_1 - 1, k_2) \\ u(k_1 - 1, k_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_v^{(1)}(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} y(k_1 - 1, k_2) \\ u(k_1 - 1, k_2) \end{bmatrix} - \Gamma_{b_v}^{(1)\top} \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.54)$$

şeklinde gösterilip, yansıma matrisleri de "düşey" ve "yatay" ifadelerini belirtmek için yine aynı notasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_h}^{(1)} &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(0,1) & 0 \\ R_{yu}(0,1) & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{b_h}^{(1)} &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(0,1) & R_{yu}(0,1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{f_v}^{(1)} &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(1,0) & 0 \\ R_{yu}(1,0) & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_{b_v}^{(1)} &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yu}(0,0) \\ R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{yy}(1,0) & R_{yu}(1,0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.56)$$

bağıntılarıyla gösterilebilir.

Bu bağıntılarda, beyaz gürültünün $u(k_1, k_2)$ girişi olması durumunda

$$R_{uu}(1,0) = R(0,1) = 0 \quad (6.57a)$$

ve karşı ilişki özelliğinde de

$$R_{uy}(1,0) = R_{uy}(0,1) = 0 \quad (6.57b)$$

olarak alınmalıdır.

Bu yeni tanıma göre,

$$f_0^{(1)}(k_1, k_2) = f_v^{(1)}(k_1, k_2)$$

$$b_1^{(1)}(k_1, k_2) = b_v^{(1)}(k_1, k_2)$$

$$f_1^{(1)}(k_1, k_2) = f_h^{(1)}(k_1 - 1, k_2)$$

$$b_2^{(1)}(k_1, k_2) = b_h^{(1)}(k_1 - 1, k_2)$$

$$f_2^{(1)}(k_1, k_2) = b_v^{(1)}(k_1, k_2 - 1)$$

$$b_3^{(1)}(k_1, k_2) = f_v^{(1)}(k_1, k_2 - 1) \quad (6.58)$$

yazılabilir. Yani dereceye bağlı olmaksızın tüm birinci derece katsayı ağırlık vektörleri dikey ve yatay tahmin hata vektörlerinden elde edilebilir.

Eğer birinci çeyrek düzlem için iki-boyutlu ARMA model katsayılarını bulmak istiyorsak, bulunması gerekli yansıma katsayı matrisleri ve tahmin hata vektörleri şöyle gösterilebilir.

$$\{f_h^{(1)} ; b_h^{(1)}\} \Rightarrow \{\Gamma_{f_h}^{(1)} ; \Gamma_{b_h}^{(1)}\}$$

$$\{f_h^{(1)} ; b_h^{(1)}\} \Rightarrow \{\Gamma_{f_h}^{(1)} ; \Gamma_{b_h}^{(1)}\}$$

$$\begin{Bmatrix} f_0^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\{\Gamma_{f_0}^{(2)}\}}$$

$$\begin{Bmatrix} f_0^{(2)} \\ b_3^{(2)} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\{\Gamma_{f_0}^{(3)}\}} f_0^{(3)}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\{\Gamma_{b_3}^{(2)}\}}$$

(6.59)

İleriye ve geriye doğru tahmin hata özilişki matrisleri de özyinelemeli olarak bulunabilir.

$$P_{f_i}^{(0)} = P_{b_{i+1}}^{(0)} = \begin{bmatrix} E[y^2(k_1, k_2)] & E[y(k_1, k_2)u(k_1, k_2)] \\ E[u(k_1, k_2)y(k_1, k_2)] & E[u^2(k_1, k_2)] \end{bmatrix} \quad i=0,1,2 \text{ için (6.60)}$$

$$P_{f_i}^{(n+1)} = P_{f_i}^{(n)} \left[I - \Gamma_{b_{i+1}}^{(n+1)} \Gamma_{f_i}^{(n+1)} \right]$$

$$P_{b_{i+1}}^{(n+1)} = P_{b_{i+1}}^{(n)} \left[I - \Gamma_{f_i}^{(n+1)} \Gamma_{b_{i+1}}^{(n+1)} \right]$$

(6.61)

a₀ Katsayısının Bulunması :

Beşinci bölümde de açıklandığı gibi, doğrusal, zamanla değişen, (N,M) dereceli nedensel bir ARMA filtresi, $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-N}$ önceki çıkışlarıyla, $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-(M-1)}$ önceki girişlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilir. $y'(k_1, k_2)$ ARMA modelinin çıkış öngörüsü olmak üzere model hatasını

$$e_0 = y(k_1, k_2) - y'(k_1, k_2) \quad (6.62)$$

şeklinde ifade edebilirsiniz. Verilen örnek için, ifade de geçen $y'(k_1, k_2)$ öngörüsünü

$$\begin{aligned}
 y'(k_1, k_2) &= \sum_{i=0}^3 a_i u((k_1, k_2) - i) + \sum_{i=1}^3 b_i y((k_1, k_2) - i) \\
 &= \begin{bmatrix} y^T(k_1, k_2) & u^T(k_1, k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

olarak gösterebiliriz. (6.63) bağıntısında geçen terimleri örnek için daha açık bir şekilde yazarsak

$$y(k_1, k_2) = [y(k_1 - 1, k_2) \ y(k_1 - 1, k_2 - 1) \ y(k_1, k_2 - 1)]^T$$

$$u(k_1, k_2) = [y(k_1, k_2) \ y(k_1 - 1, k_2) \ y(k_1 - 1, k_2 - 1) \ y(k_1, k_2 - 1)]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$$

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$$

(6.64)

ifadelerini elde ederiz. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ parametre vektörlerine göre $e_0(k_1, k_2)$ minimize edilerek

$$\begin{bmatrix} R_{yy} & R_{yu} \\ R_{uy} & R_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yy} \\ r_{uy} \end{bmatrix}$$

(6.65)

bulunur. Minimum ARMA hatası $e_0(k_1, k_2)$ 'nin karesel ortalaması ise

$$E_{\min} = R_{yy}(0,0) - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{opt}}^T & \mathbf{a}_{\text{opt}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yy} \\ r_{uy} \end{bmatrix}$$

(6.66)

olur. (6.65) bağıntısında yer alan matrisleri açık bir şekilde aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{yy} &= E[\mathbf{y}(k_1, k_2) \mathbf{y}^T(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} R_{yy}(0,0) & R_{yy}(0,1) & R_{yy}(-1,1) \\ R_{yy}(0,-1) & R_{yy}(0,0) & R_{yy}(-1,0) \\ R_{yy}(1,-1) & R_{yy}(1,0) & R_{yy}(0,0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.67a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{uu} &= E[\mathbf{u}(k_1, k_2) \mathbf{u}^T(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} R_{uu}(0,0) & R_{uu}(1,0) & R_{uu}(1,1) & R_{uu}(0,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{uu}(-1,0) & R_{uu}(0,0) & R_{uu}(0,1) & R_{uu}(-1,1) \\ R_{uu}(-1,-1) & R_{uu}(0,-1) & R_{uu}(0,0) & R_{uu}(1,0) \\ R_{uu}(0,-1) & R_{uu}(1,-1) & R_{uu}(-1,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.67b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{uy} &= E[\mathbf{u}(k_1, k_2) \mathbf{y}^T(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} R_{uy}(1,0) & R_{uy}(1,1) & R_{uu}(0,1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{uy}(0,0) & R_{uy}(0,1) & R_{uu}(-1,1) \\ R_{uy}(0,-1) & R_{uy}(0,0) & R_{uu}(-1,0) \\ R_{uy}(1,-1) & R_{uy}(1,0) & R_{uu}(0,0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.67c}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{yu} &= E[\mathbf{y}(k_1, k_2) \mathbf{u}^T(k_1, k_2)] \\
 &= \begin{bmatrix} R_{yu}(-1,0) & R_{uy}(0,0) & R_{uu}(0,1) & R(-1,1) \\ R_{yu}(-1,-1) & R_{uy}(0,-1) & R_{uu}(0,0) & R(-1,0) \\ R_{yu}(0,-1) & R_{uy}(1,-1) & R_{uu}(1,0) & R(0,0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.67d}$$

$$r_{yy} = E[y(k_1, k_2) y(k_1, k_2)]$$

$$= \begin{bmatrix} R_{yy}(-1, 0) \\ R_{yy}(-1, -1) \\ R_{yy}(0, -1) \end{bmatrix}$$

(6.67e)

$$r_{uy} = E[u(k_1, k_2) y(k_1, k_2)]$$

$$= \begin{bmatrix} R_{uy}(0, 0) \\ R_{uy}(-1, 0) \\ R_{uy}(-1, -1) \\ R_{uy}(0, -1) \end{bmatrix}$$

(6.67f)

(6.65) bağıntısındaki 7x7 ilinti matrisi ne Toeplitz ne de simetriktir. Burada a_0 tanımına ilişkin 4. satır ve 4. sütun elemanları dikkate alınarak

$$\begin{bmatrix} R_{yy} & R_{yu^+} \\ R_{u^+y} & R_{u^+u^+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yy} \\ r_{u^+y} \end{bmatrix} - a_0 \begin{bmatrix} r_{yu} \\ r_{u^+u} \end{bmatrix}$$

(6.68)

yazılabilir. (6.68) bağıntısında geçen ifadeler aşağıda tanımlanmıştır.

$$\mathbf{u}^+ = [u(k_1 - 1, k_2) \quad u(k_1 - 1, k_2 - 1) \quad u(k_1, k_2 - 1)]$$

(6.69)

$$r_{u^+y} = \begin{bmatrix} R_{uy}(-1, 0) \\ R_{uy}(-1, -1) \\ R_{uy}(0, -1) \end{bmatrix} \quad r_{u^+u} = \begin{bmatrix} R_{uu}(-1, 0) \\ R_{uu}(-1, -1) \\ R_{uu}(0, -1) \end{bmatrix} \quad r_{yu} = \begin{bmatrix} R_{yu}(-1, 0) \\ R_{yu}(-1, -1) \\ R_{yu}(0, -1) \end{bmatrix}$$

(6.70)

$\mathbf{b}$ ve α katsayılarını çözebilmek için (6.68) denklemini

$$\begin{bmatrix} R_{yy} & R_{yu^+} \\ R_{u^+y} & R_{u^+u^+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yy} & r_{yu} \\ r_{u^+y} & r_{u^+u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \end{bmatrix}$$

(6.71)

biçiminde yazabiliriz. Diğer taraftan, iki-boyutlu iki-kanallı AR model katsayıları

$$\begin{bmatrix} R_{yy} & R_{yu^+} \\ R_{u^+y} & R_{u^+u^+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yy} & r_{yu} \\ r_{u^+y} & r_{u^+u} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

ifadesinden bulunabilir. Buradaki d_{ij} 'ler

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y'(k_1, k_2) \\ u'(k_1, k_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u^+ \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} d_{11}(i) & d_{21}(i) \\ d_{12}(i) & d_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y((k_1, k_2) - i) \\ u((k_1, k_2) - i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.73)$$

olarak tanımlanmaktadır.

O halde, tahmin-hatası

$$\begin{aligned} \underline{e}(k_1, k_2) &= \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y'(k_1, k_2) \\ u'(k_1, k_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u(k_1, k_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y(k_1, k_2) \\ u^+(k_1, k_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.74)$$

şeklinde yazılabilir. Ψ katsayı vektörü

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

biçiminde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T(k_1, k_2) \Psi &= y(k_1, k_2) - a_0 u(k_1, k_2) \\ &- \begin{bmatrix} y^T(k_1, k_2) & u^T(k_1, k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \\ &= e_0(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (6.76)$$

olduğu görülecektir. $e_0(k_1, k_2)$, iki-boyutlu ARMA modelinin tahmin hatası olarak tanımlanmıştır. Ayrıca bu ARMA modeli hatasının karesel ortalaması da

$$\begin{aligned} E[e_0^2(k_1, k_2)] &= \Psi^T E[\mathbf{e}(k_1, k_2) \mathbf{e}^T(k_1, k_2)] \Psi \\ &= \Psi^T \mathbf{P} \Psi \end{aligned} \quad (6.77)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{P}$, iki-kanallı AR modelinin ileriye doğru tahmin hata kovaryans matrisini göstermektedir. $\Psi^T \mathbf{P} \Psi$ ifadesinin a_0 'a göre minimizasyonu ile

$$a_0 = \frac{E[e_u(k_1, k_2) e_y(k_1, k_2)]}{E[e_u^2(k_1, k_2)]} \quad (6.79)$$

elde edilir.

b ve α Katsayı Vektörlerinin Belirlenmesi :

(6.71) ve (6.72) denklemlerinden iki-kanallı AR modelinin d_{ij} katsayıları belirlenir. Bulunan değerler

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

denkleminde yerlerine yerleştirilerek $\mathbf{b}$ ve α katsayı vektörleri bulunabilir.

6.2 Sentez Modeli

Çalışmanın bu bölümünde iki-boyutlu iki-kanallı AR modeli kullanılarak, ARMA sentez modelinin elde edilmesi gösterilecektir. Bu amaçla $e_y(k_1, k_2)$ için bir giriş gereklidir. Üzerinde çalıştığımız örnek için, $e_y(k_1, k_2) = f_{10}^{(3)}(k_1, k_2)$ olur. Benzer şekilde, $e_u(k_1, k_2) = f_{20}^{(3)}(k_1, k_2)$ 'dir.

$$\begin{aligned} e_n(k_1, k_2) &= \mathbf{e}(k_1, k_2)^T \Psi \\ &= \begin{bmatrix} e_y(k_1, k_2) & e_u(k_1, k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \end{bmatrix} \\ &= e_y(k_1, k_2) - a_0 e_u(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (6.81)$$

(6.81) ifadesinde, eğer ARMA modeli doğru bir gösterilim ise,

$$e_y(k_1, k_2) \cong a_0 e_u(k_1, k_2) \quad (6.82)$$

yazılabilir. Yani, verilen örnek için $f_{10}^{(3)}(k_1, k_2)$ girişi olarak,

$$f_{10}^{(3)}(k_1, k_2) \cong a_0 f_{20}^{(3)}(k_1, k_2) \quad (6.83)$$

bulunur.

Başlangıçtaki analiz modeli "Lattice" denkleminde aşağıdaki düzenleme yapılırken, diğer tüm model ifadesi aynı kalmaktadır.

$$\begin{bmatrix} f_{10}^{(n-1)}(k_1, k_2) \\ f_{20}^{(n)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10}^{(n)}(k_1, k_2) \\ f_{20}^{(n-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\gamma_{f_0}^{(n)}(1,1) & -\gamma_{f_0}^{(n)}(1,2) \\ -\gamma_{f_0}^{(n)}(2,1) & -\gamma_{f_0}^{(n)}(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10}^{(n)}(k_1, k_2) \\ b_{20}^{(n-1)}(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

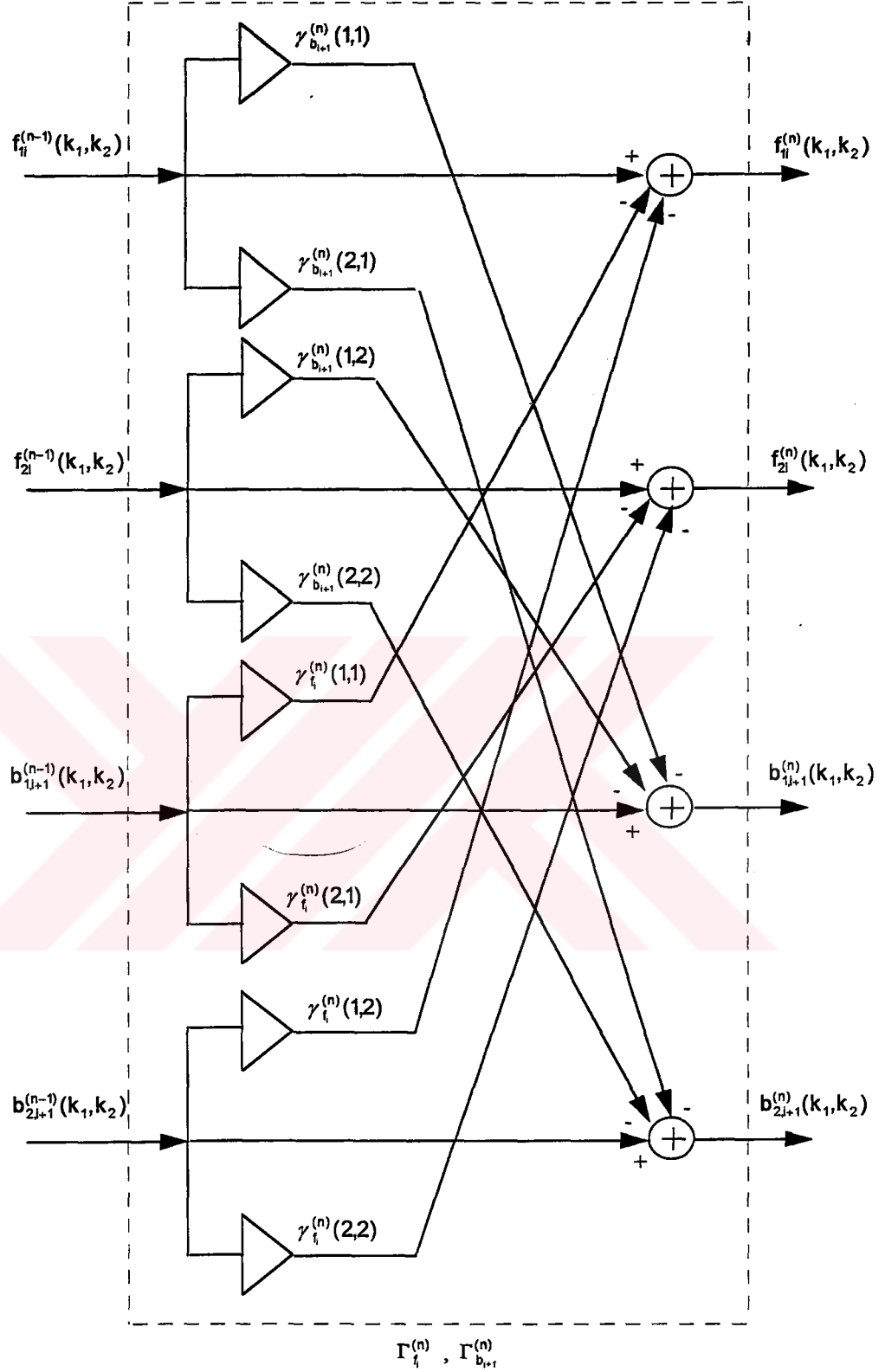
Burada $n = 3, 2, 1$ olup, $f_{10}^{(n)}(k_1, k_2) \cong a_0 f_{20}^{(n)}(k_1, k_2)$ 'dir.

(6.84) denkleminin analiz modelinde gerçekleştirilmesi için sadece iki kafes katsayısının $\gamma_{f_0}^{(n)}(1,1)$ ve $\gamma_{f_0}^{(n)}(1,2)$ 'nin işareti değiştirilirken, $f_{10}^{(n)}(k_1, k_2)$ 'nin akış yönü değiştirilir. Bu durumda

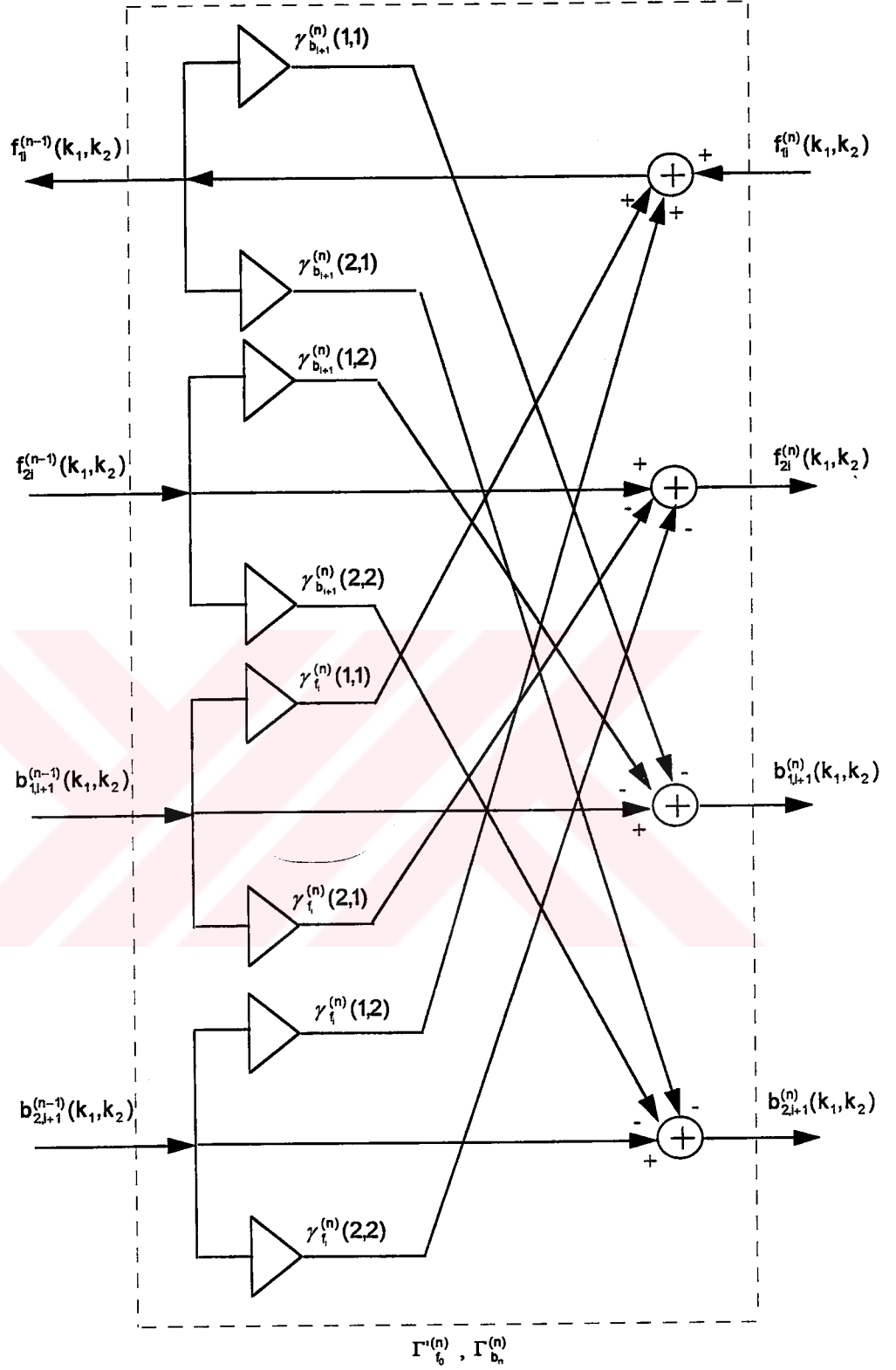
$$\Gamma_{f_0}^{(n)} = \begin{bmatrix} -\gamma_{f_0}^{(n)}(1,1) & -\gamma_{f_0}^{(n)}(1,2) \\ \gamma_{f_0}^{(n)}(2,1) & \gamma_{f_0}^{(n)}(2,2) \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

olarak tanımlanır ve Şekil 6.3, 6.4 ve 6.5 'de gösterilen sentez modeli bulunur.

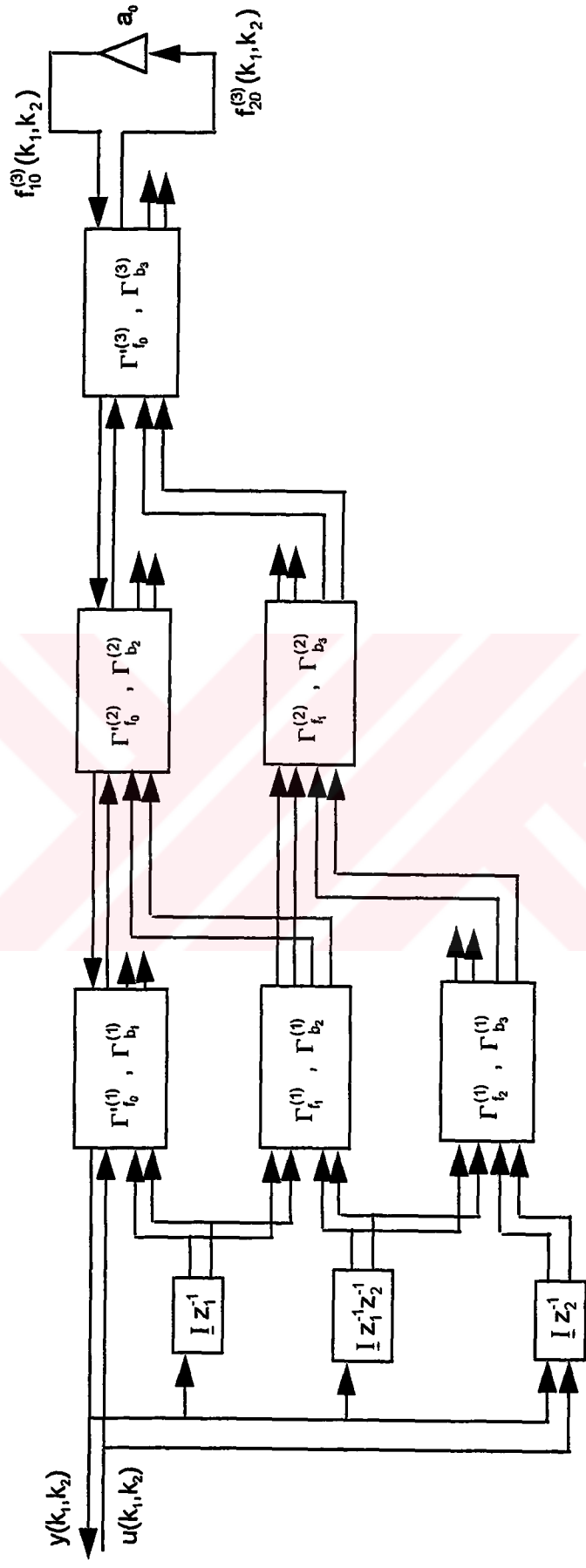




Şekil 6.3. İki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin analiz ve sentez modeline ait
n. derece kafes modülü



Şekil 6.4. İki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin sentez modeline ait n.derece kafes modülü



Şekil 6.5. 3 destek noktalı iki-boyutlu ARMA kafes süzgecinin sentez modeli

SONUÇLAR

İki-boyutlu dikgen kafes süzgeçleri, bir-boyutlu kafes parametre teorisinin doğal bir uzantısı olarak geliştirilmiştir. Kafes yapısının dik olması, gereksiz bilgiyi ortadan kaldırmakta ve optimum süzgeç olma avantajını doğurmaktadır. Bu nedenle, uyarlamalı uygulamalar için yakınsama hızı açısından tercih edilirler.

Kayran [29] rastgele alanların özbağımlı (AR) modellenmesi için iki-boyutlu dik kafes yapılarını sunmuştur. Elde edilen sonuçlar, herhangi iki-boyutlu genişletilmiş normal denklemden, kafes parametrelerini kullanarak, öngörü yanılğı süzgeç katsayılarını hesaplamak için Levinson tipi algoritmanın tam çözümünü ortaya koymaktadır.

Bu çalışmada Kayran [29] tarafından özbağımlı alanlar için geliştirilen yöntemden faydalanılarak, özbağımlı-kayan ortalımalı (ARMA) alanların modellenmesine çalışılmıştır.

Yöntemin birinci, ikinci ve üçüncü derecelerden çeyrek düzlem ve simetrik olmayan yarı düzlem için doğruluğunun gösterilmesi başta olmak üzere; ayrıca, çalışmanın beşinci bölümünde verilen bir-boyutlu özbağımlı-kayan ortalımalı modellerin Karlsson 'un [33] izdüşüm yöntemi ile modellenmesinin iki-boyutlu alanlara uygulanması konuları araştırmaya açık konulardır.

KAYNAKLAR

- [1] HAYKIN, S., Adaptive Filter Theory, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1986.
- [2] LENK, P.J. ve PARKER, S. R., "Orthogonal 2-D Lattice Filters", 19th Asimolar Conf. on Circuits, Systems and Computers, pp. 278-282, Pasific Grove, CA, Nov. 1985.
- [3] MARZETTA, T. L., "2-D Lineer Prediction : Autocorrelation Arrays, Minimum-phase Prediction Error Filters and Reflection Coefficient Arrays", IEEE Trans. Acoust., speech Signal Processing., Vol. ASSP-28, pp. 725-733, Dec. 1980.
- [4] BOSE, N. K., "Multidimensional Digital Signal Processing : Problems, Progress, and Future Scopes" Proc. IEEE, vol. 78, pp. 590-597, April 1990.
- [5] ———, "The Design of 2-D Recursive Filters in the 2-D Reflection Coefficient Domain", Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing, pp. 673-676, Washington, DC, April 1979.
- [6] POEHLER, P. ve CHOI, J., "Linear Predictive Coding of Imagery for Data Communications", Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing, pp. 1240-1243, Boston, MA, April 1983.
- [7] PARKER, S. R. ve KAYRAN, A. H., "Lattice Parameter Autoregressive Modelling of 2-D Fields, Part I : The Quarter-plane Case", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-32, pp. 872-885, Aug. 1984.
- [8] LENK, P.J. ve PARKER S. R., "Schur and Levinson Recursions for 2-D Lattice Filters", Proc. Int. Symp. on Circuits and Systems, pp. 92-95, San Jose CA, May 1986.
- [9] LEV-ARI, H. ve PARKER, S. R., "Lattice Filter Models of 2-D Fields", Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Proc., pp. 1817-1820, Tampa, Florida, March 1985.

- [10] LEV-ARI, H. ve PARKER, S. R., "Stable and Efficient 2-D Lattice Filters", Proc. IEEE Symp. on Circuit and Systems, pp. 659-698, San Jose, CA, May 1986.
- [11] NAM, M. N. ve O'NEILL W. D., "Adaptive Linear Predictive Coding of Time-varying Images Using Multidimensional Recursive Least Squares Ladder Filters", IEEE Journal on Selected Areas in Comm., Vol. SAC-5, pp. 1115-1126, Aug. 1987.
- [12] WATANABE, T., TEGUCHI, A. ve HAMADA, N., "On Consideration of Modified 2-D Autoregressive Lattice Filter and Its Application to Spectral Analysis", Proc. JTC-CSCC, pp. 353-358, 1988.
- [13] KWAN, H. K., "2-D Lattice Modelling for Image Compression", Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, pp. 1105-1106, Kyoto, Japan, June 1985.
- [14] KWAN, H. K., "Image Data Compression Using 2-D Lattice Predictors", Electronic Letters, Vol. 20, pp. 994-995, 1986.
- [15] HSIEH, C. H., LU, P. C. ve LIOU W. G., "Adaptive Predictive Image Coding Local Characteristics", IEEE Proc., Part I, Vol. 136, pp. 385-390, Dec. 1989.
- [16] KAYRAN, A. H., PARKER, S. R. ve KLICH, D. J., "2-D Spectral Estimation with Autoregressive Lattice Parameters", Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing, pp. 689-692, San Diego, CA, March 1984.
- [17] KAYRAN, A. H., "Design of 2-D Recursive Filters with Asymmetric Half-plane Lattice Modelling", IEEE Proceedings, Part G, Vol. 137, pp. 427-438, Dec. 1989.
- [18] KWAN, H. K. ve LUI, Y. C., "3-D Lattice Predictive Modelling of Random Fields", Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing, pp. 1057-1060, Tokyo, Japan, April 1986.
- [19] YOULAL, H., JANATI-I, M., ve NAJIM, M., "2-D Joint Process Lattice for Adaptive Restoration of Images", IEEE Trans. Processing, pp. 366-378, July 1992.
- [20] ———, "A 2-D Adaptive Lattice Predictor for Image Compression", Proc. Int. Conf. on Digital Signal Processing, pp. 373-378, Florence, Italy, Sept. 1991.

- [21] ERTÜZÜN, A., KAYRAN, A. H., PANAYIRCI, E., "Entropy Relations of 2-D Lattice Filters", Proc. Bilcon. Conf. on Control and Signal Processing, pp. 1337-1343, Ankara, Turkey, July 1990.
- [22] ERTÜZÜN, A., Modelling of Autoregressive Fields by 2-D Lattice Filters and Their Entropy Relations, Ph.D thesis, Boğaziçi University, İstanbul, 1989.
- [23] THERRIEN, C. W., "Relation Between 2-D and Multichannel Linear Prediction", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., Vol. ASSP-29, pp. 454-456, June 1981.
- [24] THERRIEN, C. W. ve EL-SHAER, H. T., "Multichannel 2-D AR Spectrum Estimates", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-37, pp. 1798-1800, Nov. 1989.
- [25] ———, "A Direct Algorithm for Computing 2-D Power Spectrum Estimates", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-37, pp. 1795-1798, Nov. 1989.
- [26] LENK, P.J. ve PARKER S. R., "Orthogonal 2-D Lattice Filters", 19th Asimolar Conf. on Circuits, Systems and Computers, pp. 278-282, Pasific Grove, CA, Nov. 1985.
- [27] LENK, P. J., Tensor Formulations for the Modelling of Discrete-time Non-linear and Multidimensional Systems, Ph.D dissertation, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1985.
- [28] LIU, X., BAYLOU, P. ve NAJIM, M., "A New 2-D Lattice Recursive Least Squares Algorithm", Proceedings of the IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-35, pp. 543-552, Apr. 1987.
- [29] KAYRAN, A. H., "2-D Orthogonal Lattice Structures for Autoregressive Modeling of Random Fields", accepted for publication in IEEE Trans. on Signal Processing, April 1996.
- [30] TÜRE, S., Rastgele Alanların Özbağlanımlı Modellenmesi İçin Dik Kafes Süzgeci ve Spektrum Kestirimine Uygulanması, Y. Lisans Tezi, İTÜ, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Aytaç Murat BAYBOL, 1968 yılında İstanbul 'da doğmuştur. İlkokuldan sonra, 1979-1980 döneminde İstanbul Lisesi sınavlarını kazanıp, ortaokul ve lise öğrenimini bu okulda tamamlamıştır. 1986 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Bölümü 'ne girmiştir. 1990 yılında lisans öğrenimini tamamlamıştır. Mezuniyet sonrası ise, 1991 yılı Ocak ayında, Pamukbank Bilgi İşlem Bölümü, Ofis Otomasyon Bölümü 'nde Sistem Analisti olarak çalışmaya başlamıştır. Yine aynı yıl, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Bölümü 'nde yüksek lisans öğrenimine kayıt olmuştur. Bu öğrenimine devam ederken, 1994 yılı Ocak ayı itibariyle, halen de çalışmakta olduğu ITD İletişim Teknoloji Danışmanlık A.Ş. firmasında Proje Yöneticisi olarak çalışmaya başlamıştır. Şu an, adı geçen firmanın Polonya 'da kurmuş olduğu ITD Poland firmasında görev yapmaktadır. Almanca ve İngilizce bilmektedir.