

152291

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜŞEY GİRİŞİMLİ BASINÇ TESTLERİNİN
MODELLENMESİ VE PARAMETRE TAHMİNİ**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. İhsan Murat GÖK
(505992204)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 2 Haziran 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 2004**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mustafa Onur *M. Onur*
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Abdurrahman SATMAN (İ.T.Ü.) *D. Atan*
Prof.Dr. Erkin NASUF (İ.T.Ü.) *Erkin Nasuf*
Prof.Dr. Fevzi GÜMRAH (O.D.T.Ü.) *Fevzi Gümrah*
Dr. Fikri KUCHUK *Fikri Kuchuk*

Haziran 2004

ÖNSÖZ

Düşey girişim testlerinin, yatay ve düşey geçirgenliklerin beraber tahminine olanak sağlamasından dolayı, son yıllarda kullanımı oldukça yaygın hale gelmiştir. Rezervuarda geçirgenlik, gözeneklilik gibi kayaç özellikleri uzaysal dağılım gösterdiğinden dolayı heterojenliğin çözülmesi rezervuar yönetimi açısından oldukça önemlidir. Bu çalışmada, düşey girişim testleri sayısal simülatör yardımıyla modellenmiş ve düşey girişim testlerinden elde edilen basınç testleri ile kayaç özelliklerine ait heterojenliğin formasyonun hangi bölgelerinde çözülebileceği araştırılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde gerekli maddi katkı TÜBİTAK kurumu ve İTÜ Araştırma Fonu tarafından sağlanmıştır. Bu desteklerinden dolayı TÜBİTAK kurumuna ve İTÜ Araştırma Fonuna teşekkürü borç bilmekteyim. Ayrıca, çalışmada geliştirilen r - θ - z tek fazlı akış simülatörünün doğruluğunun kontrol edilmesinde Schlumberger'den ücretsiz temin edilen ECLIPSE 100 ticari yazılım programından yararlanılmıştır. Bu programın elde edilmesindeki yardımlarından dolayı Schlumberger'den Peter S. Hegeman'a ve Schlumberger şirketine ayrıca teşekkür ederim. Schlumberger'den Dr. Fikri J. Kuchuk çalışmada kullanılan saha verisini vermiştir. Kendisine teşekkürü bir borç bilmekteyim.

Bu çalışma sırasında beni her konuda destekleyen bölüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Değerli önerileri ile bu tezin daha anlaşılır olmasına katkı sağlayan jüri üyeleri Prof. Dr. Abdurrahman Satman, Prof. Dr. Erkin Nasuf, Prof. Dr. Fevzi Gümrah ve Dr. Fikri J. Kuchuk'a teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında beni maddi ve manevi olarak destekleyen, sevgili annem Dürdane Gök ve eşim Filiz Gök'e sonsuz teşekkür ederim. Onların sevgisi ve desteği olmaksızın bu çalışma tamamlanamazdı.

Bu konuyu bana öneren, her konuda bana yardım eden ve yönlendiren örnek bilim adamı danışmanım Prof. Dr. Mustafa Onur'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hem yüksek lisans hem de doktora çalışması sırasında kendisiyle çalıştığım için kendimi çok şanslı hissediyorum.

Mayıs 2004

İhsan Murat Gök

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	xvi
ÖZET	xix
SUMMARY	xxii
1. GİRİŞ	1
2. 3-BOYUTLU r - θ - z SAYISAL SİMÜLATÖRÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ ...	8
2.1 Diffüzyon Denklemi ve Başlangıç-Sınır Değer Problemi	9
2.2 Sonlu Farklar Gridlerinin Oluşturulması	23
2.3 Sonlu Farklar Denklem Takımlarının ve Matris Probleminin Çözümlemesi	28
2.4 Geliştirilen r - θ - z Sayısal Simülatörünün Doğruluğunun Sınanması	35
2.4.1 İki tabakalı çiftli-paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği	35
2.4.2 Üç tabakalı çiftli-paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği	39
2.4.3 Tek tabakalı dört problemlilik düşey girişim testi örneği	44
2.4.4 Tek tabakalı heterojen bir sistemde çiftli-paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği	48
3. DOĞRUSAL OLMAYAN PARAMETRE KESTİRİMİ	54
3.1 Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametre Kestirimi	54
3.2 Bayes Olasılık Teoremi Üzerine Kurulu Parametre Kestirimi	58
3.3 Parametre Sınırlandırma Algoritmaları	74
4. DUYARLILIK KATSAYILARININ HESAPLANMASI	78
4.1 Sonlu Fark Yöntemi	79

4.2 Gradient Simülatör Yöntemi	81
4.3 Adjoint Simülatör Yöntemi	82
4.4. Farklı Duyarlılık Katsayı Hesaplama Yöntemleri İçin Türetilen Denklemlerin Doğruluğunun Sınanması ve Kıyaslanması	85
4.4.1 Tek tabakalı homojen-anizotrop sistem	85
4.4.2 İki tabakalı sistem	102
4.4.3 Heterojen sistem	116
5. SENTETİK VE SAHA VERİSİ İLE YAPILAN UYGULAMALAR	137
5.1 Sentetik Düşey Girişim Testi Uygulamaları	138
5.1.1 Sentetik örnek uygulama 1	138
5.1.2 Sentetik örnek uygulama 2	147
5.1.3 Sentetik örnek uygulama 3	155
5.1.4 Sentetik örnek uygulama 4	169
5.2 Saha Verisi Uygulaması	174
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	181
KAYNAKLAR	186
EK - A	191
EK - B	210
ÖZGEÇMİŞ	260

TABLO LİSTESİ

	<u>sayfa</u>
Tablo 2.1 : Şekil 2.10'da verilen iki tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.	36
Tablo 2.2 : Şekil 2.14'de verilen üç tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.	40
Tablo 2.3 : Şekil 2.19'da verilen tek tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.	44
Tablo 2.4 : Heterojen gözeneklilik ve geçirgenlik sahalarının türetilmesinde kullanılan değişkenlere ait değerler.	51
Tablo 2.5 : Şekil 2.26'da verilen tek tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.	52
Tablo 4.1 : Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, tek tabakalı örnek uygulama.	87
Tablo 4.2 : Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, iki tabakalı örnek uygulama.	103
Tablo 4.3 : Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, heterojen örnek uygulama.	117
Tablo 5.1 : Tek tabakalı sentetik örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.	140
Tablo 5.2 : Sayısal simülatör üzerine kurulu regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.	144
Tablo 5.3 : Analitik çözümlemeyi temel alan doğrusal olmayan regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.	145
Tablo 5.4 : İki tabakalı sentetik örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.	149
Tablo 5.5 : Sayısal simülatör üzerine kurulu regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.	153
Tablo 5.6 : Analitik çözümleri temel alan doğrusal olmayan regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.	154

Tablo 5.7 : Tek tabakalı heterojen örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.	156
Tablo 5.8 : Tek tabakalı, kompozit sentetik uygulama için kayaç ve akışkan özellikleri.	171
Tablo 5.9 : Parametre tahmin sonuçları.	173
Tablo 5.10 : Saha verisi için parametre değerleri.	175
Tablo 5.11 : Düşey girişim testi verileri için parametre tahmin sonuçları (saha örneği).	180



ŞEKİL LİSTESİ

sayfa

Şekil 1.1	: Tabakalı bir rezervuarda çift pakrlı ve iki gözlem problu düşey girişim testine ait şema.	3
Şekil 1.2	: Tabakalı bir rezervuarda üretim problu, iki gözlem problu düşey girişim testine ait şema.	3
Şekil 2.1	: r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde düşey bir kuyuya kısmi bir aralıktan üretim yapılan ve tek düşey gözlem noktası (probu) olan teste ait gösterim.	10
Şekil 2.2	: r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde üç problu (üretim, yatay ve düşey gözlem) bir düşey girişim testine ait gösterim.	10
Şekil 2.3	: r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde düşey bir kuyuya iki farklı kısmi aralıktan üretim yapılan ve tek düşey gözlem noktası (probu) olan bir teste ait gösterim.	11
Şekil 2.4	: Yarım-sistem rezervuar, r - θ düzleminde bir gösterim.	17
Şekil 2.5	: MacDonald-Coats yöntemine göre oluşturulan grid sisteminin gösterimi.	24
Şekil 2.6	: r - z eksenlerinde oluşturulan grid sisteminin şeması.	27
Şekil 2.7	: r - θ eksenlerinde oluşturulan gridlerin şeması.	27
Şekil 2.8	: İki tabakalı bir rezervuar örneğinde oluşturulan grid sistemi ve gridbloklarının sıralanmasının gösterimi.	31
Şekil 2.9	: Yapılan örnek uygulama için oluşan katsayı matrisi A	35
Şekil 2.10	: 2 tabakalı bir sistemde, çift pakrlı ve iki gözlem problu düşey girişim testine ait şema.	37
Şekil 2.11	: Pakler aralığında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevi zamanla değişimi.	37
Şekil 2.12	: Birinci gözlem noktasında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	38

Şekil 2.13 :	İkinci gözlem noktasında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	38
Şekil 2.14 :	3 tabakalı bir sistemde çift pakierlı ve iki gözlem problu düşey girişim testine ait şematığın gösterimi.	41
Şekil 2.15 :	Paker aralığında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	42
Şekil 2.16 :	Birinci gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	42
Şekil 2.17 :	İkinci gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	43
Şekil 2.18 :	Blok merkezli ve nokta merkezli grid sistemlerinde paker aralığında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevi zaman davranışı.	43
Şekil 2.19 :	Tek tabakalı bir sistemde dört problu düşey girişim testi gösterimi.	45
Şekil 2.20 :	Şekil 2.19'daki testi modellemek için $r-\theta$ düzleminde kullanılan grid sisteminin gösterimi.	46
Şekil 2.21 :	Şekil 2.19'daki testi modellemek için $r-z$ düzleminde kullanılan grid sisteminin gösterimi.	47
Şekil 2.22 :	Üretim probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi (çoklu prob test örneği).	48
Şekil 2.23 :	Yatay gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	49
Şekil 2.24 :	Birinci düşey gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	49
Şekil 2.25 :	İkinci düşey gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.	50
Şekil 2.26 :	Tek tabakalı bir sistemde çift pakierlı ve iki gözlem problu düşey girişim testi gösterimi.	51
Şekil 2.27 :	Türetilen heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik verilerinin çapraz grafiği.	52
Şekil 2.28 :	Gözeneklilik ve $\ln$ -geçirgenliğin r yönünde değişimi.	53
Şekil 2.29 :	Tek tabakalı heterojen bir sistem için bu çalışmada geliştirilen simülatör ile ticari ECLIPSE 100 simülatörü sonuçlarının kıyaslanması.	53

Şekil 3.1	: x - y Kartezyen sistemi üstüne kuyu merkez olacak şekilde oturtulmuş r - θ grid sistemi.	63
Şekil 3.2	: $\theta = 30^\circ$ sabit değeri (1. sektör) için r - z düzleminde k_h dağılımı, uzunluğa göre gösterim (sentetik uygulama).	64
Şekil 3.3	: $\theta = 30^\circ$ sabit değeri (1. sektör) için r - z düzleminde k_h dağılımı, gridbloklara göre gösterim (sentetik uygulama).	64
Şekil 3.4	: $z = 5$ ft sabit değerinde (üsten 1. tabaka için) r - θ düzleminde, k_h dağılımı (sentetik uygulama).	65
Şekil 3.5	: $z = 45$ ft sabit değerinde (5. tabaka için) r - θ düzleminde, $\ln k_h$ dağılımı (sentetik uygulama).	65
Şekil 4.1	: Duyarlılık katsayılarının sınanması için kullanılan tek tabaka düşey girişim test şeması.	86
Şekil 4.2	: Şekil 4.1’de verilen tek tabakalı sistem için simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basınç ve düşey gözlem noktası basınç değişim ve türevlerinin kıyaslanması.	88
Şekil 4.3	: Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_{wf} / dk_h) kıyaslanması.	89
Şekil 4.4	: Tek-tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_{wf} / dk_z) kıyaslanması.	89
Şekil 4.5	: Tek-tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf} / d\phi$) kıyaslanması.	90
Şekil 4.6	: Tek-tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının zar faktörüne göre duyarlılığının (dp_{wf} / dS) kıyaslanması.	90
Şekil 4.7	: Tek-tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_o / dk_r) kıyaslanması.	91
Şekil 4.8	: Tek-tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_o / dk_z) kıyaslanması.	92

Şekil 4.9 :	Tek-tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen paker basıncının r yönündeki simülatör bloklarındaki yatay geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / dk_{h,j}, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	94
Şekil 4.10 :	Tek-tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen paker basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / dk_{z,j}, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	95
Şekil 4.11 :	Tek-tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen paker basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / d\phi_j, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	97
Şekil 4.12 :	Tek-tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_o / dk_{r,j}, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	98
Şekil 4.13 :	Tek-tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_o / dk_{z,j}, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	100
Şekil 4.14 :	Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının $(dp_o / d\phi_j, j = 1,2,\dots,1250)$ r -z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.	101
Şekil 4.15 :	Duyarlılık katsayılarının sınanması için kullanılan iki-tabaka düşey girişim test şeması.	102
Şekil 4.16 :	İki tabakalı sistem için simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basınç ve düşey gözlem noktası basınç değişim ve türevlerinin kıyaslanması.	103
Şekil 4.17 :	İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen paker kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / dk_{r,j}, j = 1,2,\dots,5929)$ r -z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	104

Şekil 4.18 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen paker kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / dk_{z,j}, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	106
Şekil 4.19 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 1. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{o1} / dk_{z,j}, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	107
Şekil 4.20 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{o2} / dk_{z,j}, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	109
Şekil 4.21 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının $(dp_{o2} / dk_{r,j}, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	110
Şekil 4.22 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen paker kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının $(dp_{wf} / d\phi_j, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	112
Şekil 4.23 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 1. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının $(dp_{o1} / d\phi_j, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	113
Şekil 4.24 : İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının $(dp_{o2} / d\phi_j, j = 1,2,\dots,5929)$ r-z kesit alanı üzerinde incelenmesi.	115
Şekil 4.25 : Duyarlılık katsayılarının sınanması için kullanılan üç-tabaka heterojen sistemde düşey girişim test şeması.	117
Şekil 4.26 : Yatay geçirgenliğin probun bulunduğu r-θ düzleminde (z=3.8 ft) alansal değişimi.	118
Şekil 4.27 : Düşey geçirgenliğin probun bulunduğu r-θ düzleminde (z=3.8 ft) alansal değişimi.	118
Şekil 4.28 : Gözenekliliğin probun bulunduğu r-θ düzleminde (z=3.8 ft) alansal değişimi.	119

Şekil 4.29 : $\theta=60^0$ sektörü için yatay geçirgenliğin r - z düzleminde alansal değişimi.	120
Şekil 4.30 : $\theta=60^0$ sektörü için düşey geçirgenliğin r - z düzleminde alansal değişimi.	120
Şekil 4.31 : $\theta=60^0$ sektörü için gözenekliliğin r - z düzleminde alansal değişimi.	121
Şekil 4.32 : Heterojen kayaç örnekleri kullanılarak yapılan uygulamadan elde edilen paker ve prob basınç davranışları ve türevleri.	121
Şekil 4.33 : Paker basıncının , $\theta=60^0$ sabit değerinde ve paker aralığının orta noktasında r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması.	123
Şekil 4.34 : Paker basıncının , $\theta=60^0$ sabit değerinde ve probun bulunduğu z düzleminde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması.	123
Şekil 4.35 : Paker aralığı basıncının, $\theta=60^0$ sabit değerinde, r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki yatay geçirgenlik k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.	124
Şekil 4.36 : Paker aralığı basıncının, paker aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 9.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 27 gridbloğundaki k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.	126
Şekil 4.37 : Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve paker aralığının orta noktasında r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntem için kıyaslaması.	127
Şekil 4.38 : Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve probun bulunduğu z düzleminde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntem için kıyaslaması.	127
Şekil 4.39 : Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki düşey geçirgenlik k_v 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.	129
Şekil 4.40 : Düşey gözlem probu basıncının, paker aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 3.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 21 gridbloğundaki k_v 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.	130

Şekil 4.41 :	Paker aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r=0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması.	132
Şekil 4.42 :	Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r=0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması. ..	132
Şekil 4.43 :	Düşey gözlem prob basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığının $\theta = 60^\circ$ değeri için r - z düzleminde üç farklı zaman değeri için gösterimi.	133
Şekil 4.44 :	Düşey gözlem prob basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığının, probun bulunduğu r - θ düzleminde üç farklı zaman değeri için dağılımının gösterimi.	135
Şekil 4.45 :	Birinci düşey gözlem prob basıncının, probun bulunduğu düzlemde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklarda k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının gösterimi.	136
Şekil 5.1 :	Sentetik tek tabaka örnek uygulama düşey girişim testi şeması. ..	139
Şekil 5.2 :	Parametre tahmin için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem prob basınç-zaman verilerinin gösterimi.	141
Şekil 5.3 :	Basınç azalım dönemine ait verilerin türev davranışları.	142
Şekil 5.4 :	Basınç yükselim dönemine ait verilerin türev davranışları.	142
Şekil 5.5 :	Regrasyon sonucu elde edilen model verileri ile ölçüm verilerinin karşılaştırılması.	146
Şekil 5.6 :	Sentetik iki tabakalı bir sistemde çift pakerlı ve iki gözlem noktalı düşey girişim testi şeması.	148
Şekil 5.7 :	Parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem problemlerine ait basınç-zaman verilerinin gösterimi.	149
Şekil 5.8 :	Hem üretim hem de kapama dönemlerine ait basınç-türev davranışları gösterimi.	150
Şekil 5.9 :	Tek tabakalı heterojen sistemde çiftli-paker prob düşey girişim test şeması.	156
Şekil 5.10 :	Reazlizasyondan elde edilen $\ln k_h$ sahası.	157
Şekil 5.11 :	Reazlizasyondan elde edilen $\ln k_v$ sahası.	157
Şekil 5.12 :	Reazlizasyondan elde edilen gözeneklilik sahası.	157

Şekil 5.13 :	Parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem problemlerine ait basınç-zaman verilerinin gösterimi.	159
Şekil 5.14 :	Hem üretim hem de kapama dönemlerine ait basınç-türev davranışlarının gösterimi.	159
Şekil 5.15 :	Sadece paker aralığında ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.	161
Şekil 5.16 :	Kestirilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).	162
Şekil 5.17 :	Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).	162
Şekil 5.18 :	Kestirilen gözenekliliğe ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).	162
Şekil 5.19 :	Sadece düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.	164
Şekil 5.20 :	Kestirilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).	165
Şekil 5.21 :	Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).	165
Şekil 5.22 :	Kestirilen gözenekliliğe ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).	165
Şekil 5.23 :	Hem paker aralığında hem de düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.	167
Şekil 5.24 :	Hem paker aralığında hem de düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulamada, hedef fonksiyonun iterasyon sayısı ile değişimi.	167
Şekil 5.25 :	Uygulama sonucu elde edilen $\ln k_h$ sahası.	168
Şekil 5.26 :	Uygulama sonucu elde edilen $\ln k_v$ sahası.	168
Şekil 5.27 :	Kestirilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi.	168
Şekil 5.28 :	Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi.	168
Şekil 5.29 :	İki tabakalı, çiftli kompozit modelde çok-problu düşey girişim test şematiği.	169
Şekil 5.30 :	İki tabakalı, ikili kompozit modelde paker-problu düşey girişim test şematiği.	170
Şekil 5.31 :	Sentetik tek tabakalı, kompozit bir modelde çoklu-prob düşey girişim test şeması.	171

Şekil 5.32 : Parametre tahmini için kullanılan basınç verileri.	172
Şekil 5.33 : Kapama dönemine ait basınç verilerinin logaritmik türevi.	172
Şekil 5.34 : Düşey girişim testine ait şematik gösterim (saha örneği).	175
Şekil 5.35 : Basınç farkı ve debi verileri (saha örneği).	176
Şekil 5.36 : Kapama dönemi paker ve gözlem probunda ölçülen basınç verilerinin türevi.	178
Şekil 5.37 : Model ve ölçüm basınç verilerinin karşılaştırması.	180
Şekil A.1 : r - θ - z sisteminde bir gridbloğun gösterimi.	193



SEMBOL LİSTESİ

Semboller

A	: Katsayı matrisi veya akümülayon terimi
a	: Korelasyon uzunluğu
B	: Formasyon hacim faktörü
C	: Kuyu içi depolanma katsayısı, RB/psi veya kovaryans matrisi
c	: Sıkıştırılabilirlik, psi^{-1}
d	: Sağ yan vektörü; ölçüm veya model parameterlerine ait vektör
D	: Derinlik, ft
F	: Akış terimi
G	: Duyarlılık katsayısı matrisi
H	: Hessian matrisi
h	: Formasyon kalınlığı, ft
I	: Belirtilen yönde birim korinat vektörü
k	: Geçirgenlik, mD
L	: Son zaman indisi
M	: Tahmin edilecek model parametrelerine ait vektörün büyüklüğü
m	: Model parametre vektörü
N	: Herhangi bir yönde veya toplam gridblok sayısı; toplam ölçümüş basınç zaman verisi
p	: Basınç, psi
q	: Akış debisi, STB/gün
r	: Yarıçap, ft veya r yönü
S	: Zar faktörü veya hedef fonksiyonu
t	: Zaman, saat

T	: Transmisibilite, (mD·ft/cp)
V	: Gözenek hacmi, ft ³ /psi
x	: x yönü
y	: y yönü
z	: z yönü

Diğer semboller

α	: Güvenilirlik değeri
β	: Bilinmeyen parametre vektörü
Δ	: Fark operatörü
ϕ	: Gözeneklilik
λ	: Mobilite, mD/cp; adjoint değişken vektörü
μ	: Akmazlık, cP
σ	: Standart sapma
σ^2	: Varyans
θ	: θ yönü
γ	: Akışkan gradyeni, psi/ft veya yarı varyogram
ρ	: Korelasyon katsayısı
δ	: Fark operatörü
∞	: Sonsuz
∂	: Türev operatörü
∇	: Gradyent

Alt indisler

b	: Başlangıç
cal	: Hesaplanmış
e	: Son
i	: r yönündeki indis

j	: θ yönündeki indis
k	: z yönündeki indis
obs	: Gözlem
prior	: Önsel
s	: Kuyu başı ve tek boyut indisi
sf	: Formasyon yüzeyi
ref	: Referans
t	: Toplam
w	: Kuyu
zar	: Zar etkileri

Üst indisler

-1	: Ters
0	: Başlangıç zamanı
-	: Ortalama
n	: Zaman indisi
$\rightarrow$	: Vektör
T	: Transpoze

DÜŞEY GİRİŞİMLİ BASINÇ TESTLERİNİN MODELLENMESİ VE PARAMETRE TAHMİNİ

ÖZET

Geçirgenlik ve gözeneklilik gibi kayaç özelliklerindeki uzaysal heterojenliğin, rezervuarların üretim performansı üzerinde çok kuvvetli bir etkiye sahip olduğu çok uzun süreden beri bilinmektedir. Dolayısıyla bu tür kayaç özelliklerindeki heterojenliğin rezervuar içerisinde iyi tanımlanabilmesi, rezervuar üretim performansı tahminlerinin gerçekçi bir şekilde yapılması için ön koşul olmaktadır.

Literatürdeki çalışmalardan, alışlagelmiş uzun zamanlı kuyu basınç testi verilerinden genelde yatay yöndeki kayaç özelliklerine ait heterojenliğin iyi çözümlenebileceği bilinmektedir. Ancak bu testlerden düşey yöndeki heterojenliğin, özellikle de tüm formasyon kalınlığı üretime açık tutularak yapılan testlerden, belirlenmesi mümkün olmamaktadır. Son yıllarda, çevre problemlerini (yüzeye üretim gibi) önlemede, testlerin daha kısa sürede yapılmasına ve kuyu boyunca farklı noktalarda düşey girişim testlerinin yapılmasına da olanak sağladığı avantajları nedeniyle, alışlagelmiş kuyu testlerine alternatif olarak önerilen ve petrol endüstrisinde yaygın uygulama alanı bulmuştur. Çok-problu veya paker-problu testlerden elde edilen farklı noktalardaki (uzaysal) basınç seti ölçümlerinin, hem düşey hem de yatay doğrultudaki kayaç heterojenliğine ait daha fazla bilgi ihtiva ettiği, bir başka deyişle, daha çok etkilendiği bilinmektedir. Ancak, bu tür testlerden, yatay ve düşey yönde uzaysal heterojenliğin ne ölçüde çözümlenebileceği üzerinde literatürde çalışmalar bulunmamaktadır. Dolayısıyla, bu çalışmada, bu tür düşey girişim testlerinden elde edilen basınç verilerinden heterojenliğin ne ölçüde çözülebileceği ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Bu çalışmada, heterojenlik için iki farklı modelleme göz önünde bulundurulmuştur. Bu modellerden birinde, her tabakada farklı kayaç ve akışkan özelliklerine sahip zonların olduğu, diğerinde ise, daha küçük ölçekte, yani gridblok ölçeğinde kayaç özelliklerinin jeostatistiksel modellere uygun olarak değiştiği kabul edilmiştir.

Düşey girişimli basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımları, son yıllarda yaygın kabul bulan Bayes olasılık teoremi üzerine kurulu ters problem yöntemi kullanılarak kestirilmiştir. Bu ters problem yöntemi ile hem doğrudan ölçümler yolu ile elde edilen statik verilere (kuyu logları ve karot analizlerinden elde edilen geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerine ve bu özelliklerin jeostatistikten belirlenen uzaysal korelasyonlarına) hem de dolaylı ölçümlerden kuyu basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin kestirimi olasıdır.

Düşey girişim testlerinin modellenmesi, çalışmada geliştirilen üç boyutlu (3B) r - θ - z tek-fazlı sayısal bir akış simülatörü ile yapılmıştır. Bu çalışmada geliştirilen simülatörde hem blok merkezli hem de nokta merkezli grid sistemi göz önünde

bulundurulmuştur. Geliştirilen simülâtör, çeşitli uygulamalar için hem mevcut analitik çözümler ile hem de ECLIPSE 100 ticari simülâtörü ile ayrıntılı olarak kıyaslamıştır. Yapılan uygulamaların tamamında bu çalışmadan elde edilen sonuçların, analitik çözümlerden ve ECLIPSE 100 ticari simülâtöründen elde edilen sonuçlar ile uyumu oldukça iyidir.

Bu sayısal simülâtöre ters problem yöntemi üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin yöntemi entegre edilmiştir. Doğrusal olmayan parametre tahmini, gradyent temelli Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Levenberg-Marquardt yönteminde gerekli olan duyarlılık katsayılarının etkin bir şekilde hesaplanması için üç farklı yöntem (sonlu fark, gradyent simülâtör ve adjoint) çalışmada göz önünde bulundurulmuş ve bu yöntemlere ait duyarlılık katsayısı formülleri geliştirilmiştir. Duyarlılık katsayılarına ait bu denklemler ($r-\theta-z$) bir simülâtör için literatürde ilk defa bu çalışmada sunulmuştur. Bu yöntemlerden hangilerinin hangi durumlarda hesaplama zamanları bakımından kullanılması gerektiği belirlenmiştir. Çeşitli homojen ve heterojen modellerde farklı düşey girişim testi konfigürasyonları göz önünde bulundurularak, kuyu boyunca düşey yönde farklı noktalarda kaydedilmiş basınç verilerinin geçirgenliğe, gözenekliliğe, zar faktörüne, ilk basınçlara, vs. duyarlılıkları hesaplanmış ve hangi tür basınç verilerinin bu parametrelere nasıl duyarlılık gösterdiği ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Ayrıca, düşey girişim testlerinden elde edilen basınç verilerinin geçirgenlik ve gözeneklilik gibi kayaç özelliklerine formasyonun neresinde duyarlı olduğu anlaşılması için duyarlılığının alansal grafikleri çizilmiştir

Duyarlılık katsayısı grafikleri üzerinde yapılan ayrıntılı inceleme ve değerlendirme sonrasında, ilk dikkati çeken husus, paker aralığındaki ölçülen basınç verilerinin yatay geçirgenliğe olan duyarlılığı paker aralığının içerisinde en fazla iken paker aralığının üstündeki ve altındaki bölgelerde duyarlılığın neredeyse sıfıra yakın olmasıdır. Paker basıncının, düşey geçirgenliğe olan en fazla duyarlılığının ise çiftli paker aralığının üst ve alt sınırına yakın bölgelerde olduğu yapılan uygulamalardan görülmüştür. Paker basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığı, erken zamanlarda çiftli paker aralığının tam karşısı ile sınırlı kalırken, zaman ilerledikçe duyarlılık hem yatay hemde düşey yönde genişleyerek hareket etmektedir.

Gözlem probu basınç verileri kullanılarak, yatay ve düşey geçirgenliklerle olan duyarlılıkları incelenmiştir. Yapılan uygulamalardan, prob basıncının yatay geçirgenliğe en fazla duyarlılığı, probun bulunduğu grid ile pakerin üst sınırı arasındaki gridlere olduğu saptanmıştır. Benzer şekilde, prob basıncının düşey geçirgenliklere duyarlılığın en fazla olduğu yer probun bulunduğu grid ile pakerin üst sınırı arasındaki gridblok olduğu görülmüştür. Ayrıca, prob basıncının, probun bulunduğu grid ile tabanın üst sınırı arasındaki bölgelere bir miktar duyarlılık gösterdiği görülmüştür. Gözlem probu basıncının ise erken zamanlarda paker aralığının üst sınırı ile gözlem probu arasındakalan bölgelerde sınırlı kalırken, zaman ilerledikçe duyarlılık hem yatay hemde düşey yönde genişleyerek hareket etmektedir.

Yukarıda da belirtildiği üzere bu çalışmada, her tabakanın farklı kayaç ve akışkan özelliklerine sahip birden fazla zondan oluştuğunu kabul eden heterojen model uygulamalarına yer verilmiş ve bu tür sistemlerden parametre tahmini üzerinde de durulmuştur. Bu tür modeller, genellikle sondaj akışkanın formasyona filtrasyonundan dolayı formasyonun yakın civarında mobilitesi ve storativitesi daha

farklı kirlenmiş bölgelerin basınç testleri üzerinde etkisini çalışmak için kullanılabilir. İster su bazlı ister petrol bazlı çamur kullanılmış olsun, bu zona filtre olan akışkanın akma hızı ve sıkıştırılabilirliği formasyonun orjinal akışkanın akma hızı ve sıkıştırılabilirliğinden ve hatta bu zondaki etken geçirgenlik formasyonunkinden farklı olacaktır. Bu problem, her tabakada farklı özelliklere sahip iki zondan oluştuğu düşünülerek modellenabilir ve parametre tahmini yapılabilir. Bu çalışmada böyle bir sistemde çok-problu bir düşey girişim testi tasarlanmış ve hangi basınç seti verilerinden kirlenmiş ve kirlenmemiş zonlara ait hangi parametrelerin güvenilir olarak bulunabileceği araştırılmıştır. Yapılan bu uygulama göstermiştir ki, üretim probu veya onun tam karşısındaki yatay prob basınç verilerinin herhangi bir düşey gözlem probuna ait basınç seti ile birlikte kullanılmasıyla hem kirlenmiş hem de kirlenmemiş zona ait tüm parametreler saptanmasına yetecektir. Buna karşın, sadece düşey gözlem probu verilerinin kullanılması yalnız kirlenmemiş zona ait özelliklerin saptanmasına yardımcı olacaktır.

Düşey girişimli basınç testlerinin, kayaç özelliklerindeki heterojenliğin hem düşey hem de yatay yönde konumsal olarak güvenilir olarak çözümlemede ne ölçüde katkıda bulunacağı çalışmada ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, yukarıda belirtilen duyarlılık katsayılarının alansal grafikleri ile oldukça uyumludur. Ayrıca yapılan bu uygulamalardan, paker ve gözlem probu basınçlarının formasyonun farklı yerlerine duyarlılık gösterdiğinden dolayı, parametre tahmini sırasında hem paker hem de gözlem probu basınçlarının beraber kullanılmasıyla daha fazla bölgeye ait heterojenliğin çözülebileceği görülmüştür.

Bu çalışmada geliştirilen yöntemi kullanılarak, sentetik olarak simülatörden türetilen çok-problu ve çiftli paker-problu düşey girişim testi basınç seti verileriyle, geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin kestirimi üzerine yapılan dört uygulama ile bir çiftli paker-prob testine ait bir saha uygulaması sunulmaktadır.

MODELING OF THE VERTICAL INTERFERENCE TESTS AND PARAMETER ESTIMATION

SUMMARY

It has long been recognized that spatial heterogeneity in rock properties such as permeability and porosity has a strong influence on the production performance of reservoirs. Therefore, characterization of these rock property fields is essential to make reliable performance predictions.

It is known from the literature study that heterogeneity in rock properties in lateral direction generally was resolved well from the conventional pressure transient test data. However, heterogeneity in rock properties in vertical direction cannot be resolved from the conventional pressure transient test data. In recent years, a new generation multi-probe and dual packer-probe wireline formation tester was introduced. It is an important alternative to the conventional pressure transient test due to many advantages. Protection of the environmental problems (production to surface), shorter testing time and opportunity to conduct vertical interference test along the wellbore are main advantages of the wireline formation tests over the conventional pressure transient test. It is known that spatial pressure data sets of the wireline formation test contain information about heterogeneity in rock properties in both lateral and vertical directions. However, there is no detailed study in the literature, which examines to what degree heterogeneity in permeability and porosity can be resolved from spatial pressure transients acquired by multi-probe and dual-packer/probe testers. Thus, in this study, the problem of determining heterogeneity in rock properties from such tests was investigated in detail. Two different approaches were considered for modeling heterogeneity. In one approach, heterogeneity was modeled by assuming that each layer consists of zones having different rock and fluid properties, while in the second approach, heterogeneity is modeled in gridblock scale, by using geostatistics which allows the properties to be treated as randomized regional variables with certain correlation structures.

Permeability and porosity fields conditional to vertical interference pressure data sets are estimated by using the inverse problem methodology based on Bayesian probability theorem. In recent years, several studies have shown that this inverse problem methodology is quite powerful and effective in generating rock property fields conditional to both direct (e.g., porosity and permeability data obtained from logs, their spatial structure determined from geostatistical analysis) and indirect/dynamic measurements like pressure transient data.

In this work, a three-dimensional (3D) r - θ - z single-phase fully implicit, finite difference simulator for a vertical well has been developed to simulate pressure transient data acquired from vertical interference tests. In this simulator both block

centered and point centered grid system were considered. The simulator was extensively verified by comparing its results with analytical solutions given in the literature and with the results of commercial simulator ECLIPSE 100, for a variety of cases. In all instances, the comparison between our simulator, ECLIPSE 100, and analytical solution was quite good.

Non-linear parameter estimation capability based on this inverse problem theory has been integrated into this 3-D simulator to solve non-linear parameter estimation problem. Non-linear parameter estimation is achieved by using the well-known gradient-based Levenberg-Marquardt algorithm. The use of three different methods (finite difference, gradient simulator, and adjoint) for efficiently computing sensitivities coefficients required in the Levenberg-Marquardt algorithm have been investigated, and formulas based on both gradient simulator and adjoint methods for computing sensitivity coefficients are provided. The derivations of those sensitivity equations are original and not presented in the literature. These methods were compared in terms of computation time for different situations. The sensitivity coefficients which can be generated by these procedures include the sensitivity of packer and observation probe pressures to simulator gridblock permeabilities, porosities, skin factors, wellbore storage coefficients and initial wellbore and formation pressures for homogenous and heterogeneous systems. Moreover, sensitivity of packer and observation probe pressures to simulator gridblock permeabilities, porosities were drawn to understand the sensitive zones of the formation in detail.

The sensitivity plots of the packer pressure to horizontal permeabilities of gridblocks in the reservoir show that the most sensitive zone is just across to packer interval. Moreover, the horizontal permeabilities of the gridblocks in the upper and lower part of the packer interval boundaries are not sensitive to packer pressure. However, the sensitive zone of the packer pressure to vertical permeability is the gridblocks at the boundaries in the packer interval. At early times, the sensitive zone of the packer pressure to porosity is limited to just across to packer interval, but in late times, becomes larger and moves in lateral and vertical directions.

The sensitivity maps of the observation probe pressure to horizontal and vertical permeabilities were also drawn for single and multilayer cross-flow system at different times. It is shown that the most sensitive zone of the probe pressure to horizontal permeabilities is the gridblocks between upper boundary of the packer interval and observation probe. Likewise, similar behavior was found for the sensitivity of the probe pressure to vertical permeabilities. Additionally, probe pressure is also sensitive to vertical permeabilities of the gridblocks between probe and upper boundary of the layer. At early times, the sensitive zone of the probe pressure to porosity is limited to gridblocks between probe and the upper boundary of the packer interval, at late times; it becomes larger and moves in lateral and vertical directions.

As mentioned previously, in this work, heterogeneity in rock properties can be modeled by considering that each layer consists of N different zones having different properties for each. This type of model is well suited for studying the influence of an invaded zone or zones adjacent to wellbore due to mud invasion on the pressure transients acquired by multi-probe and packer-probe tests. As is well known, when an

oil/gas well is drilled, some of the borehole fluid (mud filtrate) can invade the formation, displacing the native reservoir fluid and creating an invaded zone around the wellbore. The invading fluid usually has a viscosity and compressibility that differ those of the formation fluid, whether an oil or water based mud is used. A synthetic example of multi-probe test is presented to confirm the theory and procedures developed in this work. This example showed that simultaneous matching of horizontal and vertical probe pressures, it is sufficient to estimate invaded and uninvaded zone properties. However, simultaneous matching of the just vertical observation probe pressures can only yield estimation of the uninvaded zone properties.

A detailed investigation on estimating and resolving permeability and porosity fields in both vertical and lateral directions from pressure data sets acquired from vertical interference tests has been conducted. Results indicate that pressure transient data from vertical interference tests are helpful for resolving the permeability as well as porosity heterogeneity, particularly in the horizontal and vertical directions where we have pressure measurements along the wellbore. Moreover, packer and probe pressures are sensitive to the formation properties at different regions. It was shown that simultaneous usage of the packer and probe pressures provides to resolve the properties of the formation in a larger region.

By using the methodology developed in this work, four synthetic applications and one field packer-probe test example demonstrated the determination of the permeability and porosity values from vertical interference test data.

1. GİRİŞ

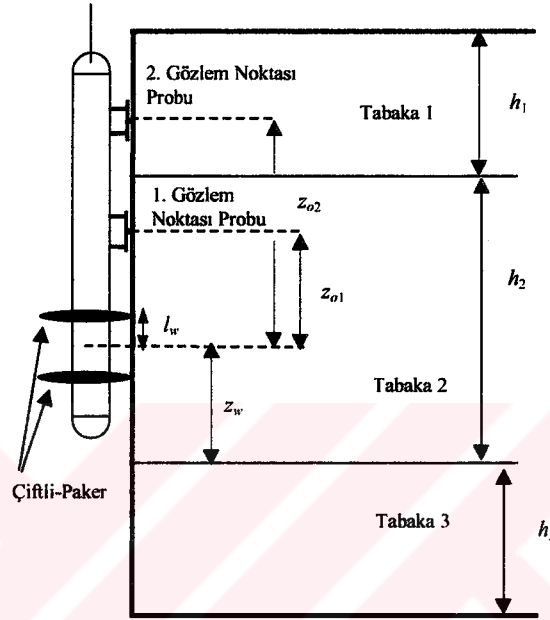
Geçirgenlik ve gözeneklilik gibi kayaç parametrelerinin, yeraltı kaynaklarını (petrol, doğal gaz, yer altı suyu, veya jeotermal su) ihtiva eden rezervuarların üretim performansı üzerinde önemli etkiye sahip olduğu iyi bilinmektedir (Lake, 1986). Dolayısıyla, bu tür kayaç özelliklerinin rezervuar içerisindeki değerlerinin kestirilmesi, rezervuar üretim performans tahminlerinin gerçekçi bir şekilde yapılması için ön koşuldur. Bu parametrelere ait değerlerin doğrudan ve dolaylı ölçüm yöntemleri ile belirlenmesi üzerinde petrol ve doğal gaz mühendisliği endüstrisi ve literatüründe uzunca bir süreden beri çalışılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan doğrudan ölçüm yöntemleri arasında kuyu-logları ve karot analizleri yer almaktadır. Ancak, bu tür ölçümlerden sadece kuyuların olduğu lokasyonlarda geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin belirlenebilmesi mümkün olabilmektedir. Dolayısıyla, yeraltında birkaç bin metre derinde bulunan rezervuarların her noktasında doğrudan ölçümler yaparak geçirgenlik/gözeneklilik değerlerini ve dağılımlarının belirlemek kuyu lokasyonları hariç genelde imkansızdır. Buna karşın, kuyu basınç testi verileri gibi dolaylı ölçüm yöntemlerinden yerinde akış koşullarında ve daha geniş ölçekte elde edilen basınç ölçümlerini ters problem veya parametre kestirim algoritmalarında kullanarak bu özellikleri kestirmek daha olası bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu şekilde genel parametre kestirimi, literatürde geçmiş verilere otomatik çakıştırma (automatic history matching) yöntemi olarak bilinmektedir. Bu çalışmada, dolaylı ölçüm yöntemlerinden olan düşey girişimli basınç testi seti verilerinden otomatik çakıştırma yöntemleri ile geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin hem alan hem de derinlik boyutunda kestirilmesi problemi üzerinde çalışılması hedeflenmiştir.

Düşey girişimli basınç testleri, düşey yöndeki geçirgenlik değerlerinin belirlenmesine de olanak tanıdığı için endüstride yaygın olarak kullanılan bir basınç testi türüdür (Goode ve Thambynayagam, 1990; Proett ve diğ., 2001; Whittle ve Gringarten, 2003). Bu tür basınç testleri ile rezervuar içerisinde yer alan olası tabakaların düşey

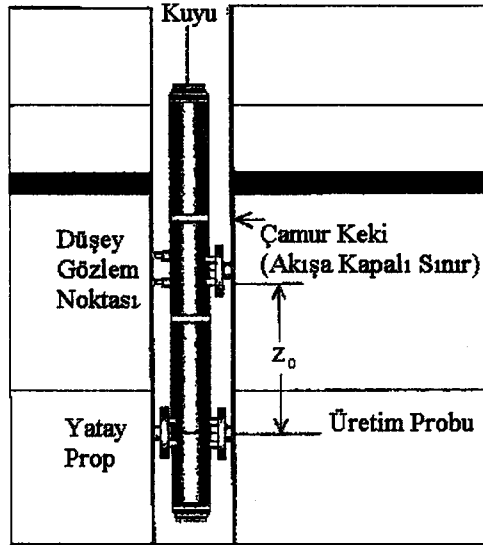
yönde birbiri ile hidrolik ilişki içerisinde olup olmadığı ve rezervuar üretim/enjeksiyon performansını önemli ölçüde kontrol eden düşey ve yatay yöndeki geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin belirlenmesi olasıdır. Ayrıca, bu testler sırasında formasyon akışkan örnekleri alınabilir, formasyon hasarı ve formasyon ilk basınçları hakkında önemli bilgiler saptanabilmektedir. Düşey girişim testlerinde genelde iki farklı konfigürasyon kullanılabilmektedir (Kuchuk, 1994; Onur ve Kuchuk, 1999; Onur ve Kuchuk 2000). Şekil 1.1'de gösterilen konfigürasyonda, genelde tabakalardan birine yerleştirilen çiftli paker aralığından belli bir süre boyunca üretim (veya enjeksiyon) yapılarak, çiftli paker aralığının ortasından düşey yönde z_{o1} (ve/veya z_{o2}) kadar uzaklıkta bulunan geçirimsiz çamur kekini delerek formasyona içine yerleştirilen bir (ve/veya iki) düşey gözlem noktasında (probunda) sürekli olarak basınç kaydedilir. Ayrıca, çiftli-paker aralığına yerleştirilen bir basınç ölçer yardımıyla da çiftli-paker aralığında üretim (veya enjeksiyon) sırasında basınç sürekli olarak kaydedilir. Dolayısıyla, Şekil 1.1'de gösterilen çiftli-paker ve çift gözlem noktalı bir düşey girişim testi sırasında, üç tip basınç-zaman verisi; çiftli-paker aralığı basınç-zaman verisi, 1. düşey gözlem noktası basınç-zaman verisi ve 2. düşey gözlem noktası basınç-zaman verisi kaydedilir. Şekil 1.2'de ise, yaygın olarak endüstride kullanılan çok-problu düşey girişim testine ait şema gösterilmektedir (Zimmerman ve diğ., 1990; Goode ve Thambynayagam, 1990; Proett ve diğ., 2001, Onur ve diğ., 2002). Bu tür girişim testlerinde, üretim probu (sink probe) olarak isimlendirilen bir prob yardımıyla üretim yapılırken, bu probtan aynı yatay düzlemde 180° uzaklıkta bulunan yatay gözlem probu ile üretim probundan düşey yönde z_o kadar uzaklıkta bulunan bir düşey gözlem noktası probundan (bazı durumlarda, üretim probundan düşey yönde z_{o1} ve z_{o2} kadar uzaklıkta bulunan iki adet düşey gözlem probu da kullanılabilmektedir) sürekli olarak basınçlar kaydedilir. İki gözlem probu kullanılığında aralarında mesafe genelde 8 ft kadardır. Bu testlerde amaç, kaydedilmiş farklı basınç-zaman seti verilerinden, tabakalara ait yatay ve düşey yöndeki geçirgenlik değerleri (k_h ve k_v ile gösterilmektedir) ile tabakalara ait gözeneklilik (ϕ) değerlerinin belirlenmesidir.

Günümüzde, bu tür girişim basınç testi verilerinden, düşey (k_z) ve yatay (k_h) yöndeki geçirgenlik ve gözeneklilik (ϕ) değerlerinin kestirilmesi, rezervuarı her biri homojen yapı gösteren (yani yönsel geçirgenliklerin ve gözenekliliğin tabaka içerisinde her

noktada aynı olduğunu kabul eden) birbiri ile akışkan alışverişi yapabilen tabakalardan oluşmuş bir sistem kabul eden analitik modellerle yapılmaktadır (Doğru ve Seinfeld, 1979; Yeh ve Reynolds, 1989; Kuchuk, 1994). Bu analitik modeller ile yatay ve düşey yönde konumsal olarak tabaka içinde yönsel geçirgenliklerdeki ve gözeneklilikteki heterojenliği yani değişkenliği hesaba katabilmek ve belirleyebilmek olası değildir.



Şekil 1.1 Tabakalı bir rezervuarda çift paker ve iki gözlem probu düşey girişi testine ait şema.



Şekil 1.2 Tabakalı bir rezervuarda üretim probu, iki gözlem probu düşey girişim testine ait şema.

Son yıllarda, rezervuar tanımlaması yöntemlerindeki gelişmeler daha gerçekçi rezervuar tanımlamalarının yapılmasına olanak sağlamıştır (Lake, 1986; Deutsch ve Journel, 1993). Özellikle, jeostatistiksel yöntemler (örneğin kriging), gözeneklilik ve geçirgenliğin bölgesel rastlantısal değişkenler olarak modellenmesine ve eldeki örneklenmiş verilerden, bu özelliklerin örneklenmemiş bölgelerde kestirilmesine olanak sağlamıştır (Journel ve Huijbregts, 1978). Jeostatistiksel kestirim yöntemleri, ölçeği küçük kuyu-logları veya karot verilerinden (bu tür verilere kısaca statik veriler de denmektedir) elde edilen geçirgenlik ve gözeneklilik verilerine koşullu heterojen kayaç özellikleri dağılımlarının kestiriminde endüstride kullanılan standart bir araç haline gelmiştir. Ancak dinamik (üretim) veri grubu altında kabul edilen kuyu basınç testi (basınç-zaman) verilerine koşullu heterojen kayaç özelliklerinin kestiriminde bu yöntemlerin uygulaması zor, hatta teorik olarak olanaklı değildir. Zorluk, kuyu basınç testi verileri gibi dinamik türden verilerin, kestirimi yapılacak geçirgenlik ve gözeneklilikle doğrusal olmayan ilişki göstermesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, simülatör gridblok geçirgenlik ve gözenekliliği ile simülatör basınç verileri arasında ilişki doğrusal değildir. Son yirmi yıldaki literatürdeki çalışmalardan, hem statik hem de kuyu basınç testi verilerine koşullu kayaç özellikleri dağılımının kestiriminde kullanılabilecek en güçlü yöntemin Bayes olasılık teoremi üzerine kurulu ters problem yöntemi olduğu anlaşılmaktadır (Tarantola, 1987; Oliver, 1994). Ancak bu çalışmaların hepsinde, yatay yönde aralarında uzaklık bulunan çeşitli kuyulardan elde edilen kuyu basınç testlerinden yatay yöndeki kuyular arasındaki bölgelerde geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımlarının kestirimi üzerinde durulmuştur. Düşey girişim basınç testi verisine koşullu düşey ve yatay yöndeki heterojenliğin kestirilmesi üzerinde bu çalışmalarda durulmamıştır. Dolayısıyla, hem geçirgenlik/gözeneklilikteki uzaysal korelasyonları hem de kuyu-logları ve karotlardan doğrudan ölçülmüş geçirgenlik ve gözeneklilik gibi statik verilere ve düşey girişimli basınç testlerinden (Şekil 1.1 ve Şekil 1.2) elde edilmiş farklı basınç-zaman seti verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerini kestirmek bu doktora çalışmasının temel amacı arasında yer almıştır.

Çalışmada, düşey girişimli basınç testlerinden, hem simülatör gridblok ölçeğinde heterojenliğin modellenmesi hem de tabakaların homojen olarak modellenmesine imkan tanıyan 3B r - θ - z sayısal bir model kullanımıyla, düşey ve yatay yöndeki kayaç

heterojenliğin tanımlanmasında ve ayrıca kuyu civarında kirlenme bölgeleri olduğunda bu bölgeler ile kirlenme olmayan bölgelerin kayaç ve akışkan özelliklerinin belirlenmesinde ne ölçüde faydalı olacağı araştırılmıştır.

Bu doktora çalışmasında gerçekleştirilen araştırmalar literatürde ilk defa yapılmıştır. Düşey girişim basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik değerleri, hem sadece ölçülmüş basınç seti verilerinin model basınç seti verilerinin çıkışmasını dikkate alan klasik ağırlıklı en küçük kareler yöntemi, hem de son yıllarda yaygın kabul bulan Bayes olasılık teoremi üzerine kurulu ters problem metodolojisi kullanarak kestirilmiştir. Daha öncede değinildiği gibi, bu tür ters problem yöntemi, hem statik türden hem de basınç gibi dinamik türden verilere koşullu kayaç özelliklerinin kestirimine ve adaptif olarak veri geldikçe bu kayaç özelliklerinin verilere koşullanarak güncellenmesine olanak tanımaktadır. Düşey girişim testlerinin modellenmesi, çalışmada geliştirilen üç boyutlu (3B) r - θ - z tek-fazlı sayısal bir akış simülatörü ile yapılmıştır. Bu sayısal simülatöre ters problem yöntemi üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmini entegre edilmiştir. Doğrusal olmayan parametre tahmini, gradyent temelli Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Levenberg-Marquardt yönteminde gerekli olan duyarlılık katsayılarının etkin bir şekilde hesaplanması için üç farklı yöntem (sonlu-fark, gradyent simülatör ve adjoint) çalışmada göz önünde bulundurulmuş ve bu yöntemlere ait duyarlılık katsayısı formülleri geliştirilmiştir. Üç boyutlu (3B) r - θ - z bir simülatör için geliştirilen bu denklemler literatürde ilk defa bu çalışmada sunulmuştur. Düşey girişimli basınç testlerinin, kayaç özelliklerindeki heterojenliği hem düşey hem de yatay yönde konumsal olarak güvenilir olarak çözümlemede ne ölçüde katkıda bulunacağı çalışmada ayrıntılı olarak araştırılmıştır.

Tez, altı bölüm ve iki ekten oluşmuştur. Bölüm 2’de, çalışmada geliştirilen düşey tek kuyulu sistemlerde düşey girişimli basınç testlerine ek olarak hemen hemen her türden tek kuyulu basınç testini modellemeye de imkan tanıyan ve simülatör gridblok ölçeğinde de geçirgenlik ve gözeneklilikte heterojenliğin basınç testi verileri üzerinde etkisini dahil eden 3B r - θ - z tek fazlı akış simülatörünün modellenmesinde kullanılan temel denklemler sunulmuştur. Geliştirilen simülatör sonuçlarının mevcut analitik modellerden ve ECLIPSE 100 (Schlumberger, 2002) ticari simülatöründen elde edilen sonuçlarla kıyaslamasıda bu bölümde sunulmaktadır.

Bölüm 3’de çalışmada otomatik çıkartma problemini gerçekleştirmek için göz önünde bulundurulan ağırlıklı en küçük kareler ve daha genel Bayes olasılık teoremine dayanan doğrusal olmayan parametre kestirim yöntemlerine ait temel teori, çıkartmada kullanılan temel denklemler ve algoritmalar sunulmaktadır.

Bölüm 4’de ise, gradyent temelli doğrusal olmayan parametre kestirim algoritmalarında (örneğin Levenberg-Marquardt) gerekli olan duyarlılık katsayılarının sayısal simülatörden hesaplanmasında kullanılabilecek üç farklı yöntem (sonlu-fark, gradyent simülatör ve adjoint) tanıtılmış ve bu yöntemlere ait temel denklemler sunulmuştur. Ayrıca, bu bölümde çıkartmada kullanılan ölçüm basınç verisi ve bilinmeyen model parametresi sayısı bakımından bu yöntemlerden hangisinin duyarlılık katsayılarının hesaplanmasında en etkin (hız ve hafıza gereksinimi bakımından) olacağı gösterilmektedir. Duyarlılık katsayılarının yeterince hassas olarak hesaplanması, doğrusal olmayan parametre tahmininde önemli olduğundan, bu yöntemlerden hesaplanan duyarlılık katsayılarının, analitik modellerden elde edilenlerle ve birbirleri ile kıyaslamaları yine bu bölümde verilmiştir. Duyarlılık katsayıları, ölçülmüş basınç model verilerinin geçirenlik ve gözeneklilik gibi parametrelere olan duyarlılığının bir ölçüsü olduğundan, düşey girişimli farklı basınç seti verilerinin yönsel geçirgenliklere ve gözenekliliğe olan duyarlılıklarının farklı düzlemlerde alansal dağılımlarına ait grafikler Bölüm 4’de sunulmuştur. Bu grafiklerden hangi ölçülmüş basınç seti verisinin hangi türden model parametrelerine daha duyarlı olacakları, etki alanları ve hangi tür model parametrelerinin daha güvenilir olarak belirlenmesine katkı yapacağı ayrıca tartışılmıştır.

Bölüm 5’de, çalışmada geliştirilen yöntem kullanılarak, sentetik olarak simülatörden türetilen çok-problu ve çiftli paker-problu düşey girişim testi basınç seti verileriyle, geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin kestirimi üzerine yapılan uygulamalara ilaveten bir çiftli paker-prob testine ait bir saha uygulaması sunulmaktadır.

Bölüm 6’da projeden elde edilen sonuçlar ve bu çalışmayla literatüre yapılan katkılar özetlenmekte, bundan sonra bu konuda yapılacak çalışmalar için öneriler sunulmaktadır.

Ek-A'da 3B r - θ - z sayısal simülatörünün geliştirilmesinde kullanılan varsayımlar, temel sonlu-fark akış denklemlerinin türetilmesi ve bu denklemlerin çözümlenmesinde kullanılan matris çözümleme yöntemlerine ait ayrıntılar sunulmaktadır. Ek-B'de duyarlılık katsayılarının hesaplanmasında göz önünde bulundurulan gradyent simülatör ve adjoint sistem takımlarının çözümlenmesinde gerekli olan matematiksel denklemler ve bu yöntemlere ait duyarlılık katsayısı formüllerinin 3B r - θ - z sayısal akış simülatörü için türetilmesi sunulmaktadır.



2. 3-BOYUTLU $r-\theta-z$ SAYISAL SİMÜLATÖRÜNÜN GELİŞTİRİLMESİ

Heterojen sistemlerde düşey girişim testlerini modelleyebilmek ve bu tür sistemlerden elde edilen düşey girişim basınç testi verilerinden geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerini ve dağılımlarını kestirebilmek, ancak sonlu farklar gibi sayısal yöntemler üzerine kurulu sayısal modellerle mümkün olabilmektedir. Bu çalışmada bu amacı gerçekleştirmek için, 3 boyutlu $r-\theta-z$ tek-fazlı bir akış simülatörü geliştirilmiştir. Bu bölümde, geliştirilen 3B simülatöre ait temel varsayımlar, temel denklemler ile sonuçlarının mevcut analitik modellerden ve ECLIPSE 100 ticari simülatöründen elde edilen sonuçlarla kıyaslaması sunulmaktadır. Ek-A'da ise, geliştirilen $r-\theta-z$ simülatörüne ait sonlu fark denklemleri, bu denklemlerin oluşturduğu matris problemi ve çözümleme yöntemleri ayrıntılı olarak verilmektedir.

İleriki kısımlarda ayrıntılarına girilecek çalışmada geliştirilen $r-\theta-z$ 3 boyutlu tek fazlı sayısal simülatör, düşey bir kuyuda yapılabilecek farklı türden basınç testlerini modellemeye olanak verecek şekilde oldukça genel tasarlanmıştır. Çalışmada amaç, düşey (veya dik) bir kuyuya kısmi bir aralıktan veya kuyuda formasyon yüzeyine yerleştirilen silindirik şekilli bir proba (genelde bu tür problemlerin çapı 1 cm civarındadır) olan akışı hassas bir şekilde modellemek olduğundan, modellemede kullanılacak en uygun koordinat sistemi silindirik koordinat (r,θ,z) sistemidir. Bu koordinat sistemi ile farklı kuyu iç sınır koşullarını ve akış rejimlerini daha doğru olarak modellemek mümkün olmaktadır.

Örneğin, düşey bir kuyuda z koordinat eksenini boyunca h_w kadar kısmen, θ yönünde 360° tümüyle üretime açık bir aralıktan üretim yapan bir kuyu ve bu açık aralığın üstünde z koordinat eksenini üzerinde belirli bir noktaya yerleştirilen düşey gözlem probu bir testi modellemek için kullanılan geometri Şekil 2.1'de gösterilmektedir. Şekil 2.1'de gösterilen konfigürasyon, endüstride kullanılan çift paker aralıklı, tek düşey gözlem probu kararsız basınç testlerini modellemede kullanılmaktadır. Şekil 2.2'de ise, üç-probu bir düşey girişim testi verilerini modellemede kullanılan

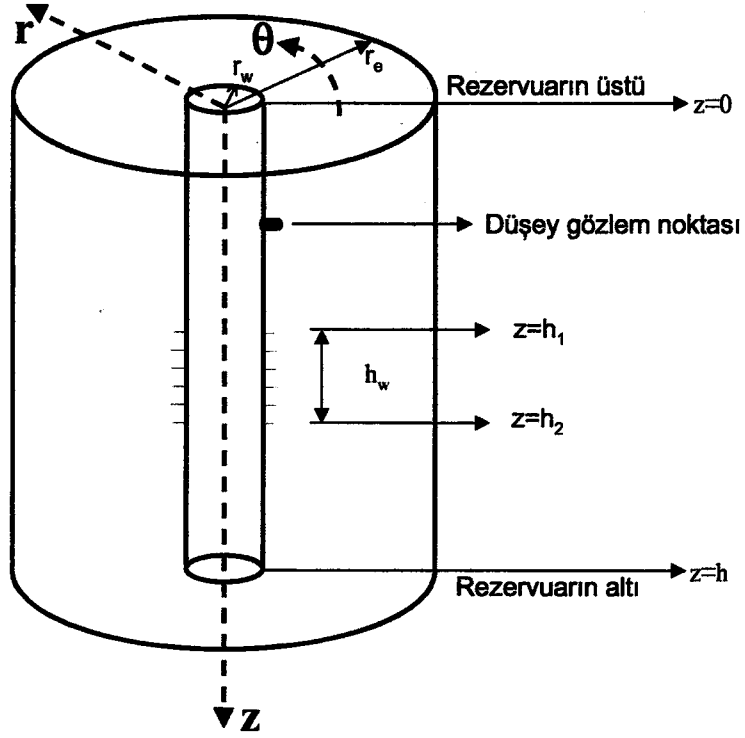
geometri gösterilmektedir. Şekil 2.2’de gösterilen kuyu yüzeyinde θ yönünde kısmen üretime küçük bir aralığa yerleştirilen bir üretim (“sink”) probundan akışkan üretimi yapılır. Bu üretim probundan aynı yatay düzlemde θ yönünde 180° uzakta bulunan ve kuyu yüzeyine yerleştirilen bir yatay prob ile üretim probunun üstünde z koordinat eksenini boyunca kuyu yüzeyinde belirli bir noktaya yerleştirilen düşey prob, gözlem noktaları olarak gözönünde bulundurulur.

Şekil 2.3’de, düşey kuyu boyunca z yönünde aralarında üretime kapalı kısımlar olan kuyuya iki farklı kısmi aralıktan (kısmi aralıklar h_{w1} ve h_{w2} olarak gösterilmektedir ve her iki kısmi aralıkta θ yönünde tümüyle 360° üretime açıktır) üretim yapılan ve bir gözlem noktası bulunan bir düşey girişim testine ait geometri gösterilmektedir. Bu tür bir konfigürasyon, çiftli-paker aralığından iki farklı kısmi aralıktan üretimin olduğu tek düşey gözlem problu testleri modellemek için kullanılabileceği gibi, kuyu boyunca farklı zonlardan üretim yapan bir kuyuda yapılabilecek klasik kuyu-basınç testlerinin modellenmesinde de kullanılabilir.

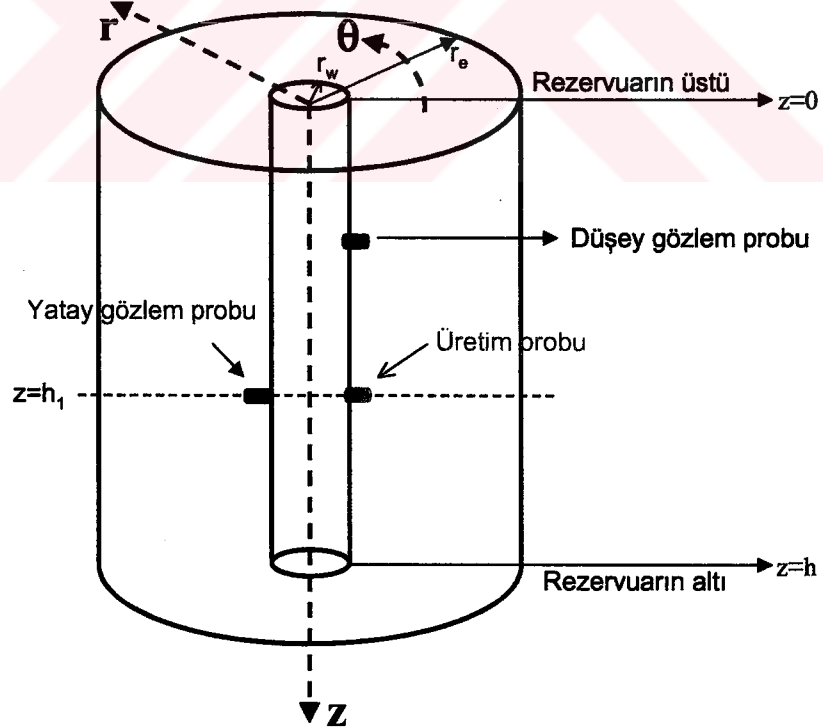
Geliştirilen simülasyon sadece Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3’de gösterilen durumları modellemede kullanım ile sınırlı değildir. Kuyu boyunca z yönünde ikiden daha fazla sayıda kısmi aralıktan üretime, kuyu yüzeyinde istenilen farklı noktalarda üretime, farklı geçirgenlik/gözeneklilik özelliklerine sahip düşey yönde tabakalı sistemlerin modellenmesine, r , θ ve z yönlerinde geçirgenliğin anizotrop ve heterojen olarak modellenmesine, gözenekliliğin heterojen olarak modellenmesine, üretim ve gözlem noktalarında farklı kuyuiçi depolama ve zar etkilerinin dahil edilmesine, belirlenen değişken bir yüzey debisi ile üretime, istenildiği sayıda düşey gözlem noktasında basınçların hesaplanmasına, alışıl gelmiş basınç testlerinin modellenmesine (örneğin, formasyon kalınlığı boyunca tümüyle üretime açık kuyuya sadece-radyal akışın olduğu) olanak sağlayacak kadar geneldir.

2.1 Diffüzyon Denklemi ve Başlangıç-Sınır Değer Problemi

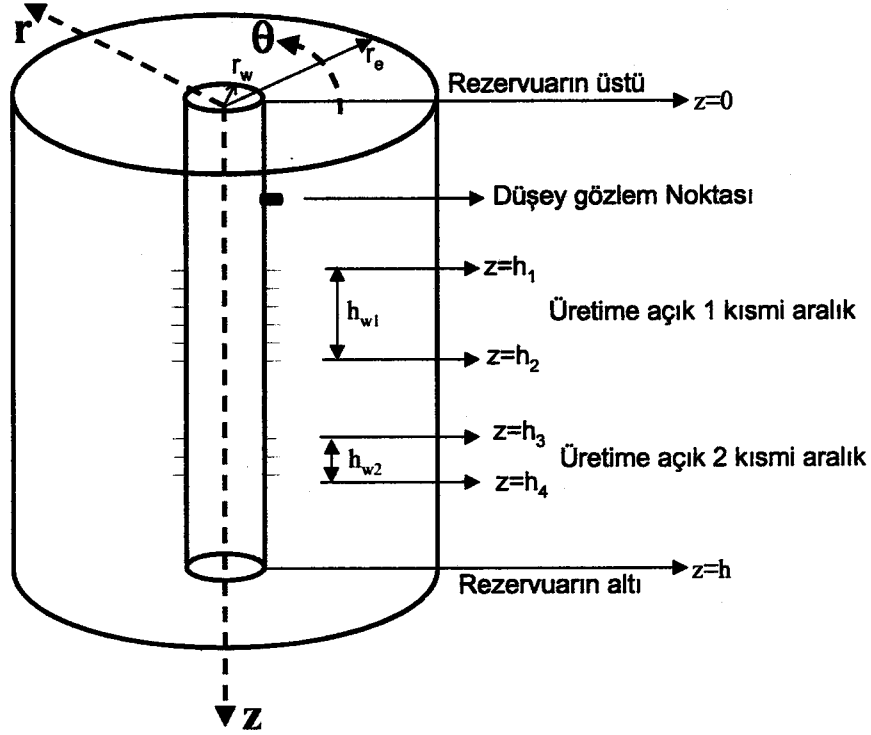
Simülasyon geliştirirken kabul edilen temel varsayımlar; akışkan akışının tek fazlı olduğu, küçük ve sabit sıkıştırılabilirlikli olduğu, geçirgenliğe ait asal bileşenlerin r - θ - z yönleri ile çakışık olduğu ve rezervuarın r - θ düzleminde yatay olduğudur.



Şekil 2.1 r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde düşey bir kuyuya kısmi bir aralıktan üretim yapılan ve tek düşey gözlem noktası (probu) olan teste ait gösterim.



Şekil 2.2 r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde üç probu (üretim, yatay ve düşey gözlem) bir düşey girişim testine ait gösterim.



Şekil 2.3 r - θ - z eksenlerinde akışın olduğu silindir şeklinde rezervuar sisteminde düşey bir kuyuya iki farklı kısmi aralıktan üretim yapılan ve tek düşey gözlem noktası (probu) olan bir teste ait gösterim.

Ayrıca, gözenekliliğin ve geçirgenliğin basınçla değişmediği varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında kütlemin korunumu prensibi ve Darcy denkleminin kullanımıyla elde edilen basıncın zamana ve konuma (r, θ, z) göre değişimini tanımlayan diffüzyivite denklemi, başlangıç ve sınır koşulları ile tanımlı başlangıç-sınır değer problemi aşağıdaki denklemlerle verilebilir:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_r(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z(r, \theta, z)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] = c_i \phi(r, \theta, z) c_i \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.1)$$

Başlangıç koşulu

$$p(r, \theta, z, t = 0) = p^0(r, \theta, z) \quad (2.2)$$

ve sınır koşulları

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{r,\theta,z=0} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{r,\theta,z=h} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.4)$$

$$\left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r,\theta=0,z} = \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r,\theta=2\pi,z}, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq z \leq h, \quad (2.5)$$

$$p(r, \theta = 0, z) = p(r, \theta = 2\pi, z), \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq z \leq h \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_e,\theta,z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w,\theta,z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h_1, h_2 \leq z \leq h, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.8)$$

ve

$$q_{sf}(t) = c_2 \int_0^{2\pi} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w,z,\theta} dz d\theta. \quad (2.9)$$

Bu noktada, yukarıda verilen başlangıç sınır değer problemine ait sınır koşullarının, sadece Şekil 2.1’de verilen bir testi modellemek için geçerli olacak denklemler olduğunu söylemek yerinde olacaktır. Diğer bir deyişle, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3’deki veya diğer başka özel durumlarda yapılacak testleri modellemede kullanılacak sınır koşulları için genel bir formülasyon değildir ve Denklem 2.5 - Denklem 2.9 ile verilen sınır koşullarını uygun şekilde değiştirmek gerekecektir. Tüm testler için geçerli olacak genel bir başlangıç sınır problemine ait matematiksel bir formülasyonu sunmak zor olduğundan, çözümlemede kullanılan denklemleri okuyucuya daha basit anlatabilmek amacı ile Şekil 2.1’de düşey girişimli teste ait başlangıç-sınır değer problemine ait denklemler yukarıda verilmiştir. Ancak, diğer durumlarda Denklem

2.5 - Denklem 2.9 ile verilen sınır koşullarının nasıl değiştirileceğine bu bölüm içerisinde değinilecektir. Tüm tezde ve sonuçların sunulmasında SPE (Society of Petroleum Engineers) petrol mühendisliği saha birimleri kullanılacaktır. Dolayısıyla, Denklem 2.1'de ve zaman değişkeni t 'nin geçtiği tüm denklemlerde, t saat cinsinden alınır ve Denklem 2.1'de $c_1 = 2.637 \times 10^{-4}$, Denklem 2.9'da $c_2 = 1.127 \times 10^{-3}$ olarak verilir.

Yukarıda verilen denklemlerde, z düşey koordinat eksenidir ve $z = 0$ rezervuarın üst sınırını, $z = h$ ise rezervuarın alt sınırını temsil etmektedir. r_w , kuyu yarı çapını, r_e 'de, çevrel (radyal) doğrultuda rezervuar yarıçapını temsil etmektedir. Denklem 2.1, Denklem 2.3 ve Denklem 2.3'de γ , z doğrultusunda yerçekim ivmesinden dolayı akışkan gradyenini ft/psi cinsinden göstermektedir ve

$$\gamma = \frac{\rho g}{144 g_c} \quad (2.10)$$

($g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ ve $g_c = 32.2 \text{ lb-kütle/lb-kuvvet ft/s}^2$) denklemiyle verilir. Daha öncede değinildiği gibi, modellemede rezervuar yatay kabul edilmektedir, yani eğimli değildir. Bu nedenle, yerçekim etkisi düşey doğrultuda (z doğrultusunda, Şekil 2.1) etkili olmaktadır. Ayrıca, modellemede γ 'nın basınçla değişmediği varsayılmıştır. Çalışmada göz önünde bulundurduğumuz küçük ve sabit sıkıştırılabilirlikli akışkanlar için bu son varsayım oldukça gerçekçidir. Çünkü Denklem 2.10'daki akışkan yoğunluğunun bu tür akışkanlar için basınçla değişimi ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

Denklem 2.2'de p^0 sistemdeki ilk basıncı temsil etmektedir en genel şekli ile konumla (r, θ, z) ile değişebilir. z yönünde yerçekim etkisinin ihmal edildiği durumlarda, ilk basınç, konumdan bağımsız, yani her yerde eşit olarak alınabilir. Bu durumda, tüm (r, θ, z) değerleri için $p^0 = p_i = \text{sabit}$, olarak alınabilir. Yerçekim etkilerinin ihmal edilmediği daha gerçekçi durumda ise, ilk basıncın verilen bir $r-\theta$ düzleminde aynı, ancak z koordinatı ile değişmesi gerekir. Bu durumda, p^0 her yerde eşit olmayacak ve z (veya D) koordinatı ile aşağıdaki formülde verildiği gibi değişecektir:

$$p^0(r, \theta, z) = p^0(r, \theta, D^0) + \gamma(D - D^0) = p_d^0 + \gamma(D - D^0). \quad (2.11a)$$

Burada D , bir ilk basınç değerinin $p_d^0(= p^0(r, \theta, z))$ bilindiği referans derinliği (datum) temsil etmektedir. Referans derinliğin rezervuarın en üst noktası olduğu durumda, Şekil 2.11a'da kullanılan koordinat sistemine göre $D^0 = 0$ alınacaktır. Denklem 2.11a simülâtörde ilk basınç dağılımının türetilmesinde kullanılmaktadır.

Yerçekim etkisinin olduğu durumlarda, kuyu içerisinde de akışkan gradyanı olacağından, kuyu içinde basınç düşey yönde (z yönünde) rezervuar ilk basıncı gibi değişim gösterecektir. Ek-A'da ayrıntılı gösterildiği gibi, kuyu içerisinde düşey yönde herhangi bir z noktasındaki basıncı belirli bir referans derinlikteki (D_w^0) kuyudibi basıncına ($p_{wf,ref}^0$) aşağıdaki denklem ile ilişkilendirmek gerekir:

$$p_{wf}^0(r, \theta, z, t) = p_{wf}^0(r, \theta, D_w^0, t) + \gamma(D - D_w^0) = p_{wf,ref}^0(t) + \gamma(D - D_w^0). \quad (2.11b)$$

Denklem 2.11b, kuyudibi basıncı $p_{wf,ref}^0$ 'in hesaplanmasında kullanılmaktadır. Akışkan gradyanın kuyu içersinde etkisinin ihmal edilebileceği durumlarda, kuyudibi basıncı z yönünde değişmeyecek ve her noktada aynı olacaktır.

Üretim ve gözlem noktalarında kuyuiçi (veya tool) depolama etkileri aşağıdaki denklem yardımıyla hesaba katılmaktadır:

$$q(t) = q_{sf}(t) - 24C \frac{dp_{wf}}{dt}. \quad (2.12)$$

Burada q , bbl/gün cinsinden üretim debisi, C bbl/psi cinsinden kuyu içi depolama katsayısı ve q_{sf} ise formasyon yüzeyi debisidir (Denklem 2.9). Denklem 2.12'de, p_{wf} , Şekil 2.1 - Şekil 2.3'de üretim yapılan noktada (Şekil 2.1'de ve Şekil 2.3'de kuyuiçindeki, Şekil 2.2'de üretim probundaki) kuyudibi akış basıncını temsil etmektedir.

Denklem 2.9 ile verilen iç sınır koşulu, Şekil 2.1'de verilen z koordinat eksenini boyunca h_w kadar kısmi, θ yönünde 360° tümüyle, üretime açık bir aralıktan üretim

yapan bir düşey kuyu için geçerlidir. Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'deki daha genel durumlarında kapsayacak şekilde, üretim sınır koşulu aşağıdaki denklem ile ifade edilebilir:

$$q_{sfa}(t) = c_2 \sum_{j=1}^{N_a} \int_{\theta_{1,a}(j)}^{\theta_{2,a}(j)} \int_{h_{1,a}(j)}^{h_{2,a}(j)} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w, z, \theta} dz d\theta. \quad (2.13)$$

Burada, N_a , kuyuya üretim yapılan toplam üretime açık aralık sayısını, $\theta_{1,a}(j)$ - $\theta_{2,a}(j)$ ve $h_{1,a}(j)$ - $h_{2,a}(j)$ ise, verilen bir j açık aralılığının, sırasıyla, θ ve z yönündeki sınırlarını göstermektedir. Örneğin, Şekil 2.1 için Denklem 2.13 uygulandığında, $N_a = 1$ olacak, $\theta_{1,a}(1)=0$, $\theta_{2,a}(1)=2\pi$, $h_{1,a}(1) = h_1$ ve $h_{2,a}(1) = h_2$ olarak alınacaktır. Bu durumda, Denklem 2.13, Denklem 2.9'a indirgenir. Şekil 2.3'deki, kuyuya θ yönünde 360° tümüyle açık, z yönünde kısmen iki açık aralığın olduğu durumda, Denklem 2.13'de $N_a = 2$ olacak, $\theta_{1,a}(1)=0$, $\theta_{2,a}(1)=2\pi$, $\theta_{1,a}(2)=0$, $\theta_{2,a}(2)=2\pi$, $h_{1,a}(1) = h_1$, $h_{2,a}(1) = h_2$, $h_{1,a}(2) = h_3$ ve $h_{2,a}(2) = h_4$ olarak alınacaktır. Şekil 2.2'de, hem θ hem de z yönünde kuyu yüzeyinde kısmi aralıktan üretim yapılan üretim probu durumunda ise, $N_a = 1$ alınır ve $\theta_{1,a}(1)$ - $\theta_{2,a}(1)$ ve $h_{1,a}(1)$ - $h_{2,a}(2)$ ise üretim probunun kuyu yüzeyinde yerleştirildiği yere uygun olarak seçilir. Alt bölüm 2.4.3'de gösterildiği gibi, üretim probu için θ ve z yönünde kısmi açık aralık probun çapına göre belirlenir.

Üretim yapılan aralıktaki kuyuiçi depolama etkilerini dahil etmek genel bir denklem, Denklem 2.13'ün Denklem 2.12'de kullanılması ile elde edilir:

$$q_a(t) = c_2 \sum_{j=1}^{N_a} \int_{\theta_{1,a}(j)}^{\theta_{2,a}(j)} \int_{h_{1,a}(j)}^{h_{2,a}(j)} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w, z, \theta} dz d\theta - 24C_a \frac{dp_{wfa}}{dt}. \quad (2.14)$$

Burada debi, kuyuiçi depolama katsayısı ve kuyudibi basıncı p_{wf} için kullanılan alt indis a , üretim aralığını temsil etmek için kullanılmıştır çünkü düşey gözlem probleminin olduğu yerlerde kuyuiçi depolama etkilerinin göz önünde bulundurulduğu durumlarda, o noktalardaki basıncı üretim noktasındaki kuyudibi basıncından ayırt etmek gerekecektir. Gözlem noktalarındaki kuyuiçi depolama etkilerini dahil eden sınır koşulu en genel şekliyle aşağıdaki denklemle ifade edilebilir:

$$q_{o,m}(t) = q_{sfo,m}(t) - 24C_{o,m} \frac{dp_{wfo,m}}{dt}. \quad (2.15)$$

Burada, $m=1,2,\dots,N_g$ ve N_g , test sırasında basıncı kaydetmek için göz önünde bulundurulmuş toplam gözlem probu sayısını temsil etmektedir. Örneğin, Şekil 2.1 ve Şekil 2.3'deki konfigürasyonlar için bir düşey gözlem probu olduğu için $N_g = 1$, Şekil 2.2'de ise iki gözlem probu olduğu için $N_g = 2$ olacaktır. Denklem 2.15'de $q_{o,m}$ m . gözlem probundan yapılacak olası üretimi temsil etmektedir. Bazı durumlarda, kuyu yüzeyindeki çamur kekini delerek formasyon yüzeyine iliştirilen gözlem probun hidrolik bağlantı içinde olup olmadığını anlamak amacıyla kısa süreli gözlem probundan üretim yapılabilir. Bu nedenle, Denklem 2.15'de gözlem problemlerindeki bu olası üretimi modelleyebilmek için $q_{o,m}$ debi terimi konulmuştur. Ancak, gözlem problemlerinden üretimin yapılmadığı girişim testleri sırasında, tüm problemler için, $m=1,2,\dots,N_g$, Denklem 2.15'de $q_{o,m} = 0$ alınır. Denklem 2.15'de, $C_{o,m}$ m . gözlem probundaki kuyuiçi (veya "tool") depolama katsayısını, $p_{wfo,m}$ ise m . gözlem probundaki kuyudibi basıncını temsil etmektedir. Denklem 2.15'deki m . gözlem probundaki kuyu yüzeyi debisi $q_{sfo,m}$

$$q_{sfo,m}(t) = c_2 \int_{\theta_{1,om}}^{\theta_{2,om}} \int_{h_{1,om}}^{h_{2,om}} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w, z, \theta} dz d\theta \quad (2.16)$$

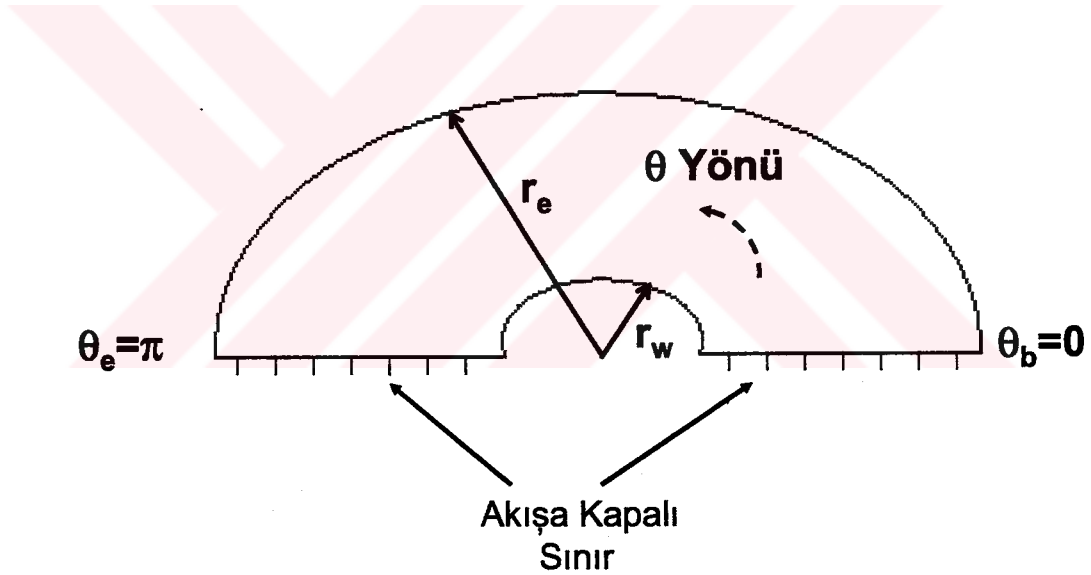
denklemleriyle hesaplanır. Denklem 2.16'daki $\theta_{1,om}-\theta_{2,om}$ ve $h_{1,om}-h_{2,om}$ ise, düşey gözlem probu m 'nin kuyu yüzeyinde θ ve z yönlerindeki aralığını temsil eder. Gözlem problemlerinde hem üretimin hem de kuyuiçi depolaması etkilerinin ihmal edilebileceği durumlarda, $q_{sfo,m} = 0$ alınır.

Şekil 2.1, 2.2 ve 2.3'de gösterilen şekillerde, rezervuar θ yönünde tam 360° dönmektedir. Bu durumda, $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ 'de hem akışkan akısındaki (flux) hem de basınçta sürekliliği sağlamak için Denklem 2.5 ve Denklem 2.6'da verilen sınır koşulları kullanılır. Rezervuarın θ yönünde θ_b ve θ_e arasında belirli bir sektörünü akışa kapalı sınırlar olarak modellemek istediğimiz durumlarda, Denklem 2.5 ve Denklem 2.6 ile tanımlı θ yönündeki sınır koşulları, aşağıdaki sınır koşulları ile değiştirilir:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{r,\theta=\theta_b,z} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, \quad 0 \leq z \leq h \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{r,\theta=\theta_e,z} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (2.18)$$

Denklem 2.17 ve 2.18 ile verilen sınır koşulları, ayrıca akışın r - θ düzleminde eksensel olarak simetrik (bu durum tüm r ve θ değerleri için $k_r = k_\theta = k_h$ olursa gerçekleşir) olduğu durumlarda, sadece rezervuarın yarısında (veya dörtte birini, vs.) akışı modellemek için kullanılabilir. Örneğin, rezervuarın yarısının modellendiği durumlarda (Şekil 2.4), Denklem 2.17’de $\theta_b = 0$ ve $\theta_e = \pi$ olarak alınacaktır ve üretim debisi kuyudaki gerçek üretim debisinin yarısı olarak alınacaktır.



Şekil 2.4 Yarım-sistem rezervuar, r - θ düzleminde bir gösterim.

Şekil 2.1’deki durum için Denklem 2.8 ile verilen sınır koşulu, kuyu boyunca z yönünde üretime açık kısmi aralıkların dışında kalan kısımları akışa kapalı sınırlar olarak modellemek için gereklidir. Şekil 2.2’deki gibi, kuyu boyunca birden fazla üretime açık kısmi aralıkların olduğu durumlarda, kuyu boyunca bu kısmi aralıkların dışında kalan aralıklardaki akışa kapalı sınırları modellemek için genel bir denklem aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_w, \theta, z} = 0, \quad z \notin [h_{1,a}(j), h_{2,a}(j)] \quad \text{ve} \quad \theta \notin [\theta_{1,a}(j), \theta_{2,a}(j)] \quad (2.19)$$

$j=1,2,\dots,N_a$. Burada N_a , toplam açık aralık sayısı ve $\theta_{1,a}(j)-\theta_{2,a}(j)$ ve $h_{1,a}(j)-h_{2,a}(j)$ ise, verilen bir j açık aralığının, sırasıyla, θ ve z yönlerinde sınırlarını göstermektedir. Denklem 2.19'da kullanılan $\notin$ sembolü, "elemanı değildir" anlamındadır. Şekil 2.2'deki test geometrisi için Denklem 2.19

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_w, \theta, z} = 0, \quad z \notin [h_1, h_2], \quad z \notin [h_3, h_4] \quad \text{ve} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.20)$$

şeklinde uygulanacaktır.

Kuyu civarında olası hasar veya iyileştirme etkilerini, yani zar etkisini modellemek için çalışmada iki farklı yaklaşım göz önünde bulundurulmuştur. İleride değineleceği gibi her iki yaklaşımda avantaj ve dezavantajları vardır. Zar bölgesini modellemede kullanılan birinci yaklaşım, Hawkins'in (1956) kararlı-çevrel akış varsayımı altında geliştirdiği zar modellemesine dayanmaktadır. Bu modele göre, zar bölgesi, kuyu civarında çevrel geçirgenliği $k_{r,s}$ ve kuyudan yarıçapı r_s olan bir bölge olarak düşünülür ve zar faktörü

$$S = \left(\frac{k_r}{k_{r,s}} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_s}{r_w} \right), \quad (2.21)$$

formülünden hesaplanır. Bu denklemin, geliştirilen sayısal simülátörde uygulamasında, zar bölgesi r yönünde N_{skin} sayıda gridblok ile temsil edilir ve zar bölgesinde gridblokların uzunlukları toplamı yarıçap r_s 'e eşittir. Genel olması açısından, simülátörde N_{skin} sayısı kullanıcının seçimine bağlı olacak şekilde bırakılmıştır. Uygulamalarda $N_{skin} = 4$ olarak alınmıştır. Bir başka ifadeyle, zar bölgesi kuyuya bitişik ilk dört gridblok ile temsil edilmiştir. Bu şekilde r_s değeri belirlendikten sonra, zar bölgesine ait geçirgenlikler, $k_{r,s}$, çözümlenmesinden (Denklem 2.22'den) bulunur. Denklem 2.21'de, k_r , r yönünde N_{skin} gridbloğunda bitişik $N_{skin}+1$. gridbloğunun çevrel yöndeki geçirgenliğini temsil eder. Denklem 2.21'in sayısal simülátörde uygulaması aşağıdaki denklemle verilir:

$$k_{r,s,i,j,k} = \frac{k_{r,N_{skin,k}+1,j,k}}{\frac{S_k}{\ln\left(\frac{r_{s,k}}{r_w}\right)} + 1}, \quad (2.22)$$

Burada, $j=1,2,\dots,N_\theta$, $k=1,\dots,N_z$ ve $i=1,\dots,N_{skin,k}$. Denklem 2.22 zar faktörü değerinin verilen bir k . tabakada θ yönündeki gridbloklarda (yani tüm $j=1,2,\dots,N_\theta$ için) aynı olduğunu, ancak z yönündeki kuyuya bitişik bloklarda değişken olabileceğini göz önünde bulundurmaktadır. Denklem 2.22’de $r_{s,k}$, z yönünde k . “tabakada” r yönünde zar bölgesinin yarıçapını, $N_{skin,k}$ ise k . tabakadaki zar bölgesini modellemek için kullanılan r yönündeki toplam gridblok sayısını temsil etmektedir. Bu noktada, zar faktörünün negatif olduğu durumlarda ($S_k < 0$, $k=1,\dots,N_z$), Denklem 2.22’den hesaplanacak $k_{r,s}$ değerlerinin negatif değerleri almasını önlemek gerekmektedir. Bunun için, r yönünde gridblok noktaları ve sınırları (Ek-A, örneğin Coats yöntemi) verildiğinde, aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak en küçük $r_{s,k}$ değeri aşağıdaki denklem yardımıyla

$$\frac{S_k}{\ln\left(\frac{r_{s,k}}{r_w}\right)} + 1 > \epsilon_k \quad (2.23)$$

seçilmektedir. Burada ϵ_k sıfırdan büyük bir sayıdır ve uygulamalarımızda, tüm k değerleri için $\epsilon_k = 1.0 \times 10^{-4}$ olarak alınmıştır.

Denklem 2.21 veya Denklem 2.22 ile zar bölgesinin modellenmesinin en önemli avantajlarından birisi hem negatif hem de pozitif zar faktörlerinin kullanımına izin vermesidir. Ancak, bu modelde, zar bölgesi geçirgenliği farklı bir kompozit zon olarak modellendiğinden, simülâtörde bu zon içersindeki diğer parametrelere; örneğin, gözeneklilik, toplam sıkıştırılabilirlik, anizotrop geçirgenlik durumunda, θ ve z yönlerindeki geçirgenlikler için değerlerin atanması gerekmektedir. Bu nedenle de, zar bölgesine atanan zar faktörü değeri eşit olsa dahi, bu özelliklere atanan değerlere bağlı olarak, erken zamanlarda, basınç sinyallerinin farklı olması beklenir. Bu şekliyle bakıldığında, analitik modellerde kullanılan ve alışlagelmiş (van Everdingen, 1953; Hurst, 1953) ince zar faktörü (“infinitesimal skin”) tanımına ters

düşmektedir ve simülatör ile analitik sonuçların erken zamanlarda birebir kıyaslanmasına izin vermemektedir. Ayrıca, Denklem 2.21 veya Denklem 2.22 kullanıldığında, ters problem uygulamalarında, üretim veya gözlem noktalarındaki basınçların zar faktörü değerine olan duyarlılığının doğrudan hesaplanmasına olanak tanımamaktadır. Onun yerine, önce zar bölgesi çevrel geçirgenliklere olan duyarlılığın hesaplanmasına ve daha sonrada bu değerlerden zar faktörüne olan duyarlılığın Denklem 2.22 yardımıyla hesaplanması gerekecektir. Örneğin, üretim noktası veya aralığındaki basınçların zar faktörü, S_k 'ya göre duyarlılığı

$$\frac{\partial p_m}{\partial S_k} = - \frac{\ln(r_{s,k} / r_w)}{\left[\frac{S_k}{\ln(r_{s,k} / r_w)} + 1 \right]^2} \sum_{j=1}^{N_\theta} \sum_{i=1}^{N_{skin,k}} k_{r,N_{s,k}+1,j,k} \frac{\partial p_m}{\partial k_{s,r,i,j,k}} \quad (2.24)$$

şeklinde hesaplanır. Denklem 2.24'de p_m herhangi bir model basınç değerini gösterir

ve $\frac{\partial p_m}{\partial k_{s,r,i,j,k}}$ duyarlılık katsayıları Bölüm 4 ve Ek-B'de verilen yöntemler yardımıyla

hesaplanır. Denklem 2.24 ile verilen denklem ters problem uygulamasında kullanıldığında, iterasyon sırasında S_k 'nın alacağı değere göre $r_{s,k}$ değeri Denklem 2.23'e göre değiştirilmek zorunda kalınacaktır. Bu durumda, iterasyon sırasında, hem k . tabakadaki zar faktörü hem de zar faktörü değerine bağlı k . tabakadaki zar bölgesi yarıçapı $r_{s,k}$ değişebilecektir. Bu da her iterasyonda r yönünde gridin değiştirilmesini gerektirmektedir. Bu zorlukları nedeniyle ters problem uygulamalarında bu tür zor modeller kullanılmamıştır.

Çalışmada zar faktörünün modellenmesinde kullanılan diğer yaklaşım ise, "ince" zar faktörü kavramını temel almaktadır. Bu tür modellemede zar etkisi kuyu basıncına ilave bir basınç düşümü olarak düşünülür ve zar faktörünün pozitif olması durumunda hem ileri hem de ters problem uygulamalarında, kompozit modellemeye gereksinim duyulmadan, doğrudan basit bir şekilde zar faktörünün işlemlere katılmasına olanak sağlar. Bu tür zar bölgesi modellemesi r - θ - z akış simülasyonunda, Peacemeane (1983)'nin x - y - z akış simülatörüne zar faktörünü dahil etmek için kullandığı kavrama benzer şekilde geliştirilebilir. Kuyuya bitişik r , θ ve z yönündeki sırası ile boyutları Δr_1 , $\Delta \theta_j$ ve Δz_k olan çevrel gridbloğu içersinden kuyuya r yönünde

kararlı akış olduğunu kabul ettiğimizde, bu gridbloğundan kuyuya olan debi bu gridbloğunun ortalama basıncı cinsinden

$$q_{sfb}(r_w, \theta_j, z_k) = c_2 \frac{k_{r,b}}{\mu_b} \Delta\theta_j \Delta z_k \frac{[\bar{p}_b - p_w(r_w, \theta_j, z_k)]}{\left[\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right) - \frac{1}{2} \right]}. \quad (2.25)$$

denklemden hesaplanır (Pedrosa ve Aziz, 1986; Onur, 1999). Denklem 2.25’de r_b ve r_w , kuyuya bitişik radyal gridbloğun r yönündeki sınırlarını ve dolayısıyla $r_b - r_w$, bu gridbloğun r yönündeki genişliğini Δr_1 ’i gösterir. Denklem 2.25’de $k_{r,b}$ bu gridbloğun r yönündeki geçirgenliğini, μ_b ise akma zıtlığını temsil etmektedir, $\bar{p}_b$ ise bu gridbloğu içerisindeki hacimsel ortalama basıncıdır ve simülâtörde bu gridbloğu için çözümlenecek basıncı temsil edecektir ($\bar{p}_b = p_{1,j,k}(t)$). Denklem 2.25’e ince zar faktörü kavramından, kuyudibi akış basıncı (p_{wf}) ile kuyu yüzeyindeki basınç p_w

$$p_w(r_w, \theta_j, z_k, t) = p_{wf}(t) + \Delta p_{zar}, \quad (2.26)$$

denklemiyle ilişkilendirilir. Denklem 2.26’da Δp_{zar} zar etkisinden dolayı oluşan, zamanla değişmediği kabul edilen, ilave basınç farkıdır. Bu ilave basınç farkı, bu gridbloğu için tanımlanabilecek S_k boyutsuz zar faktörü cinsinden

$$\Delta p_{zar} = \frac{q_{sfb} \mu_b}{c_2 k_{r,b} \Delta\theta_j \Delta z_k} S_k, \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem 2.27’nin Denklem 2.26’da kullanılması sonucu elde edilen denklemin Denklem 2.25’de kullanılması ile zar faktörünü içeren q_{sfb} için denklem

$$q_{sfb}(r_w, \theta_j, z_k, t) = c_2 \frac{k_{r,b}}{\mu_b} \Delta\theta_j \Delta z_k \frac{[\bar{p}_b - p_w(r_w, \theta_j, z_k, t)]}{\left[\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right) - \frac{1}{2} + S_k \right]}. \quad (2.28)$$

elde edilir. Denklem 2.27’de ve 2.28’de zar faktörü S_k için kullanılan indeks, θ yönünde tüm gridbloklarda zar faktörünün aynı ancak z yönünde farklı olduğu düşüncesiyle oluşturulmuştur. Ancak istenirse, kuyuya bitişik çevrel gridbloklarda farklı zar faktörünü $S_{j,k}$ indekslemesiyle modellemek mümkündür çünkü Denklem 2.27 ile verilen tanım oldukça geneldir. Bu daha genel durumda, Denklem 2.27’de ve Denklem 2.28’de S_k terimi $S_{j,k}$ ile değiştirilecektir. Örneğin, bu genel durumda, Denklem 2.28

$$q_{sfb}(r_w, \theta_j, z_k, t) = c_2 \frac{k_{r,b}}{\mu_b} \Delta\theta_j \Delta z_k \frac{[p_{1,j,k}(t) - p_{wf}(t)]}{\left[\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, \quad (2.29)$$

şeklinde verilir. θ yönünde 360° tümüyle üretime açık bir durumda ve θ yönünde tek bir blok kullanıldığında ($\Delta\theta_j = 2\pi$), Denklem 2.27’den

$$\Delta p_{zar} = \frac{q_{sfb} \mu_b}{c_2 k_{r,b} 2\pi \Delta z_k} S_k = \frac{141.2 q_{sfb} \mu_b}{k_{r,b} \Delta z_k} S_k, \quad (2.30)$$

elde edilir ki bu da zar faktörünün alışıl gelmiş tanımıdır.

Denklem 2.29’un Denklem 2.14’ün yarı-ayrık (semi-discrete) ifadesinde kullanımıyla elde edilecek zar faktörünü içerecek genel formül

$$\hat{q}_a(t) = \sum_{j=N_{\theta 1,a}}^{N_{\theta 2,a}} \sum_{k=N_{h 1,a}}^{N_{h 2,a}} T_{r,1/2,j,k} [p_{1,j,k}(t) - p_{wfa}(t)] - 24 C_a \frac{dp_{wfa}}{dt}, \quad (2.31)$$

şeklinde olacaktır. Denklem 2.31’de $T_{r,1/2,j,k}$ terimi

$$T_{r,1/2,j,k} = c_2 \frac{k_{r,b}}{\mu_b} \Delta\theta_j \Delta z_k \frac{1}{\left[\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır. Düşey gözlem noktalarındaki basınçlarda benzer şekilde, Denklem 2.32'nin Denklem 2.15 ve Denklem 2.16'da kullanılmasıyla, zar faktörü etkileri dahil edilebilir.

Denklem 2.31 ve Denklem 2.32'den de görüleceği gibi ince zar kavramının kullanılmasıyla, basınçlar üzerine zar faktörü etkisi hem ileri hem de ters problem uygulamaları bakımından doğrudan eklenebilmektedir. Ancak, bu uygulama zar faktörünün pozitif olduğu ve çok fazla negatif olmadığı (-1'den büyük) durumlarda geçerlidir. Malesef Denklem 2.31 ve Denklem 2.32 zar faktörünün -1'den daha küçük olduğu durumlarda, erken zamanlarda basınçlar için fiziksel olmayan değerler vermektedir ki bu da ince zar kavramındaki eksiklik ve dezavantajdır. Bu durumlarda, zar bölgesini daha önce değinilen, kompozit zon olarak ya da bir sonraki paragrafta belirtilen "etken kuyu" yarıçapı kavramını göz önünde bulundurmak gerekecektir.

Zar modellemesinde kullanılacak diğer bir yaklaşım olarak, etken kuyu yarıçapı kavramı düşünülebilir. Bu yaklaşımda, zar etkisi, $r'_w = r_w \exp(-S)$ formülü ile devreye sokulur. Ancak, bu model kullanıldığında, ters problem uygulamasında, her iterasyonda zar faktörü değeri değiştikçe, r önünde grid yapısını da değiştirmek gerekecektir. Ayrıca z yönünde farklı zar faktörü değerlerinin modellemede nasıl kullanılacağı açık değildir. Çalışmada bu yöntem ters problem uygulamasındaki bu zorlukları nedeniyle, göz önünde bulundurulmamıştır.

2.2 Sonlu Farklar Gridlerinin Oluşturulması

3B r - θ - z sayısal simülatörün oluşturulmasında, sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Grid sistemi olarak, her üç yönde de, literatürde bu tür simülatörlerin geliştirilmesinde yaygın olarak kullanılan blok merkezli (block centered) grid sisteminin yanında nokta dağılımlı (point distributed) grid sistemi de kullanılmıştır. Çalışma kapsamında, r eksenindeki grid noktaları oluşturulurken iki farklı yöntem göz önünde bulundurulmuştur. Bunlarda ilki MacDonald ve Coats (1970) tarafından önerilen geometrik olarak aralıklara bölünmüş blok merkezli grid sistemidir. Bu şekilde r eksenindeki grid noktalarının oluşturulması literatürde MacDonald-Coats

yöntemi olarak bilinir. Bu yöntemde N_r sayıda grid blok verildiğinde, r yönündeki grid noktaları, geometrik olarak aralıklara bölünmektedir:

$$r_{i+1} = \alpha r_i, \quad i = 0, 1, \dots, N_r, \quad (2.33)$$

burada

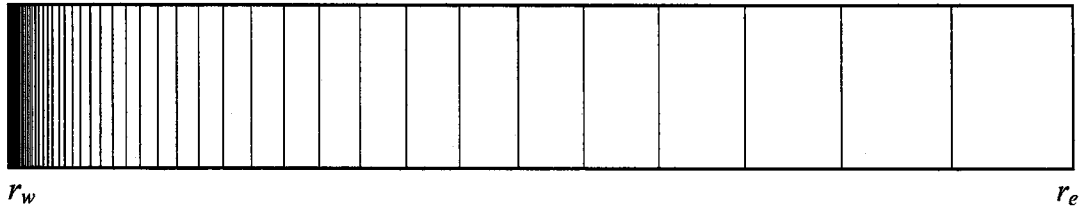
$$r_0 = \frac{r_w \ln \alpha}{(\alpha - 1)}, \quad (2.34)$$

$$\alpha = \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{1/N_r}, \quad (2.35)$$

ve grid blok sınırları

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \alpha} \quad i = 0, 1, \dots, N_r, \quad (2.36)$$

denklemden hesaplanır. Denklem 2.33 - Denklem 2.36 ile tanımlanan MacDonald-Coats yöntemi kullanıldığında, r yönünde, kuyu civarında daha küçük aralıklı grid bloklar, kuyudan uzaklaştıkça daha geniş aralıklı grid bloklar oluşturulur. Şekil 2.5'de r yönünde $N_r = 80$, $r_{1/2} = r_w = 0.354$ ft ve $r_{N_r+1/2} = r_e = 5000$ ft alındığında MacDonald-Coats yönteminden türetilen r yönündeki grid sistemi gösterilmektedir.



Şekil 2.5 MacDonald-Coats yöntemine göre oluşturulan grid sisteminin gösterimi.

r -ekseninde grid noktaları ve grid blok sınırlarının türetilmesinde kullanılacak bir diğer yöntem ise Pedrosa ve Aziz (1986) tarafından sunulmuştur. Pedrosa ve Aziz yönteminin en önemli avantajı, MacDonald-Coats yönteminin tersine, r ekseninde gridblok uzunluklarının kullanıcı tarafından keyfi olarak seçilmesine ve dolayısıyla r

ekseninde değişken geometrik faktör α göz önünde bulundurulmasına olanak tanımaktadır. Pedrosa ve Aziz yönteminde, $r_{1/2} = r_w$ olarak alınır ve r yönünde blok uzunlukları (Δr_i , $i=1, \dots, N_r$) kullanıcı tarafından belirlenir ve daha sonrada r yönündeki gridblok sınırları

$$r_{i+1/2} = r_{i-1/2} + \Delta r_i \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad (2.37)$$

ve r yönündeki grid noktaları r_i 'ler ise

$$\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1/2}}\right) = \frac{r_{i+1/2}^2}{r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2} \ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}}\right) - \frac{1}{2} \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad (2.38)$$

denkleminde hesaplanır. Eğer r ekseninde geometrik faktör $\alpha_i = r_{i+1/2} / r_{i-1/2}$ olarak tanımlanırsa, Denklem 2.38

$$\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1/2}}\right) = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2 - 1} \ln(\alpha_i) - \frac{1}{2} \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad (2.39)$$

şeklinde de yazılabilir. Denklem 2.38 veya Denklem 2.39 kararlı-akış varsayımı altında türetilmiştir (Pedrosa ve Aziz, 1986).

z ekseninde de blok-merkezli grid sistemi kullanılabilir. Bu yöndeki grid noktaları, tanımlanan blok uzunlukları, Δz_k , ile belirlenecektir. N_z sayıda gridblok ve uzunlukları verildiğinde, z eksenindeki blok sınırları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z_{1/2} = 0, \quad (2.40)$$

$$z_{k+1/2} = z_{k-1/2} + \Delta z_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_z, \quad (2.41)$$

ve

$$z_{N_z+1/2} = h. \quad (2.42)$$

Burada $z_{1/2} = 0$, rezervuarın z ekseninde en üst sınırını, h ise toplam rezervuar kalınlığını temsil eder. Grid noktaları ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z_k = z_{k-1/2} + \frac{\Delta z_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N_z \quad (2.43)$$

z_k , $z_{k-1/2}$ ve $z_{k+1/2}$ toplamının yarısıdır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$z_k = \frac{(z_{k-1/2} + z_{k+1/2})}{2}. \quad (2.44)$$

r - z eksenlerinde kullanılan grid sisteminin genel görünüşü Şekil 2.6'da verilmektedir.

θ yönünde de blok merkezli grid sistemi kullanılabilir. Eğer $\Delta\theta_j$ 'yi j . grid bloğunun genişliği olarak gösterilirse, N_θ sayıda grid blok ve uzunlukları verildiğinde, bu yönde oluşturulacak grid blok sınırları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\theta_{1/2} = 0, \quad (2.45)$$

$$\theta_{j+1/2} = \theta_{j-1/2} + \Delta\theta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_\theta, \quad (2.46)$$

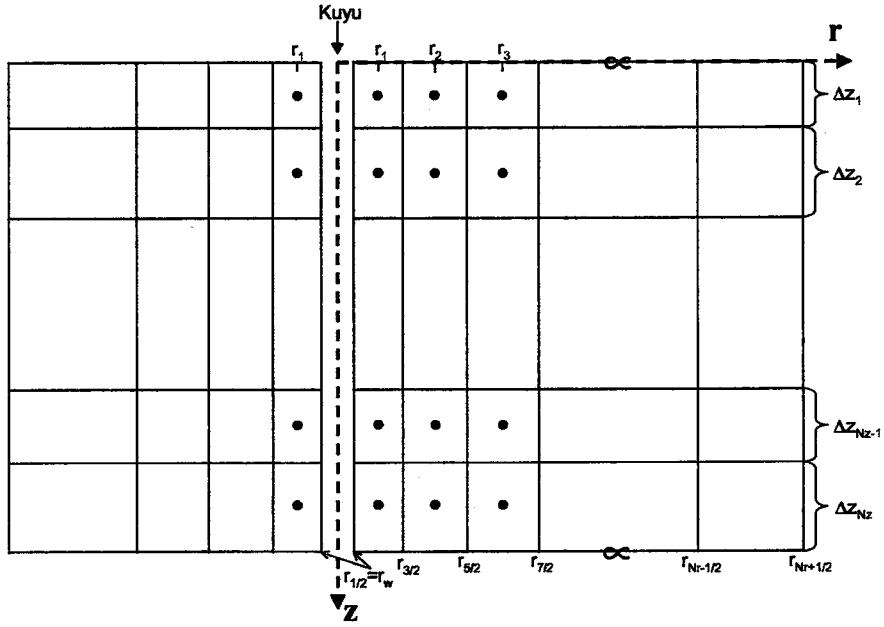
ve

$$\theta_{N_\theta+1/2} = 2\pi. \quad (2.47)$$

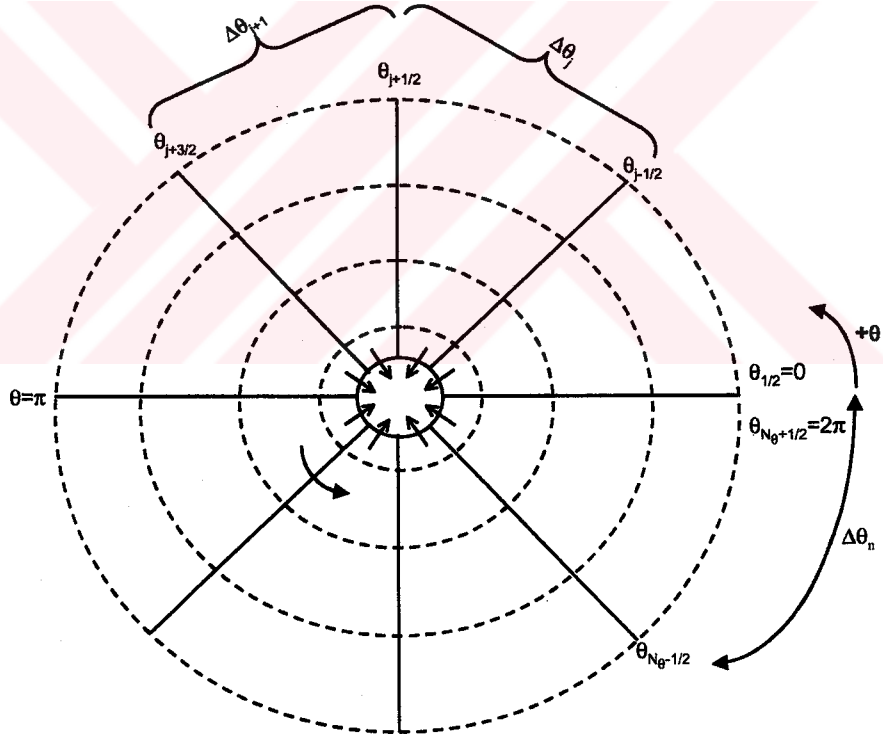
Bundan dolayı, grid noktalarının yerleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\theta_j = \frac{\theta_{j-1/2} + \theta_{j+1/2}}{2}. \quad (2.48)$$

r - θ eksenlerinde oluşturulan grid sisteminin şeması Şekil 2.7'de sunulmuştur.



Şekil 2.6. r - z eksenlerinde oluşturulan grid sisteminin şeması.



Şekil 2.7. r - θ eksenlerinde oluşturulan gridlerin şeması.

Nokta-dağılımlı grid sistemi göz önünde bulundurduğumuz durumlarda, önce grid noktaları sınırları da kapsayacak şekilde tanımlanır. Daha sonra da gridblok sınırları grid noktalarının orta noktası olarak tanımlanır. Örneğin, z ekseninde N_z grid noktası kullanıldığında, bu grid sisteminde gridblok sınırları

$$z_{1/2} = 0, \quad (2.49)$$

$$z_{k+1/2} = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N_z. \quad (2.50)$$

denklemleriyle tanımlanır. Denklem 2.50'de, $k = N_z$ olduğunda, z_{N_z+1} zahiri (fictitious) bir grid noktasıdır ve kullanıcı tarafından $(z_{N_z} + z_{N_z+1})/2 = h$ olacak şekilde seçilir. Gridblok uzunlukları

$$\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, N_z, \quad (2.51)$$

denklemlerinden hesaplanır. Benzer şekilde, θ -ekseninde de nokta dağılımlı gridblok sınırları ve uzunlukları hesaplanır. Ek-A'da türetilen sonlu-fark denklemleri, hem blok merkezli hem de nokta dağılımlı grid sistemleri için geçerlidir.

2.3 Sonlu Farklar Denklemlerinin ve Matris Probleminin Çözülmesi

Ek-A'da ayrıntılı olarak türetilen 3-B r - θ - z akış simülatörü için sonlu farklar denklemlerinin üretim/gözlem (kuyucu) noktalarındaki basınçlar ile gridbloklardaki bilinmeyen basınç değerlerinin herhangi bir zaman değeri t^{n+1} için çözülmesi, bu denklem takımlarının oluşturduğu matris probleminin çözülmesini gerekli kılar. Bu kısımda, matris problemi ve çözülmesinde göz önünde bulundurulacak yöntemler sunulmaktadır.

Ek-A'dan görüleceği gibi, üretim ve gözlem noktalarındaki kuyucu basıncını çözmek için aşağıdaki denklemle genel olarak ifade edilebilen N_w sayıda kuyucu sınırlayıcı (wellbore constraint) denklem mevcuttur (Denklem A-56):

$$\sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{ob,l}(m)}^{N_{gs,l}(m)} \sum_{k=N_{hb,l}(m)}^{N_{hs,l}(m)} T_{r,1/2,j,k} (p_{l,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^{n+1} = d_{w,l}^n, \quad l = 1, 2, \dots, N_w \quad (2.52)$$

Burada,

$$\Psi_l^{n+1} = \frac{c_3}{c_2 \Delta t^{n+1}} C_l. \quad (2.53)$$

Denklem 2.52 ile ifade edilen kuyu-sınırlayıcı denklemlere ek olarak, toplam N ($N_r \times N_\theta \times N_z$) sayıda gridblok noktasındaki basıncı tanımlayan aşağıda genel olarak ifade edilen sonlu fark denklem ($i=1,2,\dots,N_r$, $j=1,2,\dots,N_\theta$, $k=1,2,\dots,N_z$ olacak şekilde) mevcuttur (Denklem A-58):

$$\begin{aligned} & T_{r,i+1/2,j,k} p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{r,i-1/2,j,k} p_{i-1,j,k}^{n+1} + T_{\theta,i,j+1/2,k} p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{\theta,i,j-1/2,k} p_{i,j-1,k}^{n+1} \\ & + T_{z,i,j,k+1/2} p_{i,j,k+1}^{n+1} + T_{z,i,j,k-1/2} p_{i,j,k-1}^{n+1} - (\sum T_{i,j,k}) p_{i,j,k}^{n+1} = d_s^n \end{aligned} \quad (2.54)$$

Denklem 2.52 ve Denklem 2.54’de kullanılan diğer tanımlar ve terimler, Ek-A’da verilmiştir.

Denklem 2.52 ve Denklem 2.54’ün oluşturduğu denklem takımları matris-vektör problemi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$A_{n+1} \vec{p}^{n+1} = \vec{d}^n \quad (2.55)$$

Burada, A_{n+1} (N_w+N)x(N_w+N) boyutlu katsayı matrisi (ileride gösterileceği gibi oluşan katsayı matrisi seyrek (sparse) ve simetriktir) ve $\vec{p}^{n+1}$ (N_w+N) bilinmeyen basınç vektörüdür:

$$\vec{p}^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{wf,1}^{n+1} \\ p_{wf,2}^{n+1} \\ \vdots \\ p_{wf,N_w}^{n+1} \\ p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_N^{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$\vec{d}^n$ ise bir önceki zaman değerindeki (N_w+N) boyutlu sağ yan vektörüdür. Burada N_w , çözümlenecek üretim ve gözlem noktalarında toplam basınç sayısını, $N (=N_r \times N_\theta \times N_z)$ ise kullanılan toplam grid blok sayısını temsil etmektedir. Denklem 2.56’da gridblok basınçları için üç boyutlu koordinat indekslemesi (i, j, k) yerine ileride değinilecek

gridblok indekslemesi kullanılmıştır. Denklem 2.55'de katsayı matrisi A için kullanılan alt indis $n+1$, katsayı matrisinin ana çaprazında bulunan elemanlar içerisinde zaman adımı Δt^{n+1} 'in olmasından (Denklem 2.53) ve dolayısıyla katsayı matrisinin, zaman adımı değiştirildiğinde, zamanla değişeceğini ifade etmek içindir.

Denklem 2.55'de oluşan katsayı matrisinin yapısını göstermek amacıyla basit bir örnek sunulacaktır. Göz önünde bulundurulan örnek, Şekil 2.1'de gösterilen tek gözlem problu ve çift pakrlı aralıklı düşey girişim testine aittir. Rezervuarın r yönündeki dış sınırı ile z yönünde alt ve üst sınırların akışa kapalı olduğu varsayılmıştır. Bu uygulamada $N_r=4$, $N_\theta=3$ ve $N_z=2$ olarak alınmıştır. Dolayısıyla toplam gridblok sayısı $N_r N_\theta N_z = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 'e eşittir. Bu örnekte sistemin, toplam iki tabakadan ve her tabakanın da z yönünde toplam bir gridbloktan oluştuğu düşünülmüştür. Üst tabakadaki kuyuya bitişik gridblokların θ yönünde (360°) üretime kapalı, ikinci (alttaki) tabakada kuyuya bitişik gridblokların θ yönünde tümüyle (360°) üretime açıktır. Bu örneğe ilişkin oluşturulan grid bloklar ve bunların sıralanması Şekil 2.8'de gösterilmiştir. Düşey gözlem probunun ($i=1, j=1, k=1$) indeksine sahip gridbloğunda, çiftli-paker (veya üretim) aralığının ise, ($i=1, j=1, k=2$), ($i=1, j=2, k=2$) ve ($i=1, j=3, k=2$) indeksine sahip gridbloklarda olduğu düşünülmüştür. Bu durumda, Denklem 2.52'den yazılacak iki adet kuyuiçi sınırlayıcı denklem ($N_w=2$) olacaktır.

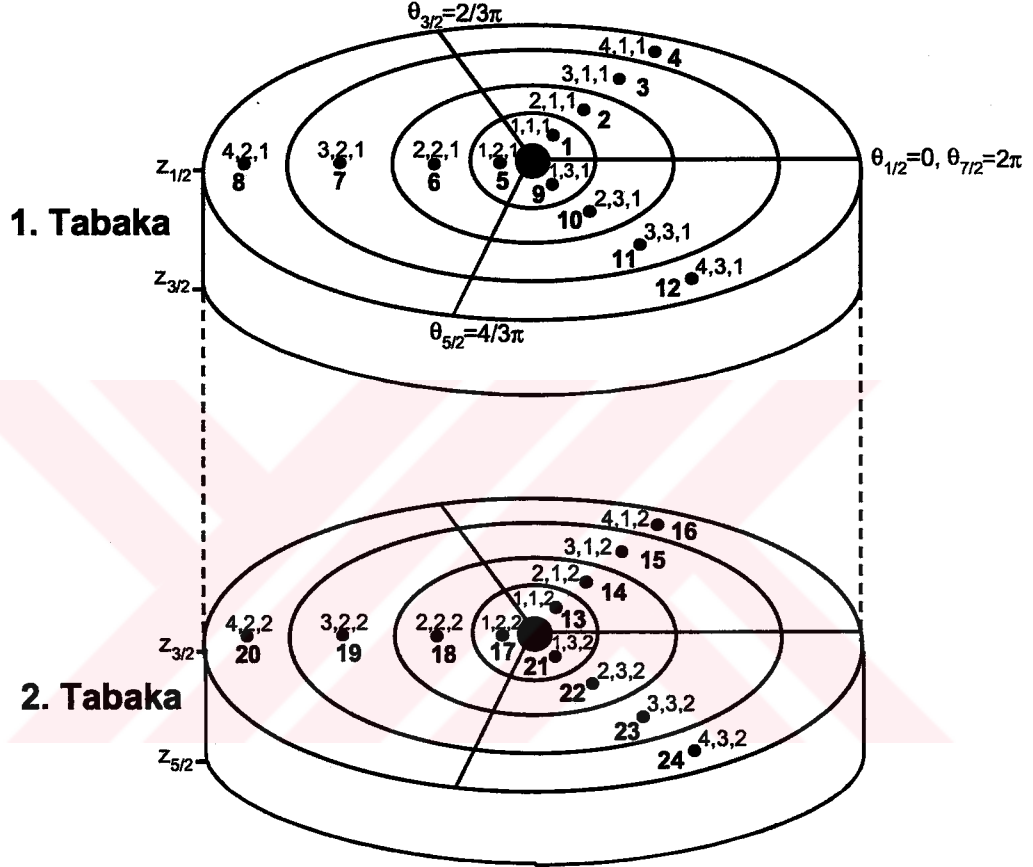
Çift pakrlı aralığı için kuyuiçi sınırlayıcı denklemini, $l=1$ olarak (Denklem 2.52, $l=1$) alırsak, bu aralıktaki kuyudibi akış basıncı $p_{wf,1}$ olarak temsil edilir. Çift paker aralığı için toplam üretime açık aralık sayısı $N_{a,1} = 1$ 'dir ve bu aralık için $\theta(j)$ 'yönünde üç gridblok üretime açıktır ($N_{\theta 1,1} = 1$ ve $N_{\theta 2,1} = 3$), $z(k)$ yönünde ise sadece bir gridblok üretime açıktır ($N_{h1,1} = 2$ ve $N_{h2,1} = 2$). Bu durum için, Denklem 2.52'den çiftli-paker aralığı için kuyuiçi sınırlayıcı denklem

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=2}^2 T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,1}^{n+1}) - \Psi_1^{n+1} p_{wf,1}^{n+1} = d_{w1}^n. \quad (2.57)$$

veya

$$T_{r,1/2,1,2}(p_{1,1,2}^{n+1} - p_{wf,1}^{n+1}) + T_{r,1/2,2,2}(p_{1,2,2}^{n+1} - p_{wf,1}^{n+1}) + T_{r,1/2,3,2}(p_{1,3,2}^{n+1} - p_{wf,1}^{n+1}) - \Psi_1^{n+1} p_{wf,1}^{n+1} = d_{w1}^n \quad (2.58)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, d_{w1}^n Denklem A-56 ile tanımlanır ve q_1 çiftli-paker aralığından yapılan (RB/gün cinsinden) kullanıcı tarafından zamanla değişimi belirlenmiş üretim debisini temsil etmektedir.



Şekil 2.8 İki tabakalı bir rezervuar örneğinde oluşturulan grid sistemi ve gridbloklarının sıralanmasının gösterimi.

Benzer şekilde, düşey gözlem probu kuyuiçi sınırlayıcı denklemi, Denklem 2.52'de $l=2$ alınarak yazılır. Bu durumda, düşey gözlem probu basıncı $p_{wf,2}$ olarak temsil edilecektir. Düşey gözlem probu içinde üretime açık toplam aralık sayısı 1'dir ($N_{a,2}=1$). Düşey gözlem probu, sadece kuyuya bitişik bir gridblok içersinde düşünüldüğünden ve bu gridblok ($i=1, j=1, k=1$) indeksine sahip olduğundan ve bu aralık için $\theta(j)$ yönünde bir gridblok üretime açıktır ($N_{\theta 1,2}=1$ ve $N_{\theta 2,2}=1$), $z(k)$ yönünde ise sadece bir gridblok üretime açıktır ($N_{h 1,2}=1$ ve $N_{h 2,2}=1$). Bu durum için, Denklem 2.52'den düşey-gözlem probu için kuyuiçi sınırlayıcı denklem

$$\sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^1 T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,2}^{n+1}) - \Psi_2^{n+1} p_{wf,2}^{n+1} = d_{w_2}^n. \quad (2.59)$$

veya

$$T_{r,1/2,1,1} (p_{1,1,1}^{n+1} - p_{wf,2}^{n+1}) - \Psi_2^{n+1} p_{wf,2}^{n+1} = d_{w_1,2}^n. \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $d_{w_1,2}^n$ Denklem A-56 ile tanımlanır ($l=2$) ve düşey gözlem probundan, üretim yapılmadığı durumda, Denklem A-56'daki üretim debisi $q_2 = 0$ alınır.

Şekil 2.8'deki sistem için çözülecek denklem takımında, toplam 26 adet denklem bulunacaktır. Bu denklem takımının ilk iki denklemi, sırasıyla Denklem 2.58 ve 2.60 ile tanımlı çift paker aralığı ve düşey gözlem probu kuyuiçi sınırlayıcı denklemleridir. Geri kalan 24 adet denklem ise, Denklem 2.53'den yazılacak sonlu fark denklemi olacaktır. Çözülecek bilinmeyen basınç sayısı, çift paker aralığı ve düşey gözlem probundaki kuyudibi akış basınçları ($p_{wf,1}$ ve $p_{wf,2}$) ve 24 adet gridblok basıncı olmak üzere toplam 26 olacaktır. Bu durumda, Denklem 2.56'da sunulan bilinmeyen basınç vektörü,

$$\bar{p}^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{wf,1}^{n+1} \\ p_{wf,2}^{n+1} \\ p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_{24}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

şeklinde yazılır. Bu noktada, Denklem 2.61'deki bilinmeyen basınç vektöründe bilinmeyen gridblok basınçlarını sıralamada izlenecek yolun, oluşacak katsayı matrisinin yapısını belirleyeceğini söylemek gerekir. İzlenecek sıralama tekil değildir. Eğer matris problemi ileride değinilecek bant matris algoritmaları ile çözümlenecek ise, bu algoritmaların en etken şekilde kullanımını sağlayacak sıralama, bant genişliğini en az yapacak sıralamadır. Bant genişliğini en aza indirmek için sıralamada izlenen temel kural: sıralamaya gridblok sayısının en az (diğer bir ifade

bilinmeyen basınç sayısının en az) olduğu yönden başlayarak, bilinmeyen sayısının artışı yöne devam etmektir. Bu sıralama, rezervuar simülasyonunda “doğal sıralama” (natural ordering) olarak isimlendirilmektedir (Aziz and Settari, 1979). İleride değinileceği gibi bant algoritmaları boyutu büyük olan problemler için oldukça fazla hafıza kullanımı gerektirdiklerinden ve ayrıca denklem takımlarına kuyucu sınırlayıcı denklemlerde de doğrudan dahil ettiğimizden bu tür bir sıralama çalışmada tercih edilmemiştir. Dolayısıyla, doğal sıralama yerine, çalışmada ticari simülatörlerde de tercih edilen, (i, j, k) üç-boyutlu indekslemesinde, önce ilk boyutu tanımlayan indekse (i 'ye göre), daha sonra ikinci boyutu tanımlayan indekse (j 'ye göre) ve son olarak da üçüncü indeks k 'ya göre sıralama yöntemi kullanılmıştır. Bir başka deyişle, çalışmada sıralamaya önce $r(i)$ -yönünde başlanmış, daha sonra $\theta(j)$ yönünde devam edilmiş ve $z(k)$ -yönünde sıralamayla sonlandırılmıştır. Örneğin, Şekil 2.8'de gösterilen gridblok sıralaması, bu sıralama kullanılarak elde edilmiştir. Bu sıralama kullanıldığında, her hangi bir (i, j, k) üç boyutlu indeksine sahip gridbloğu, tek boyutlu bir gridblok indeksi (s) cinsinden

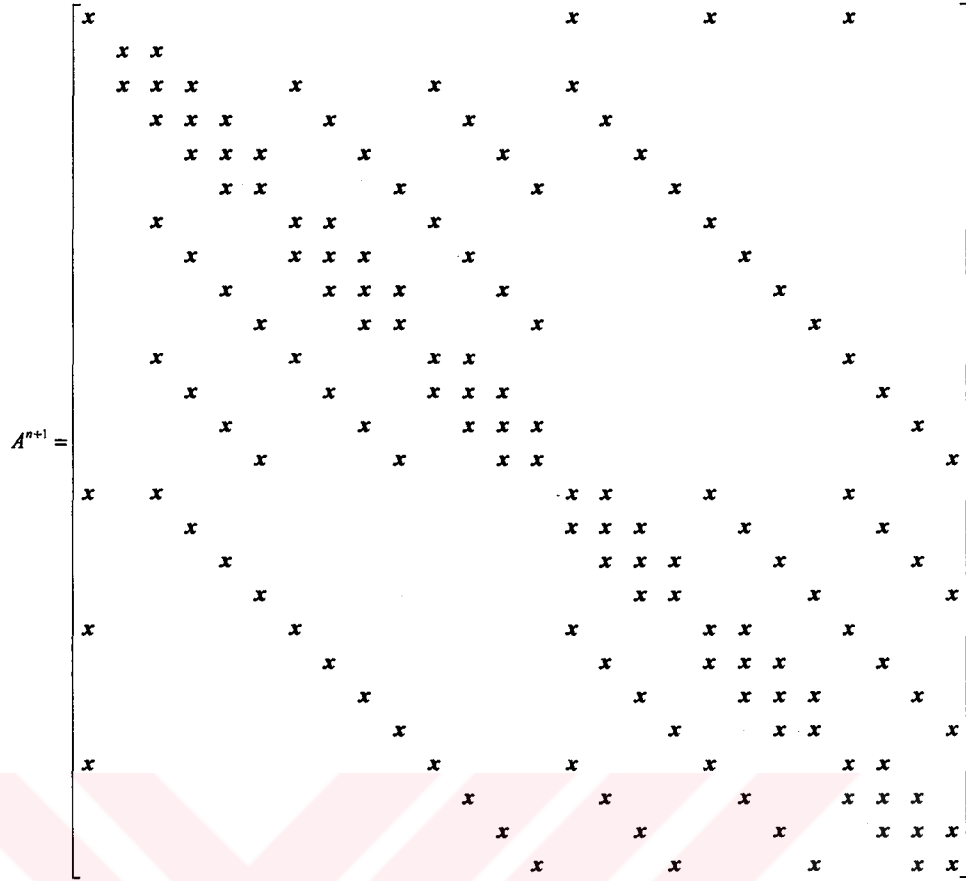
$$s = i + (j - 1) \times N_r + (k - 1) \times N_r \times N_\theta \quad (2.62)$$

denklemini kullanılarak temsil edilebilir. Örneğin, $N_r = 4$, $N_\theta = 3$ ve $N_z = 2$ olan bir grid sisteminde (Şekil 2.8) $(i=1, j=3, k=2)$ üç boyutlu indeksine sahip bir gridbloğu için, Denklem 2.62'den $s = 21$ olarak hesaplanır (Şekil 2.8). Bu tür tek boyutlu gridblok sıralamasında $s = 1, 2, \dots, N_r N_\theta N_z$ olacak şekilde değerler alır. Bu sıralama kullanıldığında, göz önünde bulundurduğumuz örnek uygulamada t^{n+1} zaman adımıda bilinmeyen üç boyutlu indekse sahip gridblok basınçları, $p_{1,1,1}, p_{2,1,1}, p_{3,1,1}, p_{4,1,1}, p_{1,2,1}, p_{2,2,1}, p_{3,2,1}, p_{4,2,1}, p_{1,3,1}, p_{2,3,1}, p_{3,3,1}, p_{4,3,1}, p_{1,1,2}, p_{2,1,2}, p_{3,1,2}, p_{4,1,2}, p_{1,2,2}, p_{2,2,2}, p_{3,2,2}, p_{4,2,2}, p_{1,3,2}, p_{2,3,2}, p_{3,3,2}, p_{4,3,2}$ basitçe $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}, p_{17}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}$ şeklinde tek boyutlu olarak sıralanabilir (Denklem 2.61). Bu örnek uygulama için Denklem 2.55'deki katsayı matrisi A 'nın yapısı Şekil 2.9'da gösterilmektedir. Şekil 2.9'da gösterilen “ x ” işaretleri, sıfırdan farklı olan elemanları göstermektedir. Şekil 2.9'da gösterilen matrisin boyutları $((24+2) \times (24+2))$ ve genel ifadeyle $(N_r N_\theta N_z + N_w) \times (N_r N_\theta N_z + N_w)$ şeklindedir. Yazılan simülatör için oluşturulan katsayı matrisi simetrik, seyrek (sparse). Seyrek matris, sıfır olan elemanları sayısının sıfır olmayan elemanları

sayısına oranı oldukça büyük olan matris olarak tanımlanır. Şekil 2.9’da gösterilen matris için bu oran $534/142 \approx 4$ ’tür.

Oluşan matris-vektör probleminin (Denklem 2.55) çözülmesi için kullanılacak temelde üç farklı matris çözümleme yöntemi mevcuttur. Bunlar, (1) bant matris algoritmaları (örneğin GBAND, Aziz ve Settari, 1979), (2) seyrek matris çözümleme algoritmaları (örneğin Yale Sparse matris algoritması, Eisenstat, 1977) ve (3) iteratif matris çözümleme yöntemleridir (örneğin, conjugate gradient, Meijerink ve Vender Vorst, 1977; SSIP yöntemi, Welty ve Meijerink, 1981).

Bant ve seyrek matris çözümleme yöntemleri temelde Gauss yok etme işlemini kullanan doğrudan matris çözümleme yöntemleridir. Bu nedenle, simülasyonda kullanılan toplam gridblok sayısının $N (=N_x \times N_y \times N_z)$ büyük olduğu durumlarda, bu yöntemler oldukça fazla hafıza kullanımı gerektirir ve hesaplama hızı bakımından da verimsizdir. Buna karşın, gridblok sayısının küçük seçildiği durumlarda, bu tür matris çözümleme yöntemleri hem hafıza gereksinimi hem de hız açısından en verimli olanlardır. Seyrek matris yöntemleri, matrisin seyrek yapısını göz önünde bulundurduğundan, bant algoritmalarına göre daha az hafıza ve işlem zamanı gerektirir. Çünkü bant algoritmaları, bant genişliği içindeki tüm elemanları işlemlere dahil ederler ve bu nedenle bant genişliği arasında yer alan “sıfır” olan elemanlarda gereksiz yere hafızalanmak ve işlemlere dahil edilmek zorundadır. Çalışmamızda, hem bant matris algoritması GBAND hem de sparse matris çözümleme algoritması YALE göz önünde bulundurulmuştur. Bunlara ilave olarak, SSIP (Symmetric Strongly Implicit Procedure) ve ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) yöntemleride kullanılarak matris problemi çözülmüştür. Genelde, bahsedilen bu matris çözümleme algoritmaları ile yapılan uygulamalarımızda, SSIP yönteminin diğer yöntemlere göre daha az hafıza gereksinimi ve oldukça hızlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle geliştirilen simülatörde tercih edilmiş matris çözüm yöntemi SSIP olmuştur.



Şekil 2.9 Yapılan örnek uygulama için oluşan katsayı matrisi A .

2.4 Geliştirilen r - θ - z Sayısal Simülâtörünün Doğruluğunun Sınanması

Bu bölümde geliştirilen simülâtörün doğruluğu, analitik çözümlerden ve ECLIPSE 100 ticari simülâtöründen elde edilen sonuçlarla sınanmaktadır. Bunun için toplam 4 adet örnek uygulama aşağıda sunulmaktadır. Aşağıda verilecek tüm uygulamalarda, aksi belirtilmedikçe r yönünde gridbloklar MacDonald-Coats yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır ve rezervuar yarıçapı, $r_e = 5000$ ft olarak alınmıştır. Tüm uygulamalar yapılırken simülâtörde çözüm yöntemi olarak SSIP matris çözümleme algoritması kullanılmıştır.

2.4.1 İki tabakalı çift paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği.

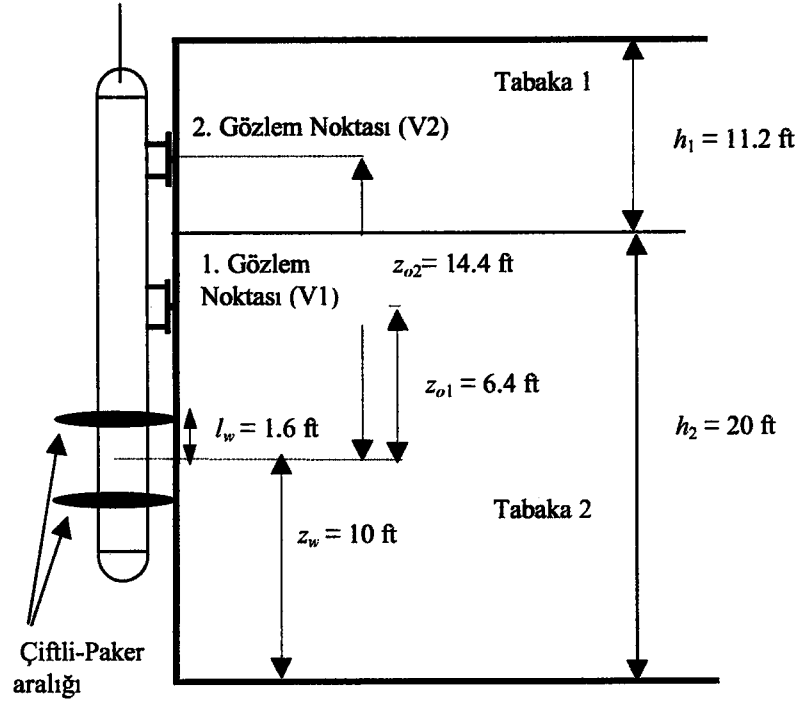
İlk olarak, Şekil 2.10'da gösterilen 2 tabakalı çiftli-paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği gözönünde bulundurulmuştur. Teste ilişkin model parametre değerleri Tablo 2.1'de sunulmuştur. Bu örnekte paker aralığında ve düşey gözlem noktalarında kuyuiçi depolama ve zar faktörü etkileri göz önünde

bulundurulmamıştır. Geliştirilen simülatör sonuçları, Kuchuk ve Onur (2003) tarafından sunulan analitik çözümden ve ticari simülatör ECLIPSE 100'den elde edilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Hem ECLIPSE 100 hem de bu çalışmada geliştirilen sayısal simülatör çalıştırılırken aynı blok merkezli grid sistemi göz önünde bulundurulmuş ve r yönünde 25, z yönünde 77 gridblok olmak üzere toplam $N = 25 \times 77 = 1925$ gridblok kullanılmıştır. Bu uygulamada z yönünde hemen hemen eş uzunluklu sayılacak gridbloklar (yaklaşık 0.4 ft uzunluğunda) kullanılmıştır. Bu uygulamada θ yönünde 1 gridblok kullanılmış bir başka değişle θ yönünde akış göz önünde bulundurulmamıştır çünkü kıyaslanacak analitik model çözümlerinde θ yönünde akış göz önünde bulundurulmamaktadır. Tablo 2.1'de verilen k_h değerleri bu problem için r yönündeki geçirgenlikleri, k_v 'ler ise düşey yöndeki (z yönündeki) geçirgenlikleri temsil etmektedir.

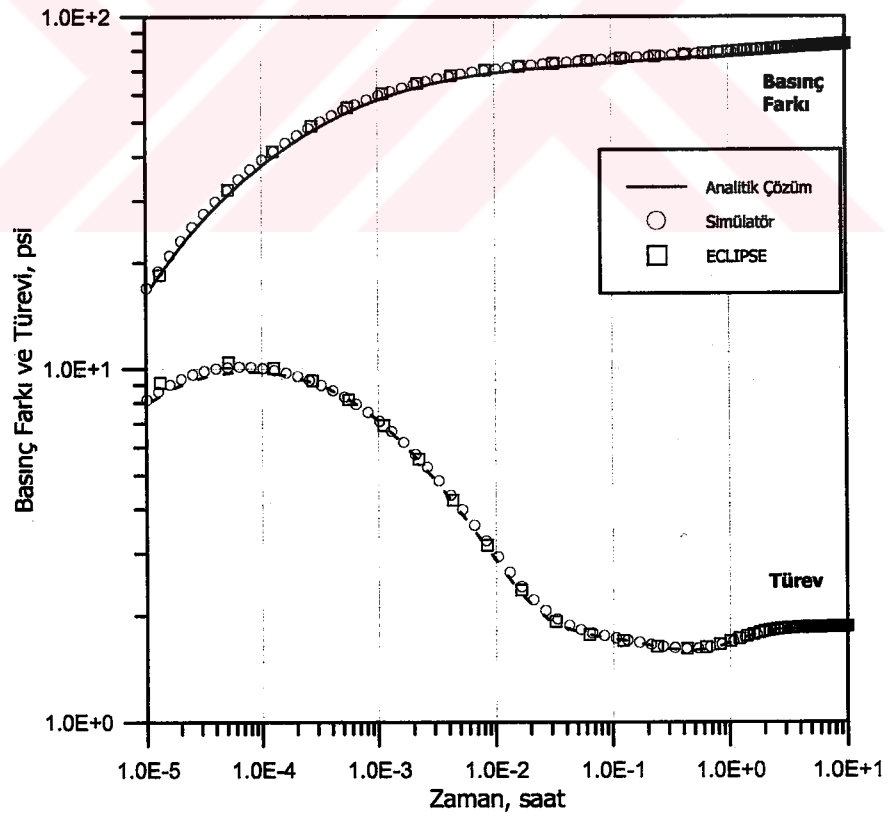
İki tabakalı test örneği için, analitik çözümden, ECLIPSE 100'den ve bu çalışmada yazılan simülatörden elde edilen paker aralığı, 1. ve 2. gözlem problemlerine ait basınç farkı ve bu basınç farkı verilerinin logaritmik türevleri sırasıyla, Şekil 2.10, Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'de sunulmuştur. Bu şekillerden görüleceği gibi geliştirilen sayısal simülatörlerden elde edilen sonuçlar, hem analitik hem de ECLIPSE 100 ticari simülatöründen elde edilen sonuçlarla çok iyi bir uyum içerisindedir. Şekil 2.10'da simülatörden ve ECLIPSE 100'den elde edilen paker aralığı basınçlarının az da olsa hemen hemen sabit bir miktar analitik çözümden elde edilen basınç farkının üstüne düşmektedir. Bunun nedeni, bir sonraki uygulamada detaylı tartışıldığı gibi, kullanılan grid sistemi ve/veya z yönünde kullanılan grid sayısı ile ilişkilidir.

Tablo 2.1 Şekil 2.10'da verilen iki tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri

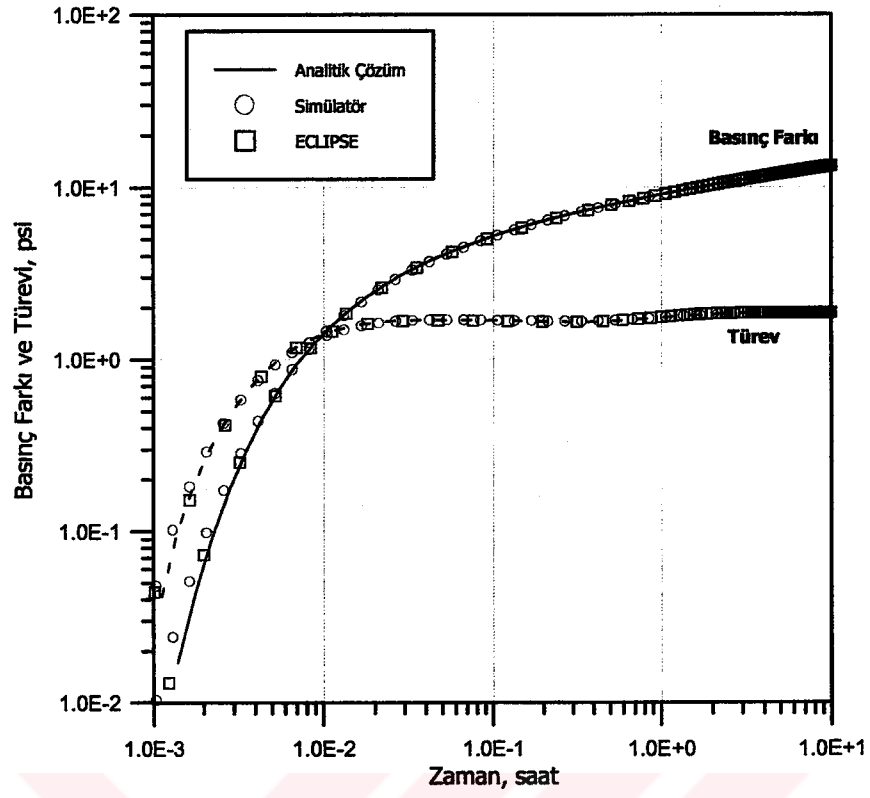
ϕ_1 ,	0.2
ϕ_2 ,	0.2
k_{h1} , mD	5.0
k_{h2} , mD	100
k_{v1} , mD	1.0
k_{v2} , mD	10.
h_1 , ft	11.2
h_2 , ft	20
$c_{f1}=c_{f2}$, psi ⁻¹	1.0×10^{-5}
$\mu_1=\mu_2$, cp	1.0
r_w , ft	0.328
q , bbl/D	54.3



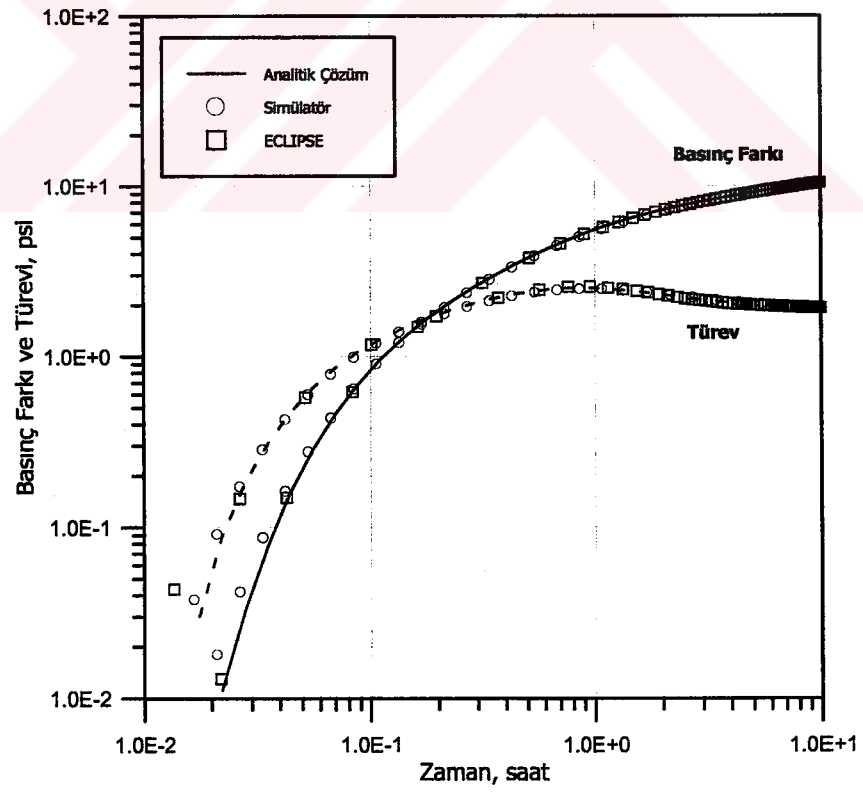
Şekil 2.10 2 tabakalı bir sistemde, çift pakierlı ve iki gözlem problu düşey girişim testine ait şema.



Şekil 2.11 Paker aralığında oluşan basmaç farkı ve logaritmik türevi zamanla değişimi.



Şekil 2.12 Birinci gözlem noktasında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.



Şekil 2.13 İkinci gözlem noktasında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi.

2.4.2 Üç tabakalı çift pakler aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği

Bu örnekte Şekil 2.14'de gösterilen 3 tabakalı çiftli-pakler ve 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği göz önünde bulundurulmuştur. Teste ilişkin model parametre değerleri Tablo 2.2'de özetlenmiştir. Bu uygulamada toplam $N = 2500$ ($N_r = 50, N_\theta = 1, N_z = 50$) simülatör bloğu göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca, bu örnek uygulamada pakler aralığında kuyuiçi depolaması ve zar faktörü etkileri göz önünde bulundurulmuştur. Gözlem noktası problemlerinde kuyuiçi depolama etkileri göz önünde bulundurulmamıştır. Dolayısıyla, bu uygulamada amaçlardan biri de, simülatör sonuçlarımızın pakler aralığında kuyuiçi depolaması ve zar etkileri olduğunda analitik ve ticari ECLIPSE 100 simülatör sonuçları ile uyumlu olup olmadığını araştırmaktır. Tablo 2.2'de verilen $C = 10^{-3}$ bbl/psi değeri pakler aralığı için kullanılan kuyuiçi depolama katsayısı değerini ve $S = 2$ ise zar faktörü değerini temsil etmektedir. Bu uygulamada sunulan sonuçlar simülatörde zar faktörü etkisi ince zar faktörü kavramıyla modellenerek elde edilmiştir. Ancak, burada gösterilmemekle beraber, Hawkins'ın kalın zar faktörü kavramı kullanılarak da zar etkisi modellenmiş ve iki farklı kavram kullanılarak elde edilen sonuçlar arasında bu uygulama için önemli bir fark gözlemlenmemiştir. Hem geliştirdiğimiz simülatör hem de ticari ECLIPSE 100 simülatörü aynı blok-merkezli grid sistemi ve Tablo 2.2'deki parametre değerleri için ayrı ayrı çalıştırılmıştır. Her iki simülatörden ve Kuchuk ve Onur (2003) tarafından sunulan analitik çözümden elde edilen pakler aralığı, 1. ve 2. düşey gözlem noktalarındaki basınç farkı ve türev verileri kıyaslamalı olarak sırasıyla Şekil 2.15, Şekil 2.16 ve Şekil 2.17'de sunulmuştur. Analitik çözüm zar faktörünü ince zar kavramına göre modellemektedir. ECLIPSE 100'de ise zar faktörünü nasıl modellediği kesin olarak bilinmemektedir. Bu şekillerden görüleceği gibi geliştirdiğimiz simülatör sonuçları ile analitik model ve ECLIPSE 100'ün sonuçları arasında iyi bir uyum söz konusudur.

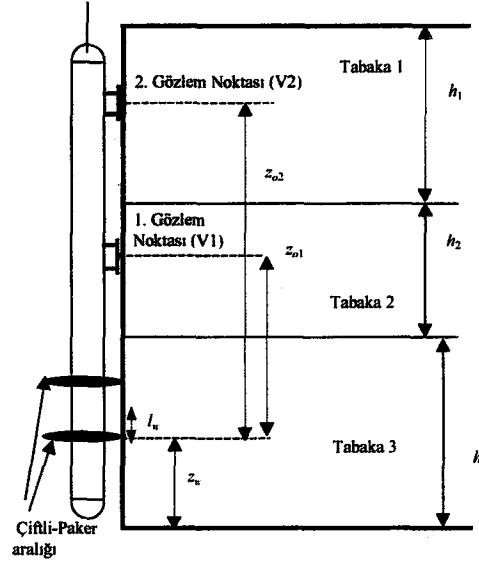
Bundan önceki örnek uygulamada da olduğu gibi, geliştirilen simülatör ve ECLIPSE 100 ticari simülatöründen elde edilen pakler-aralığı basınç farkları geç zamanlarda analitik çözümden elde edilen basınç farkı çözümünün bir sabit kadar üstündedir. Bu fark, Şekil 2.17 için yaklaşık 5.5 psi civarındadır. Her ne kadar bu fark pratikte önemli bir fark değilse de, bu sabit farkın neden oluştuğunu araştırma yoluna

gidilmiştir. Genellikle ticari simülatorlerde (örneğin ECLIPSE 100'de olduğu gibi) blok merkezli grid sistemleri tercih edilmektedir.

Bunun temel nedeni, bu grid sisteminde rezervuarın bloklara bölünerek temsil edilmesini sağladığından, kullanıcılar tarafından bu grid sisteminin algılanmasının kolaylığındandır. Bununla beraber, Settari ve Aziz (1972) ile Nacul ve Aziz (1991) yaptıkları çalışmalarda, daha önce değinilen grid noktalarının eş uzunluklu olmadığı durumlarda, nokta-dağılımlı grid sisteminin blok-merkezli grid sisteme göre daha doğru sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. Eş uzunluklu grid noktaları kullanıldığında, her iki grid sistemi birbirinin aynısı olmaktadır. Bu noktayı araştırmak üzere, z yönünde 50 grid noktasından oluşan nokta-dağılımlı bir grid sistemi kullanılarak simülator tekrar çalıştırılmış ve paker aralığı basınç farkı ve türevi için elde edilen sonuçlar analitik ve 50 blok-merkezli grid sisteminden elde edilen sonuçlarla kıyaslamalı olarak Şekil 2.18'de sunulmuştur. Burada not edilmesi gereken, her iki grid sistemi yapısal olarak birbirine çok yakındır ve ayrıca her iki sistemde de çözülen grid blok basıncı sayısı ($N=N_r N_\theta N_z = 2500$) aynıdır.

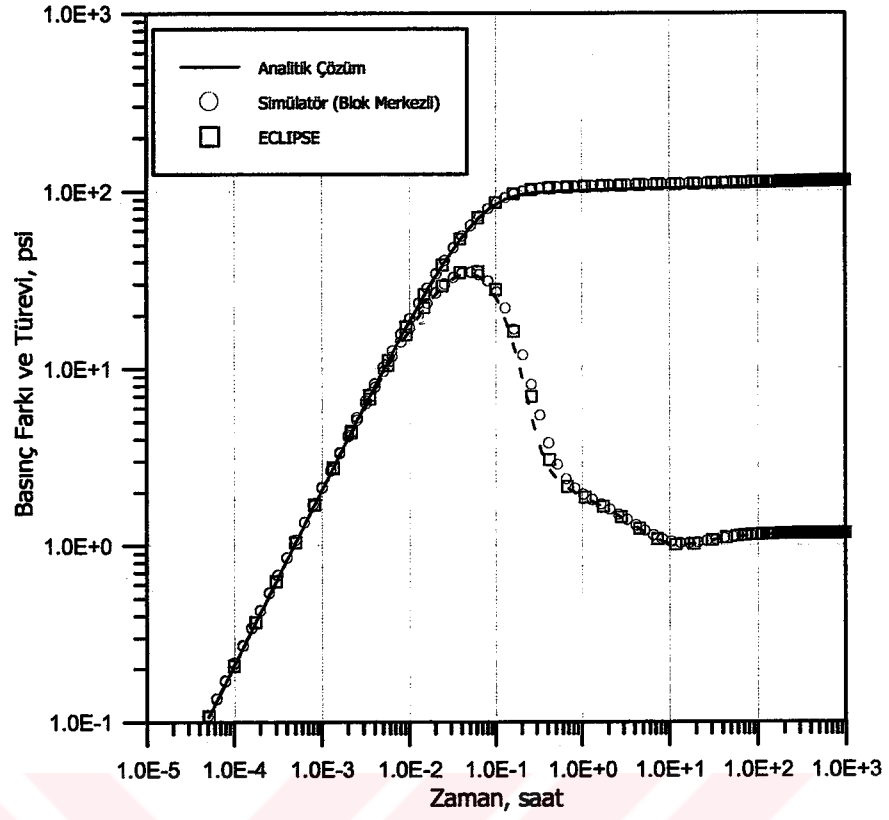
Tablo 2.2 Şekil 2.14'de verilen üç tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.

ϕ_1 ,	0.245
ϕ_2 ,	0.110
ϕ_3 ,	0.205
k_{h1} , mD	50
k_{h2} , mD	5
k_{h3} , mD	100
k_{v1} , mD	15
k_{v2} , mD	1
k_{v3} , mD	50
h_1 , ft	23.3
h_2 , ft	9.5
h_3 , ft	18
$c_{t1}=c_{t2}=c_{t3}$, psi ⁻¹	4.5×10^{-5}
$\mu_1=\mu_2=\mu_3$, cp	1.0
r_w , ft	0.354
q , bbl/D	50.0
C , bbl/psi	0.001
S	2.0
z_w , ft	15.3
z_{o1} , ft	6.5
z_{o2} , ft	14.5
l_w , ft	1.6

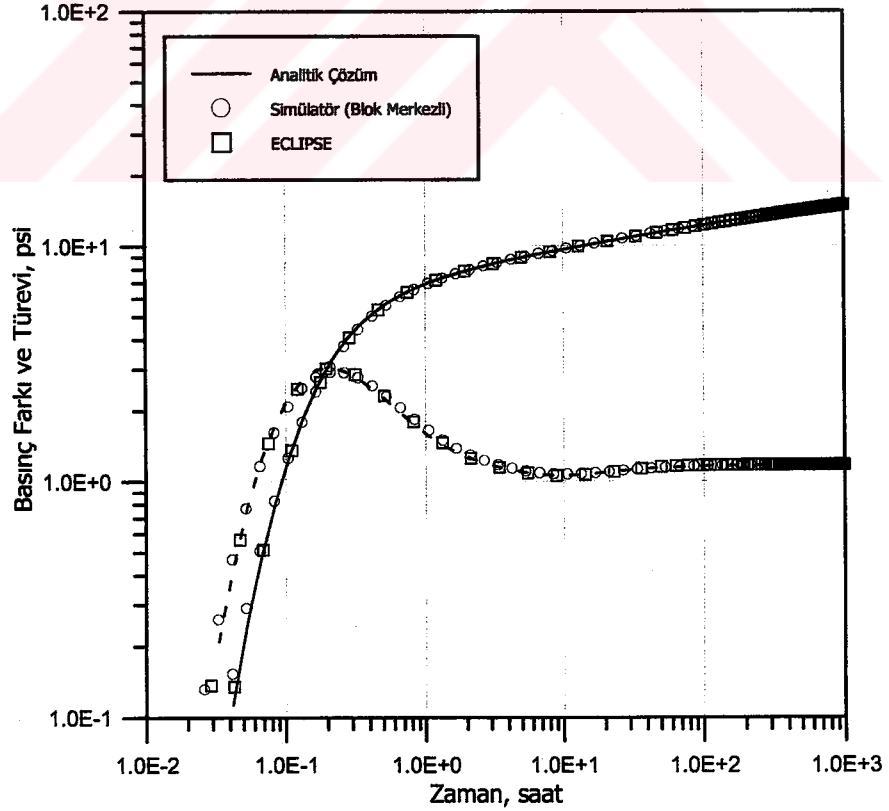


Şekil 2.14 3 tabakalı bir sistemde çift pakerlı ve iki gözlem problu düşey girişim testine ait şema.

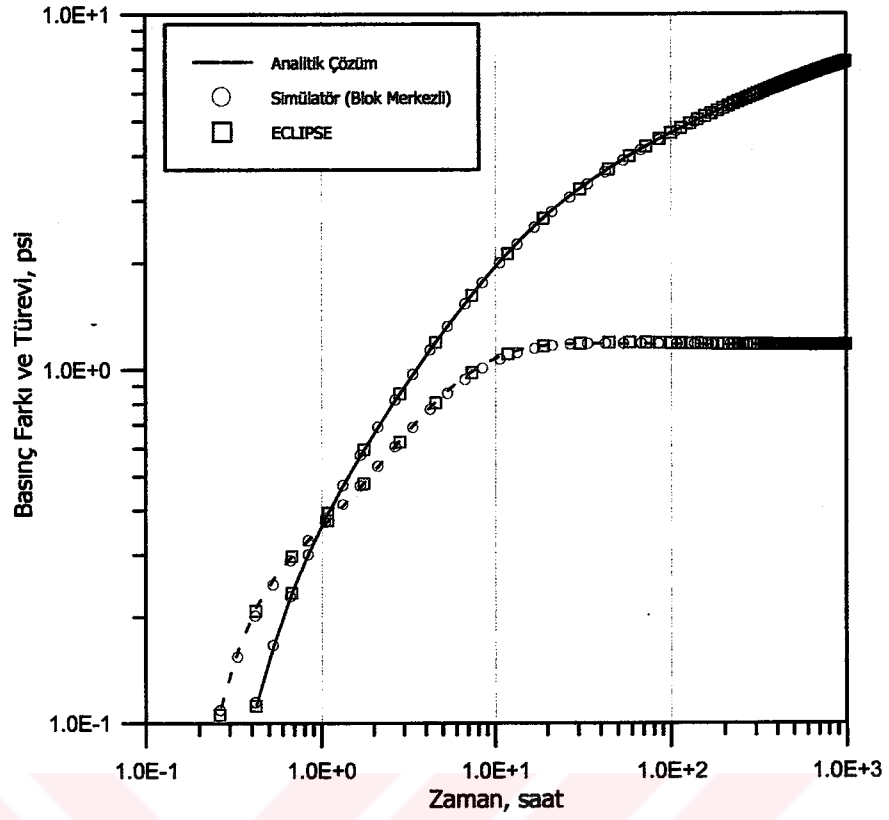
Şekil 2.18'den görüleceği gibi, ilginç bir şekilde nokta dağılımlı grid sisteminden edilen sonuçlar ile analitik çözümden elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum söz konusudur. Settari ve Aziz (1972) ile Nacul ve Aziz (1991)'in elde ettiği sonuçlar ile burada elde edilen sonuçlar tutarlıdır. Nokta dağılımlı eş uzunluklu olmayan grid sistemi, blok merkezli eş uzunluklu olmayan grid sistemine göre daha doğru sonuç vermektedir. Ancak bu sonuç, blok merkezli grid sistemi ile analitik çözüm arasındaki farkın azaltılamayacağı anlamına gelmemektedir. Burada gösterilmemekle beraber, z yönünde daha fazla sayıda gridbloğu kullanıldığında analitik çözüm ile blok merkezli grid ile elde edilen çözüm arasındaki fark azaltılabilmektedir. Ancak, nokta dağılımlı grid sistemine göre, analitik çözümle aynı doğruluğu yakalamak için daha fazla gridbloğa sahip blok merkezli grid sistemi kullanmak gerekmektedir. Kısaca elde ettiğimiz sonuçlarımızı özetleyecek olursak, simülasyonda çiftli-paker aralığında basıncı hassas olarak hesaplamak için, üretime açık paker aralığı içinde ve bu aralığın uçlarına yakın bölgelerde z yönünde, diğer bölgelere göre, daha küçük uzunluklu gridblokların kullanılması gerekli olmaktadır. Bu sonuç her iki grid sistemi için geçerlidir. Ancak, nokta dağılımlı grid sistemi, blok merkezli grid sistemine göre analitik çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir. Üretim yapılmayan gözlem problemlerinde, bu problemlerin bulunduğu bölgede probun alanına yakın büyüklükte bir kaç gridblok kullanmak genellikle düşey gözlem problemleri için analitik çözümle uyumlu basınçların elde edilmesinde yeterlidir.



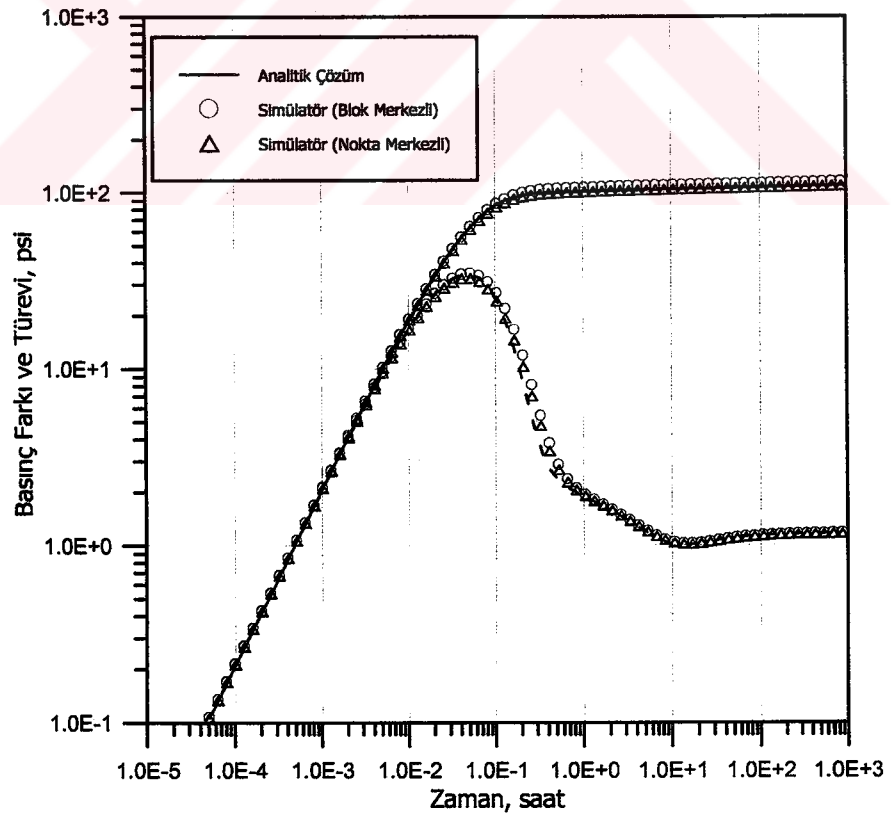
Şekil 2.15 Parker aralığında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi



Şekil 2.16 Birinci gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi



Şekil 2.17 İkinci gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi



Şekil 2.18 Blokmerkezli ve nokta merkezli grid sistemlerinde pakler aralığında oluşan basınç farkı ve logaritmik türevi zaman davranışı.

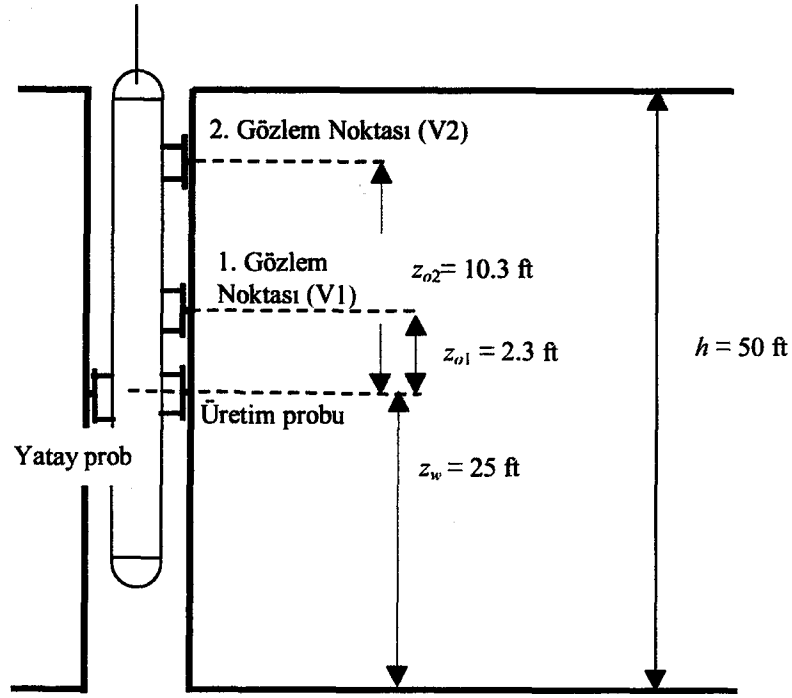
2.4.3 Tek tabakalı dört problu düşey girişim testi örneği.

Bu örnekte Şekil 2.19'da gösterilen tek tabakalı dört (üretim, yatay ve 1. ve 2. düşey) problu bir düşey girişim testi örneği göz önünde bulundurulmuştur. Bu örnekte, kuyu yüzeyinden küçük bir açık aralıktan üretim yapan üretim probu ile yatay, 1. düşey ve 2. düşey gözlem problemler için simülatörden elde edilen sonuçlar ile analitik ve ECLIPSE 100 ticari simülatöründen elde edilen sonuçlar kıyaslanmaktadır. Teste ilişkin model parametre değerleri Tablo 2.3'de özetlenmiştir. Bu uygulamada toplam $N = 19656$ ($N_r = 26, N_\theta = 12, N_z = 63$) simülatör bloğu göz önünde bulundurulmuştur ve akış simetrik olduğundan yarım bir sistem modellenmiştir. Diğer bir ifade ile, akışın $\theta = 0$ ile $\theta = \pi$ arasında olduğu kabul edilmiştir. r - θ düzleminde grid yapısı Şekil 2.20'de, r - z düzleminde grid yapısı ise Şekil 2.21'de gösterilmiştir. Bu örnekte sadece üretim probunda kuyuiçi depolama etkisi göz önünde bulundurulmuştur ve depolama katsayısı, $C = 7.5 \times 10^{-9}$ RB/psi olarak seçilmiştir. Uygulamada zar etkileri göz önünde bulundurulmamıştır. Bu problemde θ yönünde de akışı göz önünde bulundurduğumuzdan, θ -yönündeki geçirgenlik r yönünde aynı olarak alınmıştır, yani, $k_r = k_\theta = k_h = 50$ md.

Tablo 2.3 Şekil 2.19'da verilen tek tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri.

ϕ	0.15
k_h , mD	50.
k_v , mD	5.
h , ft	50.
c , psi ⁻¹	1.0×10^{-5}
μ , cp	0.8
r_w , ft	0.328
q , bbl/D	8.46
$r_s = r_h = r_{v1} = r_{v2}$, cm,	0.556

Bu uygulamada kuyu yüzeyinde oldukça küçük sayılabilecek bir aralıktan üretim yapıldığından, özellikle üretim probunun (sink probe) içinde bulunduğu bloğun boyutları ile civarındaki grid blokların seçimi paketi problemine göre daha fazla önem arz etmektedir. Üretim probunun içinde bulunduğu gridbloğunun boyutlarının bulunmasında, kuyuya bitişik üretim açık gridbloğunun r - z düzlemindeki yüzey alanının üretim probunun üretime açık alanına eşit olarak alınmıştır. Bu yöntemin oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



Şekil 2.19 Tek tabakalı bir sistemde dört probu düşey girişim testi gösterimi.

Yukarda verilen yöntemde,

$$\pi r_s^2 = (r_w \Delta \theta) \Delta z \quad (2.63)$$

olmalıdır. Burada r_s , üretim probunun yarıçapı, $\Delta \theta$ bu gridbloğun θ -yönünde radyan cinsinden uzunluğu ve Δz ise, bu gridbloğunun z yönündeki büyüklüğüdür. Bu bloğun ark uzunluğu ($r_w \Delta \theta$) ile z yönündeki büyüklüğünü eşit olarak aldığımızda, $(r_w \Delta \theta) = \Delta z$, Denklem 2.63'ten bu gridbloğunun probun yarıçapı cinsinden z yönündeki boyutunu belirleyebiliriz:

$$\Delta z = \sqrt{\pi} r_s \quad (2.64)$$

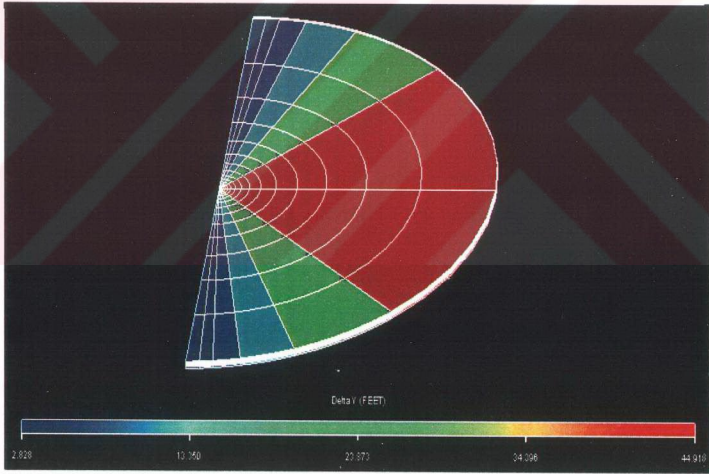
Daha sonra da, bu gridbloğun θ yönünde radyan cinsinden “uzunluğu” $\Delta \theta$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta z}{r_w} \quad (2.65)$$

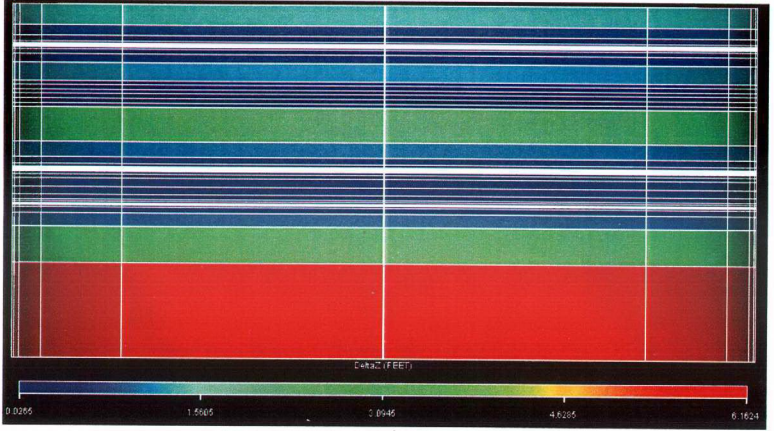
Bu gridbloğunun r yönündeki uzunluğu Δr ise, z yönündeki uzunluğuna eşit olarak alınabilir:

$$\Delta r = \Delta z \quad (2.66)$$

Örneğin prob yarıçapı, $r_s = 0.0182$ ft (veya 0.556 cm) ve kuyu yarıçapı $r_w = 0.328$ ft olduğunda, Denklem 2.64-2.66'dan, $\Delta z = \Delta r = 0.0323$ ft ve $\Delta\theta = 9.857 \times 10^{-2}$ radians (veya 5.648 derece ve yarım silindir sistem modellendiğinden $\Delta\theta/2 = 5.648/2 = 2.824$ derece alınır). Yukardaki yöntemden üretim probu gridbloğu için hesaplanan değerlerden başlanarak, yaratılan r - θ düzlemindeki grid yapısı Şekil 2.20'de, r - z düzleminde grid yapısı ise Şekil 2.21'de gösterilmiştir. Bu şekillerden görüleceği gibi, üretim ve yatay gözlem probundan uzaklaştıkça logaritmik (yani logaritmik eksenle eş uzunluklu) olarak r , θ ve z yönlerinde daha uzun gridbloklar seçilmiştir. Bu uygulamada, r yönündeki grid noktaları, Denklem 2.39'dan hesaplanmıştır.



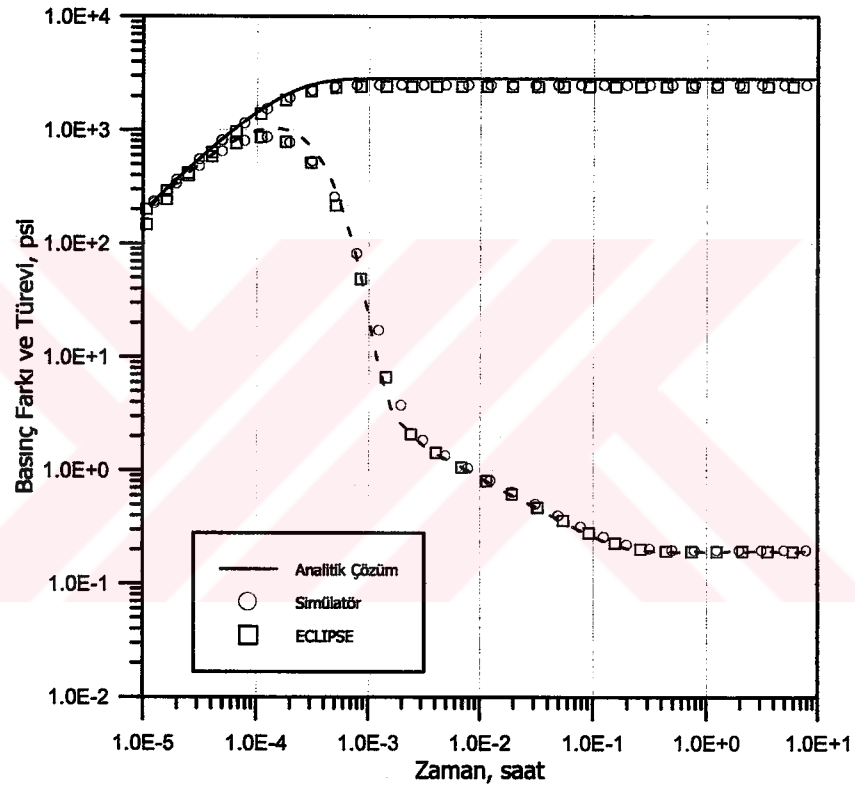
Şekil 2.20 Şekil 2.19'daki testi modellemek için r - θ düzleminde kullanılan grid sisteminin gösterimi.



Şekil 2.21 Şekil 2.19'daki testi modellemek için r - z düzleminde kullanılan grid sisteminin gösterimi

Şekil 2.22, Şekil 2.23, Şekil 2.24 ve Şekil 2.25'de sırasıyla üretim probu ile yatay, 1. düşey ve 2. düşey gözlem problemlerinde elde edilen basınç farkı ve türev verilerinin zamanla değişimi analitik çözümden (Kuchuk, 1994) ve ECLIPSE ticari simülatöründen elde edilen sonuçlar ile kıyaslamalı olarak gösterilmektedir. Bu şekillerden görüleceği gibi, geç zamanlardaki üretim probu basınç farkı hariç, diğer problemler için simülatörümüzden elde edilen sonuçlar, analitik ve ECLIPSE 100'den elde edilen sonuçlar ile gayet iyi uyumaktadır. Üretim probu için bizim simülatörümüzden elde edilen basınç farkı, geç zamanlarda analitik çözüme ECLIPSE 100 göre daha yakın olmasına rağmen, yaklaşık 200 psi'lık sabit bir farkla analitik çözümün altındadır. İlginç olan, her üç yöntemden üretim probu için elde edilen türev verileri birbiri ile mükemmel sayılabilecek bir uyum içinde olmasıdır. Üretim probu için geç zamanlarda gözlemlenen bu sabit fark yaptığımız diğer çok tabakalı uygulamalarda da gözlemlenmiştir. Bunun olası nedenlerinden biri, analitik çözümde üretim probunun modellenmesiyle, simülatörde modellenmesi arasındaki farklılık olarak düşünülmektedir. Çünkü analitik modellemede de üretim probu tam geometrisi dikkate alınarak modellenememektedir. Onun yerine üretim probu bir şekil faktörü yardımıyla modellenmektedir. Ayrıca, üretim probu ile akışkan çok küçük bir alandan geçmeye zorlandığından, üretim probunda hem basınç farkları çok

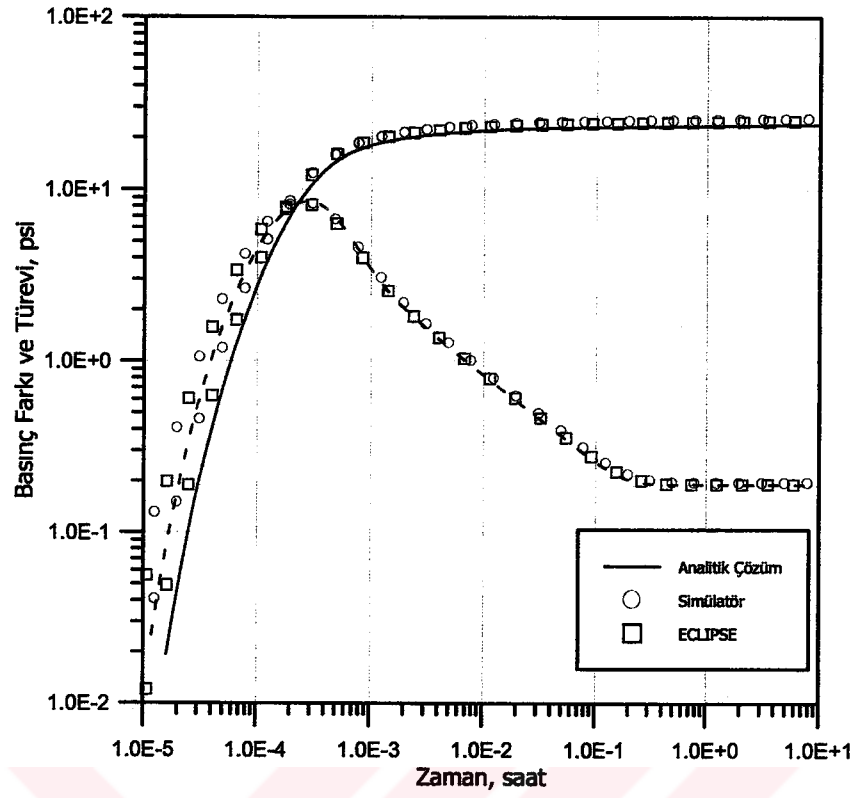
büyük olmakta hem de akışkan üretim probu civarında oldukça yüksek hızlarda akmaktadır. Bundan dolayı, üretim probu civarında çözülmüş gaz ihtiva eden sistemlerde iki fazlı akış ve/veya Darcy olmayan akış etkilerinin oluşmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle, genellikle üretim probu basınç verileri parametre tahminlerinde kullanılmamaktadır. O yüzden, daha önce bahsedilen grid yapısının, üretimin olmadığı yatay, düşey gözlem problemleri için analitik çözümle bu örnekte olduğu gibi gayet uyumlu sonuçlar verdiği gözlemlendiğinden, çalışmada üretim probundaki basınç farkını analitik çözüme daha uyumlu hale getirecek grid yapısını bulmak için fazla zaman harcanmamıştır.



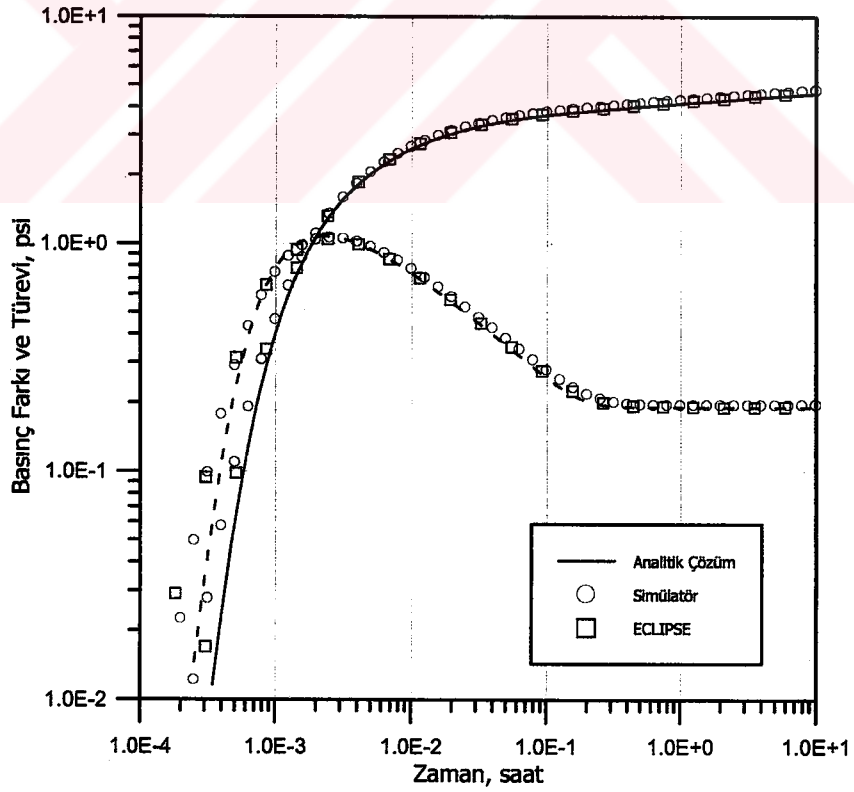
Şekil 2.22 Üretim probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi (çoklu prob test örneği).

2.4.4 Tek tabakalı heterojen bir sistemde çift paker aralıklı 2 gözlem noktalı düşey girişim testi örneği

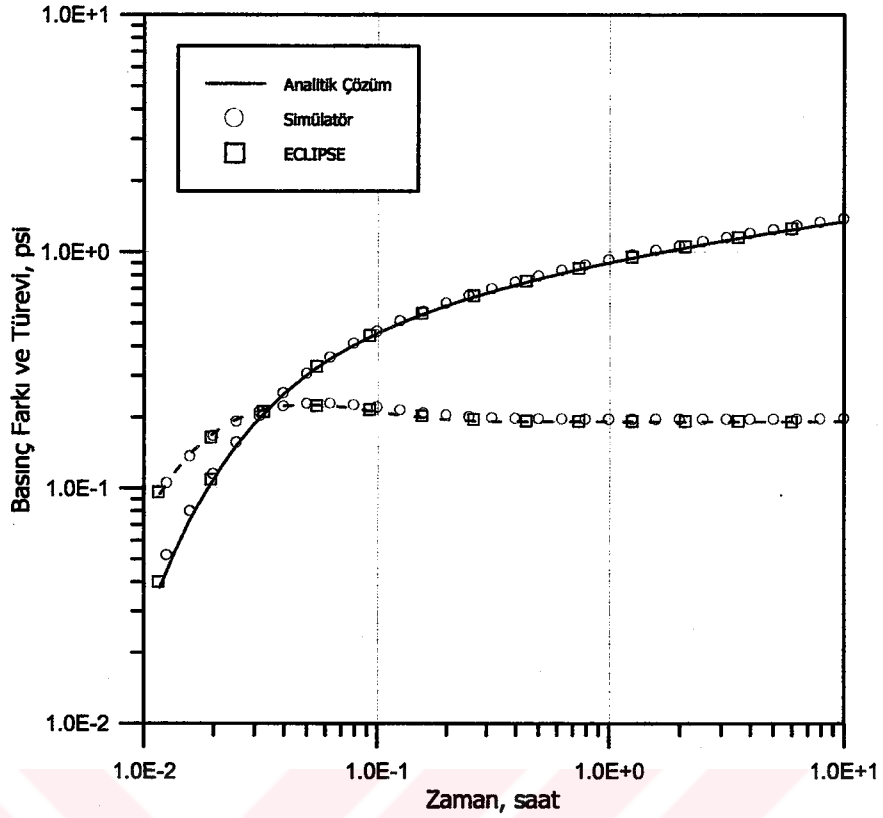
Son olarak tek tabakalı bir sistemde (Şekil 2.26) r ve z yönünde geçirgenlik ve gözenekliliği heterojen olan bir rezervuar sistemi göz önünde bulundurulmuştur. Bu uygulamada r ve z yönündeki geçirgenliklerin birbirine eşit ($k_r = k_z = k$), ancak



Şekil 2.23 Yatay gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi



Şekil 2.24 Birinci düşey gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi

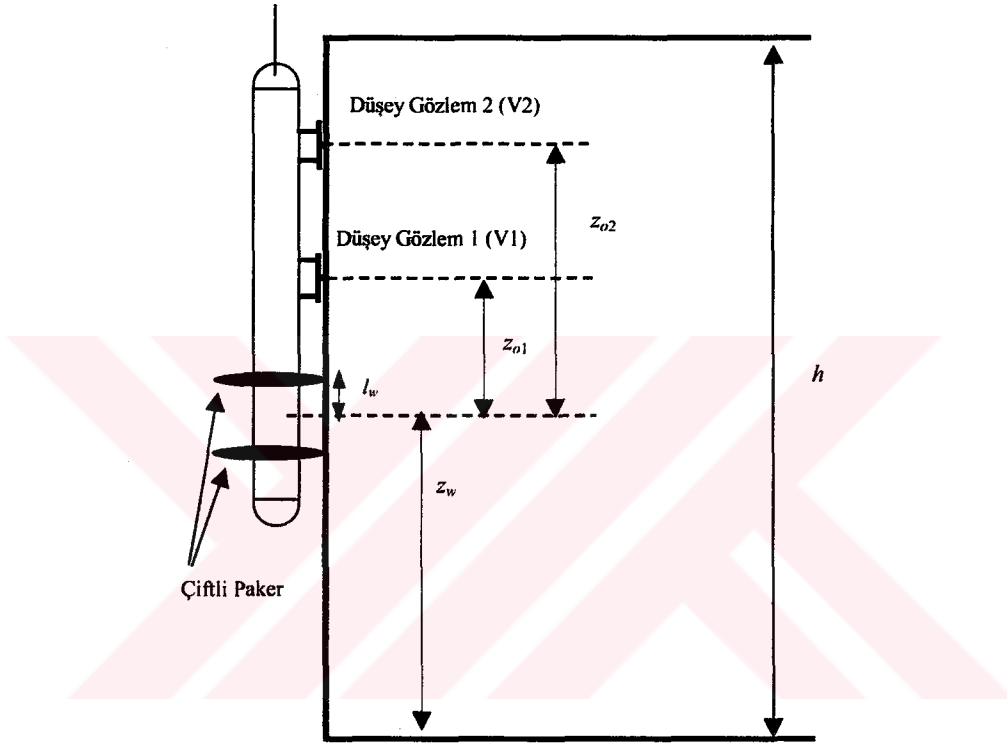


Şekil 2.25 İkinci düşey gözlem probunda oluşan basınç farkı ve logaritmik türevinin zamanla değişimi

heterojen olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, θ yönünde akış ihmal edilmiş, yani $N_\theta = 1$ olarak alınmıştır. Simülatör r - z iki boyutlu bir akış için çalıştırılmıştır. Simülasyonda toplam $N=4000$ ($N_r = 80, N_\theta = 1, N_z = 50$) simülatör bloğu kullanılmıştır. Kuyuiçi depolaması ve zar etkileri göz önünde bulundurulmamıştır. Bu uygulamada amaç, geliştirilen 3 boyutlu simülatörün, heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik durumlarında ticari ECLIPSE 100 simülatörü ile aynı sonuçları verip vermediğini araştırmaktır. Bu uygulama için analitik çözüm olmadığından dolayı, kıyaslamada sadece ECLIPSE 100 ticari simülatörü göz önünde bulundurulmuştur.

Bu uygulamada kullanılan r yönünde heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik sahaları Journel and Huijbergs (1978) tarafından sunulan Cholesky ayrışım yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Geçirgenliğin log-normal ($\ln k$) dağılımlı olduğu (ortalaması 3.89 ve saçılımı (varyansı) 1), gözenekliliğin normal dağılımlı (ortalaması 0.25 ve saçılımı 0.0025) olduğu kabul edilmiştir. Hem geçirgenliğin hem de gözenekliliğin korelasyon uzunluğunun (range) 200 ft ve varyogram modelinin de küresel olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, $\ln k$ ve gözenekliliğin birbiri ile korelasyonlu (korelasyon

katsayısı 0.7) olduğu düşünülmüştür (Şekil 2.27). Bu uygulamada türetilen geçirgenlik ve gözeneklilik verilerinin r yönündeki değişimi Şekil 2.28’de sunulmuştur. İlgili model parametre verileri Tablo 2.4 ve Tablo 2.5’de sunulmaktadır. Tüm bu veriler kullanılarak her iki simülatörden elde edilen pakler aralığı, 1. ve 2. düşey gözlem noktalarındaki basınç değişimi ve türevi verileri Şekil 2.28’de sunulmuştur. Görüldüğü gibi bu heterojen durum için, geliştirilen simülatör ile ticari ECLIPSE 100 simülatör sonuçları arasında uyum mükemmeldir.



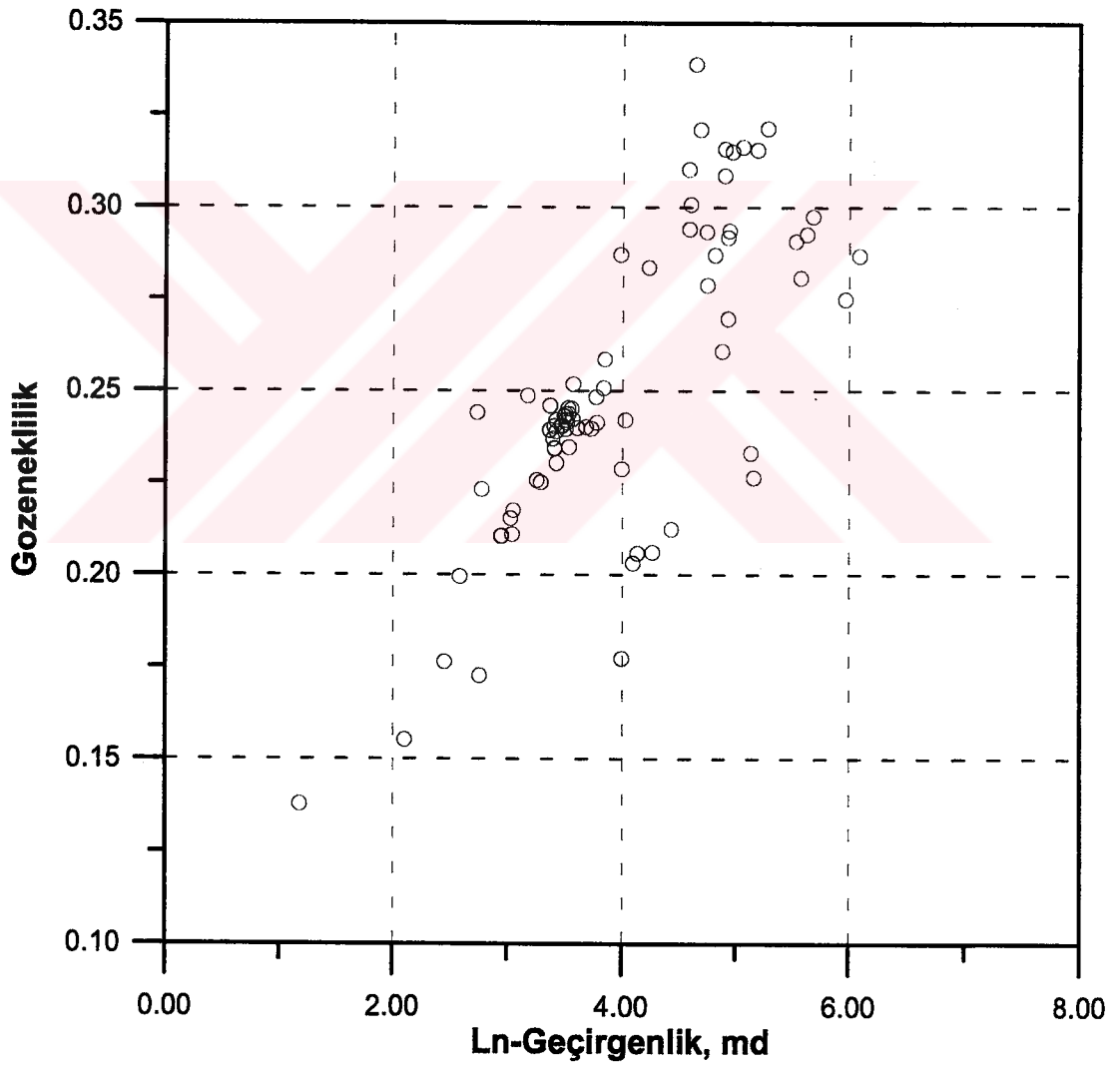
Şekil 2.26 Tek tabakalı bir sistemde çift paklerli ve iki gözlem problu düşey girişim testi gösterimi.

Tablo 2.4 Heterojen gözeneklilik ve geçirgenlik sahalarının türetilmesinde kullanılan değişkenlere ait değerler.

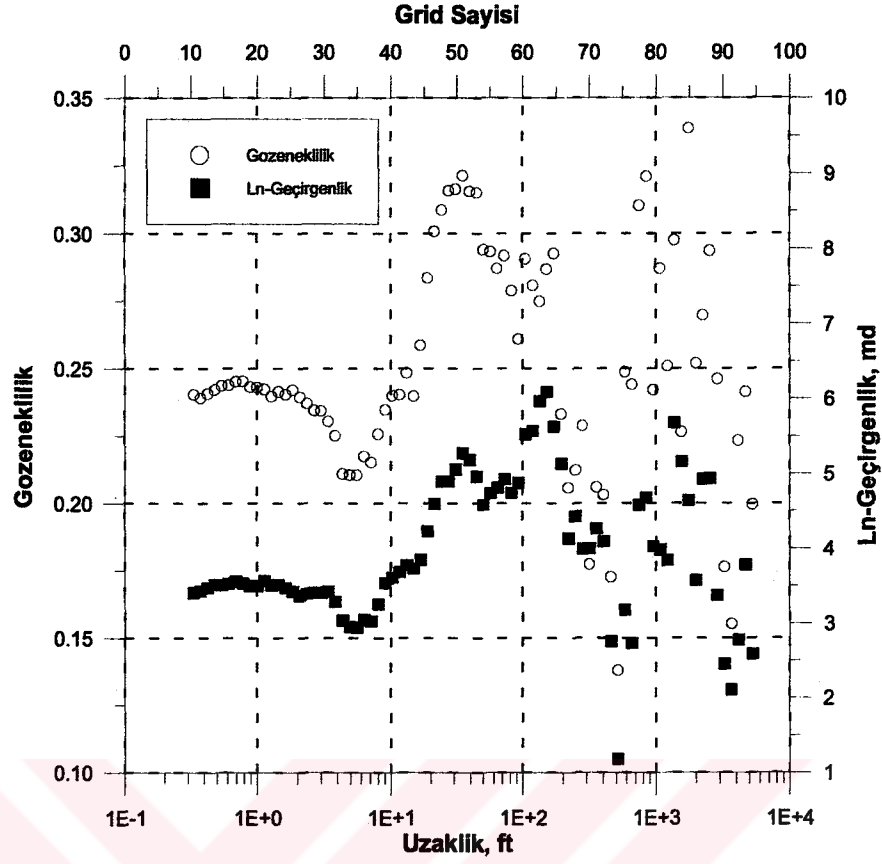
$\mu_{ln k}$ (ortalama),	3.89
$\sigma_{ln k}^2$ (varyans)	1.0
μ_{ϕ} (ortalama)	0.25
σ_{ϕ}^2 (varyans)	0.0025
Korelasyon uzunluğu, ft,	200
$ln k$ - ϕ korelasyon katsayısı,	0.7
Yarı-varyogram tipi	Küresel

Tablo 2.5 Şekil 2.26'da verilen tek tabakalı sistem için kayaç ve akışkan özellikleri

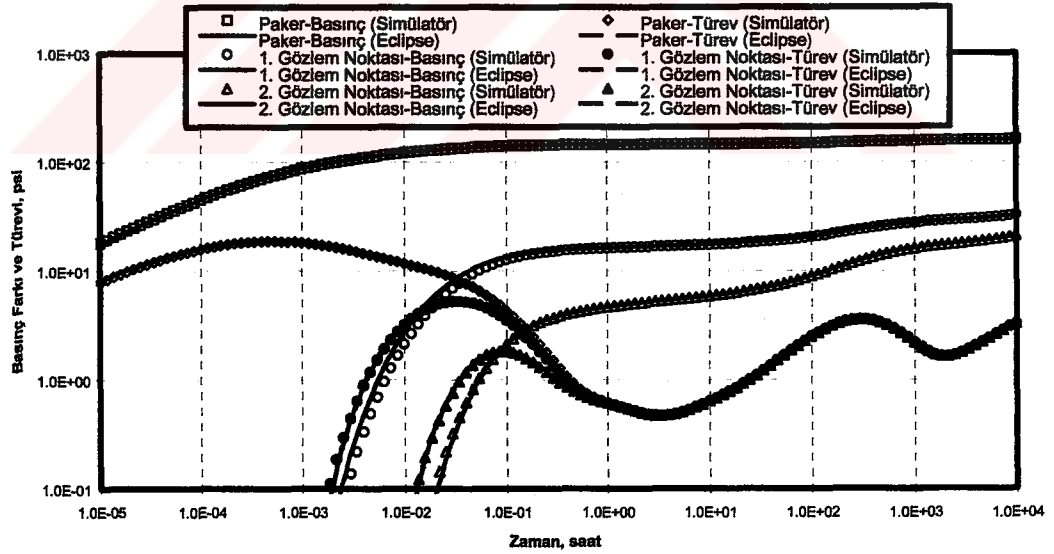
h , ft	50.8
c , psi^{-1}	4.5×10^{-5}
μ , cp	1.8
r_w , ft	0.354
r_e , ft	5000.
z_w , ft,	15.3
l_w , ft,	1.6
z_{o1} , ft,	6.5
z_{o2} , ft,	14.5
q , bbl/D	50.



Şekil 2.27 Türetilen heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik verilerinin çapraz grafiği.



Şekil 2.28 Gözeneklilik ve ln-geçirgenliğin r yönünde değişimi.



Şekil 2.29 Tek tabakalı heterojen bir sistem için bu çalışmada geliştirilen simülator ile ticari ECLIPSE 100 simülatorü sonuçlarının kıyaslanması.

3. DOĞRUSAL OLMAYAN PARAMETRE KESTİRİMİ

Bu bölümde, ölçülmüş düşey girişim basınç-zaman testi verileri ile simülatörden elde edilen model basınç-zaman verilerinin, otomatik olarak karşılaştırılmasını gerçekleştirmek için göz önünde bulundurulmuş ağırlıklı en küçük kareler ve daha genel olarak Bayes olasılık teoremine dayanan doğrusal olmayan parametre kestirim yöntemlerine ait temel teori, karşıtırmada kullanılan temel denklemler ve algoritmalar sunulmaktadır.

3.1 Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametre Kestirimi

Düşey girişimli basınç testleri özelinde olduğu gibi genelde basınç testlerini yorumlamanın temel amacı, kuyuda ölçülmüş dolaylı basınç-zaman verilerinden rezervuar sistemini tanımlamak ve modellenen yer altındaki karmaşık sistemin geçirgenlik, gözeneklilik, zar faktörü gibi parametrelerini kestirmektir. Başka bir ifade ile temel amaç, eldeki verilere uygun olarak gerçek sistem için oluşturulan bir modelden tahmin edilen basınç-zaman verileri ile gerçek sistemden ölçülmüş basınç-zaman verileri arasında en iyi karşımayı sağlayacak model parametre değerlerini kestirmektir. Bu bir ters problemdir, etkin ve hızlı bir şekilde çözümü optimizasyon yöntemlerinin kullanılmasını gerekli kılar. Bu çalışmada göz önünde bulundurduğumuz problemde olduğu gibi bahsedilen model parametreleri ile basınç-zaman verileri arasındaki ilişki doğrusal değildir. Bu nedenle de, parametre kestirimi doğrusal olmayan parametre kestirimi olarak isimlendirilir ve doğrusal olmayan optimizasyon yöntemlerinin kullanımını gerektirir.

Tüm optimizasyon yöntemlerinde, verilen bir model parametre seti değerleri için modelden hesaplanmış basınç-zaman verileri ile ölçülmüş basınç-zaman verileri arasındaki uyumsuzluğu (mismatch) tanımlayan bir hedef fonksiyon kullanılır. Bu çalışmada göz önünde bulundurulmuş düşey girişim testi probleminde olduğu gibi, karşıtırmada birden fazla basınç-zaman seti verilerinin kullanılması olası olduğu ve

her bir ölçüm basınç-zaman seti verileri için farklı ölçüm hatalarının olduğunun düşünülebileceği durumlarda, kullanılacak en temel ve klasik optimizasyon yöntemi ağırlıklı en küçük kareler olacaktır. Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi için hedef fonksiyon aşağıdaki denklemle verilebilir (Bard, 1974):

$$S(\bar{m}) = \frac{1}{2} (\bar{d}_{cal}(\bar{m}) - \bar{d}_{obs})^T C_D^{-1} (\bar{d}_{cal}(\bar{m}) - \bar{d}_{obs}). \quad (3.1)$$

Burada, $\bar{d}_{obs}$, ölçülmüş basınç verilerini (örneğin çiftli-paker/problu düşey girişim testinde, çiftli-paker aralığı ve düşey gözlem probu basınç-zaman seti verileri gibi) ihtiva eden N_d boyutlu bir vektördür. Burada N_d ölçülmüş toplam basınç-zaman veri sayısını temsil etmektedir. $\bar{d}_{cal}$ ise, ölçülmüş veri vektörü $\bar{d}_{obs}$ 'ye karşılık verilen model parametre vektörü $\bar{m}$ için simülatörden hesaplanmış basınç verilerini içeren N_d boyutlu vektördür. Burada $\bar{m}$, M boyutlu tahmin edilecek model parametrelerine ait vektördür. En genel (üç boyutlu anizotropik geçirgenlik) durumunda, $\bar{m}$

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{k}_r \\ \bar{k}_\theta \\ \bar{k}_z \\ \bar{S} \\ \bar{C} \\ \bar{p}^0 \\ \bar{p}_{wf}^0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\bar{\phi}$, N boyutlu simülatör grid blok gözenekliliklerini içeren vektör, $\bar{k}_r$, N boyutlu simülatör gridblok $\ln(k_r)$ geçirgenliklerini içeren vektör, $\bar{k}_\theta$, N boyutlu simülatör gridblok $\ln(k_\theta)$ geçirgenliklerini içeren vektör, $\bar{k}_z$, N boyutlu simülatör gridblok $\ln(k_z)$ geçirgenliklerini içeren vektör, $\bar{S}$, N_s boyutlu zar faktörlerini içeren vektör, $\bar{C}$ ise N_c boyutlu kuyuiçi depolama katsayılarını içeren vektör, $\bar{p}^0$, N boyutlu ilk basınçları içeren vektör, $\bar{p}_{wf}^0$ ise $t=0$ anında ilk kuyudibi akış basınçlarını ihtiva eden N_w boyutlu vektördür. N toplam gridblok sayısını, N_s

üretim aralığında ve/veya gözlem probu noktalarında tahmin edilecek toplam zar faktörü değerini, N_c üretim aralığında ve/veya gözlem probu noktalarında tahmin edilecek toplam kuyu içi depolama katsayısını göstermektedir. N_w ise kuyuda tahmin edilecek toplam ilk kuyudibi akış basıncını göstermektedir. Alansal izotropik durumlarda ($k_r = k_\theta = k_h$ ve $k_h \neq k_v$) bilinmeyen parametre vektörü $\vec{m}$

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{k}_h \\ \bar{k}_v \\ \bar{S} \\ \bar{C} \\ \bar{p}^0 \\ \bar{p}_{wf}^0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Çalışmada, ölçüm hataları, bağımsız birbiri ile korelasyonsuz ortalaması sıfır ve belirli bir varyansa sahip normal rastlantısal değişkenler olarak modellenmektedir. Bu varsayım altında, Denklem 3.1'de verilen $N_d \times N_d$ boyutlu C_D ölçüm hatası kovaryans matrisi (veya ağırlık matrisi olarak da isimlendirilmektedir) çaprazdır (diagonal) ve her bir ölçüm basınç verisine farklı ağırlık eklenmesine olanak sağlar. Örneğin, çiftli-paker aralığı/tek-probu düşey girişim testi göz önünde bulundurulduğunda, N_p adet çiftli-paker aralığında ölçülmüş basınç verisi ile N_v adet düşey gözlem probuna ait ölçüm basınç verisi olduğunda, C_D , $(N_p + N_v) \times (N_p + N_v)$ boyutlu bir matris olup

$$C_D = \begin{bmatrix} \sigma_{p,1}^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{p,2}^2 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_{p,N_p}^2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \sigma_{v,1}^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \sigma_{v,2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sigma_{v,N_v}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

şeklinde verilecektir. Burada, $\sigma_{p,i}^2$, i . ($i=1,2,\dots,N_p$) çiftli paker aralığı basıncı için ölçüm hatası varyansını, $\sigma_{v,j}^2$ ise j . ($j=1,2,\dots,N_v$) düşey gözlem prob basıncı için ölçüm hatası varyansını temsil edecektir. Bu örnek için, Denklem 3.1'de $\vec{d}_{obs}$, ölçülmüş basınç verilerini (örneğin çiftli-paker/problu düşey girişim testinde, çiftli-paker aralığı ve düşey gözlem probu basınç-zaman seti verileri gibi) ihtiva eden (N_p+N_v) -boyutlu bir vektör olup

$$\vec{d}_{obs} = \begin{bmatrix} p_{obs,p,1} \\ p_{obs,p,1} \\ \vdots \\ p_{obs,p,N_p} \\ p_{obs,v,1} \\ p_{obs,v,2} \\ \vdots \\ p_{obs,v,N_v} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Burada, $p_{obs,p,i}$, i . ($i=1,2,\dots,N_p$) ölçülmüş çiftli-paker aralığı basıncını, $p_{obs,v,j}$ ise j . ($j=1,2,\dots,N_v$) ölçülmüş düşey gözlem prob basıncını temsil edecektir.

İleride değinileceği gibi, Denklem 3.1 ile verilen hedef fonksiyon gradyent temelli algoritmalar (Levenberg-Marquardt gibi) ile minimize edilerek simülatör basınç-zaman seti verilerini ölçülmüş basınç-zaman seti verilerine çakışmasını sağlayacak simülatör gridbloklarındaki geçirgenlik, gözeneklilik, zar faktörü, ilk basınç değerlerini kestirmek mümkündür.

Denklem 3.1 ile verilen hedef fonksiyonun parametre kestiriminde kullanımının en önemli dezavantajı, basınç-zaman seti verilerinin çakışmasını sağlayan bu yöntemle kestirilen geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımlarının karot ve loglardan elde edilmiş eldeki statik geçirgenlik ve gözeneklilik verileri ile jeolojik/jeostatistikten türetilmiş geçirgenlik/gözeneklilik dağılımlarını sağlamasını garanti etmemesidir. Bununla beraber, bilinmeyen parametre sayısının ölçüm veri sayısından oldukça az olduğu durumlarda (örneğin rezervuarın sabit parameterlere sahip farklı zonlardan

oluşturduğunu varsayan modeller kullanıldığında; kuyu testlerinde kullanılan klasik kompozit ve tabakalı homojen modellerde olduğu gibi) ve model parametreleri hakkında fazla bir bilginin olmadığı durumlarda, başvurulabilecek etken yöntemlerden biridir. Bu nedenle de çalışmada bu yöntemde parametre tahmininde göz önünde bulundurulmuştur.

3.2 Bayes Olasılık Teoremi Üzerine Kurulu Parametre Kestirimi

Ağırlıklı en-küçük kareler yöntemine ek olarak, düşey girişim basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımları, son yıllarda yaygın kabul bulan Bayes olasılık teoremi üzerine kurulu ters problem metodolojisi kullanarak da kestirilmiştir (Oliver, 1994; He ve diğ., 1997; Zeybek ve Onur, 2003). Bu ters problem metodolojisi ile hem doğrudan ölçümler yolu ile elde edilen statik verilere (kuyu-logları ve karot analizlerinden elde edilen geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerine ve bu özelliklerin jeostatistikten belirlenen uzaysal korelasyonlarına) hem de dolaylı ölçümlerden kuyu basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin kestirimi olasıdır.

Bayes parametre kestirim yönteminde, basınç verilerini sağlayan gözeneklilik/geçirgenlik sahaları aşağıda tanımlanan hedef fonksiyonun minimizasyonundan elde edilmektedir:

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{d}_{cal}(\vec{m}) - \vec{d}_{obs} \right)^T C_D^{-1} \left(\vec{d}_{cal}(\vec{m}) - \vec{d}_{obs} \right) + \left(\vec{m} - \vec{m}_{prior} \right)^T C_M^{-1} \left(\vec{m} - \vec{m}_{prior} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Denklem 3.6 ile verilen hedef fonksiyon ile her bir kayaç özelliği (yani, $\ln(k_r)$, $\ln(k_\theta)$, $\ln(k_z)$ ve ϕ) durağan bölgesel rastlantısal normal değişkenler olarak düşünülebilmekte ve hatta değişkenler arasında korelasyonu modellemek olanaklı olmaktadır. Denklem 3.6'da C_M önsel variogram modelinden elde edilecek önsel kovaryans matristir ve $\vec{m}_{prior}$ ise değişkenlere ait önsel ortalama değerleridir. Önsel jeostatistiksel modelin bilinmediği ve model parametrelerine ait ortalama değerlerde çok büyük oranda belirsizlik olduğu durumlarda, Denklem 3.6'daki ikinci terim atılabilir ve bu durumda, Denklem 3.6 ile tanımlı hedef fonksiyon, Denklem 3.1 ile tanımlanan ağırlıklı en-küçük karelere ait hedef fonksiyona indirgenir. Denklem 3.6'nın, ağırlıklı

en-küçük kareler için tanımlanan hedef fonksiyona (Denklem 3.1) göre en önemli farkı, bilinmeyen model parametrelerine ait dağılımların ve önsel ortalama değerlerinin bilindiği durumlarda, bu bilginin çakışmaya dahil edilmesine olanak sağlamasıdır.

Denklem 3.6'daki önsel covaryans matris C_M ve önsel ortalama model parametre vektörü $\bar{m}_{prior}$, kuyularda doğrudan ölçülmüş log ve karot verilerinden elde edilen geçirgenlik ve gözeneklilik değerleri ve dağılımlarından elde edilir. Örneğin, model parametre vektörü için Denklem 3.2 ile verilen en genel durum göz önünde bulundurulduğunda, önsel ortalama model parametre vektörü $\bar{m}_{prior}$

$$\bar{m}_{prior} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{prior} \\ \bar{k}_{r,prior} \\ \bar{k}_{\theta,prior} \\ \bar{k}_{z,prior} \\ \bar{S}_{prior} \\ \bar{C}_{prior} \\ \bar{p}_{prior}^0 \\ \bar{p}_{wf,prior}^0 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Burada $\bar{\phi}_{prior}$, her gridbloğundaki gözenekliliğe ait önsel ortalama değerleri içeren N boyutlu bir sütun vektörüdür. Benzer şekilde, $\bar{k}_{r,prior}$, $\bar{k}_{\theta,prior}$ ve $\bar{k}_{z,prior}$ her gridbloğundaki r , θ ve z yönlerindeki geçirgenliğe ait önsel ortalama değerleri içeren N boyutlu bir sütun vektörleridir. $\bar{S}_{prior}$, zar faktörüne ait önsel ortalama değerleri içeren bir N_S boyutlu sütun vektörüdür. $\bar{C}_{prior}$ kuyuiçi depolama katsayılarına ait önsel ortalama değerleri içeren bir N_C boyutlu sütun vektörüdür. $\bar{p}_{prior}^0$ ilk basınçlara ait önsel ortalama değerleri içeren bir N boyutlu sütun vektörüdür. $\bar{p}_{wf,prior}^0$ ilk kuyudibi akış basınçlarına ait önsel ortalama değerleri içeren N_w boyutlu bir vektördür. Önsel kovaryans matris, bu durum için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C_M = \begin{bmatrix} C_\phi & C_{\phi, \ln k_r} & C_{\phi, \ln k_\theta} & C_{\phi, \ln k_z} & O & O & O & O \\ C_{\ln k_r, \phi} & C_{\ln k_r} & C_{\ln k_r, \ln k_\theta} & C_{\ln k_r, \ln k_z} & O & O & O & O \\ C_{\ln k_\theta, \phi} & C_{\ln k_\theta, \ln k_r} & C_{\ln k_\theta} & C_{\ln k_\theta, \ln k_z} & O & O & O & O \\ C_{\ln k_z, \phi} & C_{\ln k_z, \ln k_r} & C_{\ln k_z, \ln k_\theta} & C_{\ln k_z} & O & O & O & O \\ O & O & O & O & C_s & O & O & O \\ O & O & O & O & O & C_c & O & O \\ O & O & O & O & O & O & C_{p^0} & O \\ O & O & O & O & O & O & O & C_{p_{wf}^0} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Denklem 3.8’de C_ϕ , $C_{\ln k_r}$, $C_{\ln k_\theta}$ ve $C_{\ln k_z}$, sırasıyla, $N \times N$ boyulu gözenekliliğe, r , θ ve z yönlerindeki geçirgenliğe ait kovaryans matrisleridir. C_s , $N_s \times N_s$ boyutlu zar faktörüne ait, C_c , $N_w \times N_w$ boyutlu kuyuyu depolama katsayısına ait, C_{p^0} $N \times N$ boyutlu tüm gridlerdeki ilk basınçlara ait, $C_{p_{wf}^0}$ $N_w \times N_w$ boyutlu ilk kuyudibi akış basınçlarına ait kovaryans matrislerini göstermektedir. Çalışmada bu değişkenler ikinci mertebeden durağan rastlantısal değişkenler olarak varsayılacağından, bu değişkenlere ait kovaryans matrislerden doğrudan bu değişkenlere ait yarı varyogram fonksiyonundan oluşturulabilirler (Journel ve Huijbregts, 1978). İkinci mertebeden durağan rastlantısal değişkenler için, yarı-varyogram ile kovaryans arasındaki ilişki

$$C(\bar{h}) = C(0) - \gamma(\bar{h}) \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır (Journel and Huijbregts, 1978). Burada $C(0)$ ($=\sigma^2$), eşik (sill) veya varyans değeridir. $\bar{h}$ ise iki farklı noktada örneklenmiş özellik arasındaki uzaklık vektörüdür. Yarı-varyogram için kullanılacak pek çok model mevcuttur (Journel ve Huijbregts, 1978; Gringarten ve Deutsch, 1999). Modellemede (Denklem 3.8’de) kullanılacak yarı-varyogram modeli, eldeki örneklenmiş statik ölçüm verilerine en iyi uyum sağlayan model olarak seçilir. Örneğin, karot ölçümlerinden belirlenen $\ln$ - yatay geçirgenlik ($\ln k_h$) değerlerinin küresel yarı-varyogram ile temsil edilebileceği durumlarda, Denklem 3.8’de kullanılacak yarı-varyogram modeli aşağıdaki denklemle verilecektir:

$$\gamma_{\ln k_h}(\vec{h}) = \begin{cases} C_{\ln k_h}(0) \left[\frac{3}{2} \frac{\hat{r}}{a} - \frac{1}{2} \frac{\hat{r}^2}{a^2} \right], & \hat{r} = |\vec{h}| \in [0, a] \\ C_{\ln k_h}(0), & |\vec{h}| \geq a \end{cases} \quad (3.10)$$

Denklem 3.10'da a , korelasyon uzunluğunu (range) göstermektedir, bir başka ifade ile $\ln k_h$ değerlerinin ilişki içinde bulunduğu uzunluktur. Denklem 3.10'dan anlaşılacağı gibi, bu uzunluktan daha büyük uzaklıklığa sahip iki noktadaki özellik arasında ilişki kaybolur ve yarı varyogram değeri eşik değerine ulaşır. En genel şekliyle 3B (x - y - z) uzayda, koordinatları (x_i, y_i, z_i) ve (x_j, y_j, z_j) iki nokta arasında (x_i, y_i, z_i) 'den (x_j, y_j, z_j) 'ye uzaklık vektörü $\vec{h}$ ve uzaklık $\hat{r}$

$$\vec{h} = (x_j - x_i)\vec{i}_x + (y_j - y_i)\vec{i}_y + (z_j - z_i)\vec{i}_z \quad (3.11)$$

ve

$$|\vec{h}| = \hat{r} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.12)$$

denklemlerinden hesaplanır. Denklem 3.11'da, $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$ ve $\vec{i}_z$, sırasıyla, x , y ve z eksenleri boyunca tanımlanan birim koordinat vektörleridir. Çalışmada, 3B (r, θ, z) simülör kullanıldığından, iki grid noktası (r_i, θ_i, z_i) ve (r_j, θ_j, z_j) arasındaki uzaklık, x - y - z koordinat sistemi ile r - θ - z koordinat sistemi arasında bilinen koordinat transformasyonu kullanılarak ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ve $z = z$, Kreyszig, 1999) aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanmaktadır:

$$|\vec{h}| = \hat{r} = \sqrt{(r_j \cos \theta_j - r_i \cos \theta_i)^2 + (r_j \sin \theta_j - r_i \sin \theta_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.13)$$

Bu noktada, çalışmamızda, genelde rezervuar karakterizasyonu için kullanılan yöntemlerin Kartezyen x - y - z grid sistemleri için geliştirildiğini ve Kartezyen grid sisteminde genelde küçük ölçekli eşit hacimlere sahip gridbloklar için türetilmiş heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin, çalışmada kullanılan kuyunun yakın civarındaki akışı modelleyen r - θ - z koordinat sistemindeki grid sistemine uygun

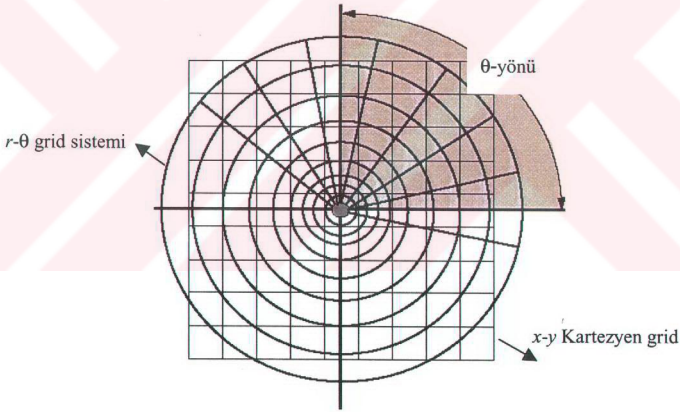
şekilde dönüştürülmesi gerektiğini belirtmek gerekir. Bir başka deyişle, x - y - z Kartezyen grid sisteminde tanımlı geçirgenlik ve gözenekliliklerin, kuyudan uzaklaştıkça hacmi büyüyen eşit büyüklükte olmayan r - θ - z sistemindeki gridbloklara uygun transformasyon işleminin (upscaling) yapılmasını gerektirir. Bu işlemin ne olduğunun daha iyi anlaşılmasına yardımcı olabilecek bir gösterim Şekil 3.1, x - y ve r - θ grid sistemleri için sunulmaktadır. Aslında, aynı işlem, eş hacimli grid bloklarla tanımlanan Kartezyen sistemden, eş hacimli olmayan gridlokları içeren Kartezyen sistemi içinde geçerlidir. Bu konuda, henüz standart hale gelmiş ve yaygın kabul gören genel bir yöntem olmakla beraber, çeşitli çalışmalar literatürde mevcuttur (Kasap ve Lake, 1990; Aasum ve diğ., 1993; Brekke, 1996; Deutsch ve diğ., 2002). Bu konu başlı başına bir araştırmayı gerektirmektedir ve bu çalışmanın amaçları arasında yer almamaktadır. Biz çalışmamızda, Kartezyen grid sisteminden, r - θ - z koordinat sistemine uygun dönüşümün yapıldığını ve r - θ - z grid sistemindeki gridbloklara atanacak heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin türetilbileceği, uygun transformasyon işlemi sonunda blok hacimlerindeki değişimi de dikkate alan her özellik için “ortalama” varyogram modelinin mevcut olduğunu varsaymaktayız. Bu ortalama varyogram modeli, örneğin Deutsch ve diğ. (2002) tarafından önerilen yöntemden oluşturulabilir.

Bir örnek oluşturması amacıyla, rezervuar r yönünde 500 ft uzunluğunda ($r_e = 500$ ft) ve r yönünde eş uzunluklu olmayan 10 gridbloktan, θ yönünde toplam 360° ve 60° eş uzunluklu 6 sektörden, z yönünde ise rezervuar 50 ft kalınlığında ($h = 50$ ft) olduğu bir sentetik örnek göz önünde bulundurulmuştur. Bu örnekte, yatay geçirgenlik $\ln k_h$ 'ın normal dağılımlı ortalaması 3.91 (50 mD) ve saçılımı (varyansı) 1 ve varyogram modelinin 250 ft korelasyon uzunluklu izotropik küresel olduğu kabul edilmiştir. Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'de, $\theta = 30^\circ$ sabit değeri (1. sektör) için r - z düzlemi yatay geçirgenlik k_h (türetilen $\ln k_h$ değerlerinin eksponansiyeli alınarak) dağılımları gösterilmektedir. Daha öncede değinildiği gibi, r - θ - z simülasyonunda, kuyudibi akış basıncını hassas hesaplayabilmek için r ve z yönlerinde (özellikle kuyu civarında r yönünde, daha küçük uzunluklu) eş uzunluklu olmayan bloklar kullanılmaktadır. Bu nedenle, r yönündeki uzunluğa göre oluşturulan Şekil 3.2'de kuyuya yakın olan ilk altı gridblok (r_w ile 26 ft) içerisindeki geçirgenlik dağılımları çok iyi anlaşılamamaktadır. r ve z yönündeki gridbloklardaki geçirgenlik dağılımlarının daha

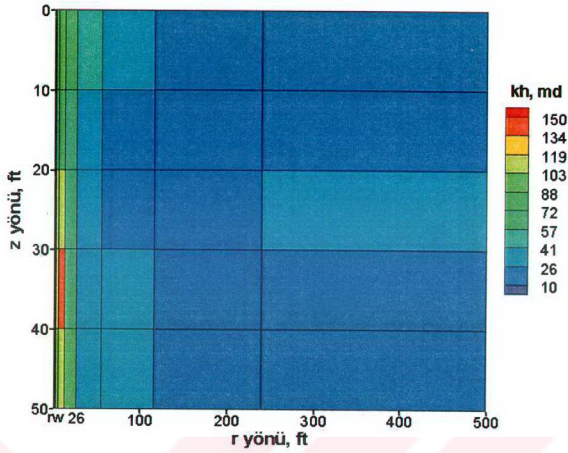
açık göstermi, gridblok indeksine göre oluşturulan Şekil 3.3’de verilmektedir. Şekil 3.4, $z = 5$ ft sabit değerinde (formasyonun üstünden) r - θ düzleminde, yatay geçirgenlik k_h için türetilen geçirgenlik dağılımları Şekil 3.5’de $z = 45$ ft sabit değerinde, k_h ’ın r - θ düzlemindeki dağılımı gösterilmektedir. Şekil 3.2-3.5’de gösterilen dağılımlar (veya koşullanmamış gerçeklemeler) önsel matris C_M ’e Cholesky ayrışım yöntemi (Journel ve Huijbergs, 1978) uygulanarak hesaplanmıştır ($C_M = LL^T$)

$$\vec{m}_{ur} = \vec{m}_{prior} + L\vec{z}_0 \quad (3.14)$$

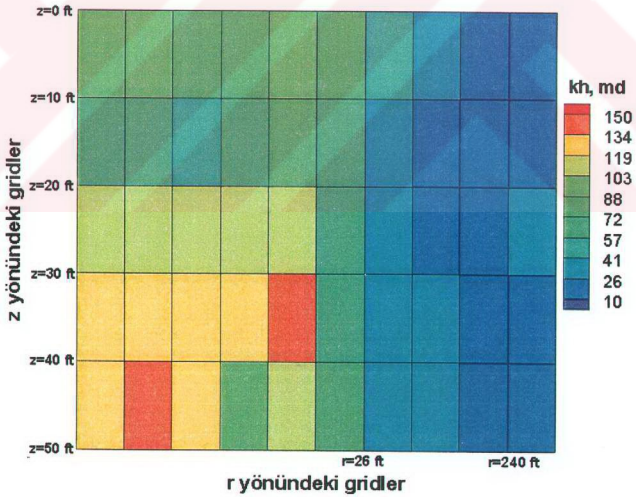
Burada $\vec{z}_0$ birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı birim varyanslı normal dağılımdan belirli bir tohum değeri kullanılarak çekilmiş dizidir. $\vec{m}_{ur}$ ise, sadece önsel modele koşullu (ölçüm verilerine koşullanmamış) bir gerçeklemeyi temsil eder.



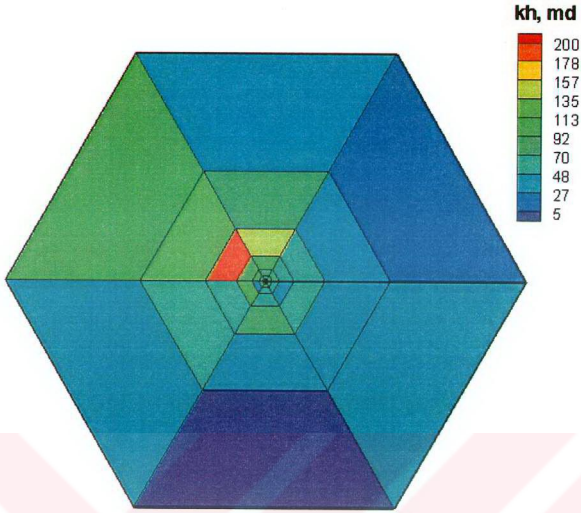
Şekil 3.1 x - y Kartezyen sistemi üstüne kuyu merkez olacak şekilde oturtulmuş r - θ grid sistemi.



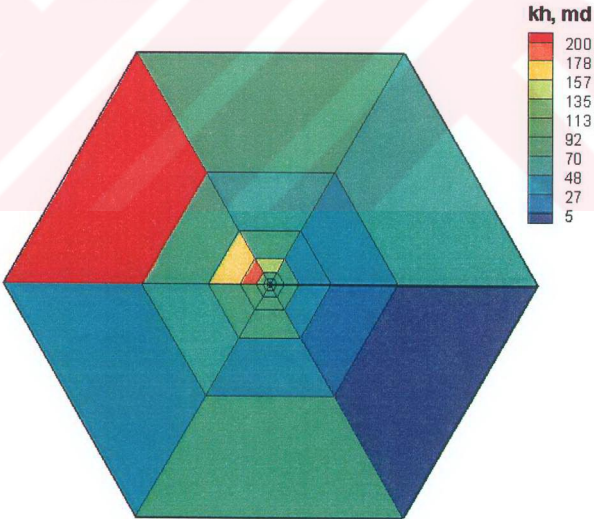
Şekil 3.2 $\theta = 30^\circ$ sabit değeri (1. sektör) için r - z düzleminde k_h dağılımı, uzunluğa göre gösterim (sentetik uygulama).



Şekil 3.3 $\theta = 30^\circ$ sabit değeri (1. sektör) için r - z düzleminde k_h dağılımı, gridbloklara göre gösterim (sentetik uygulama).



Şekil 3.4 $z = 5$ ft sabit değerinde (üsten 1.ci tabaka için) r - θ düzleminde, k_h dağılımı (sentetik uygulama).



Şekil 3.5 $z = 45$ ft sabit değerinde (5. tabaka için) r - θ düzleminde, $\ln k_h$ dağılımı (sentetik uygulama).

Çalışmada geliştirilen programda, benzer şekilde diğer özellikler ($\ln k_r$, $\ln k_z$, ϕ) içinde dağılımlar türetilmekte, her özellik için her tabakada farklı varyogram modelleri göz önünde bulundurulabilmekte ve varyogramlarda hem zonal hem de geometrik anizotropi modellenebilmektedir. Geliştirilen programda, farklı varyogram modelleri Deutsch ve Journel (1993) tarafından geliştirilen GSLIB yazılım programından alınmıştır.

Denklem 3.8'de C_S ise $N_S \times N_S$ boyutlu zar faktörüne ait çapraz kovaryans matristir. Çalışmada, zar faktörü ile geçirgenlik ve gözeneklilik arasında korelasyon olmadığı ve zar faktörü değerleri arasında da korelasyon olmadığı varsayılmaktadır. Denklem 3.8'de C_{p_1, p_2} terimleri ise rezervuar özelliği p_1 ile p_2 arasındaki yan kovaryans (cross covariance) matristir ve iki özellik arasındaki korelasyonu tanımlar. C_{p_2, p_1} ise, C_{p_1, p_2} matrisinin transpozisini temsil eder ve bu matrisler simetriktir, $C_{p_1, p_2} = C_{p_2, p_1}$. Örneğin, $C_{\phi, \ln k_r}$ gözeneklilik ($p_1 = \phi$) ile r yönündeki geçirgenlik ($p_2 = k_r$) arasındaki yan kovaryans matristir. Eğer bu parametreler için aynı tip varyogram ve korelasyon uzunlukları geçerli olduğunda bu yan kovaryans matris

$$C_{\phi, \ln k_r} = C_{\ln k, \phi} = \frac{\rho_{\phi, \ln k_r} \sigma_{\phi}}{\sigma_{\ln k_r}} C_{\phi} \quad (3.15)$$

denklemini yardımıyla hesaplanır (Xu ve diğ., 1992). Benzer şekilde diğer parametreler arasındaki yan kovaryans matrislerde oluşturulabilir. Denklem 3.7'de $\rho_{\phi, \ln k_r}$, gözeneklilik ile $\ln$ -geçirgenlik arasındaki korelasyon katsayısıdır. σ_{ϕ} ve $\sigma_{\ln k_r}$, sırasıyla, gözeneklilik ve $\ln$ -geçirgenlik dağılımlarının standart sapmasını temsil ederler. Bu çalışmada, yan kovaryans matrislerin oluşturulmasında Denklem 3.7 kullanılmıştır.

Daha öncede değinildiği gibi, Denklem 3.6 ile verilen hedef fonksiyon model parametrelerinin hem statik gözeneklilik/geçirgenlik (karotlardan) verileri hem de basınç testi verilerini birlikte sağlayacak şekilde tahmin edilmesine olanak tanımaktadır. Her iki veri tipine aynı anda koşullu geçirgenlik/gözeneklilik sahalarını kestirmek istediğimiz durumlarda, Denklem 3.6'da $\bar{d}_{cal}$ hem statik model verilerine

hem de simülator basınç verilerini içerecektir. Bu durumda, Denklem 3.6'da C_D hem gözlemlenmiş statik hem de gözlemlenmiş basınç seti verilerine ait hata kovaryans matrisleri içerecektir. Eğer N_h gözlemlenmiş toplam statik veri sayısı, N_w ölçülmüş toplam basınç veri sayısı ise, koşullama yapılacak toplam gözlemlenmiş (veya ölçülmüş) veri sayısı $N_d = N_h + N_w$ olacaktır. Dolayısıyla, bu durumda, Denklem 3.6'da C_D , $\vec{d}_{cal}(\vec{m})$ ve $\vec{d}_{obs}$ aşağıdaki denklemlerle temsil edilecektir:

$$C_D = \begin{bmatrix} C_{D,h} & 0 \\ 0 & C_{D,w} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\vec{d}_{cal}(\vec{m}) = \begin{bmatrix} \vec{d}_{cal,h}(\vec{m}) \\ \vec{d}_{cal,w}(\vec{m}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ve,

$$\vec{d}_{obs} = \begin{bmatrix} \vec{d}_{obs,h} \\ \vec{d}_{obs,w} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Denklem 3.16'da, $C_{D,h}$ ve $C_{D,w}$ çapraz olduğu varsayılan, sırasıyla, statik ve basınç verilerine ait hata kovaryans matrisleridir. $C_{D,h}$, $N_h \times N_h$ boyutlu, çaprazındaki elemanları statik verilerdeki hataların varyansına (σ_h^2) eşit, çapraz kovaryans matris, $C_{D,w}$ ise $N_w \times N_w$ boyutlu, çaprazındaki elemanları basınç verilerindeki hatanın varyansına (σ_w^2) eşit, çapraz matristir. Eğer statik veriler hem gözeneklilik hem de geçirgenlik değerlerini içermektedirse, $C_{D,h}$ hem gözeneklilik verisi ölçümlerine ait hata varyansını, $\sigma_{h,\phi}^2$, hem de log-geçirgenlik ölçüm verisi hata varyansı $\sigma_{h,\ln k}^2$ içerecektir. Dolayısıyla, kovaryans matris C_D , $N_d \times N_d$ boyutlu bir matristir. Denklem 3.16'daki $\vec{d}_{cal,h}$ ve $\vec{d}_{cal,w}$, sırasıyla N_h ve N_w boyutlu vektörlerdir. Dolayısıyla, $\vec{d}_{cal}(\vec{m})$ N_d boyutlu bir vektördür. Benzer şekilde, $\vec{d}_{obs,h}$ and $\vec{d}_{obs,w}$, sırasıyla, gözlemlenmiş statik ve basınç verilerini içeren N_h ve N_w boyutlu vektörlerdir. Bu durumda, dikkat edilecek olursa, $\vec{d}_{obs}$ N_d boyutlu bir vektördür. Daha öncede

değindiği gibi, statik veriler model verileri ile doğrusal ilişkili olduğu kabul edilir ve,

$$\vec{d}_{cal,h}(\vec{m}) = G_h \vec{m}, \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Burada G_h , $N_h \times N_p$ boyutlu bir matris olup, elemanları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$g_{h,j}^i = \begin{cases} 1 & \text{if } j = r_i \\ 0 & \text{if } j \neq r_i \end{cases}, \quad (3.20)$$

$i = 1, 2, \dots, N_h$, $j = 1, 2, \dots, N_p$. Denklem 3.20’de, r_i ölçülmüş statik veri bulunan gridblok indeksini temsil eder. Bu tanımlarla, Denklem 3.6

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{2} [\vec{m} - \vec{m}_{prior}]^T C_M^{-1} [\vec{m} - \vec{m}_{prior}] + \frac{1}{2} [G_h \vec{m} - \vec{d}_{obs,h}]^T C_{D,h}^{-1} [G_h \vec{m} - \vec{d}_{obs,h}] + \frac{1}{2} [\vec{d}_{cal,w}(\vec{m}) - \vec{d}_{obs,w}]^T C_{D,w}^{-1} [\vec{d}_{cal,w}(\vec{m}) - \vec{d}_{obs,w}]. \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Matematiksel olarak, hem statik hem de basınç verilerine birlikte koşullama yapılmak istenen durumlarda, Denklem 3.6 ve Denklem 3.21 eşdeğerdir.

Eğer sadece statik verilere koşullama yapılacak ise, sadece ölçülmüş statik gözeneklilik ve geçirgenlik değerlerine koşullu simülör gridblok geçirgenlik/gözeneklilik verileri türetilcekse, bu durumda Denklem 3.21 (veya Denklem 3.6) aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{2} [\vec{m} - \vec{m}_{prior}]^T C_M^{-1} [\vec{m} - \vec{m}_{prior}] + \frac{1}{2} [G_h \vec{m} - \vec{d}_{obs,h}]^T C_{D,h}^{-1} [G_h \vec{m} - \vec{d}_{obs,h}]. \quad (3.22)$$

Oliver [1994] tarafından gösterildiği gibi, Denklem 3.22’nin model parametre vektörü $\vec{m}$ ’ye göre minimizasyonundan elde edilen model parametre kestirimi, statik ölçüm verilerinde ölçüm hatalarını hesaba katan bilinen “basit kriging” kestirimini temsil eder (Journel ve Huijbergs, 1978). Bu basit kriging kestirimi, hem önsel bilgiye

hem de ölçülmüş statik verilere koşullu maksimum sonsal kestirim olarak da isimlendirilir ve aşağıdaki denklemden doğrudan hesaplanır:

$$\bar{m}_{h,\infty} = \bar{m}_{prior} + C_M G_h^T (G_h C_M G_h^T + C_{D,h})^{-1} (\bar{d}_{obs,h} - G_h \bar{m}_{prior}). \quad (3.23)$$

Denklem 3.23, Denklem 3.22'nin $\bar{m}$ 'ye göre türevi alındıktan sonra elde edilen denklemin sifıra eşitlenip, düzenlenmesiyle elde edilir. Denklem 3.23 ile verilen maksimum sonsal kestirime ait sonsal kovaryan matris (bu matris tahmindeki belirsizliği yansıtır)

$$C_{M,h} = C_M - C_M G_h^T (G_h C_M G_h^T + C_{D,h})^{-1} G_h C_M. \quad (3.24)$$

denklemden oluşturulur. Burada vurgulanması gereken, $C_{M,h}$ 'in ölçülmüş statik verilere koşullama ile, önsel modeldeki belirsizliğin ne kadar azaltılabildiğini sayısal olarak gösterdiğiidir. Şöyle ki, eğer model parametresi m_j 'nin koşullamadan sonra varyansı, koşullamadan önceki bu parametre için önsel varyansından önemli ölçüde küçük ise, statik veri bu model parametresindeki belirsizliği azaltmada faydalı olmuştur. Bu açıklama basınç verilerine koşullama içinde aynen geçerlidir. Statik (ve/veya basınç verilerine) koşullamadan sonra tahmin edilen m_j parametresi için, yaklaşık % 95 güvenilirlik aralıkları $[m_{\infty,j} - 2\sigma_j^2, m_{\infty,j} + 2\sigma_j^2]$ şeklinde hesaplanır. Burada $m_{\infty,j}$, model parametresi için hesaplanan (statik veri durumunda Denklem 3.23'den, basınç verisi durumunda, Denklem 3.38'den) sonsal kestirim değerini, σ_j^2 ise bu model parametresi için koşullama sonrası sonsal varyansı temsil eder ve sonsal kovaryans matrisin (statik veri durumunda Denklem 3.24) j . çapraz elemanıdır.

Ölçülmüş kuyu basınç testi verilerine koşullama yapıldığı durumlarda, Denklem 3.6'yı (veya Denklem 3.21'i) minimizasyonu yinelemeli (iteratif) olarak yapılmak zorundadır. Nedeni de, daha öncede değinildiği üzere, basınç verilerinin, model parametreleri ile doğrusal ilişkili olmamasıdır. Basınç verilerine de koşullama durumunda, Denklem 3.6 ile tanımlanan hedef fonksiyon, Gauss-Newton veya Levenberg-Marquardt algoritması ile etkin bir şekilde minimize edilebilmektedir. Her iki yöntemde Bölüm 4'de ayrıntılı olarak değinilecek duyarlılık katsayılarının ve

yaklaşık Hessian matrisin hesaplanmasını gerekli kılar, ancak gradyent bazlı olmayan diğer minimizasyon algoritmalarına (Simulated Annealing, Genetik veya Polytope gibi, Mengen, 2004) oldukça daha az işlem zamanları alırlar. Denklem 3.6 için Gauss-Newton yöntemi kullanıldığında aşağıdaki verilen denklemler kullanılır (Tarantola, 1987, He, 1997):

$$H_n \delta \bar{m}^{n+1} = -\nabla S_n \quad (3.25)$$

ve

$$\bar{m}^{n+1} = \bar{m}^n + \delta \bar{m}^{n+1} \quad (3.26)$$

Burada ∇S_n ve H_n , sırasıyla, gradyent vektör ve Hessian matrisi temsil eder. n ise iterasyon indeksidir. Grayent vektör ∇S_n ve Hessian matris H_n aşağıda verilen denklemler yardımıyla hesaplanır:

$$\nabla S_n = \nabla S(\bar{m}_n) = G_n^T C_D^{-1} [\bar{d}_{cal}(\bar{m}^n) - \bar{d}_{obs}] + C_M^{-1} (\bar{m}^n - \bar{m}_{prior}), \quad (3.27)$$

$$H_n = H(\bar{m}_n) = \nabla [(\nabla S_n)^T] \equiv G_n^T C_D^{-1} G_n + C_M^{-1}, \quad (3.28)$$

Burada G , duyarlılık katsayısı matrisidir ve elemanları simülator (model) basınç verilerinin her bir model parametresine göre türevini ihtiva eder. Duyarlılık katsayı matrisi G , $N_d \times M$ boyutludur ve

$$G_n = G(\bar{m}^n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}^n)}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}^n)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}^n)}{\partial m_{N_p}} \\ \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}^n)}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}^n)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}^n)}{\partial m_{N_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}^n)}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}^n)}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}^n)}{\partial m_{N_p}} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

şeklinde verilebilir.

Denklem 3.25’de (veya 3.26’da) $\delta \bar{m}^{n+1}$ ($n+1$). yineleme adımındaki model adım vektörüdür ve her yinelemede “optimum” adım büyüklüğünü belirlemek için ya çizgi arama ya da sınırlı adım tekniklerinin kullanılması gerekir (Fletcher, 1971). Bu yöntemler kullanıldığında, Gauss-Newton yineleme yöntemi aşağıdaki şekilde değiştirilir:

$$\bar{m}^{n+1} = \bar{m}^n - \lambda_n H_n^{-1} \nabla S_n = \bar{m}^n - \lambda_n \delta \bar{m}^{n+1}, \quad (3.30)$$

Burada λ_n , $\delta \bar{m}^{n+1}$ vektörü boyunca atılacak adım büyüklüğünü temsil eden skaler bir değerdir. Uygulamalarımızda, Fletcher (1971) tarafından tanımlanan sınırlı adım yöntemi ni kullanmaktadır. Denklem 3.27 ve Denklem 3.28’in Denklem 3.30’da kullanılmasıyla,

$$\bar{m}^{n+1} = \bar{m}^n - \lambda_n [G_n^T C_D^{-1} G_n + C_M^{-1}]^{-1} [G_n^T C_D^{-1} (\bar{d}_{cal}(\bar{m}^n) - \bar{d}_{obs}) + C_M^{-1} (\bar{m}^n - \bar{m}_{prior})]. \quad (3.31)$$

elde edilen bu denklemden her yineleme adımı n ’de, model parametreleri yakınsama elde edilinceye kadar güncelleştirilir. Denklem 3.31’in kullanımı, koşullama yapılacak toplam veri sayısının, tahmin edilecek model parametresi sayısından çok fazla olduğu durumlarda elverişlidir. Çünkü Denklem 3.31’in sağ tarafındaki matris, $G_n^T C_D^{-1} G_n + C_M^{-1}$, $M \times M$ (M , bilinmeyen toplam model parametresi sayısı) boyutlu bir matristir. Koşullama yapılacak toplam veri sayısının, tahmin edilecek model parametresi sayısından çok az olduğu durumlarda ise kullanımı elverişli olan denklem (Tarantola, 1987)

$$\bar{m}^{n+1} = \lambda_n \bar{m}_{prior} + (1 - \lambda_n) \bar{m}^n - \lambda_n [C_M G_n^T (C_D + G_n C_M G_n^T)^{-1} \times (\bar{d}_{cal}(\bar{m}^n) - \bar{d}_{obs} + G_n (\bar{m}^n - \bar{m}_{prior}))] \quad (3.32)$$

şeklinde verilir. Çünkü Denklem 3.32’nin sağ tarafında yer alan tersi alınacak matris, $(C_D + G_n C_M G_n^T)$, $N_d \times N_d$ (N_d koşullama yapılacak toplam ölçülmüş veri sayısıdır) boyutlu bir matristir.

Denklem 3.6 için Levenberg-Marquardt algoritması kullanıldığında aşağıdaki verilen denklemler kullanılır (Bi ve diğ. 2000):

$$\bar{m}^{n+1} = \bar{m}^n + \delta \bar{m}^{n+1} \quad (3.33)$$

ve

$$\begin{aligned} \delta \bar{m}^{n+1} = & \frac{\bar{m}_{prior} - \bar{m}^n}{(1 + \alpha^n)} \\ & + C_M G_n^T \left[\left((1 + \alpha^n) C_D + G_n C_M G_n^T \right)^{-1} \times \left(\frac{G_n (\bar{m}^n - \bar{m}_{prior})}{1 + \alpha^n} \right) - \left(\bar{d}_{cal}(\bar{m}^n) - \bar{d}_{obs} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Denklem 3.34'ün kullanımı, koşullama yapılacak toplam ölçümüş veri sayısının, tahmin edilecek model parametresi sayısından çok fazla olduğu durumlarda elverişlidir. Tahmin edilecek model parametresinin, koşullama yapılacak toplam ölçümüş veri sayısından oldukça az olduğu durumlarda, Denklem 3.34'e alternatif olarak

$$\delta \bar{m}^{n+1} = - \frac{1}{1 + \alpha^n} \left[\frac{G_n^T C_D^{-1} G_n}{1 + \alpha^n} + C_M^{-1} \right]^{-1} \left[G_n^T C_D^{-1} (\bar{d}_{cal}(\bar{m}^n) - \bar{d}_{obs}) + C_M^{-1} (\bar{m}^n - \bar{m}_{prior}) \right]. \quad (3.35)$$

denklemini kullanılır. Denklem 3.34 ve 3.35'de, α^n , pozitif Levenberg-Marquardt sayısıdır ve her yineleme adımında, matrisler $\frac{G_n^T C_D^{-1} G_n}{1 + \alpha^n} + C_M^{-1}$ ve $\left((1 + \alpha^n) C_D + G_n C_M G_n^T \right)$, pozitif-tanımlı olacak şekilde ya 10 ile çarpılır (eğer $S(\bar{m}^{n+1}) > S(\bar{m}^n)$ ise) ya da 10 ile bölünür (eğer $S(\bar{m}^{n+1}) < S(\bar{m}^n)$ ise) (Fletcher, 1971; Bi ve diğ. 1999). Genellikle, uygulamalarda, α için büyük bir başlangıç değeri seçilmesi önerilmektedir (örneğin 10000 gibi, Bi, 1999).

Yukarda tanımlanan Gauss-Newton ve Levenberg-Marquardt algoritmalarının her ikisinde bu çalışma kapsamında kullanılmış, implemenastasyonun kolaylığı ve lokal minimumlara az takılması bakımından, Levenberg-Marquardt algoritması daha faydalı

bulunmuştur. Bölüm 5’de verilecek uygulamalar, Denklem 3.33-3.35 ile tanımlanan Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak yapılmıştır.

Gauss-Newton ve Levenberg-Marquardt algoritmaları için durdurma kriterleri (veya yakınsama kriterleri) aşağıdaki denklemlere göre seçilmiştir:

$$\sqrt{\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} [\bar{d}_{cal}(\bar{m}^{n+1}) - \bar{d}_{obs}]^2} < \sigma_d \quad (3.36)$$

ve

$$\frac{|S(\bar{m}^{n+1}) - S(\bar{m}^n)|}{S(\bar{m}^n) + 10^{-14}} < \epsilon \quad (3.37)$$

Denklem 3.36’da, σ_d , kullanıcı tarafından belirlenmiş basınç verisi standart sapması (örneğin 0.1 gibi) ve Denklem 3.37’de ϵ yine kullanıcı tarafından belirlenmiş küçük bir sayıdır (örneğin, 10^{-5} gibi). Denklemler 3.36 ve 3.37 sağlandığında, $\bar{m}^{n+1}$ basınç verilerine koşullu sonsal tahmin olarak kabul edilir ve $\bar{m}_\infty$ ile temsil edilir. Bu tahmine ait sonsal kovaryans matrisi ise,

$$C_{MP} = C_M - C_M G_\infty^T (G_\infty C_M G_\infty^T + C_D)^{-1} G_\infty C_M. \quad (3.38)$$

denkleminde hesaplanır. G_∞ , sonsal tahmin $\bar{m}_\infty$ vektörü için hesaplanmış duyarlılık katsayı matrisidir ve C_{MP} matrisinin çaprazındaki elemanlar, model parametreleri için sonsal varyansları temsil eder. Bu varyans değerlerine ve önsel varyans değerlerine bakılarak, basınç verilerine koşullamanın tahmin edilen model parametresinde belirsizliğin ne ölçüde azaltıldığı sayısal olarak değerlendirilir.

Genelde sonsal tahmin oldukça düzgündür (smooth), basınç verilerine koşullu, ancak gerçeğe daha yakın düzgün olmayan gerçeklemeler, iki yöntemle türetilabilmektedir. Bunlardan ilki sonsal kovaryans matrisin (Denklem 3.38 ile verilen C_{MP} matrisinin) Cholesky ayrışımına ($C_{MP} = LL^T$)

$$\bar{m}_{cr} = \bar{m}_{\infty} + L\bar{z}_{r0} \quad (3.39)$$

dayanmaktadır. Burada $\bar{z}_{r0}$ birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı birim varyanslı normal dağılımdan belirli bir tohum değeri kullanılarak çekilmiş dizidir. $\bar{m}_{cr}$ ise, hem önsel, statik ve basınç verilerini sağlayan koşullanmış bir gerçeklemeyi temsil eder.

Oliver ve diğ. (1996), Denklem 3.38 ve Denklem 3.39'dan türetilen gerçeklemelerin, oldukça doğrusal olmayan problemlerde doğru örnekleme yapmadığını belirterek, böyle durumlarda daha doğru örnekleme için aşağıda tanımlanan hedef fonksiyonun minimize edilerek gerçeklemelerin türetilmesini önermişlerdir:

$$S(\bar{m}) = (\bar{m} - \bar{m}_{us})^T C_M^{-1} (\bar{m} - \bar{m}_{us}) + \left[\bar{d}_{cal}(\bar{m}) - (\bar{d}_{obs} - C_D^{1/2} Z_D) \right]^T C_D^{-1} \left[\bar{d}_{cal}(\bar{m}) - (\bar{d}_{obs} - C_D^{1/2} Z_D) \right] \quad (3.40)$$

Burada, $\bar{m}_{us}$, model parametreleri için koşulsuz bir gerçekleştirme, $C_D^{1/2} Z_D$ ise, sıfır ortalamalı ve varyansı ölçüm verilerinin varyansına eşit normal dağılımlı hatadır. Bu yöntemin detayları Oliver ve diğ. (1996) ve Zeybek ve Onur (2003)'de bulunabilir.

3.3 Parametre Sınırlandırma Algoritmaları

Bu bölümde son olarak, Denklem 3.21'in (veya 3.40'ın) Gauss-Newton ve Levenberg-Marquardt algoritması ile minimizasyonu sırasında her yineleme adımında parametreleri fiziksel sınırlar içersinde tutmak için çalışmada kullanılan parametre sınırlama algoritmaları hakkında bilgi verilmektedir. Bilindiği gibi, gradyent bazlı sınırlandırılmamış (unconstrained) optimizasyon algoritmalarında, her hangi bir yineleme adımında model parametreleri, örneğin geçirgenlik ve/veya gözeneklilik negatif değerler aldığı anda, onları uygun şekilde değiştirerek pozitif yapmak için veya bu değişkenler beklenmeyen çok küçük veya büyük değerler aldığı anda, bu değerleri kullanıcı tarafından model parametreleri için tanımlanan alt (m_l) ve üst (m_u) sınır değerleri arasında tutabilmek için, sınırlandırılmış (constrained) optimizasyon algoritmaları gerekli olmaktadır. Çalışmada, iki farklı sınırlandırıcı optimizasyon yöntemi denenmiştir. İki yöntemde, sınırlandırılmış (constrained)

optimizasyon problemini sınırlandırılmamış (unconstrained) optimizasyon problemine dönüştürmektedir. Bunlarda ilki Carvalho ve diğ. (1996) tarafından geliştirilmiş “aynalama” yöntemidir. Bu yöntemin detayları ilgili kaynakta bulunabileceğinden burada bu yöntemin detaylarına girilmeyecektir.

Çalışmada denenen ikinci kullanılan yöntem ise, Gao ve Reynolds (2003) tarafından önerilen logaritmik dönüştürme yöntemidir. Bu yöntemde, optimizasyon sırasında, model parametre vektörü $\vec{m}$ ’i ($\vec{m} = [m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_M]^T$), kullanıcı tarafından belirlenmiş her bir model parametresine ait alt sınır değerleri içeren alt sınır vektörü $\vec{m}_l$ ($\vec{m}_l = [m_{l,1}, m_{l,2}, \dots, m_{l,j}, \dots, m_{l,M}]^T$) ve model parametresine ait üst sınır değerleri içeren üst sınır vektörü $\vec{m}_u$ ($\vec{m}_u = [m_{u,1}, m_{u,2}, \dots, m_{u,j}, \dots, m_{u,M}]^T$) arasında sınırlandırmak için aşağıda her bir model parametresi m_j için tanımlanan logaritmik dönüşüm formülü kullanılır:

$$e_j = \ln \left(\frac{m_j - m_{l,j}}{m_{u,j} - m_j} \right) \quad (3.41)$$

$j = 1, \dots, M$. Burada M , toplam bilinmeyen parametre sayısını belirtmektedir. Denklem 3.41’den anlaşılacağı gibi, eğer minimizasyon yineleme işlemi sırasında model parametresi m_j , bu parametre için üst sınır değeri $m_{u,j}$ ’ye yaklaştığında, e_j sonsuz büyük değere ($e_j \rightarrow \infty$), alt sınır değeri $m_{l,j}$ ’ye yaklaştığında e_j eksi sonsuz büyük değere ($e_j \rightarrow -\infty$) yaklaşır. Bu sayede, parametreler için sınırlama aralığı $(-\infty, +\infty)$ aralığına dönüştürülerek, sınırlandırılmış optimizasyon problemi, sınırlandırılmamış optimizasyon problemine dönüştürülür. Dikkat edilecek olursa, bu dönüşüm yönteminde, optimizasyon model parametre vektörü $\vec{m}$ yerine Denklem 3.41’e göre dönüştürülerek elde edilmiş parametre vektörü $\vec{e}$ ’ye göre yapılır. Yöntemin uygulaması için, önce model parametreleri aşağıda tanımlandığı gibi ölçeklendirilir

$$m_{m,j} = \frac{1}{2}(m_{u,j} + m_{l,j}) \quad (3.42)$$

$$m_{r,j} = \frac{1}{2} (m_{u,j} - m_{l,j}) \quad (3.43)$$

ve model parametresi m_j , aşağıdaki denkleme göre minimizasyon sırasında güncelleştirilir:

$$m_j = m_{m,j} + m_{r,j} \frac{[\exp(e_j) - 1]}{[\exp(e_j) + 1]} \quad (3.44a)$$

veya

$$m_j = m_{m,j} + m_{r,j} \frac{\exp(-e_j)}{[\exp(-e_j) + 1]^2} \quad (3.44b)$$

Bu yöntemde minimizasyon işlemi dönüştürülmüş parametre vektörü $\bar{e}$ 'ye göre yapıldığından model simülatör basınçlarının (Denklem 3.29'daki $d_{cal,i}$ $i=1, \dots, N_d$, lerin) her bir dönüştürülmüş parametre e_j 'ye göre türevi zincir kuralından aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanır:

$$\frac{\partial d_{cal,i}}{\partial e_j} = \frac{\partial d_{cal,i}}{\partial m_j} \frac{dm_j}{de_j} \quad (3.45)$$

Denklem 3.45'deki dm_j / de_j türevi, Denklem 3.44'den türetilir:

$$\frac{dm_j}{de_j} = 2m_{r,j} \frac{\exp(e_j)}{[\exp(e_j) + 1]^2} \quad (3.46a)$$

veya

$$\frac{dm_j}{de_j} = 2m_{r,j} \frac{\exp(-e_j)}{[\exp(-e_j) + 1]^2} \quad (3.46b)$$

Denklemler 3.46a ve 3.46b'nin Denklem 3.45'de kullanılmasıyla minimizasyonda gerekli türevler

$$\frac{\partial d_{cal,j}}{\partial e_j} = 2m_{r,j} \frac{\exp(e_j)}{[\exp(e_j) + 1]^2} \frac{\partial d_{cal,j}}{\partial m_j} \quad (3.47a)$$

veya

$$\frac{\partial d_{cal,j}}{\partial e_j} = 2m_{r,j} \frac{\exp(-e_j)}{[\exp(-e_j) + 1]^2} \frac{\partial d_{cal,j}}{\partial m_j} \quad (3.47b)$$

hesaplanır. Burada son olarak vurgulanması önemli olan, $|e_j|$ 'nin çok büyük değerler aldığı durumlarda, eksponansiyel terimlerinin bilgisayarda hesaplanmasında “overflow” problemi ile karşılaşabileceğimizdir. Bu problemin oluşumunu önlemek için, $e_j > 0$ olduğu durumlarda, $\exp(-e_j)$ terimlerini içeren denklemleri (Denklem 3.44b, 3.46b ve 3.47b) , $e_j < 0$ olduğu durumlarda ise, $\exp(e_j)$ terimlerini içeren denklemleri (Denklem 3.44a, 3.46a ve 3.47a) kullanmak gerekir.

Yukarda bahsedilen her iki sınırlama algoritması ile yapılan uygulamalar sonucunda, genelde logaritmik dönüştürme yönteminin aynalama yöntemine göre genelde daha faydalı olduğu görülmüştür. Nedeni de, aynalama yönteminde, bazı durumlarda, minimizasyon algoritması, sınır değerlere takılıp, bu sınıra yapışık olarak ilerlemektedir. Bu da minimizasyon algoritmasının başarısızlığına ve kabul edilemeyecek parametre değerleri tahmin etmesine yol açabilmektedir. Logaritmik dönüşüm yönteminde, bu tür bir problem ile şu ana kadar yapılan uygulamalarda karşılaşılması. Bu nedenle, Bölüm 5’de verilecek uygulamalarda, sınırlama algoritması olarak, logaritmik dönüştürme yöntemi tercih edilmiştir.

4. DUYARLILIK KATSAYILARININ HESAPLANMASI

Bu bölümde, gradyent-bazlı Levenberg-Marquardt (veya Gauss-Newton) yöntemi ile simülatör gridbloklarındaki bilinmeyen parametrelerin basınç verilerini sağlayacak şekilde tahmininde, gerekli olan duyarlılık katsayılarının (sensitivity coefficients) hesaplanması üzerinde durulmaktadır. Bölüm 3’den hatırlanabileceği gibi Levenberg-Marquardt ve Gauss-Newton türü gradyent bazlı minimizasyon algoritmaları kullanıldığında, herhangi bir yineleme adımı l ’de simülatör basınç verilerinin model parametrelerine göre türevlerini içeren duyarlılık katsayısı matrisi G ’nin

$$G_n = G(\bar{m}') = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}')}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}')}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,1}(\bar{m}')}{\partial m_{N_p}} \\ \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}')}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}')}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,2}(\bar{m}')}{\partial m_{N_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}')}{\partial m_1} & \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}')}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_{cal,N_d}(\bar{m}')}{\partial m_{N_p}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

oluşturulması gerekmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken, $d_{cal,j}$ ’lerin, $j=1,2,\dots,N_d$, toplam ölçüm noktaları ($d_{obs,j}$, $j=1,2,\dots,N_d$) için simülatörden hesaplanmış ilgili model basınç testi verileri olduğudur.

Genelde, sonlu farklar üzerine kurulu sayısal modellerde duyarlılık katsayıların hesaplamada kullanılabilecek üç farklı yöntem mevcuttur. Bunlar (a) sonlu farklar (veya direkt “direct” veya değiştirme “subtitution” yöntemi olarak da literatürde isimlendirilmektedir) yöntemi, (b) gradyent simülatör yöntemi ve (c) adjoint simülatör yöntemidir. Bu bölüm içerisinde izleyen alt bölümlerde ayrıntılı olarak değinileceği gibi, bu yöntemlerin performansı (bilgisayarda gerektirdiği hafıza, hesaplama zamanları ve implementasyon bakımından), karşılaştırmada kullanılacak eldeki ölçüm basınç verisi ve tahmin edilecek toplam parametre sayısına bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla, 3B r - θ - z sayısal simülatörü model olarak kullanıldığında,

minimizasyon sırasında hangi yöntemin tercih edileceği, özellikle hesaplama zamanları ve hafıza bakımından, büyük önem taşımaktadır. Bu bölümde her üç yöntem tanıtılmış, bu yöntemlere ait temel denklemler verilmiş, bu üç farklı yöntemlerden elde edilen duyarlılık katsayılarının doğruluğu hem birbirleri ile kıyaslamaları hem de basit durumlar için mevcut analitik modellerden elde edilenlerle kıyaslamaları sunulmuştur. Ayrıca, duyarlılık katsayıları, hangi tip basınç testi verilerinin hangi parametrelere daha duyarlı olduğu konusunda bilgi ihtiva ettiğinden, düşey girişim basınç verilerinin her bloktaki parametrelere (örneğin geçirgenlik ve gözeneklilik) duyarlılıklarının hem alansal hem de zamana göre değişimleri incelenmiştir. Bu grafiklerden elde edilen bilgiler, bu tür testlerden hangi parametrelerin daha güvenilir belirlenebileceği konusunda önemli ipuçları vermektedirler.

Çalışmanın orijinal olan en önemli yönlerinden biri de, literatürde mevcut olmayan 3B r - θ - z sayısal sonlu fark simülatörü için duyarlılık katsayılarının gradyent simülatör ve adjoint yöntemlerinden hesaplanabileceği denklemlerin türetilmesi ve bunların optimizasyon algoritmasına entegre edilmesidir. Bu yöntemlere ait denklemlerin geliştirilmesi oldukça yer kapladığından, okuyucuların bu bölümde dikkatini dağıtmamak için, ayrıntılar bu bölüm içinde sunulmamıştır. Ek-B'de bu iki yöntem için duyarlılık katsayısı denklemlerine ait türetmeler ayrıntılı olarak verilmiştir.

4.1 Sonlu Fark Yöntemi

Kullanımı ve gradyent bazlı bir optimizasyon algoritmasına entegrasyonu en kolay olan yöntemdir. Ancak, aşağıda verilecek denklemlerden de anlaşılacağı gibi, bu yöntem parametre sayısının oldukça fazla olduğu durumlarda, gerektirdiği çok fazla ileri simülatör hesaplaması nedeniyle, tercih edilemeyecek bir yöntemdir. Basit birkaç parametre ihtiva eden klasik kuyu testi modellerinde kullanımı yaygın olarak tercih edilen bir yöntem olmakla beraber, gridblok ölçeğinde sayısal modellerden parametre tahmini uygulamalarında kesinlikle tercih edilmeyecek bir yöntemdir. Çalışmada bu yöntemin göz önünde bulundurulmasının amacı, gradyen ve adjoint simülatör yöntemi için geliştirdiğimiz denklemlerin doğruluğunu gridblok ölçeğinde kontrol edebileceğimiz tek sayısal yöntem oluşudur.

Bu yöntemin uygulaması aşağıda adım adım verilmektedir:

Adım 1: M boyutlu parametre vektörü $\vec{m}$ için yineleme adımı l 'de verilen $\vec{m}^l$ değerinde, bir ileri simülatör uygulaması ile tüm gridbloklardaki (test noktalarındaki model basınç verileride dahil olmak üzere, örneğin paker kuyudibi basıncı gibi) simülatör basınç verilerini ihtiva eden $\vec{p}^l = \vec{p}(\vec{m}^l)$ vektörünü oluşturulur. Denklemsel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{p}(\vec{m}^l) = g(\vec{m}^l) \quad (4.2)$$

burada sembol g simülatör ileri uygulamasını göstermek için kullanılmıştır.

Adım 2: Tahmin edilecek her bir model parametresini, $i = 1, 2, \dots, M$, olacak şekilde

$$m_j = m_j^l + \varepsilon_j \quad (4.3)$$

pertürbe edilir. Burada ε_j , yeterince küçük seçilmiş bir pozitif sayıdır. (Uygulamalarda, genelde $\varepsilon_j = 10^{-4} m_j^l$ olarak seçildiğinde yeterince hassas olarak duyarlılık katsayılarının hesaplandığı görülmüştür.) Denklem 4.3'den hesaplanmış her bir model parametresi değeri m_j için ileri simülatör uygulaması ile basınç vektörü $\vec{p} = \vec{p}(\vec{m})$ 'i hesaplanır:

$$\vec{p}(\vec{m}) = g(\vec{m}) \quad (4.4)$$

ve her bir model parametresi için her bir model basınç verisine göre duyarlılık katsayısını

$$\frac{\partial p_i(\vec{m}^l)}{\partial m_j} \approx \frac{p_i(\vec{m}) - p_i(\vec{m}^l)}{m_j - m_j^l} = \frac{p_i(\vec{m}) - p_i(\vec{m}^l)}{\varepsilon_j} \quad (4.5)$$

denkleminde hesaplanır.

Yukarıda verilen alitmadan da anlaşılacağı gibi, bu yöntemle Levenberg-Marquardt veya Gauss-Newton yönteminin her hangi bir yineleme adımında duyarlılık katsayılarını hesaplamak için toplam model parametre sayısı $M+1$ kadar

ileri simülatör uygulaması yapmak gerekmektedir. Dolayısıyla, tahmin edilecek parametre sayısının fazla olduğu simülatör gridblok ölçeğinde parametre tahmin problemleri için bu yöntemin kullanımı, çok fazla işlem zamanı gerektirdiğinden tercih edilen bir yöntem değildir.

4.2 Gradyent Simülatör Yöntemi

Gradyent simülatör yöntemi, otomatik geçmiş verilere çıkıştırma (Automatic History Matching) konusu kapsamında kullanılmak üzere Anterion ve diğ. (1989) tarafından önerilmiştir. Yöntem, sonlu-fark denklemlerinin her bir model parametresine göre kısmi türevinin alınması esasına dayanır. Sonuçta elde edilen denklem, matris-vektör formunda aşağıdaki gibi verilir (Ek-B):

$$\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial m_j} = - \left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial m_j} - \frac{\partial \bar{f}^{n+1}}{\partial m_j}. \quad (4.6)$$

Denklem 4.6'daki $\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$, $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu katsayı matrisi olup, basınç vektörü $\bar{y}^{n+1}$ 'i çözerken kullanılan katsayı matrisi A 'nın aynısıdır (Ek-A ve Ek-B).

Denklem 4.6'daki $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ ise, $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu çapraz (yani temel diyagonal dışındaki elemanlarının hepsi sıfır olan) bir matristir. Burada N simülatörde kullanılan toplam gridblok sayısıdır. Denklem 4.6'daki katsayı matrisi her zaman adımı $n+1$ 'de basınçları çözerken kullandığımız katsayı matrisinin aynı olduğu için $n+1$ zaman adımında tüm duyarlılık katsayılarını hesaplamak için Denklem 4.6'nın sadece sağ tarafını M kez değiştirerek (her model parametresi m_j , $j=1,2,\dots,M$), Denklem 4.6'yı M kez çözmek gerekecektir. Bir kezde, $n+1$ zaman adımındaki basınçları çözmek için ileri simülatör uygulaması yapılacağından, gradyent simülatör yöntemi, toplam $M+1$ adet "ileri" simülasyon uygulaması işlemi gerektirir. Ancak, bu noktada, gradyent simülatör yöntemi bir önceki alt bölümde tanıtılan sonlu fark yöntemi gibi toplam $M+1$ adet ileri simülatör uygulaması gerektiriyor gözükmesine rağmen, sonlu fark yöntemine göre daha az işlem zamanı aldığı bir gerçektir. Bununla birlikte, gradyent simülatör yönteminde, M "ileri" simülatör uygulamasında, katsayı matrisi aynı olduğundan bu matrisin sadece bir kez

“tersini” (veya LU ayrışımını) alıp, Denklem 4.6’nın sadece sağ yan vektörünü M kez değiştirerek işlem yapılmasıdır. Dolayısıyla, gradyent simülâtör yönteminde her bir “ileri” simülâtör uygulaması, sonlu fark yöntemindeki ileri simülâtör uygulamasına göre daha az zaman almaktadır. Bununla beraber, yine de gradyent simülâtör yöntemi, toplam parametre sayısı M ’nin eldeki ölçüm verileri sayısı N_d ’den oldukça fazla olduğu durumlarda ($M \gg N_d$), hesaplama zamanı bakımında, etken bir yöntem değildir. Ayrıca, Gauss-Newton veya Levenberg-Marquardt yöntemlerindeki duyarlılık katsayı matrisinde sadece ölçüm verilerinin olduğu kuyu dibi veya girişim noktalarındaki simülâtör basınç verilerinin duyarlılık katsayısı gerekirken, gradyent simülâtör yönteminde bu basınç verilerinininkine ek olarak tüm gridbloklardaki basınçların duyarlılığının da hesaplanmak zorunda olduğudur.

Bu dezavantajlarına karşın, M ’nin N_d ’ye eşit veya N_d ’den küçük olduğu modellerde (örneğin, tabakaların tek bir yatay ve düşey geçirgenlik ve gözeneklilikle temsil edildiği modellerde), gradyent simülâtör yöntemi (veya bir önceki alt bölümde verilen sonlu fark yöntemi) bundan sonraki alt bölümde sunacağımız adjoint simülâtör yöntemine göre daha avantajlı konuma geçmektedir.

4.3 Adjoint Simülâtör Yöntemi

Adjoint simülâtör yöntemi, ilk olarak Chen ve diğ. (1974) ve Chavent ve diğ. (1975) tarafından Kartezyen grid sistemlerinde tek fazlı akış sistemi göz önünde bulundurularak geliştirilmiştir. Daha sonra, yine Kartezyen grid sistemlerinde, Zhan ve diğ. (1999) iki-fazlı, Li ve diğ. (2001) üç-fazlı akış için geliştirilmiştir. Bu kaynaklardaki bilgilerden yararlanarak, bu çalışmada geliştirilen r - θ - z simülâtörü için duyarlılık katsayılarını hesaplayabileceğimiz ayrık adjoint simülâtör yöntemine ait denklemler geliştirilmiş ve Ek-B’de ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Adjoint yöntemde, hem basınç vektörü $\vec{y}^{n+1}$ ’nin hem de model parametre vektörü $\vec{m}$ ’nin fonksiyonu olarak bir skaler β fonksiyonu tanımlanır:

$$\beta = \beta(\vec{p}^1, \vec{p}^2, \dots, \vec{p}^L, \vec{m}) \quad (4.7)$$

Burada L , duyarlılık katsayısını hesaplamak istediğimiz en son zaman t^L 'ye karşılık gelmektedir. Bu yöntemde amaç, β 'nin duyarlılık katsayılarını hesaplamaktır. Burada β , kuyudibi basıncı p_{wf} 'yi temsil edebileceği gibi herhangi bir simülâtör bloğu s 'deki basınç p_s , $s=1,2,...,N$, yi de temsil edebilir. Dolayısıyla, gradyent simülâtörün tersine, adjoint yöntemde Gauss-Newton ve Levenberg-Marquardt yöntemlerinde gerekli duyarlılık katsayı matrisinde (Denklem 4.1) sadece ölçüm verilerinin olduğu yerlerdeki simülâtör basınç verilerinin türevlerini hesaplamak mümkün olmaktadır. Bu gradyent simülâtöre göre önemli bir avantajdır.

Adjoint yöntemde, adjoint fonksiyonel olarak isimlendirilen J , β ile

$$\vec{f}^{n+1} = \vec{f}(\vec{p}^{n+1}, \vec{p}^n, \vec{m}) = \begin{bmatrix} f_{w,1}^{n+1} \\ f_{w,2}^{n+1} \\ \vdots \\ f_{w,N_w}^{n+1} \\ f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (4.8)$$

ayrık sonlu-fark denklemlerine ait $\vec{f}^{n+1}$ vektörünün fonksiyonu olarak

$$J = \beta + \sum_{n=0}^L \tilde{\lambda}^{n+1} \vec{f}^{n+1} \quad (4.9)$$

yazılır. Burada $\tilde{\lambda}^{n+1}$, $(N+N_w)$ -boyutlu adjoint değişken (veya Lagrange değişken) vektörüdür ve aşağıda verilen matris-vektör denkleminde hesaplanır (detaylar Ek-B'de bulunabilir):

$$\nabla_{\vec{p}^n} (\vec{f}^n)^T \tilde{\lambda}^n = -\nabla_{\vec{p}^n} (\vec{f}^{n+1})^T \tilde{\lambda}^{n+1} - \nabla_{\vec{p}^n} \beta \quad (4.10)$$

Bu denklemden $\tilde{\lambda}^n$ 'ler, $n=L, L-1, ..., 1$ olacak şekilde, zamanda geriye doğru çözülür. Denklem 4.10'da $\nabla_{\vec{p}^n} (\vec{f}^n)^T$ $(N+N_w) \times (N+N_w)$ boyutlu katsayı matrisi olup

simülasyonda basınçları çözerken kullanılan katsayı matrisi A 'nın transpozesidir. Ancak A simetrik olduğundan, bu matrisin transpozesi kendisine eşit olacaktır. Dolayısıyla, $\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^n)^T = A \cdot \nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T$ ise, $(N+ N_w) \times (N+ N_w)$ boyutlu çapraz matristir ve $\nabla_{\bar{p}^n} \beta$ ise $(N+ N_w)$ boyutlu vektördür (Ek-B). Denklem 4.10 ile verilen adjoint denklem takımı adjoint değişkenler için çözüldükten sonra, duyarlılık katsayı matrisi G 'de gerekli duyarlılık katsayıları (Denklem 4.1)

$$\nabla_{\bar{m}} J = \nabla_{\bar{m}} \beta + \sum_{n=1}^L \nabla_{\bar{m}} (\bar{f}^n)^T \bar{\lambda}^n \quad (4.11)$$

denklemden hesaplanır (Ek-B).

Burada vurgulanması gereken önemli bir nokta, Denklem 4.10 ile verilen adjoint sistem denklemin çözümleme işlemi bakımından Denklem 4.6 ile verilen gradyent simülatör yöntemine benzer gözüktüğüdür. Dolayısıyla, Denklem 4.10 ve Denklem 4.6'yı herhangi bir zaman adımı için bilgisayarda çözümleme işleminin hemen hemen aynı CPU zamanını alacağını bekleyebiliriz. Ancak, eğer model parametre sayısı M ve çakışmada kullanılan ölçüm basınç veri sayısının N_d olduğunu düşünürsek, duyarlılık katsayılarını hesaplamak için gradyent simülatör yönteminde Denklem 4.6'yı M kez çözmek gerekirken, adjoint yönteminde Denklem 4.10'u N_d kez çözmek gerekecektir. Eğer eldeki ölçüm veri sayısı model parametre sayısından kat kat küçükse ($N_d \ll M$) ki bu heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımına sahip sistemler için $N_d \ll M$ ilişkisi her zaman geçerli olacaktır, o zaman adjoint yöntem, gradyent simülatör yöntemine göre duyarlılık katsayılarını hesaplamak için oldukça avantajlı olacaktır. Yalnız adjoint yönteminin, gradyent simülatör yöntemine göre bilgisayarda daha fazla hafıza gereksinimi gerektirdiğini belirtmek gerekir. Çünkü duyarlılık katsayılarının Denklem 4.11 hesaplanması için Denklem 4.10'dan hesaplanan zamanda geriye giderek hesaplanan adjoint değişkenlerin hafızada tutulması gerekmektedir.

Bu alt bölümde son olarak, hem tahmin edilecek model parametre sayısının (10000 veya daha fazla) hem de çakışmada kullanılacak ölçüm basınç verisi sayısının (1000 veya daha fazla) çok olduğu durumlarda, yukarıda tanımlanan adjoint simülatör

yöntemi etkenliğini kaybeder. Böyle durumlarda, son yıllarda yapılan çalışmalar (Zhang ve diğ., 2002), sadece hedef fonksiyonun (adjoint) gradyentini kullanan, conjugate gradyent ve yarı-Newton (Quasi-Newton) yöntemlerinin Gauss-Newton ve Levenber-Marquardt'a göre hesaplama zamanları bakımından daha etken yöntemler olduğunu belirtmektedirler. Bu tez çalışması kapsamında yer almadığından, bu yöntemler denenmemiştir.

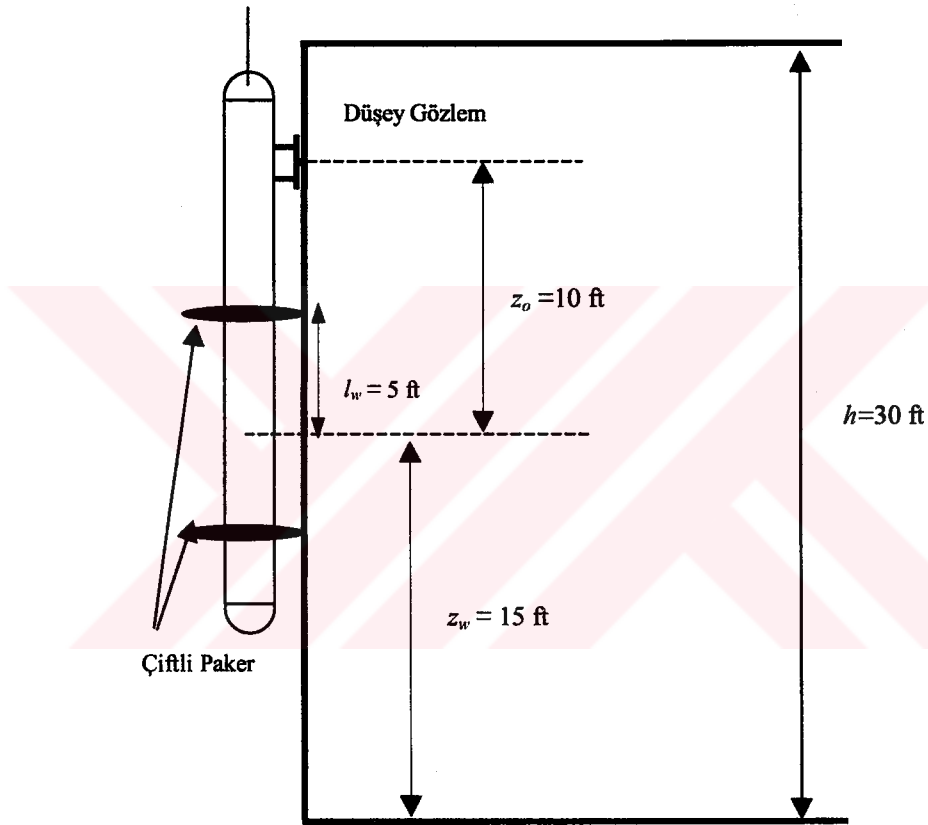
4.4 Farklı Duyarlılık Katsayı Hesaplama Yöntemleri İçin Türetilen Denklemlerin Doğruluğunun Sınanması ve Kıyaslanması

Bu bölümde, bir önceki bölümde geliştirilen gradyent ve adjoint yöntemlerden hesaplanan duyarlılık katsayılarının doğruluğunu sınamak için yapılan uygulamalar sunulmaktadır. Bu amaç için üç farklı örnek göz önünde bulundurulmuştur. İlk örnek tek tabakalı homojen-anizotropik sistemde bir düşey girişim testi ve ikinci örnek ise iki tabakalı (her tabaka homojen-anizotrop olarak ele alınmıştır) sistemde düşey girişim testi uygulamasına aittir. İlk iki örneğin seçilmesinin nedeni, bu örnekler için gradyent ve adjoint simülatör yönteminden elde edilen duyarlılık katsayılarının analitik çözümlerden (Onur ve diğ., 2002, Kuchuk ve Onur, 2003) elde edilenlerle kıyaslamasına olanak tanınmasıdır. Son örnek ise, tek tabakalı heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımına sahip bir sisteme ait uygulamadır. Bu uygulama için gradyent ve adjoint sistemden elde edilen duyarlılık katsayıları, sonlu-fark (veya pertürbasyon) olarak isimlendirilen yöntemle hesaplananlarla kıyaslanmıştır. Çünkü göz önünde bulundurulan heterojen sistem için analitik çözüm mevcut değildir.

4.4.1 Tek tabakalı homojen-anizotrop sistem

Göz önünde bulundurulan sistem ve teste ait şema Şekil 4.1'de ve kullanılan simülatörde kullanılan model parametreler ise Tablo 4.1'de verilmektedir. Şekil 4.1'de gösterilen paker aralığında ve düşey gözlem noktasındaki basınçları ve duyarlılık katsayılarını hesaplamak için toplam $N = 1250$ ($N_r = 25$, $N_\theta = 1$, $N_z = 50$) simülatör bloğundan oluşan bir blok-merkezli elek sistemi kullanılmıştır. Her simülatör bloğunda $k_r = k_\theta = k_h = 40$ md ve $k_z = k_v = 4$ md alınmıştır. Ayrıca, sistem içerisinde gözeneklilik uniform (yani her simülatör bloğunda aynıdır) ve $\phi = 0.22$ olarak alınmıştır. Simülasyonda, r ve z yönlerinde

üniform olmayan bloklar kullanılmıştır. Üretime kısmi açık aralık yukarıdan (rezervuar üst sınırından, $z = 0$ 'dan) sayıldığında z yönündeki 18. ve 34. bloklar arasında yer alan toplam 17 simülatör bloğundan oluşmaktadır. Düşey gözlem noktası ise, kuyuda z yönünde yukardan 9. bloğun merkezindedir. Simülasyonda, üretim sadece paker aralığından yapılmaktadır. Amaç, hem paker aralığında hem de düşey gözlem noktasındaki basınçların parametrelere göre duyarlılığını farklı yöntemlerle hesaplayıp kıyaslamak ve ayrıca elde edilen duyarlılıkları yorumlamaktır.



Şekil 4.1 Duyarlılık katsayılarının sınılanması için kullanılan tek tabaka düşey girişim test şeması.

Tablo 4.1 Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, tek tabakalı örnek uygulama.

ϕ ,	0.22
h , ft	30
k_h , mD	40
k_v , mD	4
c , psi ⁻¹	2.5×10^{-5}
μ , cp	1.0
r_w , ft	0.328
z_w , ft	15
z_o , ft	10
C , bbl/psi	1.0×10^{-5}
S ,	0.5
q , bbl/D	100
r_e , ft	5000
$2l_w$, ft	10

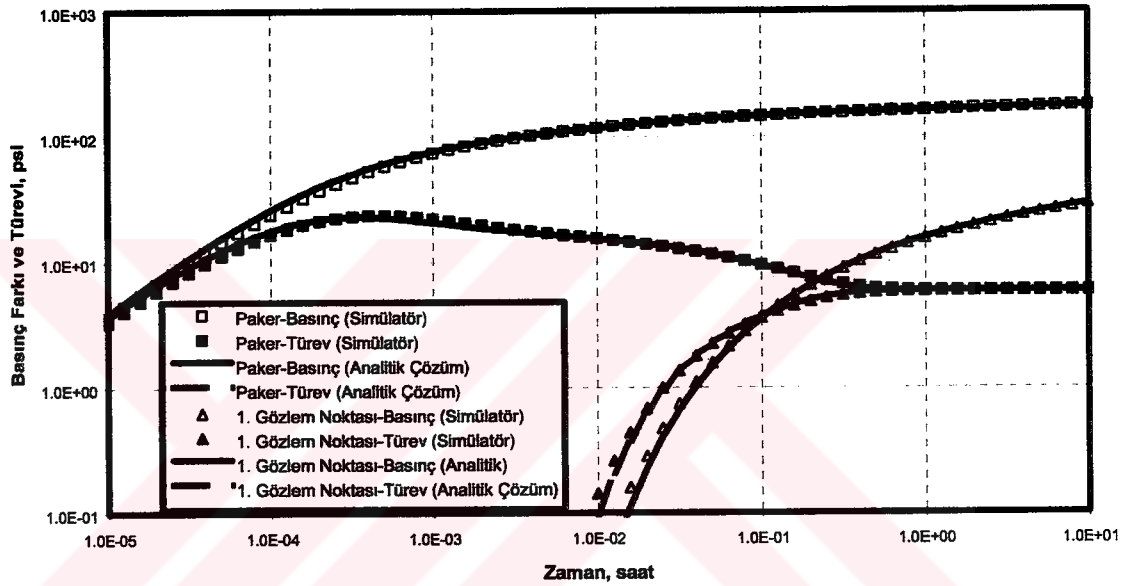
Şekil 4.2’de, simülatörden hesaplanmış pakler aralığı kuyu dibi basıncı ile düşey gözlem noktasındaki basıncı ve türevlerinin analitik çözümden elde edilenlerle kıyaslanması sunulmaktadır. Görüldüğü gibi, simülatör sonuçları ve analitik çözüm sonuçları mükemmel bir uyum içersindedir. Ayrıca, türev eğrileri böyle bir test sırasında pakler aralığında ve düşey gözlem noktasında gözlemlenen akış rejimlerini belirtmektedir. Pakler aralığı basıncı 10^{-5} saat ile 10^{-4} saat arasında, kuyuiçi depolama etkileri göstermektedir. Hem pakler aralığında hem de düşey gözlem noktasında, çevrel akış (türevde sabitleşme dönemi) yaklaşık 0.6 saatte başlamaktadır. Pakler aralığı basınç türev eğrisi, 10^{-3} saat ile 0.6 saat arasında kuyuiçi depolaması ile çevrel akış dönemi arasında geçiş dönemi belirtmektedir ve bu zaman dilimi içersinde, kısmi açık aralığını formasyon kalınlığına göre bu örnekte oldukça küçük seçilmemesi nedeniyle belirgin bir küresel akış (türev eğrisinde $-1/2$ eğimli doğru) gözlemlenememektedir.

Şekil 4.3’de, adjoint, gradyent simülatör yöntemleri ve analitik çözümden hesaplanmış pakler aralığındaki kuyu dibi basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılık katsayılarının zamana göre değişimi sunulmaktadır. Homojen bir sistem göz önünden bulundurulduğundan, gradyent ya da adjoint simülatör yönteminden kuyudibi ve gözlem noktası basınçlarının yatay geçirgenliğe (düşey geçirgenlik veya gözenekliliğe) göre duyarlılığının zamana göre değişimi, bu yöntemlerden hesaplanan kuyudibi ve gözlem noktası basınçlarının her bir

griblottaki yatay geçirgenliğe göre duyarlılıklarından zincir kuralından geliştirilen aşağıdaki verilen denklem yardımıyla hesaplanır:

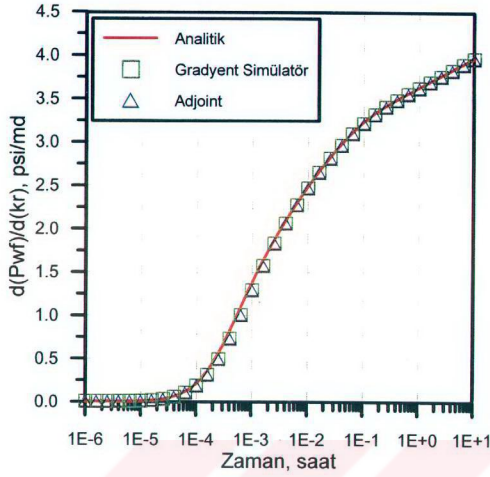
$$\frac{\partial p_i}{\partial k_h}(t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial k_{h,j}}(t) \quad (4.12)$$

Burada p_i , duyarlılığı hesaplanacak pakler aralığı ya da düşey gözlem noktası basıncını temsil etmektedir. Analitik çözümde, uzaysal değişim göz önünde bulundurulmadığından, $\partial p_i(t)/\partial k_h$ doğrudan hesaplanır.

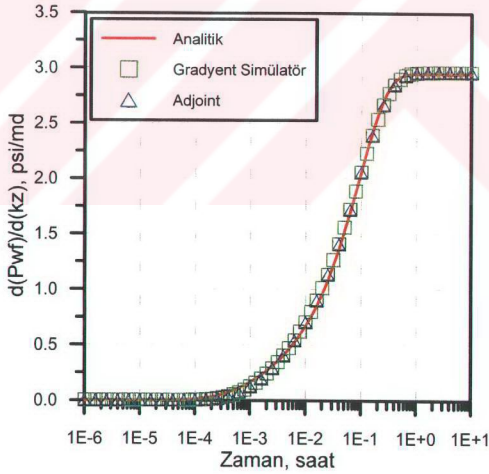


Şekil 4.2 Şekil 4.1'de verilen tek-tabakalı sistem için simülasyon ve analitik çözümlerden elde edilen pakler kuyudibi basınç ve düşey gözlem noktası basınç değişim ve türevlerinin kıyaslanması.

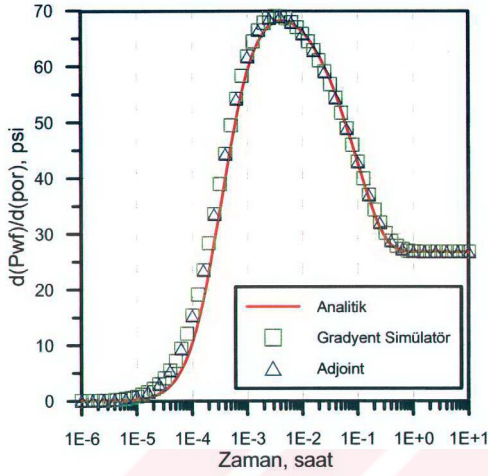
Şekil 4.3'den görüldüğü gibi, üç farklı yöntemden hesaplanan duyarlılık katsayıları birbiri ile mükemmel bir uyum içerisindedir. Benzeri kıyaslamalar pakler kuyudibi basıncının sırasıyla z yönündeki (düşey) geçirgenlik, gözeneklilik ve zar faktörüne göre duyarlılığının zamanla değişimi Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da sunulmuştur. Bu şekillerden de, her üç yöntemden hesaplanan duyarlılık katsayılarının oldukça iyi bir uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Burada gösterilmemekle beraber, benzeri kıyaslamalar, kuyuiçi depolaması, ilk rezervuar basıncı, ilk kuyudibi akış basınçları içinde yapılmış ve üç farklı yöntemden hesaplanan duyarlılık katsayılarının mükemmel bir uyum içinde olduğu görülmüştür.



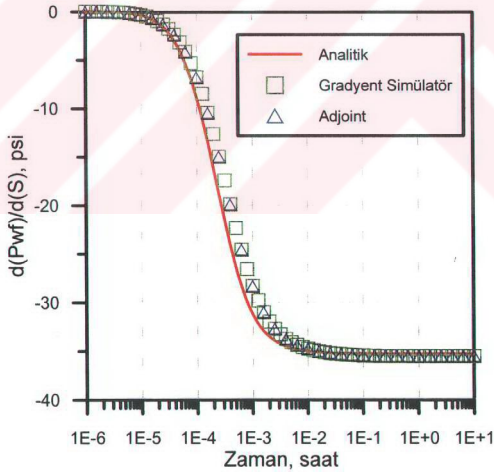
Şekil 4.3 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülâtör ve analitik çözümlerden elde edilen pakler kuyudibi basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_{wf}/dk_r) kıyaslanması.



Şekil 4.4 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülâtör ve analitik çözümlerden elde edilen pakler kuyudibi basıncının z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_{wf}/dk_z) kıyaslanması.



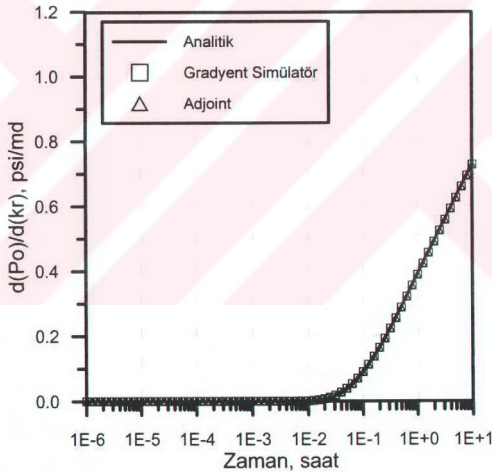
Şekil 4.5 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf}/d\phi$) kıyaslanması.



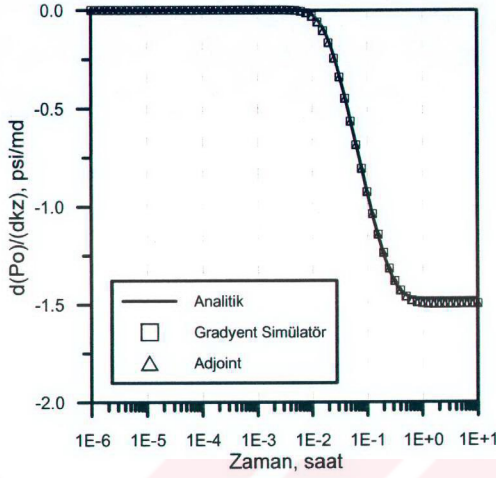
Şekil 4.6 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basıncının zar faktörüne göre duyarlılığının (dp_{wf}/dS) kıyaslanması.

Şekil 4.7 ve 4.8’de, adjoint, gradyent simülatör yöntemleri ve analitik çözümden hesaplanmış düşey gözlem noktası basıncının, p_o ’nun, sırasıyla, r yönündeki (yatay) ve z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılık katsayılarının zamana göre değişimleri sunulmaktadır. Görüldüğü gibi, düşey gözlem noktası basıncı için de üç farklı yöntemden hesaplanan duyarlılık katsayıları birbiri ile mükemmel bir uyum içersindedir. Benzeri kıyaslamalar düşey gözlem noktası basıncının sırasıyla z yönündeki (düşey) geçirgenlik, gözeneklilik, pakler aralığı zar faktörü ve kuyuiçi depolamasına göre duyarlılığının zamanla değişimi için yapılmış ve elde edilen sonuçlar her üç yöntemden hesaplanan duyarlılık katsayılarının mükemmel bir uyum içerisinde olduğunu göstermiştir.

Şekiller 4.3-4.8’de elde edilen sonuçlar, gradyent ve adjoint simülatör yöntemlerinin tek tabakalı homojen-anizotrop sistemler için doğru türetildiğini açıkça göstermektedir.



Şekil 4.7 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülatör ve analitik çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_o / dk_r) kıyaslanması.



Şekil 4.8 Tek tabakalı sistem için adjoint, gradyent simülâtör ve analitik çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının (dp_o / dk_z) kıyaslanması.

Analitik çözümler, duyarlılığın hem zamansal hemde uzaysal olarak dağılımını incelemeye olanak sağlamadığından, bundan sonraki kıyaslamalarda sadece adjoint ve gradyent simülâtör yöntemlerinden belirli zaman değerlerinde hesaplanan duyarlılığın alansal r - z kesitinde değişimlerine bakılmıştır. Şekil 4.9-4.14'de verilen alansal r - z kesitlerinde, r yönünde 1. blok kuyuya bitişik ilk bloğu, z yönünde 1. blok ise, rezervuar üst sınıra bitişik ilk bloğu temsil etmektedir. Şekil 4.9'da, iki farklı zaman değerinde ($t = 0.01$ saat ve $t = 10$ saat) paker kuyudibi basıncının her bir simülâtör bloğundaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının r - z kesit alanı üzerinde dağılımı hem gradyent ve adjoint simülâtör yönteminden hesaplananlarla kıyaslamalı olarak göstermektedir. (Şekil 4.1'den görülebileceği gibi $t = 0.01$ saat geçiş rejimi döneminde, $t = 10$ saat ise çevrel akış rejimi döneminde seçilmiş iki zaman değeridir.) Benzeri kıyaslamalar, Şekil 4.10'de z yönündeki geçirgenlik için Şekil 4.11'de ise gözeneklilik için gösterilmektedir.

Şekil 4.12, iki farklı zaman değerinde ($t = 0.01$ saat ve $t = 10$ saat) düşey gözlem noktası basıncının her bir simülâtör bloğundaki r yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılığının r - z kesit alanı üzerinde dağılımı hem gradyent hem de adjoint

simülâtör yönteminden hesaplananlarla kıyaslamalı olarak göstermektedir. Gözlem noktası basıncı için benzeri kıyaslamalar, Şekil 4.13’de z yönündeki geçirgenlik için Şekil 4.14’de ise gözeneklilik için gösterilmektedir.

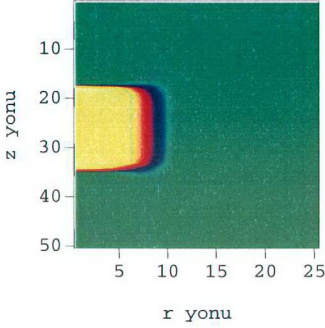
Şekil 4.18 ve Şekil 4.19’daki kıyaslamalardan, olması gerektiği gibi, hem adjoint hem de gradıent simülâtör yöntemlerinin duyarlılık katsayılarının alansal olarak birbiri ile aynı sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Daha öncede değinildiği gibi, duyarlılık katsayıları parametre tahmininde, ölçülmüş basınç verilerinden hangi model parametrelerinin daha güvenilir olarak belirlenip belirlenemeyeceği konusunda bir ipucu verir. Şekil 4.9’dan görüleceği gibi, küçük zaman değerinde, paker kuyudibi basıncının açık aralık ile sınırlı alanda ancak kuyuya bitişik blokların r yönündeki (yatay) geçirgenliklerine oldukça duyarlıdır. Kuyudibi basıncı, bu blokların dışındaki blokların geçirgenliklerine erken zamanlarda duyarlılık göstermemektedir. Zaman ilerleyip toplam sisteme ait çevrel akış görüldüğümüz $t = 10$ saat de ise, kuyudibi akış basıncının açık aralıktan başlayarak rezervuar içersinde “koni” şeklinde genişleyen ve rezervuar alt ve üst sınırlarında kapsayan blokların geçirgenliğine duyarlı olduğunu göstermektedir.

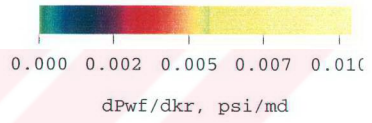
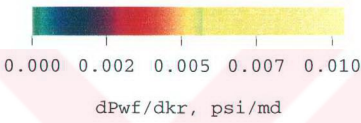
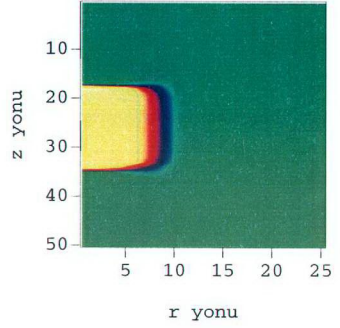
Ayrıca, Şekil 4.9’dan dikkat edilecek olursa, her iki zaman değerinde de kuyudibi basıncı, en çok açık aralığa bitişik bloklardaki yatay geçirgenliklere duyarlılık göstermektedir. Şekil 4.9’dan toplam sisteme ait çevrel akışın oluştuğu dönemde ($t = 10$ saat) dikkati çeken diğer önemli noktalar ise (i) paker basıncının kuyuya bitişik açık aralığın üst sınırının üstündeki bloklar ile alt sınırının altındaki blokların yatay geçirgenliğine duyarlılık göstermemesidir; (ii) paker basıncı geçirgenliğine duyarlılık gösterdiği r -yönündeki en son blok yaklaşık 16. bloktur ve bu blokta kuyu yüzeyinden yaklaşık 130 ft uzaklıktadır. Şekil 4.9’dan görüleceği gibi, yatay geçirgenliğe göre tüm duyarlılıklar pozitiftir. Bu sonuç anlamlıdır çünkü r -yönünde (yatay) geçirgenlik değeri artıka, paker aralığında basınç düşümü azalacak ve dolayısıyla paker kuyudibi basıncı artacaktır.

Paker basıncının simülâtör bloklarındaki z -yönündeki (düşey) geçirgenliklerine duyarlılığını gösteren Şekil 4.10’da elde edilen sonuçlar oldukça ilginçtir: Erken zamanlardaki geçiş dönemine karşılık gelen $t = 0.01$ saat’de, paker basıncı sadece

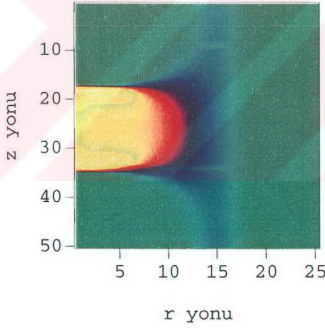
t=0.01 saat, adjoint



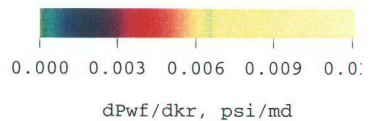
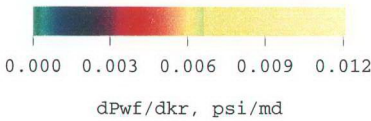
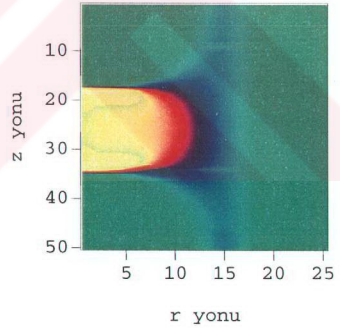
t=0.01 saat, Gradient Simulato



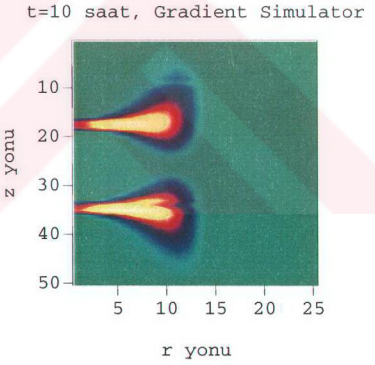
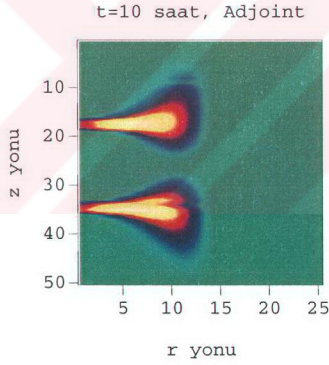
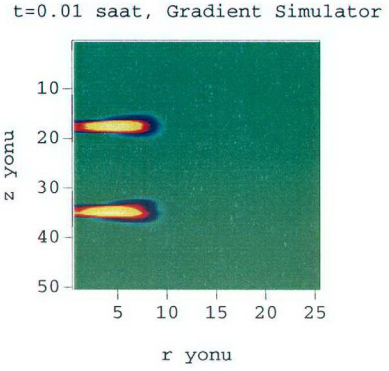
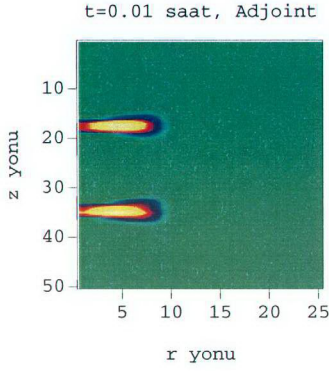
t=10 saat, adjoint



t=10 saat, Gradient Simulato



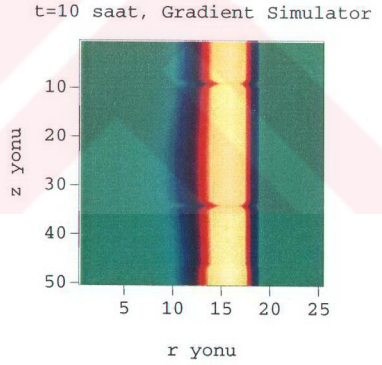
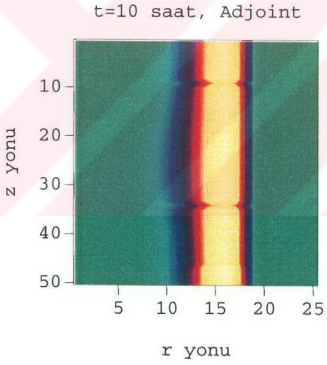
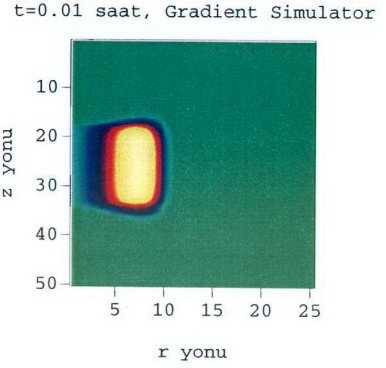
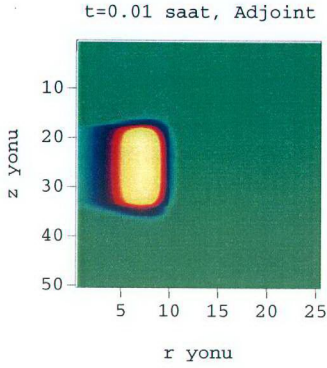
Şekil 4.9 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen pakler basıncının r yönündeki simülatör bloklarındaki yatay geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf}/dk_{h,j}$, $j=1,2,\dots,1250$) r - z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.



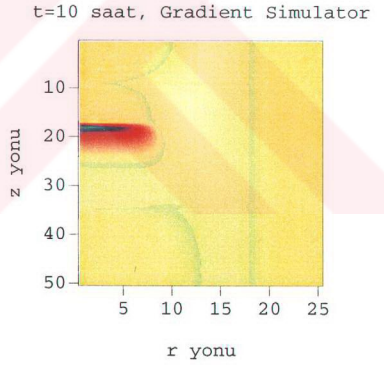
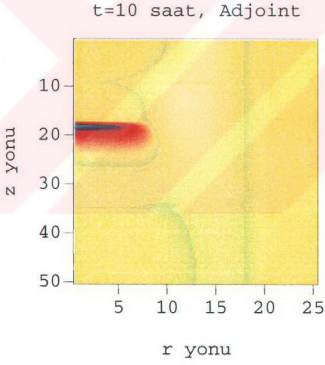
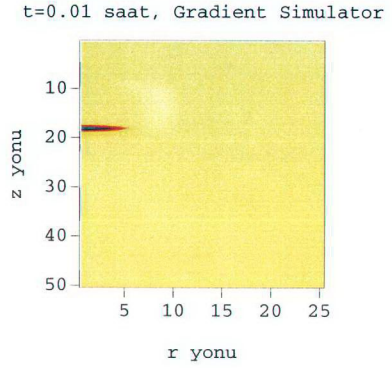
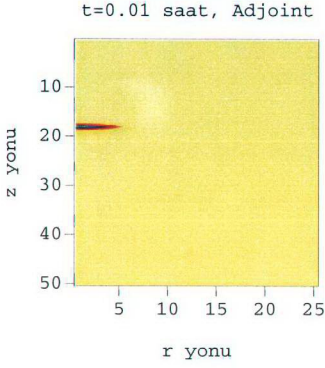
Şekil 4.10 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen paker basıncının simülatör bloklarındaki z yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf}/dk_{z,j}$, $j=1,2,\dots,1250$) r-z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.

açık aralığın alt ve üst sınırlarına komşu olan r -yönündeki ilk 8 bloğun, z -yönünde ise 2-3 bloğun z -yönündeki (düşey) geçirgenliklerine oldukça duyarlılık göstermektedir. Buna karşın, bu bloklar dışında açık aralık içindeki diğer blokların z -yönündeki (düşey) geçirgenliklerine ise duyarlılık göstermemektedir. Bunun nedeni ise, açık aralığa, z -yönünde girecek akışkanın, kısmi açık aralığın alt ve üst sınırlarında bulunan bu bloklardan geçerek girmesi gerektiğindendir. Benzeri davranışlar, toplam sisteme ait çevrel akışın olduğu $t = 10$ saat'de de gözlenmektedir. Ancak bu zaman değerinde, kuyudibi basıncı açık aralığın alt ve üst sınırlarına r ve z -yönünde bitişik daha uzaktaki blokların düşey geçirgenliklerine de duyarlılık göstermektedir. Şekil 4.10'dan ayrıca görüleceği gibi, düşey geçirgenliğe göre tüm duyarlılıklar pozitifdir. Bu sonuçta anlamlıdır, çünkü düşey geçirgenlik değeri arttıkça, pakler aralığında basınç düşümü azalacak ve dolayısıyla pakler kuyudibi basıncı artacaktır.

Pakler basıncının simülasyon bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığı Şekil 4.11'de iki farklı zaman değerinde gösterilmektedir. Erken zamanlarda, pakler kuyudibi basıncı r - z yönünde açık aralığın alt ve üst sınırları arasında kalan bloklar içersindeki gözenekliliğe oldukça duyarlıdır. Geç zamanlarda ise, kuyudibi basıncı açık aralıktan kuyu yüzeyinde z -yönünde 9. blokta yer alan düşey gözlem noktası basıncının simülasyon bloklarındaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığı Şekil 4.12'de, z -yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılığı ise Şekil 4.13'de gösterilmektedir. Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'den elde edilen sonuçlardan, gözlem noktası basıncının düşey geçirgenliğe, yatay geçirgenliğe göre, daha fazla duyarlılık gösterdiği anlaşılmaktadır. Dikkat edilecek olursa, gözlem noktası basıncı, gözlem noktası olan z -yönündeki 9. blok ile açık aralığın üst sınırındaki 18. blok arasındaki bölgede ancak kuyudan uzakta yer alan blokların düşey geçirgenliklerine oldukça fazla duyarlılık göstermektedir ve duyarlılık negatiftir. Bu bölgede gözlem noktası basıncının düşey geçirgenlik k_z 'ye göre negatif duyarlılık göstermesi anlamlıdır. Çünkü gözlem noktası ile akışa açık aralığın üst sınırı arasındaki bölgede z yönündeki geçirgenliği azaltmak, gözlem noktasının üretim yapılan açık aralık ile arasındaki hidrolik bağlantısını azaltmak anlamına gelecektir. Bu da gözlem noktasında basınç düşümünün azalmasına dolayısıyla da gözlem noktasında basıncın artmasına neden olacaktır.



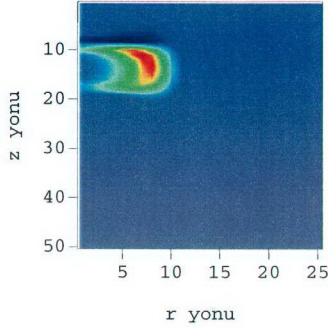
Şekil 4.11 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen paker basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf} / d\phi_j$, $j = 1, 2, \dots, 1250$) r - z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.



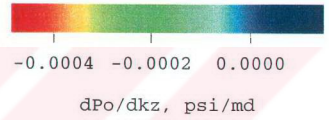
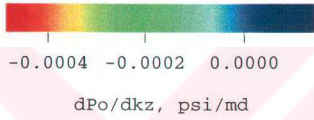
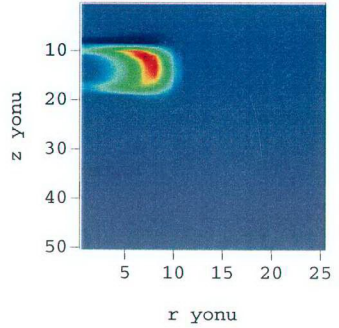
Şekil 4.12 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki r -yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_o / dk_{r,j}$, $j = 1, 2, \dots, 1250$) r - z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.

Düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe duyarlılığı Şekil 4.14'de iki farklı zaman değeri için sunulmuştur. Akışa kapalı rezervuar alt ve üst sınırlarının hissedilmediği erken zamanlarda, düşey gözlem noktası, gözlem noktası olan z-yönündeki 9. blok ile açık aralığın üst sınırındaki 18. blok arasındaki bölgede yer alan blokların gözenekliliğine oldukça fazla duyarlılık göstermektedir. Geç zamanlarda ise, gözlem noktası basıncı pakere basıncında olduğu gibi kuyudan uzaklardaki blokların gözenekliliğine daha çok duyarlılık göstermektedir.

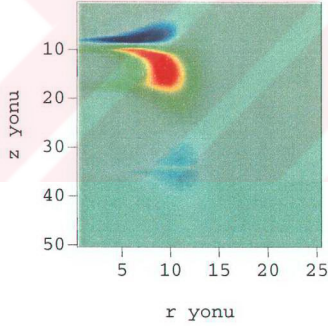
t=0.01 saat, Adjoint



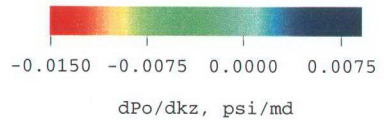
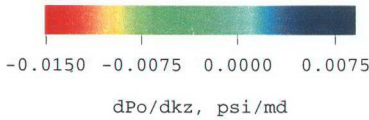
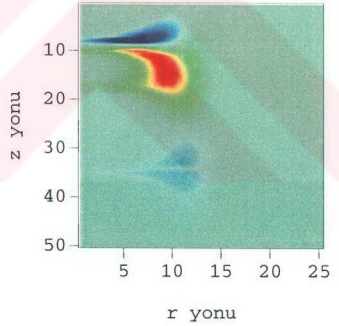
t=0.01 saat, Gradient Simulator



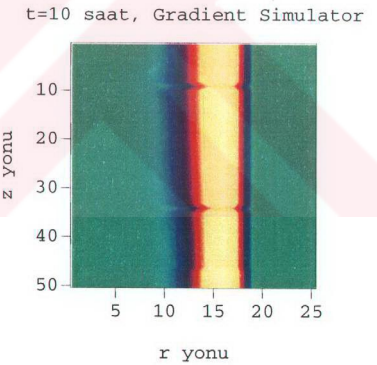
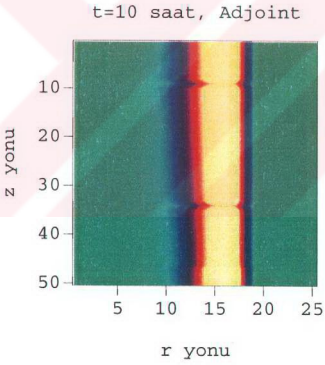
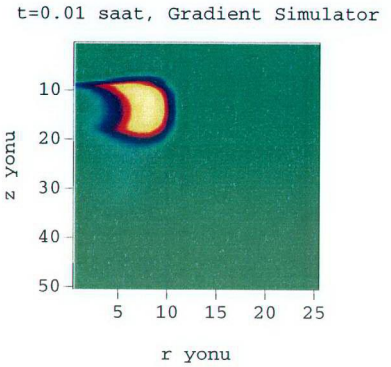
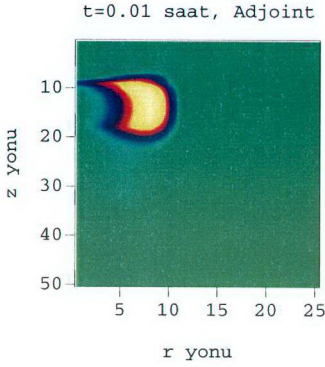
t=10 saat, Adjoint



t=10 saat, Gradient Simulator



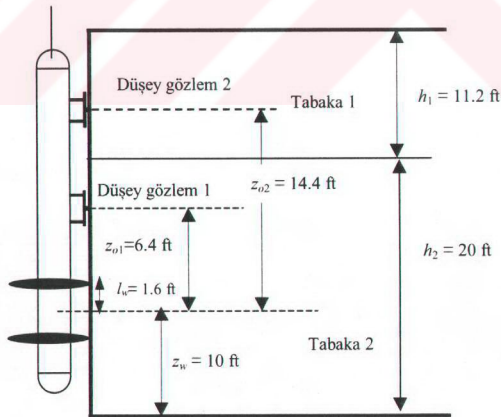
Şekil 4.13 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatörden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z-yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_o/dk_{z,j}$, $j=1,2,\dots,1250$) r-z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.



Şekil 4.14 Tek tabakalı sistem için adjoint ve gradyent simülatör çözümlerden elde edilen düşey gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_o/d\phi$, $j=1,2,\dots,1250$) r - z kesit alanı üzerinde kıyaslanması.

4.4.2 İki tabakalı sistem

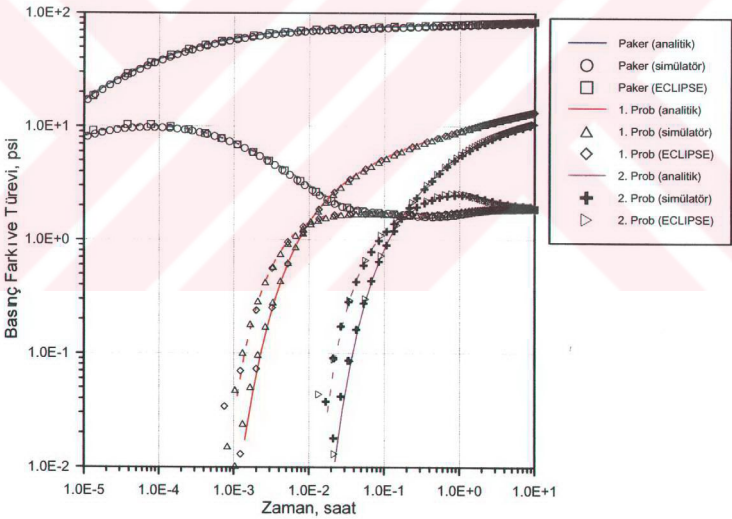
Göz önünde bulundurulmuş sistem ve teste ait şema Şekil 4.15’de ve simülasyonda kullanılan model parametreleri ise Tablo 4.2’de özetlenmektedir. Şekil 4.15’de gösterilen pakler aralığında ve düşey gözlem noktalarındaki basınçları ve duyarlılık katsayılarını hesaplamak için toplam $N = 5929$ için ($N_r = 77$, $N_\theta = 1$, $N_z = 77$) simülasyon bloğundan oluşan elek sistemi kullanılmıştır. Her bir tabaka Tablo 4.2’den görüleceği gibi homojen ancak anizotrop olarak göz önünde bulundurulmuştur. Simülasyonda, üst tabaka (tabaka 1) için z-yönünde 28 uniform olmayan blok, alt tabaka (tabaka 2) için z-yönünde uniform olmayan 49 blok kullanılmıştır. Üst tabaka yukarıdan sayıldığında z-yönünde 1. blok ile 28. bloklar arasındadır. Alt tabaka ise yukarıdan sayıldığında 29 ile 77. bloklar arasındadır. Üretime kısmi açık aralık z-yönündeki 50. ve 57. bloklar arasında 2. tabakada yer alan toplam 8 simülasyon bloğundan oluşmaktadır. 1. düşey gözlem noktası, kuyuda z-yönünde yukarıdan sayıldığında 37. bloğun merkezindedir, 2. düşey gözlem noktası ise, yukarıdan sayıldığında 18. bloğun merkezindedir. Simülasyonda, üretim sadece toplam 3.2 ft açık olan pakler aralığından yapılmaktadır. Amaç, hem pakler aralığında hem de düşey gözlem noktasındaki basınçların parametrelere göre duyarlılığını bu iki tabakalı homojen-anizotrop örnek için incelemektir.



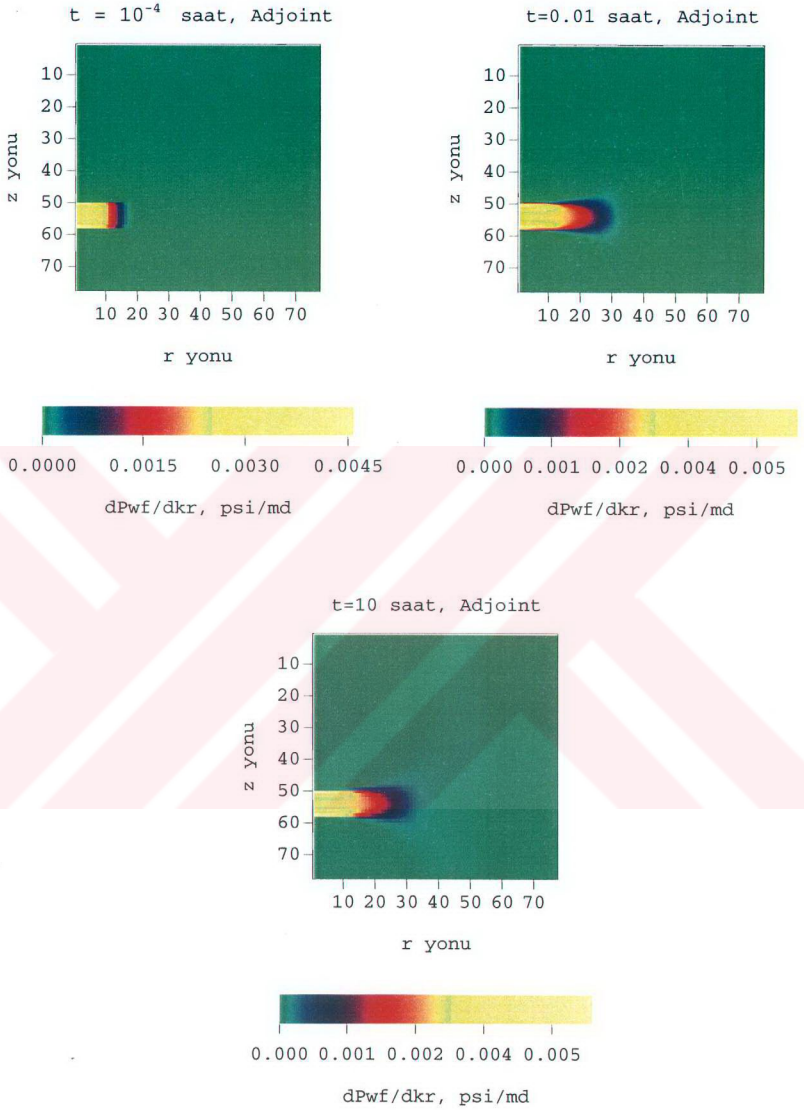
Şekil 4.15 Duyarlılık katsayılarının sınavması için kullanılan iki-tabakalı düşey girişim test şeması.

Tablo 4.2 Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, iki tabakalı örnek uygulama.

ϕ_1 ,	0.2
ϕ_2 ,	0.2
k_{h1} , mD	5.0
k_{v1} , mD	1.0
k_{h2} , mD	100
k_{v2} , mD	10
h_1 , ft	11.2
h_2 , ft	20
$c_{t1} = c_{t2}$, psi^{-1}	1.0×10^{-5}
$\mu_1 = \mu_2$, cp	1.0
r_w , ft	0.328
r_e , ft	5000
$2l_w$, ft	3.2
q , bbl/D	54.3
C , bbl /psi	0.
S ,	0.



Şekil 4.16 İki tabakalı sistem için simülör ve analitik çözümlerden elde edilen paker kuyudibi basınç ve düşey gözlem noktası basınç değişim ve türevlerinin kıyaslanması.

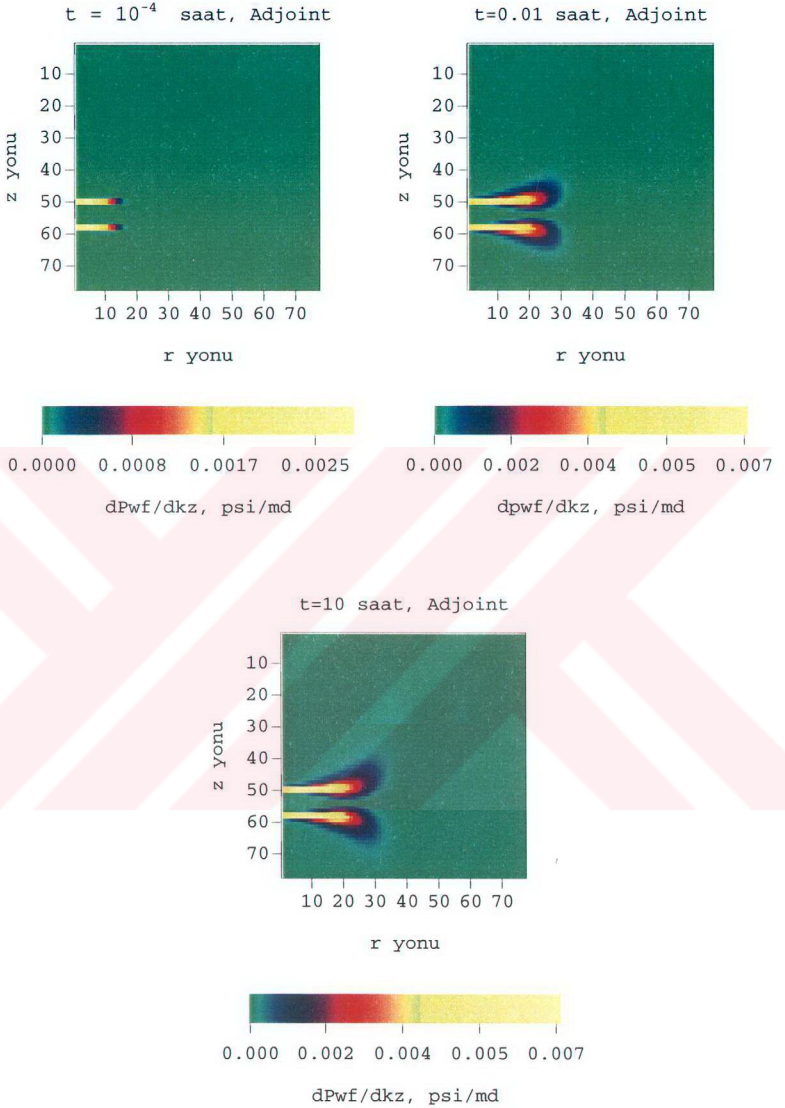


Şekil 4.17 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen pakler kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki r yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf}/dk_{r,j}$, $j = 1, 2, \dots, 5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.

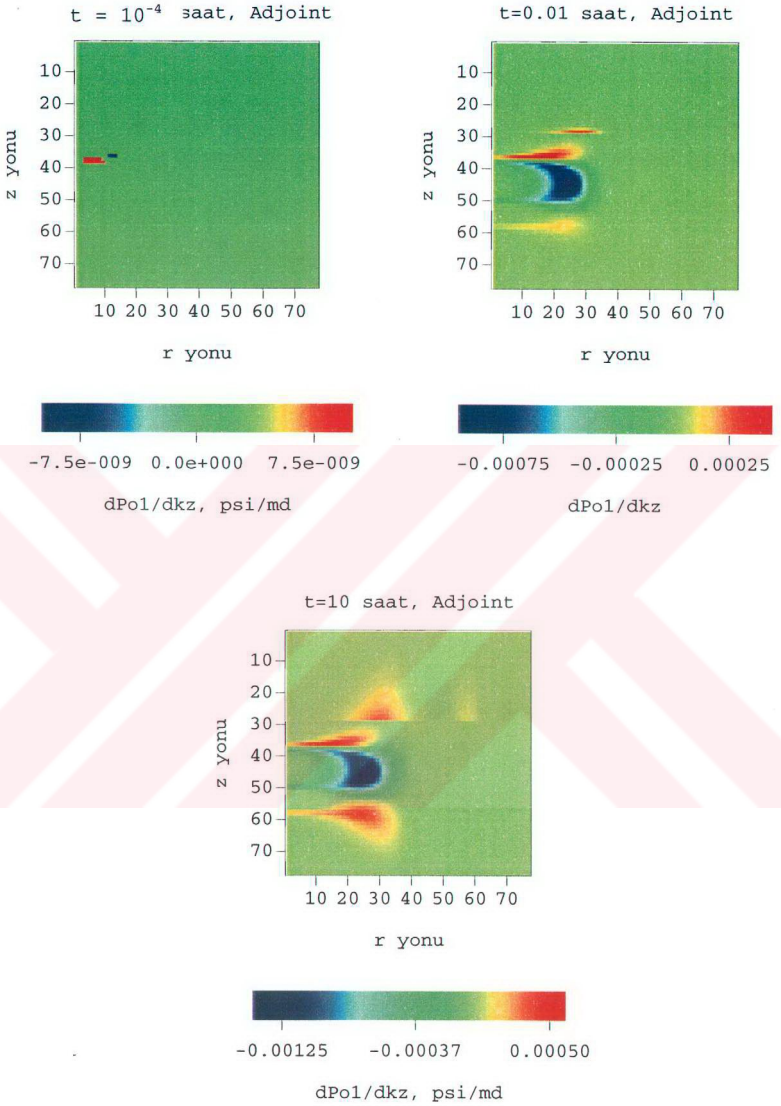
Şekil 4.16'da, simülatörden hesaplanmış pakler aralığı ile düşey gözlem noktalarındaki basınç değişimi ve türevlerinin analitik çözümden hesaplananlarla kıyaslanması sunulmaktadır. Görüldüğü gibi, simülatör ve analitik çözüm sonuçları iyi uyum içersindedir. Şekil 4.16'dan görüleceği gibi, bu problemde kuyuiçi depolaması etkisi olmadığı için, pakler aralığı basıncı türev eğrisi, erken zamanlarda (yaklaşık 3×10^{-3} saatten küçük zaman değerlerinde) kısmi aralıktan dolayı oluşan çevrel akış rejimi, 5×10^{-3} saat ile 2×10^{-2} saat arasında yaklaşık ikinci tabaka özellikleri tarafından kontrol edilen küresel akış, 8×10^{-2} saat ile 8.0 saat arasında, çok az eğimle aşağı inen ve çıkan uzun bir geçiş dönemi, 8 saatten sonrada toplam sisteme ait kalınlık-ortalama-geçirgenlik değeri tarafından kontrol edilen çevrel akış gözlenmektedir.

Bir önceki tek tabaklı sisteme ait uygulamada olduğu gibi, adjoint, gradyent ve analitik yöntemlerden hesaplanan pakler aralığı basıncı ile 1. ve 2. düşey gözlem noktası basınçlarının çeşitli model parametrelerine göre duyarlılıkları kıyaslanmış ve güzel bir uyum gözlenmiştir. Bu sonuçlar da geliştirdiğimiz adjoint ve gradyent simülatör yöntemlerinin tek tabakalı sistemlerde olduğu gibi iki tabakalı sistemler içinde doğru çalıştığını göstermiştir.

Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de adjoint yönteminden hesaplanmış pakler aralığı kuyudibi basıncının r ve z -yönündeki (yatay ve düşey) geçirgenliklere göre duyarlılıklarının r - z kesit alanı üzerindeki dağılımları üç farklı zaman değeri ($t = 10^{-4}$, 10^{-2} ve 10 saat) için gösterilmiştir. Bu zaman değerleri, sırasıyla, pakler aralığı basıncının, sırasıyla, erken zamanlardaki çevrel akış, küresel akış ve geç çevrel akış dönemlerinde seçilmiştir. Bu şekillerden elde edilen sonuçlar, tek tabakalı sistem için elde edilen sonuçlar ile benzerdir. Erken zamanlarda, pakler basıncı, açık aralık içersinde kalan bölgedeki blokların yatay yöndeki geçirgenliklerine oldukça duyarlılık gösterirken, zaman ilerledikçe kuyudibi basıncı açık aralıktan daha uzak bölgedeki blokların yatay geçirgenliklerine duyarlılık göstermektedir. Şekil 4.18'den görüldüğü gibi, pakler basıncı tek tabakalı sistemde olduğu gibi, iki tabakalı sistem içinde açık aralığın alt ve üst sınırlarına komşu bloklardaki düşey yöndeki geçirgenliklere oldukça duyarlıdır ve zaman ilerledikçe, düşey geçirgenliğe duyarlılık bu sınırlardan z -yönünde rezervuar alt ve üst sınırlarına doğru kaymaktadır.



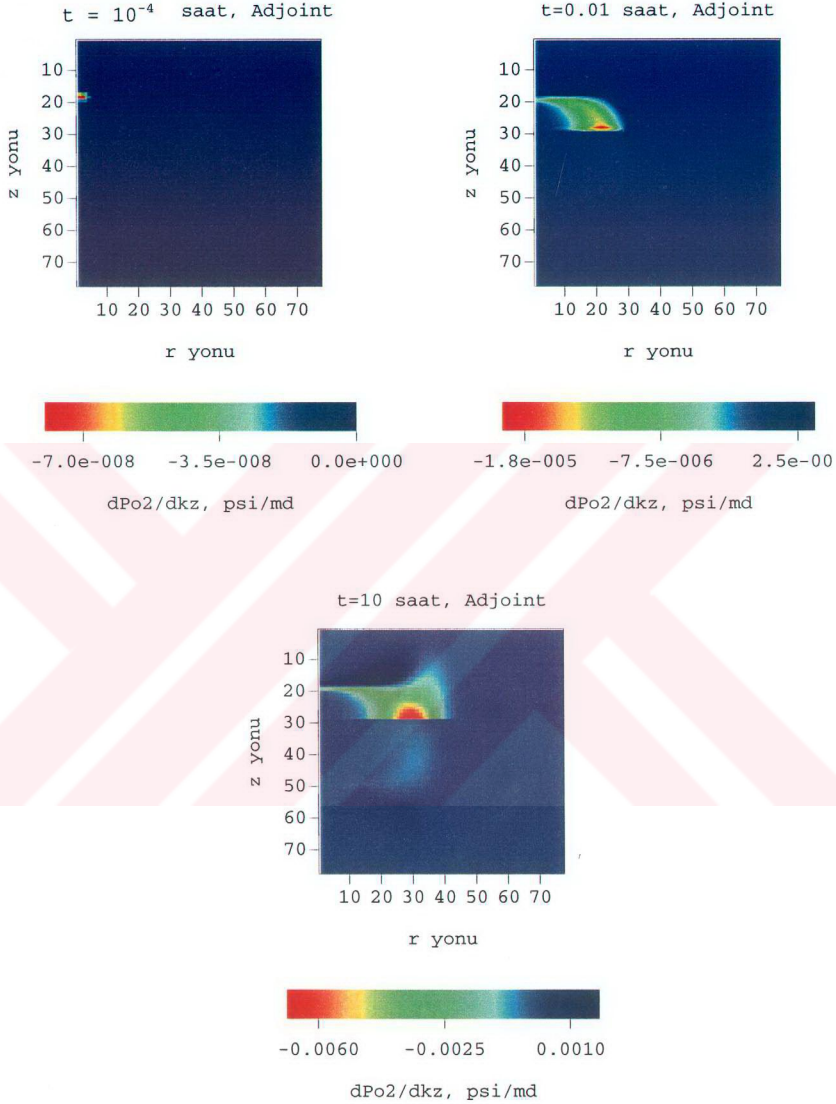
Şekil 4.18. İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen pakler kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki z -yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($\frac{dp_w}{dk_{z,j}}$, $j = 1, 2, \dots, 5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.



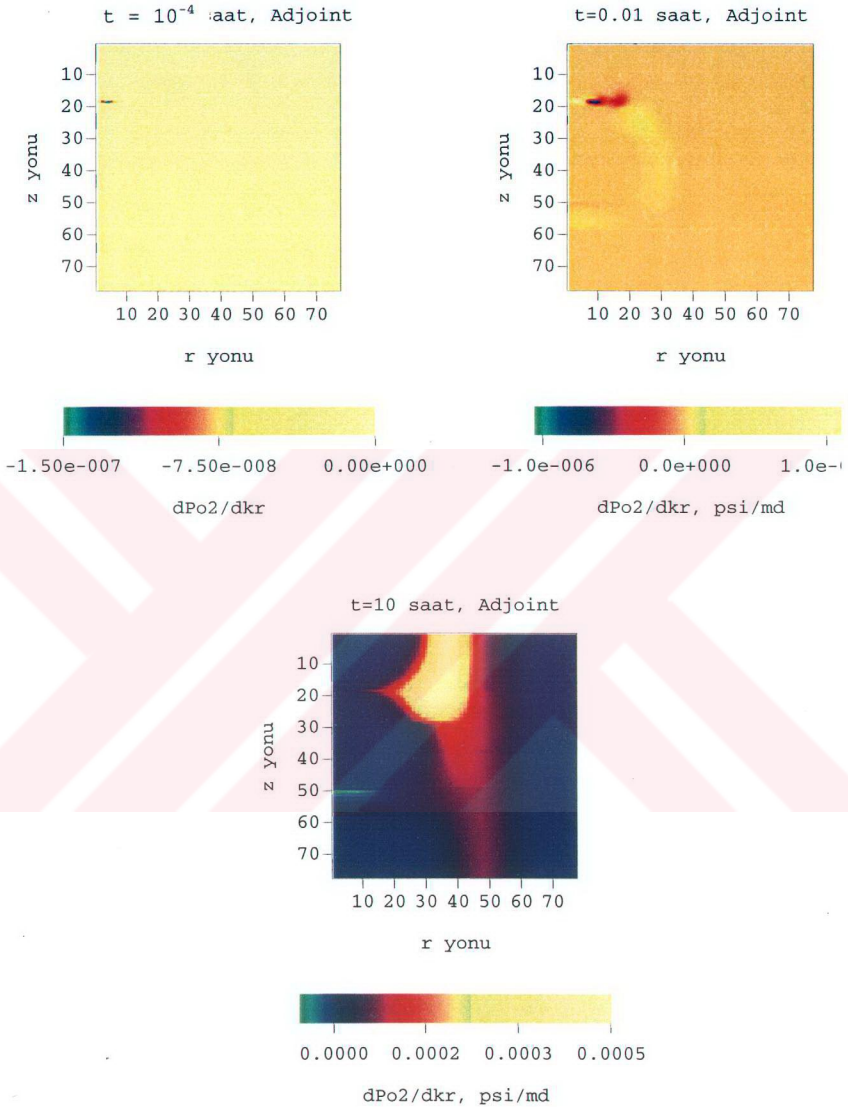
Şekil 4.19 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 1. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z-yönündeki (düşey) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{o1}/dk_{z,j}$, $j = 1,2,\dots,5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.

Şekil 4.19 ve Şekil 4.20’de adjoint yönteminden hesaplanmış 1. gözlem noktası basıncı ve 2. gözlem noktası basıncın z -yönündeki (düşey) geçirgenliklere göre duyarlıklarının r - z kesit alanı üzerindeki dağılımları üç farklı zaman değerinde gösterilmiştir. Bu şekillerde elde edilen sonuçlar, tek tabakalı sistem için elde edilen sonuçlar ile benzerdir. Geç zamanlarda yani toplam sisteme ait çevrel akışın görüldüğü $t = 10$ saatte, 1. gözlem noktası (kuyuda z -yönünde yukardan 37. bloktadır ve alttaki tabaka içindedir) basıncı, en büyük duyarlılığı açık aralığın üst sınırı ile gözlem noktasının arasındaki bölgede ancak kuyudan uzak blokların z -yönündeki (düşey) geçirgenliklerine oldukça duyarlılık göstermektedir ve bu bölgede duyarlılık negatiftir (Şekil 4.19). Az da olsa, hemen 1. gözlem noktasının üzerindeki kuyuya yakın bloklar ile üst tabakada yer alan bazı bloklar ve paker aralığının altında yer alan bazı bloklarda z -yönündeki (düşey) geçirgenliğe pozitif bir duyarlılık da gözlenmektedir (Şekil 4.19). Şekil 4.20’de gösterilen 2. gözlem noktası (kuyuda z yönünde yukardan 18. bloktadır ve üst tabaka içindedir) basıncının z -yönündeki geçirgenliğe gösterdiği duyarlılık davranışı oldukça ilginçtir. Dikkat edilecek olursa, toplam sisteme ait çevrel akışın oluştuğu $t = 10$ saat’de, 2. gözlem noktası basıncı en büyük duyarlılığı, gözlem noktası ile alttaki tabakanın üst sınırı olan z -yönünde 29. blok arasındaki bölgedeki bloklarda göstermektedir ve duyarlılık negatiftir. Az da olsa, 2. gözlem noktası basıncı, bu gözlem noktasının üstündeki bloklar ile ikinci tabaka içerisindeki ve paker aralığının alt sınırına yakın bölgedeki blokların düşey geçirgenliklerine pozitif bir duyarlılık göstermektedir.

Şekil 4.21’de adjoint yönteminden hesaplanmış 2. düşey gözlem noktası basıncının r yönündeki (yatay) geçirgenliklere olan duyarlılık dağılımları üç farklı zaman değerinde gösterilmiştir. Toplam sisteme ait çevrel akışın gözlemlendiği $t = 10$ saat’deki duyarlılık incelendiğinde, 2. gözlem noktası basıncının, r yönündeki (yatay) geçirgenliklere duyarlılığı büyüklük olarak az olmakla birlikte, en fazla duyarlılığı gözlem noktasından uzaktaki üst tabakanın üst sınırı ile alt tabakanın üst sınırı arasındaki bloklardaki geçirgenliğe duyarlılık gösterdiği anlaşılmaktadır. Tek tabakalı sistemde gözlediğimiz gibi, bu gözlem noktası basıncı da, paker aralığının üst sınırına bitişik bloklardaki geçirgenliğe göre de negatif bir duyarlılık göstermektedir.



Şekil 4.20 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki z -yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{o2}/dk_{z,j}$, $j=1,2,\dots,5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.



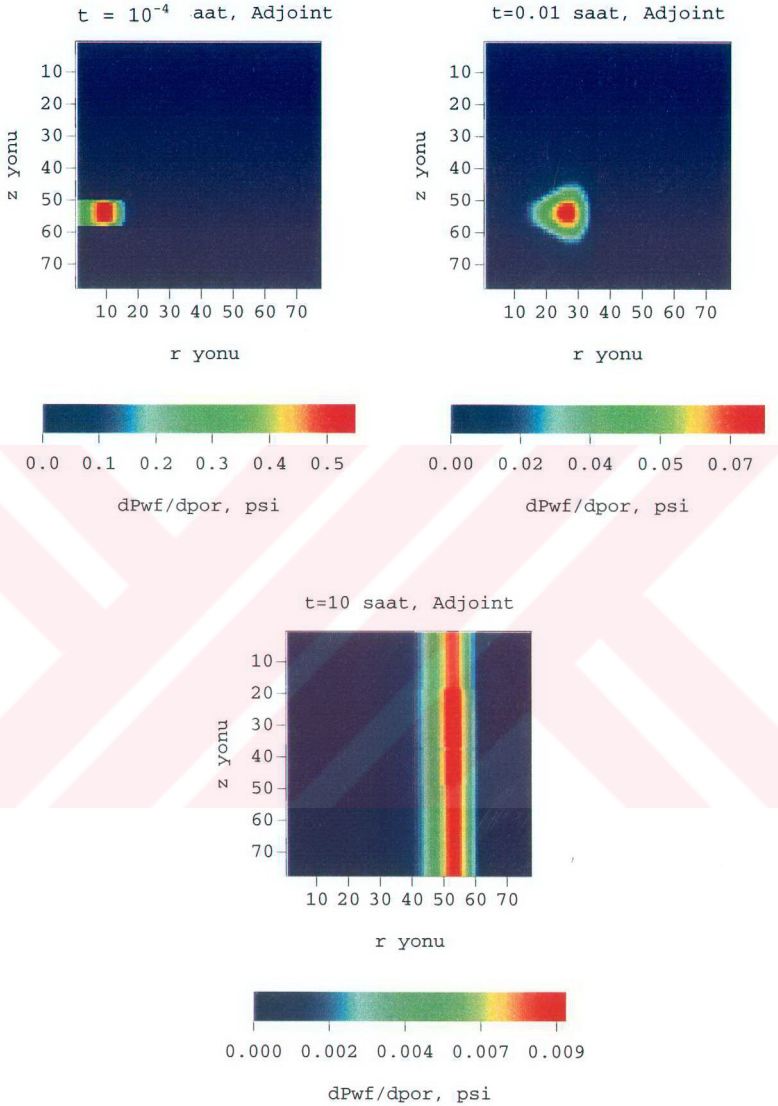
Şekil 4.21 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki r -yönündeki (yatay) geçirgenliğe göre duyarlılığının ($dp_{o2}/dk_{r,j}$, $j = 1, 2, \dots, 5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.

Şekil 4.22, Şekil 4.23 ve Şekil 4.24’de sırasıyla, adjoint yönteminden hesaplanmış, paker aralığında ölçülen kuyudibi basıncı, 1. ve 2. düşey gözlem noktası basınçlarının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılık dağılımları üç farklı zaman değerinde gösterilmiştir.

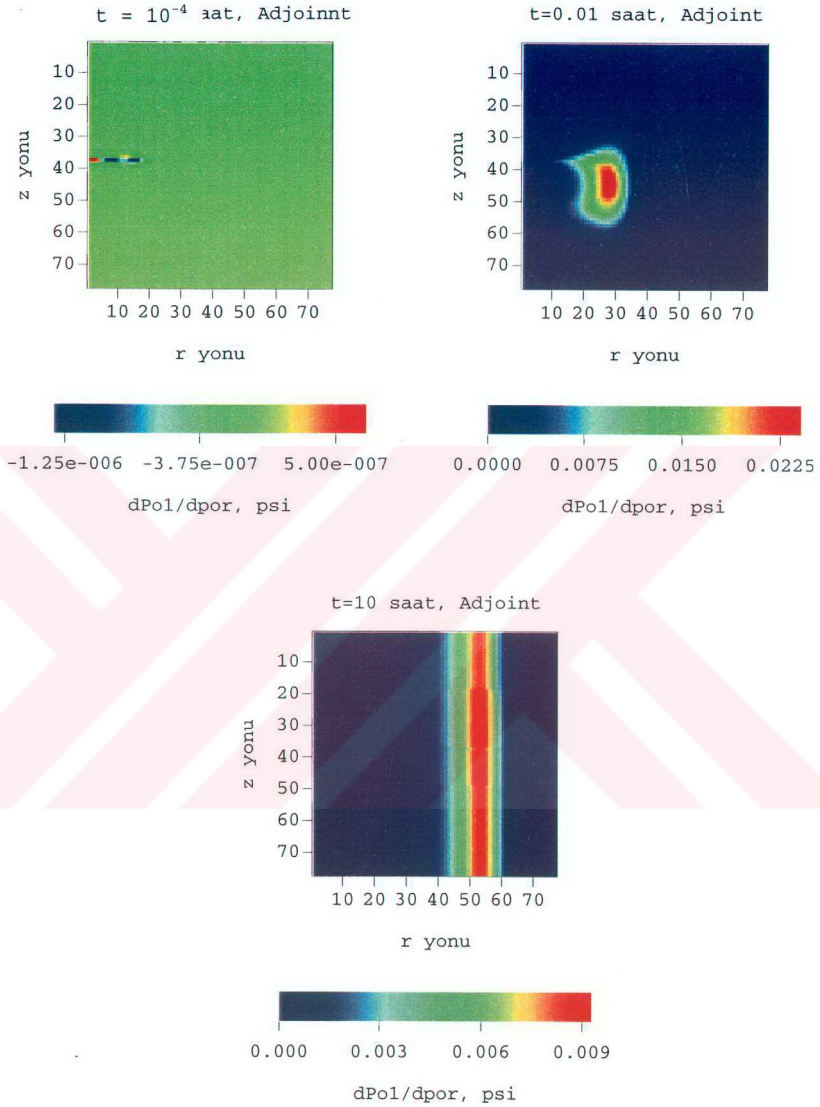
Şekil 4.22’den görüleceği üzere, paker aralığında ölçülen basınç verilerinin simülatör bloklarındaki gözenekliliğe olan duyarlılıkların değerleri erken zamanlarda en büyük değerini alırken, zaman ilerledikçe duyarlılıkların değerleri önemli ölçüde azalmaktadır. Toplam sisteme ait çevrel akışı temsil eden $t = 10$ saatte duyarlılıkların değerleri en düşük değerini almıştır. Erken zamanlarda duyarlılık sadece paker aralığının karşısı ile sınırlı iken, zaman ilerledikçe duyarlılık z yönünde büyüyerek ilerlemektedir.

Şekil 4.23’de 1. düşey gözlem probundaki basınç verilerinin simülatör bloklarındaki gözenekliliğe olan duyarlılıkları farklı zamanlar için (farklı akış rejimleri için) sunulmuştur. Çok erken zamanlarda (0.0001 saat) proba ait basınç verilerinin gözenekliliğe anlamlı bir duyarlılığı olduğunu söylemek mümkün değildir. Ancak zaman ilerledikçe probun bulunduğu grid ile paker aralığının üst bölümünden duyarlılık yayılmaya başlamaktadır. Bir önceki grafikte benzer şekilde, duyarlılıkların değerleri daha erken zamanlarda daha büyük iken zaman ilerledikçe duyarlılığın değeri azalmaktadır. Global çevrel akışın olduğu $t = 10$ saatte duyarlılık tüm tabaka kalınlığı boyunca hareket etmektedir.

Şekil 4.24’de 2. düşey gözlem probundaki basınç verilerinin simülatör bloklarındaki gözenekliliğe olan duyarlılıkları farklı zamanlar için (farklı akış rejimleri için) sunulmuştur. Bir önceki grafikte olduğu gibi, çok erken zamanlarda (0.0001 saat) proba ait basınç verilerinin gridbloklardaki gözenekliliklere anlamlı bir duyarlılık gösterdiğini söylemek mümkün değildir. Zaten 0.0001 saate her iki probtada, paker aralığında üretimden dolayı çok az basınç düşmüştür (Şekil 4.16). Zaman ilerledikçe 2. probun bulunduğu grid ile 1. probun bulunduğu gridin arasındaki bölgeden duyarlılık yayılmaya başlamaktadır. Bu uygulamada ilginç şekilde $t = 0.01$ saatteki duyarlılıkların büyüklüğü, $t = 10$ saatteki duyarlılık değerlerinden küçük çıkmıştır. Ancak bir önceki uygulamada olduğu gibi, global çevrel akışın olduğu $t = 10$ saatte duyarlılık tüm tabaka kalınlığı boyunca hareket etmektedir.

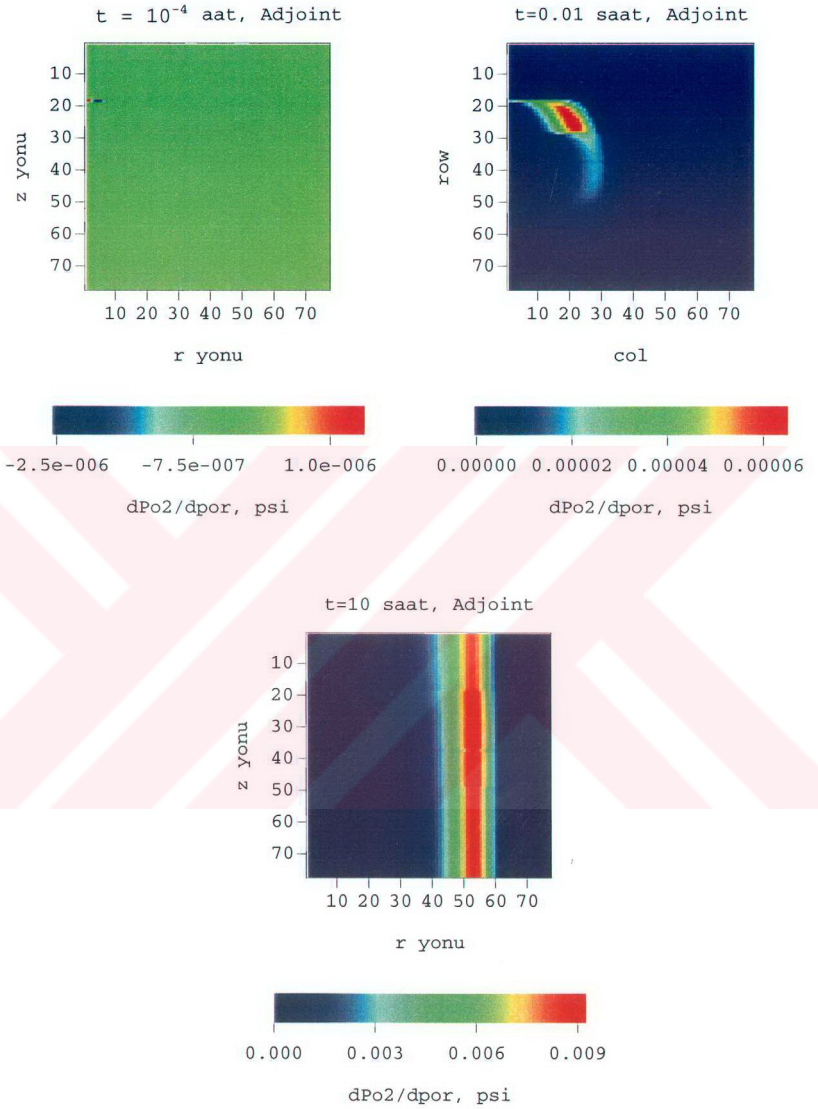


Şekil 4.22 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen pakler kuyudibi basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{wf}/d\phi_j$, $j = 1, 2, \dots, 5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.



Şekil 4.23 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 1. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{oi}/d\phi_j$, $j=1,2,\dots,5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.

Hem tek tabakalı hem de iki tabakalı paker-prob düşey girişim testi gözönünde bulundurularak, düşey girişim testlerinden elde edilen basınç verilerinin (paker aralığı basınç verileri ve düşey gözlem problemlerine ait basınç verileri) rezervuardaki yatay geçirgenlik, düşey geçirgenlik ve gözeneklilik gibi kayaç özelliklerine nasıl duyarlılık gösterdiği ayrıntılı olarak incelenmiştir. Niteliksel olarak iki tabakalı sistemden elde edilen sonuçlar, tek tabakalı sistemden elde edilen sonuçları desteklemektedir. Bu uygulamalara ilaveten, burada gösterilmemekle birlikte, düşük ve yüksek geçirgenliğe sahip tek ve çok tabakalı sistemlerde düşey girişim testlerinden elde edilen basınç verilerinin kayaç özelliklerine (k_h , k_v ve ϕ) olan duyarlılıklarının alansal dağılımı incelenmiştir. Bu uygulamalardan elde edilen sonuçlar, yukarıdaki uygulamalardan elde edilen sonuçları niteliksel olarak desteklemektedir.

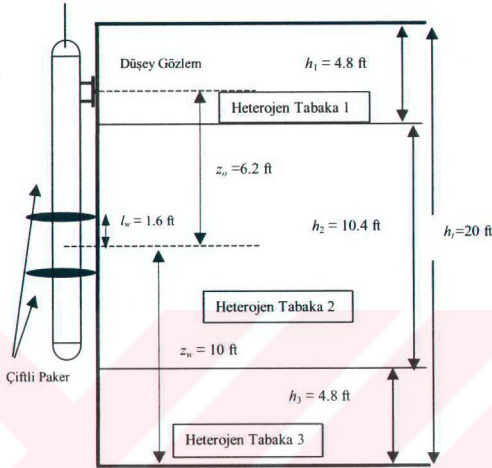


Şekil 4.24 İki tabakalı sistem için adjoint simülatör yönteminden elde edilen 2. gözlem noktası basıncının simülatör bloklarındaki gözenekliliğe göre duyarlılığının ($dp_{o2}/d\phi_j, j=1,2,\dots,5929$) r - z kesit alanı üzerinde incelenmesi.

4.4.3 Heterojen sistem

Bu örnek uygulamada göz önünde bulundurulmuş olan sistem ve teste ait şema Şekil 4.25'de ve simülasyonda kullanılan model parametreleri ise Tablo 4.3'de özetlenmektedir. Şekil 4.25'de gösterilen paker aralığında ve düşey gözlem noktasındaki basınçları ve duyarlılık katsayılarını hesaplamak için toplam $N = 3750$ için ($N_r = 25$, $N_\theta = 3$, $N_z = 50$) simülasyon bloğundan oluşan elek sistemi kullanılmıştır. Bu örnek uygulamada, sistem z -yönünde üç tabakalı, ancak her tabaka r , θ ve z yönlerinde heterojen olarak tasarlanmıştır. Her tabakadaki yatay ($k_r = k_\theta = k_h$) ve düşey geçirgenlikler ($k_z = k_v$) log normal dağılımlı heterojen ve gözeneklilik normal heterojen sahalar olarak jeostatistiksel olarak türetilmiştir. Simülasyonda, z -yönünde her biri 0.4 ft olan eş uzunluklu gridbloklar kullanılmıştır. Birinci (üst) tabakadaki yatay yöndeki $\ln k_h$ geçirgenlik sahası için ortalaması 4.61 (100 md) ve varyansı 1.0 olan dağılım ve korelasyon uzunluğu 250 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. İkinci (orta) tabakadaki yatay yöndeki $\ln k_h$ geçirgenlik sahası için ortalaması 3.40 (30 md) ve varyansı 1.0 olan dağılımı ve korelasyon uzunluğu 250 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Üçüncü (alt) tabakadaki yatay yöndeki $\ln k_h$ geçirgenlik sahası için ortalaması 1.61 (5 md) ve varyansı 0.75 olan dağılımı ve korelasyon uzunluğu 250 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Düşey yöndeki geçirgenlikler için ise, birinci (üst) tabakadaki yatay yöndeki $\ln k_v$ geçirgenlik sahası için ortalaması 2.30 (10 md) ve varyansı 0.5 olan dağılımı ve korelasyon uzunluğu 2.5 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. İkinci (orta) tabakadaki $\ln k_v$ geçirgenlik sahası için ortalaması 1.28 (4 md) ve varyansı 0.5 olan dağılım ve korelasyon uzunluğu 2.5 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Üçüncü (alt) tabakadaki $\ln k_v$ geçirgenlik sahası için ortalaması 0.0 (1 md) ve varyansı 0.25 olan dağılımı ve korelasyon uzunluğu 2.5 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Gözeneklilik tüm tabakalar için ortalaması 0.15 ve varyansı 0.0025 olan normal dağılım ve korelasyon uzunluğu 250 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Yatay ve düşey $\ln$ -geçirgenlikler arasında ve $\ln$ -geçirgenlikler ile gözeneklilik arasında korelasyon olmadığı kabul edilmiştir. Cholesky ayrışım yönteminden elde edilen bir gerçekleştirme, z -yönünde üstten 10. (rezervuar üst sınırında 3.8 ft aşağıdaki) gridbloktaki r - θ düzleminde k_h , k_v ve gözeneklilik dağılımları, sırasıyla, Şekil 4.26,

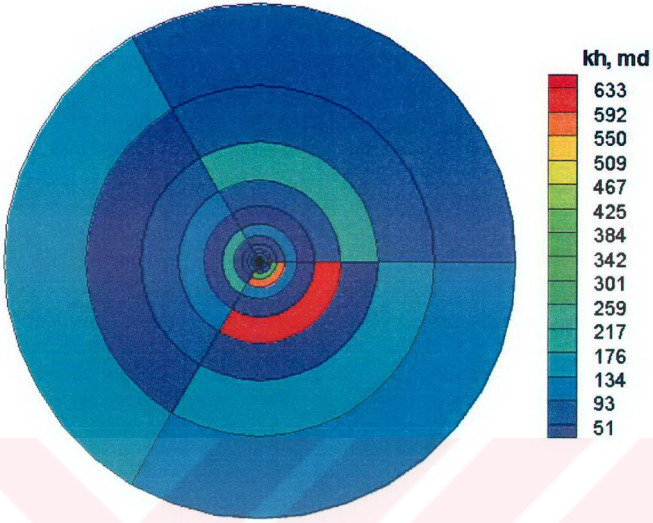
Şekil 4.27 ve Şekil 4.28’de gösterilmektedir. $\theta=60^\circ$ olduğunda, r - z düzleminde, k_h , k_v ve gözeneklilik dağılımları ise, sırasıyla, Şekil 4.29, Şekil 4.30 ve Şekil 4.31’de gösterilmektedir.



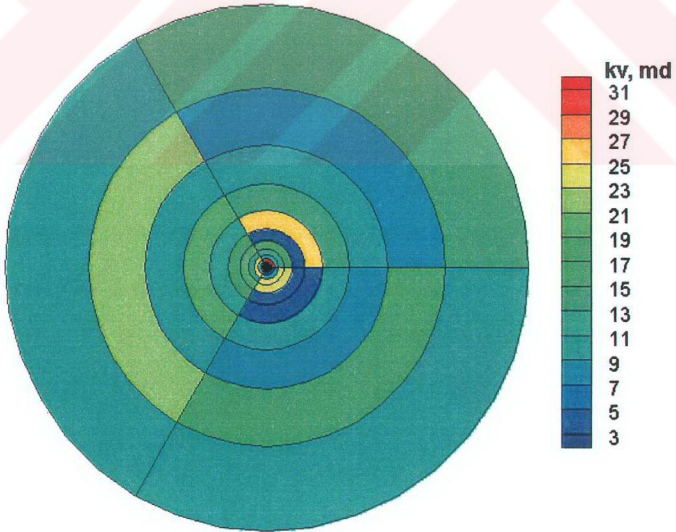
Şekil 4.25 Duyarlılık katsayılarının sınanması için kullanılan üç-tabaka heterojen sistemde düşey girişim test şeması.

Tablo 4.3 Kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri, heterojen örnek uygulama.

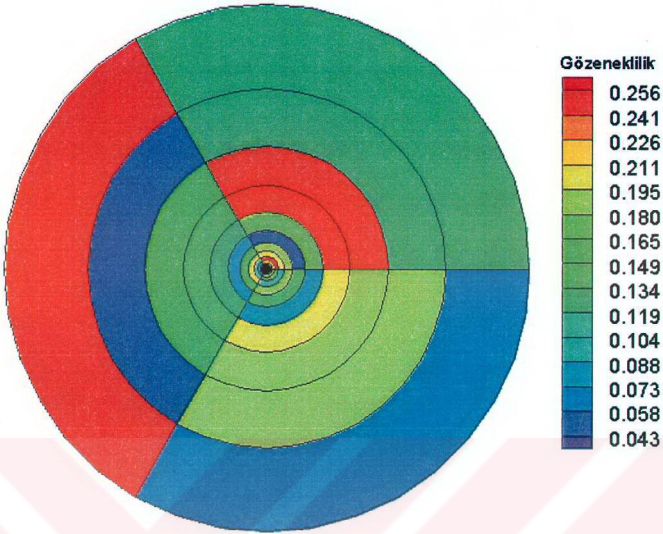
ϕ ,	Heterojen
h ,ft	20
k_h , mD	Heterojen
k_v , mD	Heterojen
c_s , psi ⁻¹	2.5×10^{-5}
μ , cp	1.0
r_w , ft	0.328
z_w , ft	10
z_o , ft	6.4
C , RB/psi	0
S_s	1.0
q , RB/D	25
r_e , ft	5000
$2l_w$, ft	3.2



Şekil 4.26 Yatay geçirgenliğin probun bulunduğu r - θ düzleminde ($z = 3.8$ ft) alansal değişimi.

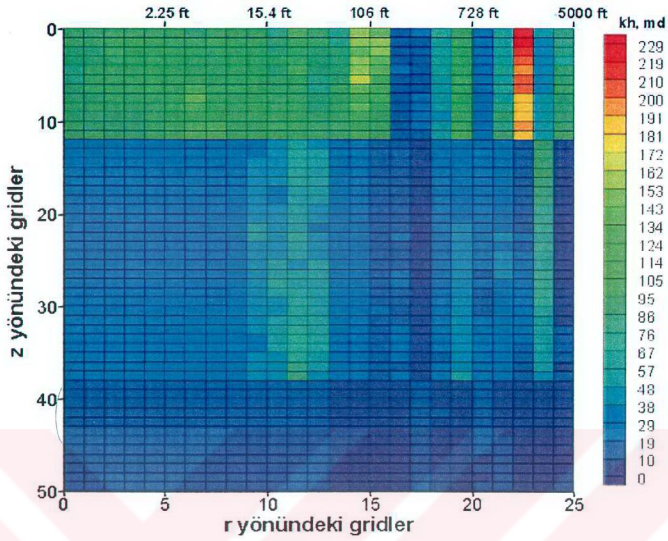


Şekil 4.27 Düşey geçirgenliğin probun bulunduğu r - θ düzleminde ($z=3.8$ ft) alansal değişimi.

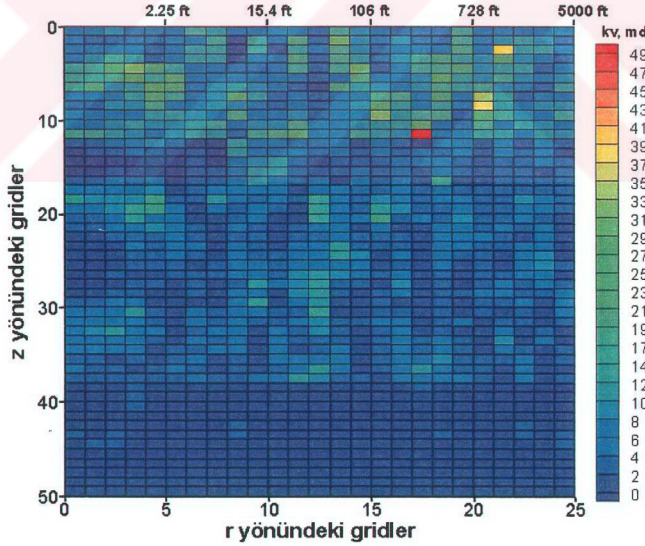


Şekil 4.28 Gözenekliliğin probun bulunduğu r - θ düzleminde ($z = 3.8$ ft) alansal değişimi.

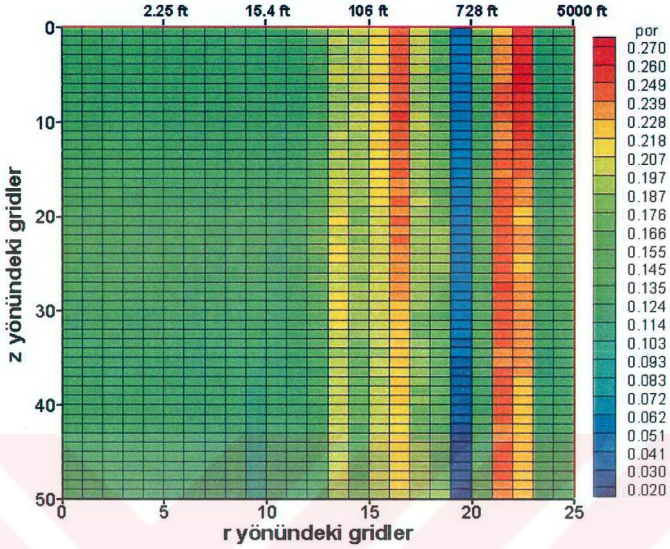
Şekil 4.26 - Şekil 4.31'de gösterilen heterojen sistem için simülâtörden elde edilen paker aralığı ve düşey gözlem probuna ait basınç farkı ve türev davranışı Şekil 4.32'de gösterilmektedir. Bu grafikteki türev davranışından da görülebileceği gibi, heterojenlik söz konusu olduğunda, paker aralığı ve düşey gözlem probu basınçları karmaşık akış rejimleri gösterebilmektedir. Paker aralığı türevindeki 1×10^{-4} - 3×10^{-4} saatleri arasında gözlemlenen sabitleşme, açık aralık boyunca oluşan çevrel akış rejiminden dolayıdır. Bu akış rejiminden $k_h = 34$ md bulunmuştur. Paker aralığı basıncı türev davranışından 3×10^{-3} - 1×10^{-2} saatleri arasında $-1/2$ eğimli doğru, küresel akışı temsil eden, davranışı gözlemlenmektedir. Küresel akış rejimi analizinden, küresel geçirgenlik $k_s = (k_h \sqrt{k_v})^{2/3} = 23$ md olarak bulunmuştur. Paker aralığı türev verilerinin, 7×10^{-2} - 0.2 saatleri arasındaki düzleşmesi bir diğer çevrel akış olarak alınabilir. Bu çevrel akış ikinci tabakanın kalınlığınca kontrol edilen çevrel akış olarak kabul edildiğinde, bu çevrel akış analizinden $k_h = 77$ md olarak bulunmaktadır. Böyle bir heterojen sistem için homojen sistem varsayımı yaparak hesaplanan bu değerlerin, hangi geçirgenlikleri temsil ettiğini tahmin etmek oldukça



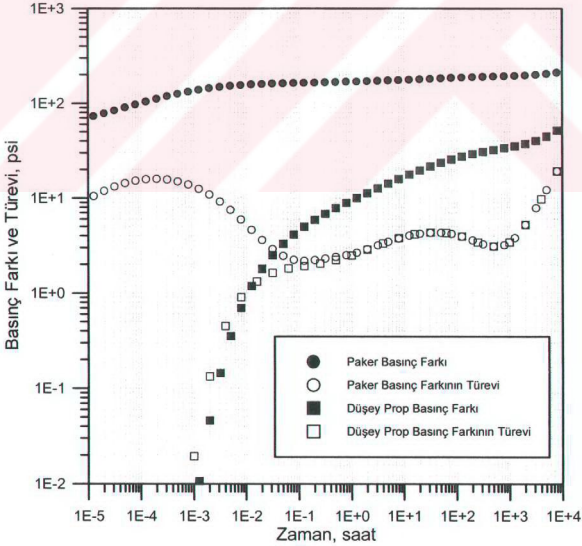
Şekil 4.29 $\theta = 60^\circ$ sektörü için yatay geçirgenliğin r - z düzleminde alansal değişimi.



Şekil 4.30 $\theta = 60^\circ$ sektörü için düşey geçirgenliğin r - z düzleminde alansal değişimi.



Şekil 4.31 $\theta = 60^\circ$ sektörü için gözenekliliğin r - z düzleminde alansal değişimi.



Şekil 4.32 Heterojen kayaç örnekleri kullanılarak yapılan uygulamadan elde edilen paker ve prob basmaç davranışları ve türevleri.

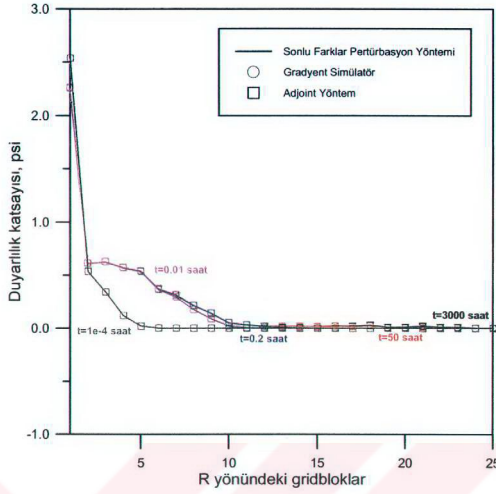
zordur. Ayrıca dikkat edilirse, paker ve prob türevleri yaklaşık olarak 0.1 saatten sonra eşitlenmekte ve aynı şekilde zamanla davranış göstermektedir. Paker ve prob türevlerinde, 10-80 saat arasında gözlemelenen düzleşme bir başka çevrel akış olarak yorumlanabilir. Türev verileri yaklaşık 1000 saatten sonra +1 eğimli doğru üzerine düşmektedir ve bu yarı-kararlı akış rejimini göstermektedir.

Böyle bir heterojen örnek için analitik çözüm mevcut olmadığından, gradyent ve adjoint simülasyon yöntemlerinden elde edilen duyarlılık katsayıları Bölüm 4.1’de verilen sonlu-fark duyarlılık katsayı yönteminden elde edilenlerle kıyaslanmıştır. Daha önce Bölüm 4.1’de değinildiği gibi, bu problemdeki tüm parametrelere (k_h , k_v ve ϕ) ait duyarlılık katsayılarının hesaplanması $3 \times 3750 + 1$ ileri simülasyon uygulaması gerektirdiğinden, bu yöntem ile duyarlılık katsayılarının hesaplanması çok zaman alıcıdır. Bu yöntem duyarlılık katsayılarını bu tür heterojen problemlerde hesaplamada etken bir yöntem olmamakla beraber, programlanan daha etken adjoint ve gradyent simülasyon yöntemlerinden elde edilen duyarlılıkların doğruluğunun kıyaslaması için tek yöntemdir.

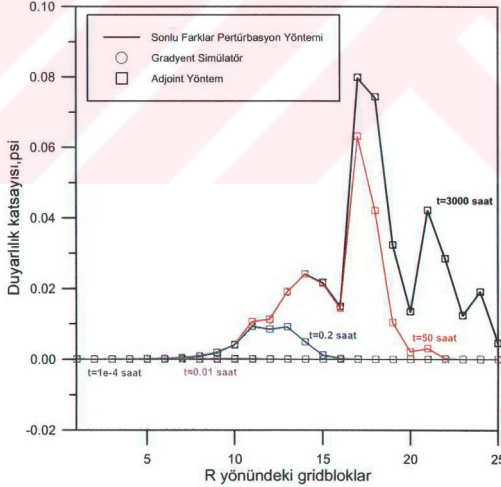
Bu heterojen örnek için geliştirilen adjoint ve gradyent simulator yönteminden elde edilen duyarlılık katsayıları, sonlu fark yönteminden elde edilenler ile kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalarda 250’ye yakın grafik yapılmış ve her üç yöntemden elde edilen duyarlılık katsayılarının uyumları incelenmiş ve mükemmel bir uyum bulunmuştur. Burada bu grafiklerden belli bir bölümü gösterilmektedir. Çizilen bu grafiklerin tamamında, gözönünde bulunduran parametre değerinin büyüklüğünden bağımsız olmasını sağlamak için duyarlılık katsayıları o parametrenin doğal logaritmasına göre oluşturulmuştur. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse,

$$\frac{\partial p}{\partial \ln(m)} = m \frac{\partial p}{\partial m} \quad (4.13)$$

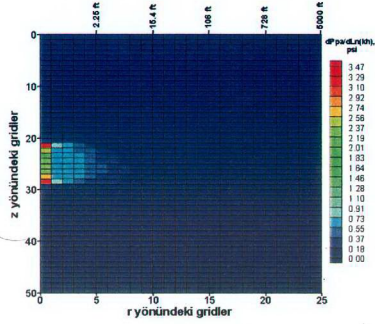
şeklinde verilir. Denklem 4.13’den görüleceği gibi, göz önünde bulunduran basıncın (paker aralığı veya gözlem probu) herhangi bir parametreye (m) göre duyarlılığının birimi “psi” olacaktır. Dolayısıyla, Denklem 4.13, tüm parametreler için duyarlılık katsayılarının aynı birimde ifade etmesine ve kıyaslanmasına olanak tanımaktadır.



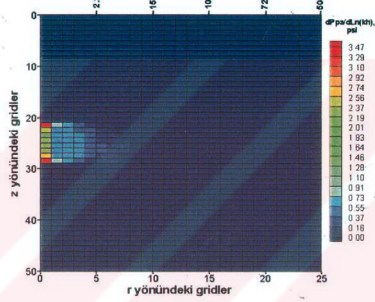
Şekil 4.33 Parker basıncının , $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve pakler aralığının orta noktasında r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması.



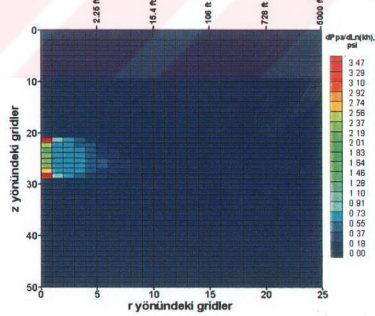
Şekil 4.34 Parker basıncının , $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve probun bulunduğu z düzleminde r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması.



(a) Adjoint yöntem ($t = 0.01$ saat)



(b) Gradyent Simülatör ($t = 0.01$ saat)



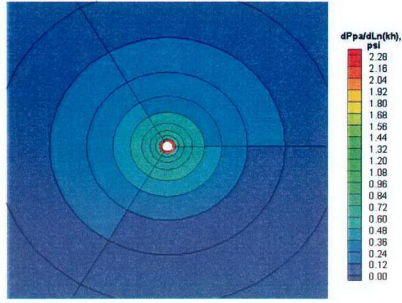
(c) Sonlu Farklar Pertürbasyon ($t = 0.01$ saat)

Şekil 4.35 Paket aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde, r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki yatay geçirgenlik k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.

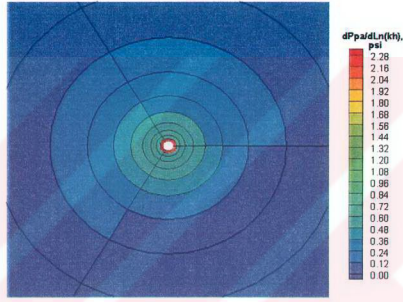
Şekil 4.33'de pakler aralığı basıncının , $\theta = 60^\circ$ sabit değeriinde ve pakler aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 9.8$ ft aşağıda) r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki yatay geçirgenlik k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması gösterilmektedir. Şekil 4.34'de ise, pakler aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değeriinde ve düşey gözlem probunun bulunduğı gridin orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 3.8$ ft aşağıda) r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki yatay geçirgenlik k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması gösterilmektedir. Her iki grafikte de görüldüğü üzere, üç yöntemden de elde edilen duyarlılık katsayısı değerleri mükemmel bir uyum içerisindeidir.

Şekil 4.35'de pakler aralığı basıncının $t=0.01$ saat'de, $\theta = 60^\circ$ sabit değeriinde, r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki yatay geçirgenlik k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı üç farklı yöntem için kıyaslanmaktadır. Şekil 4.36'da ise pakler aralığı basıncının $t=0.01$ saat'de, pakler aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 9.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 27 gridbloğundaki k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı üç farklı yöntem için kıyaslanmaktadır. Bu şekillerden görüleceğı gibi, pakler aralığı basıncının her üç yöntemden hesaplanan k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının r - z ve r - θ düzlemindeki alansal dağılımlarıda mükemmel bir uyum içerisindeidir.

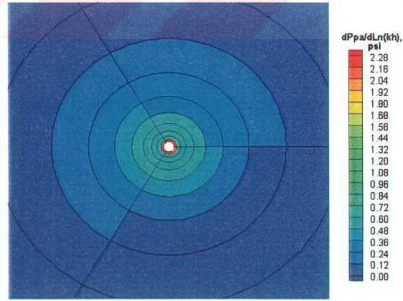
Benzer şekilde Şekil 4.37'de düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değeriinde ve pakler aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 9.8$ ft aşağıda) r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki düşey geçirgenlik k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması gösterilmektedir. Şekil 4.38'de ise, düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değeriinde ve düşey gözlem probunun bulunduğı gridin orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 3.8$ ft aşağıda) r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki düşey geçirgenlik k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntemle kıyaslaması gösterilmektedir. Her iki grafikte de görüldüğü üzere, üç yöntemden de elde edilen duyarlılık katsayısı değerleri mükemmel bir uyum içerisindeidir.



(a) Adjoint yöntem ($t = 0.01$ saat)

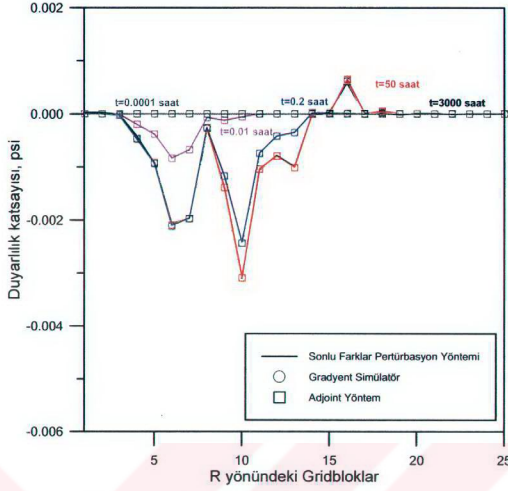


(b) Gradyent Simülâtör ($t = 0.01$ saat)

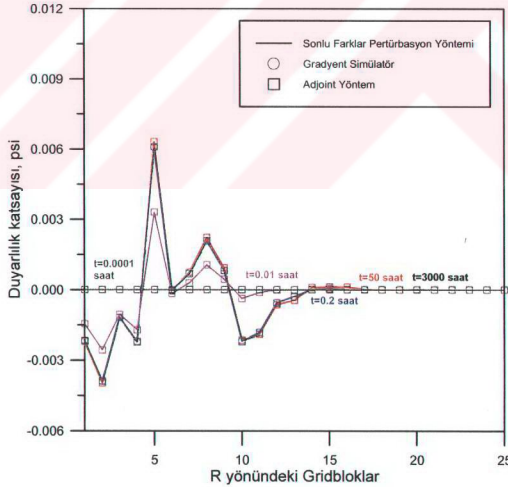


(c) Sonlu Farklar Pertürbasyon ($t = 0.01$ saat)

Şekil 4.36 Paket aralığı basıncının, paket aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 9.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 27 gridbloğundaki k_h 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.



Şekil 4.37 Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve paker aralığının orta noktasında r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntem için kıyaslaması.

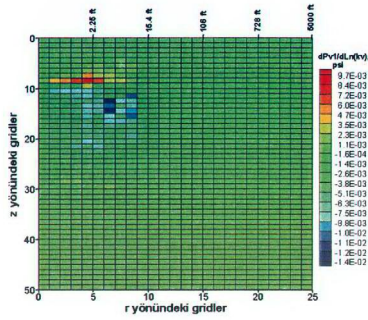


Şekil 4.38 Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve probun bulunduğu z düzleminde r -yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde üç yöntem için kıyaslaması.

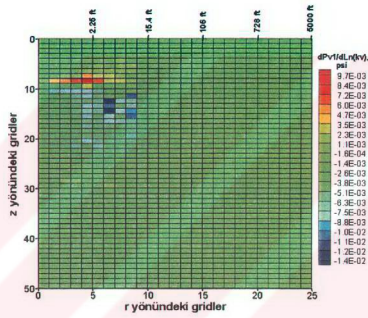
Şekil 4.39'da düşey gözlem probu basıncının $t = 0.01$ saat'de, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde, r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki düşey geçirgenlik k_v 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı üç farklı yöntem için kıyaslanmaktadır. Şekil 4.40'da ise düşey gözlem probu basıncının $t=0.01$ saat'de, düşey gözlem probunun bulunduğu (formasyon üst sınırından $z = 3.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 21 gridbloğundaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayısı dağılımı üç farklı yöntem için kıyaslanmaktadır. Bu şekillerden görüleceği gibi, düşey gözlem prob basıncının her üç yöntemden hesaplanan k_v 'ye duyarlılık katsayılarının r - z ve r - θ düzlemindeki alansal dağılımlarında mükemmel bir uyum içerisinde dir.

Daha öncede değinildiği gibi duyarlılık katsayıları değerleri gridbloğu ölçeğinde parametre tahmininde hangi gridbloklardaki parametrelerin ölçülmüş paker aralığı ve gözlem probu basınçlarından güvenilir olarak hesaplanabileceği hakkında ipucu vermektedir. Örneğin, paker aralığı veya düşey gözlem probu basıncının herhangi bir parametreye göre duyarlılık katsayısı tam ise o parametrenin paker aralığı veya gözlem probu basınçlarından bulunması mümkün değildir. Heterojen sistemde homojen sistemin aksine, heterojen sistemde paker veya gözlem probu basıncının parametrelere olan duyarlılık katsayılarını yorumlamak üzere çeşitli grafikler çizilmiştir.

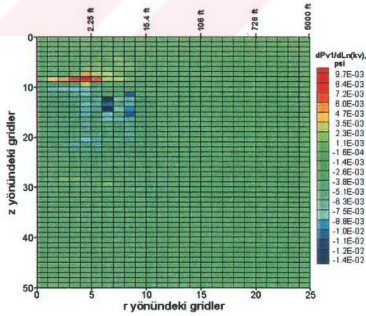
Bundan sonraki uygulamalarda amaç heterojen sistemde duyarlılık katsayılarını yorumlamak olduğundan, sadece adjoint yöntemden elde edilmiş duyarlılık katsayıları grafiklerde gösterilmiştir. Örneğin, Şekil 4.41'de paker aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r = 0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki yatay geçirgenlik k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması gösterilmektedir. Şekil 4.41 ve daha önce gösterilen Şekil 4.33'deki (paker aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve paker aralığının orta noktasında r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki yatay geçirgenlik k_h 'ye olan duyarlılık katsayıları) sonuçlar birlikte yorumlandığında, paker basıncının k_h 'ye en yüksek duyarlılığının tüm zaman değerlerinde çiftli paker aralığının alt ve üst sınırında bitişik gridbloklarda olduğu görülmektedir. Buna ek olarak, Şekil 4.33'den görüldüğü üzere paker aralığının orta noktasında r yönünde 10. gridbloktan sonra ($r > 15.45$ ft) duyarlılık katsayısının



(a) Adjoint yöntem ($t = 0.01$ saat)

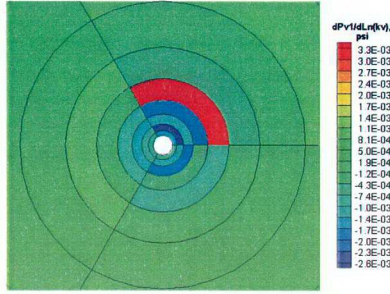


(b) Gradyent Simülâtör ($t = 0.01$ saat)

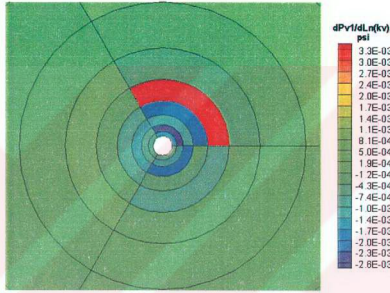


(c) Sonlu Farklar Perturbasyon ($t = 0.01$ saat)

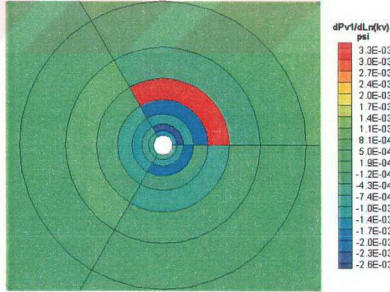
Şekil 4.39 Düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde r - z düzlemindeki 1250 toplam gridbloğundaki düşey geçirgenlik k_v 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.



(a) Adjoint yöntem ($t = 0.01$ saat)



(b) Gradyent Simülör ($t = 0.01$ saat)

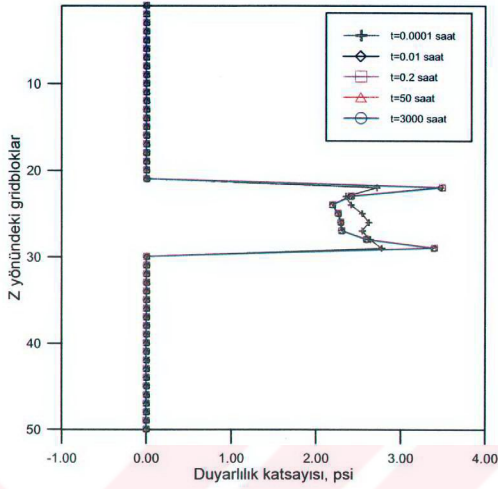


(c) Sonlu Farklar Pertürbasyon ($t = 0.01$ saat)

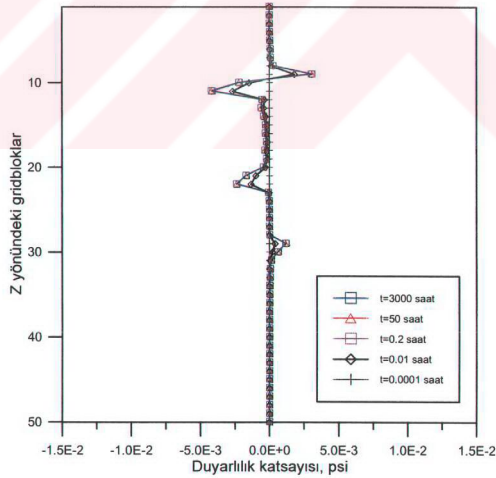
Şekil 4.40 Düşey gözlem probu basıncının, pakler aralığının orta noktasında (formasyon üst sınırından $z = 3.8$ ft aşağıda) r - θ düzleminde kuyuya yakın 21 gridbloğundaki k_r 'ye duyarlılık katsayısı dağılımı.

değeri sıfır olmaktadır. Bu davranış, r - z ve r - θ alansal dağılımlarında (sırasıyla Şekil 4.35 ve Şekil 4.36) gözlenmektedir. Bir başka deyişle Şekil 4.33, Şekil 4-35, Şekil 4-36 ve Şekil 4.41'den, paker aralığı basıncının paker aralığı alt ve üst sınırları ile paker aralığı içerisindeki $r < 15.45$ ft gridblokların yatay geçirgenliği k_h 'ye oldukça duyarlı olduğu ve bu basınç verilerinden bu gridbloklardaki k_h 'ların daha güvenilir olarak çözülebileceği anlaşılmaktadır. Benzeri davranışlar daha önce yapılan tek tabakalı ve iki tabakalı homojen uygulamalarda da (Şekil 4.9 ve Şekil 4.17) gözlenmiştir.

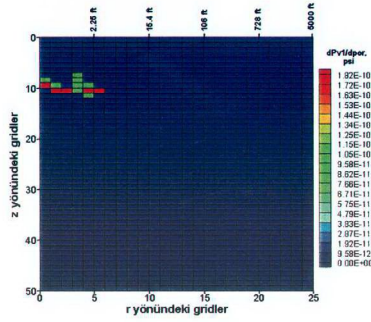
Şekil 4.42'de düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r = 0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki düşey geçirgenlik k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması gösterilmektedir. Şekil 4.42 ve daha önce gösterilen Şekil 4.38'deki (düşey gözlem probu basıncının, $\theta = 60^\circ$ sabit değerinde ve düşey gözlem probunun bulunduğu $z = 3.8$ ft düzleminde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklardaki düşey geçirgenlik k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının) sonuçlar birlikte yorumlandığında, düşey gözlem probu basıncının tüm zaman değerlerinde probun olduğu gridbloğun üstündeki ve altındaki gridblokların düşey geçirgenlikleri k_v 'ye en yüksek duyarlılığı gösterdiği anlaşılmaktadır. Burada ilginç olan, probun bulunduğu gridbloğun üstündeki gridbloğun k_v 'sine pozitif, bulunduğu gridbloğun k_v 'sine hemen hemen duyarsız ve probun bulunduğu gridbloğun altındaki gridbloğa negatif duyarlılık göstermesidir. Buna ek olarak, düşey gözlem probunun azda olsa çiftli paker aralığının alt ve üst gridbloklarındaki k_v 'ye duyarlılık göstermeside ilginçtir. Ayrıca, Şekil 4.37 ve Şekil 4.38'den görülebileceği gibi, probun olduğu yatay düzlemde probun olduğu gridbloğa yakın gridbloklarda duyarlıklar önce artmakta ve bir yarıçapta maksimuma ulaşmakta ve daha ileri gridbloklarda bu duyarlılıklar kaybolmaktadır. Şekil 4.39 ve Şekil 4.40'da gösterilen r - z ve r - θ düzlemindeki duyarlılık katsayılarının dağılımlarında da bu ilginç davranışlar gözlemlenmektedir. Benzeri davranışlar daha önce yapılan tek tabakalı ve iki tabakalı homojen uygulamalarda da (Şekil 4.13, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20) gözlenmiştir.



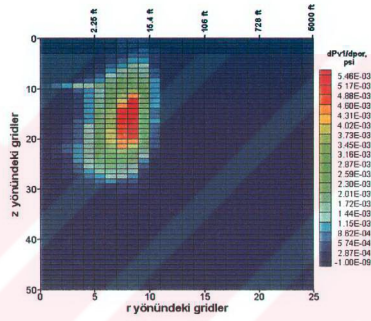
Şekil 4.41 Parker aralığı basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r=0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki k_h 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması.



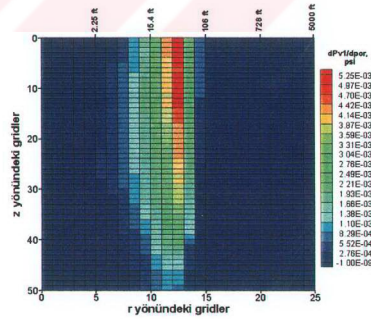
Şekil 4.42 Prob basıncının, $\theta = 60^\circ$ ve $r = 0.395$ ft sabit değerinde (r yönünde kuyuya bitişik ilk gridblok) z yönü boyunca çizilen doğru üzerindeki gridbloklardaki k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının farklı zaman değerlerinde kıyaslaması.



(a) $t = 0.0001$ saat



(b) $t = 0.01$ saat



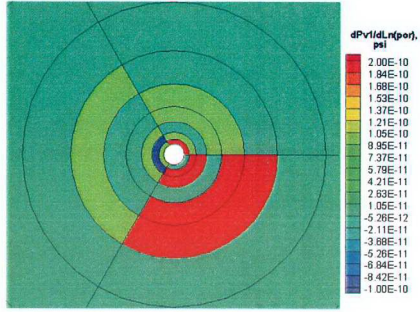
(c) $t = 0.2$ saat

Şekil-4.43 Düşey gözlem prob basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığının $\theta = 60^\circ$ değeri için r - z düzleminde üç farklı zaman değeri için gösterimi.

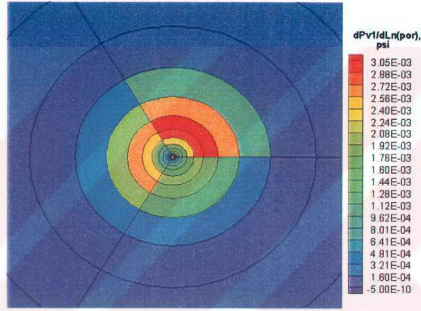
Burada gösterilmemekle birlikte paker basıncının düşey yöndeki geçirgenlik k_v 'ye ve gözlem probu başıclarının yatay yöndeki k_h 'ye duyarlılık dağılımları incelenmiş tek tabakalı ve tek tabakalı ve iki tabakalı homojen uygulamalarda da (Şekil 4.13, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20) gözlemlenen benzeri davranışlar bu heterojen örnek içinde gözlemlenmiştir. Örneğin, paker aralığı basıncının düşey yöndeki geçirgenliğe en fazla duyarlı olduğu gridblokların, çiftli paker aralığının ilginç bir şekilde üst ve alt sınırlarıdır. Bu davranış zamanla formasyonun alt ve üst sınırlarına doğru hareket etmektedir.

Bu bölümde son olarak, düşey gözlem prob basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığı üç farklı zaman değerinde $\theta = 60^\circ$ r - z düzleminde dağılımları Şekil 4.43'de, yine aynı zaman değerlerinde probun olduğu r - θ düzleminde duyarlılık dağılımları Şekil 4.44'de gösterilmektedir. Bu grafiklerden de görüldüğü üzere, duyarlılık katsayısı çok erken zamanlarda sadece probun olduğu gridblok ile yakın civarındaki gridblokların gözenekliliğine, küresel akış dömeni temsil eden $t = 0.01$ saatte ise r ve θ yönünde kuyudan uzak paker aralığının üst sınırı ile probun bulunduğu gridblok arasındaki gridbloklarının gözenekliliğine, global çevrel akış döneminde ($t = 0.2$ saat) ise, r yönünde kuyudan daha uzakta belli bir hacim içerisindeki pakerin üst sınırı ile üst tabaka sınırı arasındaki gridblokların gözenekliliğine duyarlılığı en fazla olduğu görülmektedir. Benzeri davranışlar tek ve iki tabakalı homojen sistemler içinde (Şekil 4.14, Şekil 4.23 ve Şekil 4.24) gözükmemektedir.

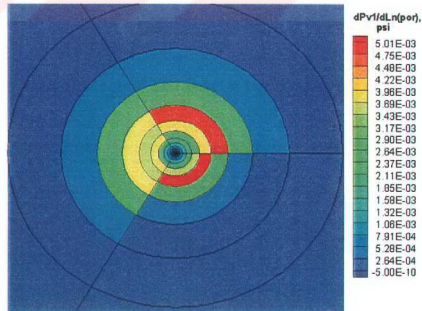
Genellikle, heterojen gözeneklilik ve geçirgenlik dağılımı olduğunda paker ve prob basınçlarının gridbloklardaki gözeneklilik ve geçirgenliğe olan duyarlılıklarını daha önce gösterilen duyarlılık katsayısı grafiklerinde olduğu gibi fiziksel olarak yorumlamak oldukça güç olabilmektedir. Şekil 4.45'de birinci düşey gözlem prob basıncının, probun bulunduğu düzlemde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklarda düşey geçirgenlik k_v 'ye olan duyarlılık katsayıları üç farklı zaman değeri için gösterilmiştir. Bu grafikte görüldüğü gibi, $t=10$ saat için duyarlılıkların büyüklüğünün r yönünde değişimi önce artmakta, sonra çok azda olsa azalmakta, sonra belli bir duyarlılık değerine kadar artıp, r yönünde 40. gridbloktan sonra sıfırlanmaktadır. Yukarıda da belirtildiği gibi, iki tabakalı anizotrop bir uygulama olmasına rağmen bu davranışı fiziksel olarak yorumlamak oldukça güçtür



(a) $t = 0.0001$ saat

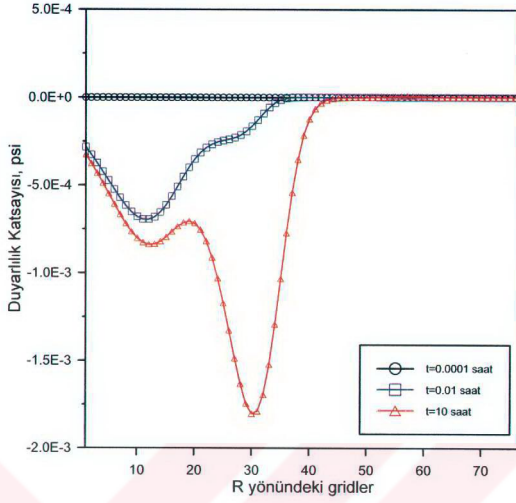


(b) $t = 0.01$ saat



(c) $t = 0.2$ saat

Şekil 4.44. Düşey gözlem prob basıncının gözenekliliğe olan duyarlılığının, probun bulunduğu r - θ düzleminde üç farklı zaman değeri için dağılımının gösterimi.



Şekil 4.45 Birinci düşey gözlem prob basıncının, probun bulunduğu düzlemde r yönünde çizilen çizgi üzerindeki gridbloklarda k_v 'ye olan duyarlılık katsayılarının gösterimi.

5. SENTETİK VE SAHA VERİSİ İLE YAPILAN UYGULAMALAR

Bu bölümde, Bölüm 2, Bölüm 3 ve Bölüm 4'te geliştirilen gradyent bazlı doğrusal olmayan parametre tahmini yapabilen 3B r - θ - z , tek fazlı, sonlu fark akış simülatörü ile sentetik ve saha verisi kullanılarak yapılan uygulamalar sunulmaktadır. Bu bölümde toplam beş adet düşey girişim testi uygulaması sunulmaktadır. Bunlarda dört tanesi sentetik basınç verileri ile yapılan uygulamalar ve bir tanesi gerçek saha verisi kullanılarak yapılan uygulamadır. Sentetik düşey girişim basınç testi verisi uygulamalarında, önce sentetik basınç verileri çalışmada geliştirilen 3B r - θ - z simülatörden türetilmiş ve daha sonra bu verilere sıfır ortalama ve belirli varyansa sahip normal dağılımlı ölçüm hataları eklenmiştir. Bu sayede, sentetik olarak türetilen basınç verileri sahada kaşılaşılabilecek testlere benzeştirilmeye çalışılmıştır. Bu sentetik uygulamalarda amaç, gerçek model ve parametre değerleri bu sentetik örnekler için bilindiğinden, geliştirilen doğrusal olmayan parametre tahmini yapabilen r - θ - z tek fazlı sonlu fark simülatörünün doğruluğunu sınamak ve özellikle gridbloğu ölçeğinden heterojenlik söz konusu olduğunda bu tür testlerden hangi parametreleri hangi bölgelerde, daha güvenilir olarak belirlenebileceğini araştırmaktır.

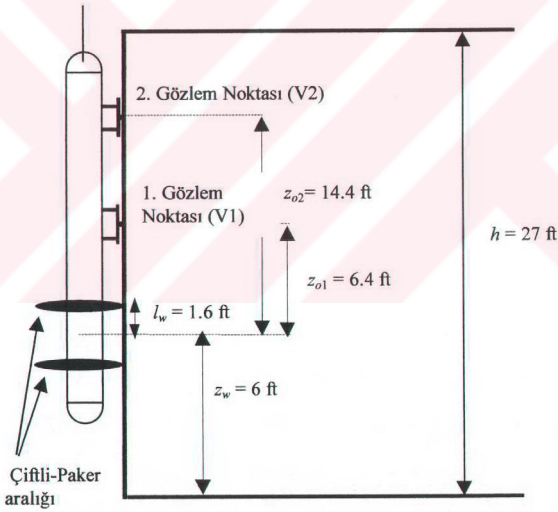
Bu bölümde sunulan ilk düşey girişim test örneği, tek tabakalı bir sistem içerisinde yapılan paker-prob düşey girişim testi örneğine aittir. İkinci ise, iki tabakalı bir sistemde yapılmış yine bir paker-prob düşey girişim testine aittir. İlk iki uygulama analitik çözümlere dayalı parametre tahmin algoritmasında kullanılarak analiz yapılmıştır. Üçüncüsü, yatay, düşey geçirgenliğin ve gözenekliliğin gridblok ölçeğinde değiştiği heterojen bir sahada yapılan tek tabakalı paker-probe testine aittir. Özellikle bu uygulamada, gridblok ölçeğinde kayaç özelliklerinin tahmini araştırılmıştır. Bir sonraki uygulamada, kirlenmiş bir zona sahip tek tabakalı bir sistemde çoklu prob testine ait bir test göz önünde bulundurulmuş hem kirlenmiş hem de kirlenmemiş zonun özellikleri tahmin edilmiştir. Son uygulamada gerçek bir saha verileri kullanılarak analiz yapılmıştır.

5.1 Sentetik Düşey Girişim Testi Uygulamaları

5.1.1 Sentetik örnek uygulama 1

İlk sentetik test uygulaması için göz önünde bulundurulmuş sistem ve teste ait şema Şekil 5.1'de ve simülâtörde kullanılan model parametreleri ise Tablo 5.1'de verilmektedir. Şekil 5.1'den görüleceği gibi göz önünde bulunan test konfigürasyonu tek tabakalı homojen anizotrop bir sistemde çiftli-paker iki düşey gözlem probu bir düşey girişim testine aittir. İlk kuyu dibi basıncı, ilk rezervuar basıncından 250 psi daha büyük seçilerek denge üstü (overbalance) bir durum modellenmiştir. Test sırasında, üretim sadece paker aralığından yapılmıştır ve test 30 dakikalık basınç azalış (drawdown) ve 60 dakikalık basınç yükselimi (buildup) döneminden oluşacak şekilde tasarlanmıştır. Paker aralığında ve düşey gözlem prob noktasındaki basınçları hesaplamak için toplam $N = 4700$ ($N_r = 50$, $N_\theta = 1$, $N_z = 94$) simülâtör bloğundan oluşan blok merkezli bir grid sistemi kullanılmıştır. Her simülâtör bloğunda $k_r = k_\theta = k_h = 20$ mD ve $k_z = k_v = 5$ mD alınmıştır. Ayrıca, sistem içerisinde gözeneklilik her simülâtör bloğunda $\phi = 0.15$ olarak kabul edilmiştir. Simülasyonda, r ve z yönlerinde birbirine eşit olmayan bloklar kullanılmıştır. Modellemede, paker ve düşey gözlem prob basınçları üzerinde gravite etkileri ile düşey gözlem problemlerinde kuyucu depolanma ve zar etkileri ihmal edilmiştir. Kuyucu depolanma etkilerinin ve zar faktörünün sadece paker aralığı için göz önünde bulundurulmuştur. Zar etkisi, simülasyonda Bölüm 2'de bahsedilen ilave kararlı akış koşullarında ilave basınç düşümü olarak (ince zar faktörü kavramı) modellenmiştir. Simülâtörden üretilen paker basınç verilerine, sıfır ortalamalı ve 0.5 psi^2 varyanslı, her iki düşey gözlem prob basınçlarına ise sıfır ortalamalı 0.0001 psi^2 varyanslı normal dağılımlı hatalar eklenmiştir. Şekil 5.2'de parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem prob basınç-zaman verileri gösterilmektedir. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'de, sırasıyla, basınç azalış ve yükselimi dönemlerine ait basınç verilerinin türev davranışları sunulmuştur. Ölçüm hataları basınç verilerinin türev davranışını etkilediğinden dolayı, akış rejimlerinin açık bir şekilde görülmesini engellemektedir. Bundan dolayı, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'de gösterilen türev davranışları elde edilirken hata eklenmemiş basınç verileri kullanılmıştır. Sayısal türevleme işlemi düzgünleştirilmiş "spline" tekniği kullanılarak yapılmıştır (Onur ve Saddique, 1999).

Şekil 5.3'den görüleceği üzere, pakler ve düşey gözlem problemlerine ait türev verileri küresel akışa ait davranışı göstermemekle birlikte, tüm türev verileri 0.2 saatten sonra çevrel akışa geçmektedir. Şekil 5.4'de gösterilen basınç yükselim dönemine ait türev verilerinin davranışı, basınç azalım dönemindeki türev verilerinin davranışına benzemekle birlikte, kuyu dibi basıncının rezervuar basıncından büyük olmasından dolayı, erken zamanlarda üretim dönemindeki pakler aralığındaki basınç verilerinin türev değerleri daha büyüktür. Ancak, $t=0.01$ saatten sonra basınç azalım ve basınç yükselim dönemindeki pakler aralığı basınç verilerinin türev değerleri birbirinin aynıdır. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'den görüleceği gibi, hem basınç azalım hem de basınç yükselim dönemindeki düşey gözlem probuna ait basınç verilerinin türevleri aynı davranışı göstermektedir. Bu uygulamada amaç, pakler aralığı ve/veya düşey gözlem noktalarındaki hem üretim hem de kapama dönemi basınç verilerine çıkışma yaparak model parametrelerini tahmin etmektir.



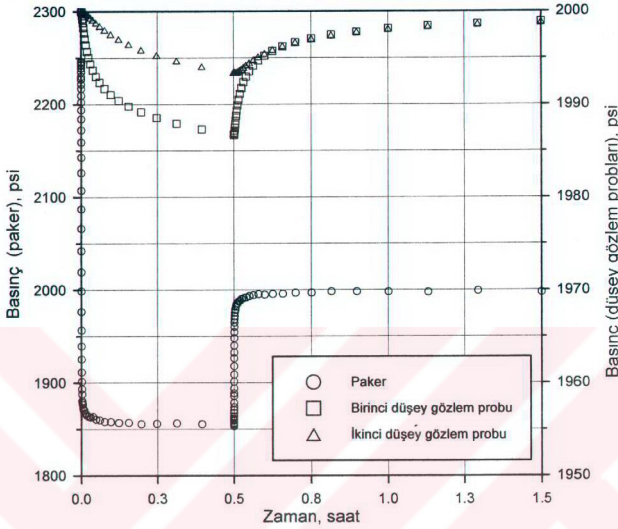
Şekil 5.1 Sentetik tek tabaka örnek uygulama düşey girişim testi şeması.

Tablo 5.1 Tek tabakalı sentetik örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.

ϕ ,	0.15
h , ft	27
k_h mD	20
k_v mD	5
c , psi ⁻¹	6.0×10^{-6}
μ , cp	1.0
r_w , ft	0.328
z_w , ft	6
C , bbl/psi	2.0×10^{-6}
S ,	0.5
q , bbl/D	15
r_e , ft	5000
$2l_w$, ft	3.2
p_i , psi	2000
p_{wf0} , psi	2250

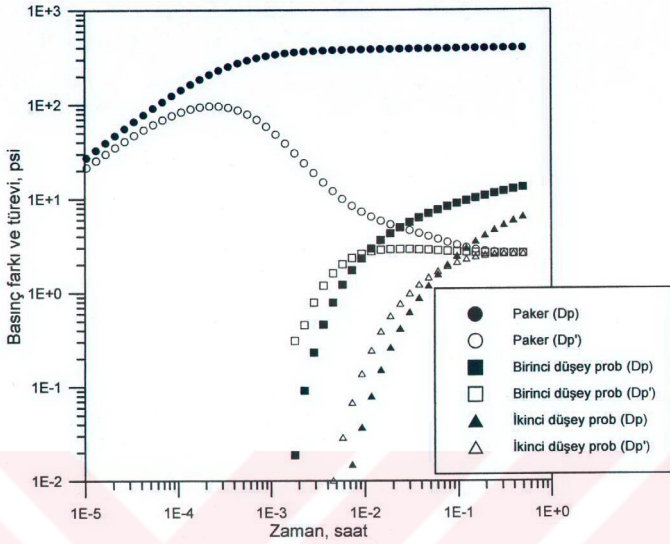
Bu uygulamada, model tek tabakalı homojen/anizotrop bir sistem gibi düşünülmüş ve önsel bilgi olmadığı varsayılmıştır. Bir başka ifadeyle, minimizasyonda kullanılan hedef fonksiyonuna önsel kovaryans C_M matrisi dahil edilmemiştir. Bu model parametrelerinde sonsuz varyans kullanılarak, tamamı ile belirsiz olan duruma karşılık gelir, simülâtörde gridblok ölçeğinde parametre tahmini yerine zonasyon (yatay ve düşey yönde farklı ancak bu yönlerde tek geçirgenlikle ve tek bir gözeneklilikle temsil edilen bir sistem) uygulaması yapılmıştır. Çakışmada kullanılan gözlemlenmiş basınç verisi sayısı, $N_d = 122$. Düşey geçirgenlik ve gözeneklilik arasında yüksek korelasyon olmasından dolayı bu uygulamada gözenekliliğin bilindiği kabul edilmiş, farklı basınç setleri çakışmada göz önünde bulundurularak toplam 5 parametre (k_h , k_v , p_i , C ve S) tahmin edilmeye çalışılmıştır. Çeşitli veri setleriyle yapılan çakıştırmaya uygulamaları sonucunda elde edilen sonuçlar % 95 güvenilirlik aralıkları (Doğru ve diğ., 1977) ve her veri setine ait gözlem ve model verilerinin farklarının karelerinin karekökünün toplam veri sayısına bölünmesiyle elde edilen RMS değerleri ile birlikte Tablo 5.2’de sunulmuştur. Çakışmada hem basınç azalım hem de basınç yükselim dönemi verileri birlikte göz önünde bulundurulmuştur. Tablo 5.2’de görüleceği üzere yapılan ilk uygulamada, paker verileri kullanılmıştır. Elde edilen değerlere bakıldığında, paker aralığında ölçülen basınç veri seti kullanılarak tüm parametreler doğru değerlere çok yakın olarak tahmin edilmiştir. Bir sonraki uygulamada, paker aralığında ölçülen basınç verilerine

ilaveten, birinci düşey gözlem probuna ait basınç verileride kullanılmıştır. Bu uygulamada da regresyondan elde edilen tüm veriler doğru değerlere oldukça yakındır.

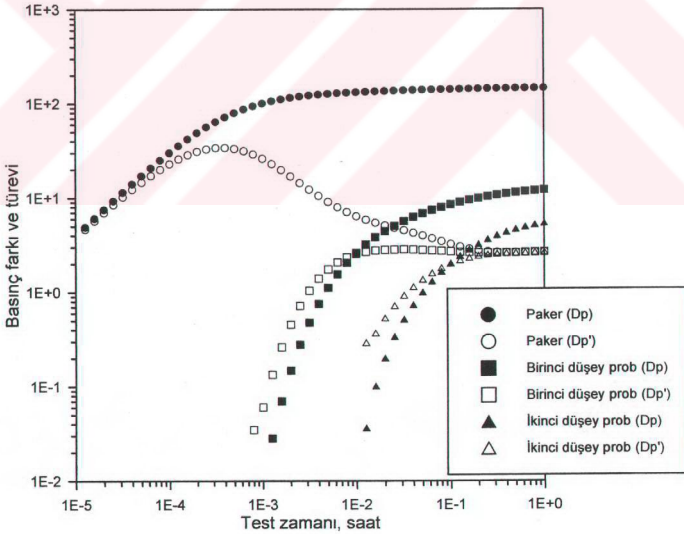


Şekil 5.2 Parametre tahmin için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem prob basınç-zaman verilerinin gösterimi.

Regrasyondan tahmin edilen parametrelere ait güvenilirlik aralıkları, birinci uygulamadan (sadece paker verileri) elde edilen verilerin güvenilirlik aralıklarından daha düşüktür. Bu da paker verilerine ilaveten düşey gözlem probuna ait verilerinin beraber analizinin daha güvenilir parametrelerin tahmin edileceğinin göstergesidir. Üçüncü uygulamada, birinci düşey gözlem probu verileri yerine paker ve ikinci düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılmıştır. Diğer uygulamada olduğu gibi, tüm veriler çok küçük güvenilirlik aralıkları ile tahmin edilmiştir. Dördüncü uygulamada hem paker hem de düşey gözlem probundaki basınç verileri kullanılarak parametre tahmini yapılmıştır. Tablo 5.2'den de görüleceği üzere, tüm parametreler çok küçük güvenilirlik aralıkları ile tahmin edilmiştir. Son uygulamada sadece düşey gözlem problarında ölçülen basınç verileri kullanılmıştır. Bu uygulamada, p_i , C , ve S parametreleri regrasyona dahil edilmemiş, bir önceki uygulamadan tahmin edilen değerler kullanılmıştır. Çünkü, paker aralığında ölçülen



Şekil 5.3 Basınç azalım dönemine ait verilerin türev davranışları.



Şekil 5.4 Basınç yükselim dönemine ait verilerin türev davranışları.

basınç verileri kullanılmadan bu parametrelerin doğru değerlerini tahmin etmek mümkün değildir. Ayrıca, gözlem prob basınç davranışı üzerinde paker aralığındaki kuyucu depolama zar etkileri ihmal edilecek kadar küçüktür. Bundan dolayı bu uygulamada, yatay ve düşey geçirgenlik parametreleriyle birlikte gözeneklilik tahmin edilmeye çalışılmıştır. Yapılan uygulama sonucunda her üç parametrede kabul edilebilir sınırlar içerisinde küçük güvenilirlik aralıkları ile tahmin edilmiştir. Bu uygulamalar sonucunda elde edilen RMS değerleri, paker ve düşey gözlem problemlerine ait basınç verilerine eklenen hataların standart sapmasına yaklaşık olarak eşdeğerdir. Basınç verileri üzerinde bu oranda hata olduğu için çıkışma sonucu daha küçük RMS değerleri elde etmek imkansızdır. Elde edilen bu RMS değerlerine bakılarak çok iyi çıkışmalar yapıldığı söylenebilir (Şekil 5.5)

Onur ve Kuchuk (1999) tarafından geliştirilen analitik çözümleri kullanan doğrusal olmayan regresyon algoritması ile aynı veriler kullanılarak yapılan uygulamadan elde edilen sonuçlar ise Tablo 5.3'de sunulmuştur. Bu uygulamada da birebir karşılaştırma yapabilmek için Tablo 5.2'de sunulan uygulamaların aynı yapılmıştır. İlk olarak sadece paker aralığında ölçülen basınç verileri kullanılarak parametreler tahmin edilmeye çalışılmıştır. Tablo 5.3'den de görüleceği üzere, elde edilen tahminler Tablo 5.2'de sayısal simülâtörden elde edilenler ile iyi bir uyum içerisinde.

Bu uygulamalar yapılırken sayısal simülâtör üzerine kurulu ve analitik çözümleri temel alan doğrusal olmayan regresyon algoritmalarının performansları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda analitik çözümleri üzerine kurulu doğrusal olmayan regresyon algoritmasını kullanan programın performansı, beklenildiği gibi sayısal simülâtörü üzerine kurulu doğrusal olmayan regresyon algoritmasını kullanan programın performansından daha hızlıdır. Örneğin, hem paker hem düşey gözlem problemlerinde ölçülen basınçları kullanılarak yapılan uygulamada analitik model üzerine kurulu doğrusal olmayan regresyon algoritmasını kullanan program yaklaşık 3.5 saniye işlem zamanı gerektirirken, sayısal simülâtör üzerine kurulu doğrusal olmayan regresyon algoritması yaklaşık 443 saniye işlem zamanı gerektirmiştir (Pentium III, 800 MHz bir işlemci kullanılmıştır). Her iki uygulama karşılaştırılırken tahmin edilecek parametreler için aynı başlangıç tahmin değerleri

Tablo 5.2 Sayısal simülatör üzerine kurulu regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.

No	Tarif	k_h , md	k_v , md	ϕ	C, rb/psi	S	P_v , psi	RMS (paker), psi	RMS (prob-1), psi	RMS (prob-2), psi
1	Doğru Değer	20	5	0.15	2×10^{-6}	0.5	2000	---	---	---
2	İlk Tahmin Değeri	100	20	0.2	1×10^{-5}	2.5	2150	---	---	---
3	Paker	19.74 (± 0.80)	5.31 (± 0.90)	0.15*	2.00×10^{-6} ($\pm 1.13 \times 10^{-6}$)	0.49 (± 0.05)	2000.0 (± 0.30)	0.768	---	---
4	Paker+Prob-1	20.00 (± 0.01)	5.00 (± 0.01)	0.15*	2.00×10^{-6} ($\pm 9.01 \times 10^{-9}$)	0.50 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	0.771	0.01	---
5	Paker+Prob-2	20.00 (± 0.03)	5.00 (± 0.02)	0.15*	2.00×10^{-6} ($\pm 9.19 \times 10^{-9}$)	0.50 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	0.771	---	0.009
6	Paker+Prob-1+Prob-2	20.00 (± 0.01)	5.00 (± 0.01)	0.15*	2.10×10^{-6} ($\pm 8.96 \times 10^{-9}$)	0.50 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	0.771	0.01	0.009
7	Prob-1+Prob-2	20.00 (± 0.01)	4.75 (± 0.80)	0.142 (± 0.024)	2.10×10^{-6} **	0.50**	2000.0**	---	0.01	0.009

* Doğru değerler kullanılmıştır

** Uygulama-6'dan elde edilen değerler kullanılmıştır

Tablo 5.3 Analitik çözümlemeyi temel alan doğrusal olmayan regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.

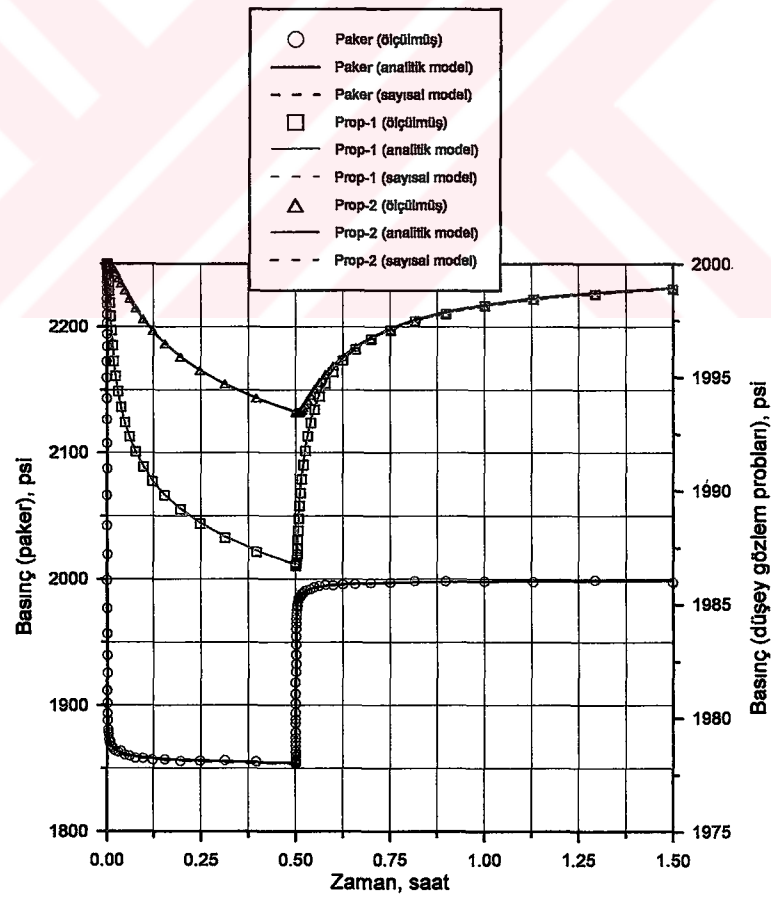
No	Tariff	k _n , md	k _v , md	φ	C, rb/psi	S	P _i , psi	RMS (paker), psi	RMS (prob-1), psi	RMS (prob-2), psi
1	Doğru Değer	20	5	0.15	2×10^{-6}	0.5	2000	---	---	---
2	İlk Tahmin Değeri	100	20	0.2	1×10^{-5}	2.5	2150	---	---	---
3	Paker	19.49 (± 0.81)	4.52 (± 0.73)	0.15*	2.12×10^{-6} (± 1.26×10^{-8})	0.45 (± 0.04)	2000.3 (± 0.35)	0.853	---	---
4	Paker+Prob-1	20.10 (± 0.03)	4.76 (± 0.03)	0.15*	2.10×10^{-6} (± 2.49×10^{-8})	0.54 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	1.216	0.035	---
5	Paker+Prob-2	20.07 (± 0.06)	4.74 (± 0.03)	0.15*	2.11×10^{-6} (± 1.97×10^{-8})	0.54 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	1.169	---	0.024
6	Paker+Prob-1+Prob-2	20.08 (± 0.02)	4.74 (± 0.02)	0.15*	2.10×10^{-6} (± 2.45×10^{-8})	0.54 (± 0.01)	2000.0 (± 0.00)	1.209	0.036	0.024
7	Prob-1+Prob-2	20.06 (± 0.02)	7.01 (± 0.34)	0.221 (± 0.011)	2.10×10^{-6} **	0.54**	2000.0**	---	0.038	0.025

* Doğru değerler kullanılmıştır

** Uygulama-6'dan elde edilen değerler kullanılmıştır

kullanılmıştır. Bu tür tek tabakalı sistemler için analitik model üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmaları, simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmasına göre daha etkindir. Çünkü, simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmasında, optimizasyon algoritmasında hepsine gereksinim duyulmadığı halde kuyudibi basıncının ve tüm gridbloklardaki basınçların bilinmeyen parametrelere göre duyarlılık katsayıları hesaplanmaktadır ve hesaplama zamanı simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmaları kullanılırken artmaktadır.

Sonuç olarak, bu çalışmada geliştirilen sayısal simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan regresyon algoritmasından elde edilen sonuçlarla, analitik çözümlemeyi temel alan doğrusal olmayan algoritmasından elde edilen sonuçlar hemen hemen birbirinin aynısıdır. Bu da geliştirilen r - θ - z simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmasını doğrulamaktadır.



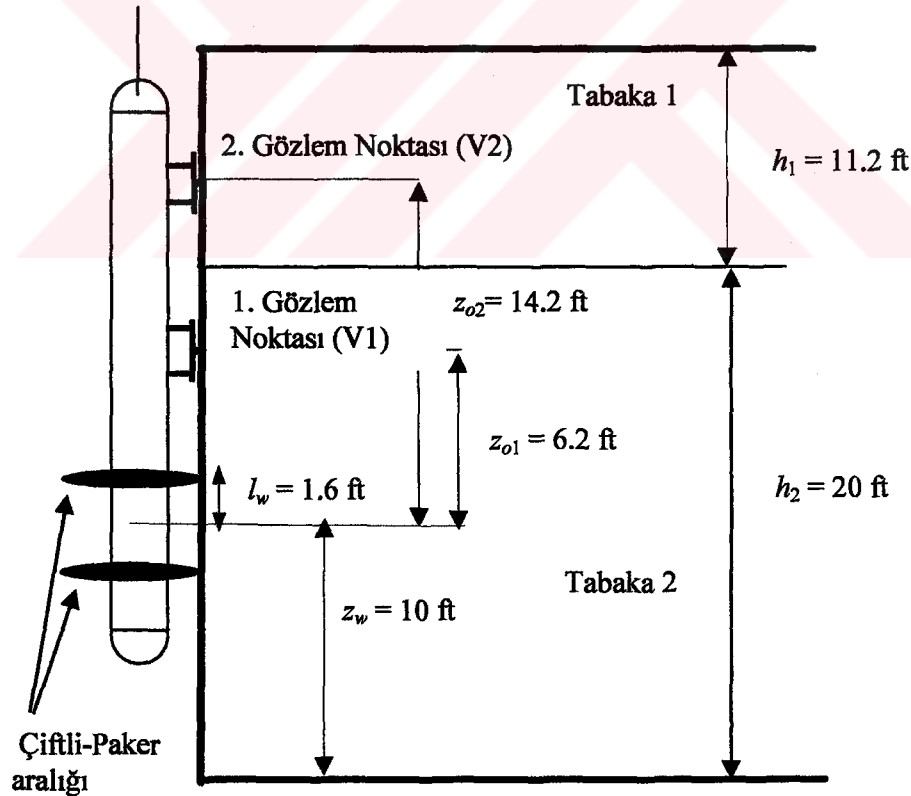
Şekil 5.5 Regrasyon sonucu elde edilen model verileri ile ölçüm verilerinin karşılaştırılması.

5.1.2 Sentetik örnek uygulama 2

İkinci sentetik test uygulaması için göz önünde bulundurulan sistem ve teste ait şema Şekil 5.6'da ve simülatörde kullanılan model parametreleri ise Tablo 5.4'de verilmektedir. Şekil 5.6'dan görüleceği gibi göz önünde bulunan test konfigürasyonu iki tabakalı, ancak her tabaka içerisinde geçirgenliklik homojen/anizotrop bir sistemde çift pakerlı ve iki düşey gözlem probu bir düşey girişim testine aittir. Test sırasında, üretim sadece paker aralığından yapılmıştır ve test 30 dakikalık basınç azalım (drawdown) ve 60 dakikalık basınç yükselim (buildup) döneminden oluşacak şekilde tasarlanmıştır. Paker aralığında ve düşey gözlem noktalarındaki prob basınçlarını hesaplamak için toplam $N = 2700$ ($N_r = 25$, $N_\theta = 1$, $N_z = 108$) simülatör bloğundan oluşan blok merkezli bir grid sistemi kullanılmıştır. Simülasyonda, r ve z yönlerinde birbirine eşit olmayan bloklar kullanılmıştır. Modellemede, paker ve düşey gözlem prob basınçları üzerinde gravite etkileri ile düşey gözlem problemlerinde kuyuiçi depolama ve zar faktörü etkileri ihmal edilmiştir. Kuyuiçi depolama etkilerinin ve zar faktörünün sadece paker aralığı için göz önünde bulundurulmuştur. Zar etkisi, simülasyonda Bölüm 2'de bahsedilen ilave kararlı akış koşullarında ilave basınç düşümü olarak (ince zar faktörü kavramı) modellenmiştir. Simülatörden üretilen paker basınç verilerine, sıfır ortalamalı ve 0.5 psi^2 varyanslı, her iki düşey gözlem prob basınçlarına ise sıfır ortalamalı 0.0001 psi^2 varyanslı normal dağılımlı hatalar eklenmiştir.

Şekil 5.7'de parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı- ve düşey gözlem problemlerine ait basınç-zaman verileri gösterilmektedir. Şekil 5.8'de ise hem üretim hem de kapama dönemlerine ait basınç-türev davranışları gösterilmektedir. Bu türev verileri hesaplanırken, akış rejimlerini net olarak görebilmek amacıyla hata eklenmemiş basınç verileri kullanılmıştır. Şekil 5.8'de de görüldüğü üzere, paker basıncının üretim dönemine ait basınç farkı ve türev verileri kapama dönemine ait basınç farkı ve türev verilerini gerçeklemektedir. Türev verileri $t = 0.02-0.08$ saatleri arasında küresel akışa ait $-1/2$ eğimli doğru üzerine düşmektedir. Hem paker hem de birinci düşey gözlem probuna ait türev verileri $t=0.3$ eğimi sıfır olan bir doğru üzerine düşmektedir. Bu toplam sistemin özelliklerini gösteren çevrel akışa ait davranış değildir. Bu eğim değerinden ortalama geçirgenlik 69 mD olarak

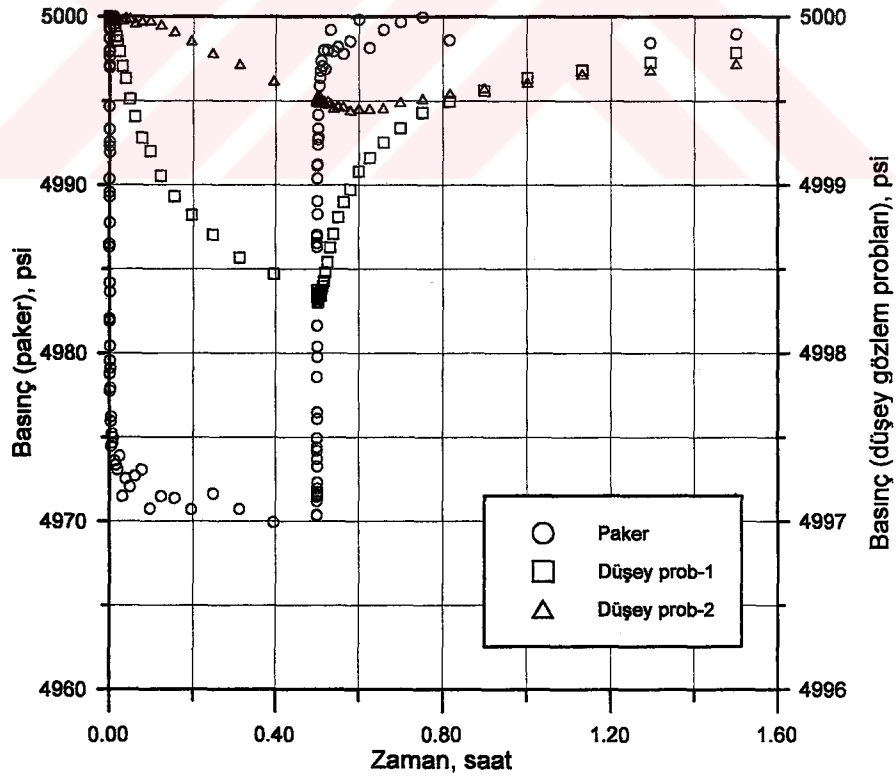
hesaplanmaktadır. Oysa sistemin ortalama geçirgenliği 66 mD olarak hesaplanmıştır. Burada gösterilmemekle birlikte bu uygulama 100 saat üretim olarak modellenmiş ve toplam sisteme ait çevrel akışın yaklaşık $t = 4$ saatten sonra başladığı görülmüştür. Birinci düşey gözlem probunun kapama dönemine ait basınç farkı verileri, üretim dönemine ait basınç farkı verilerini tam olarak gerçekleştirememekle birlikte, türev verileri birbirini tam olarak gerçekleştirmektedir. Buna karşın ikinci düşey gözlem probunun kapama dönemindeki basınç farkı ve türev verileri, üretim dönemine ait basınç farkı ve türev verilerini gerçekleştirememektedir. Bunun nedeni, basınç azalım testinin sonunda paker aralığında kapamanın gerçekleştirilmesine rağmen formasyon içerisinde akışın devam etmesidir. Basınç yükselme testinin başında pakera ait basınç verileri artarken, düşey gözlem probuna ait basınç verileri hala düşmektedir. Bundan dolayı, kapama dönemindeki basınç verileri eşdeğer üretim dönemine ait verilere dönüştürülememektedir. Bu durum, üretimin yapıldığı çiftli paker aralığına daha uzak olmasından dolayı ikinci gözlem probunda çok net biçimde görülmektedir.



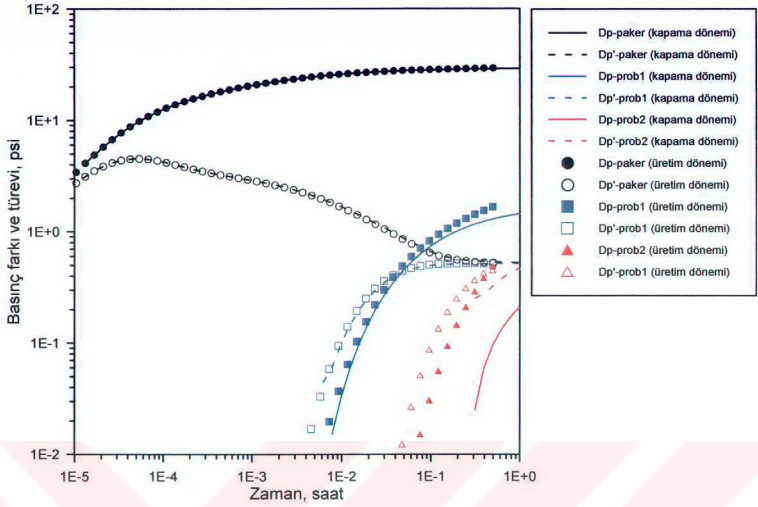
Şekil 5.6 Sentetik iki tabakalı bir sistemde çift pakerlı ve iki gözlem noktalı düşey girişim testi şeması.

Tablo 5.4 İki tabakalı sentetik örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.

ϕ_1 ,	0.10
ϕ_2 ,	0.22
k_{h1} , mD	5.0
k_{h2} , mD	100
k_{v1} , mD	1.0
k_{v2} , mD	10
h_1 , ft	11.2
h_2 , ft	20
$c_{11}=c_{12}$, psi ⁻¹	5.0×10^{-5}
$\mu_1=\mu_2$, cp	0.8
r_w , ft	0.328
q , RB/D	20.0
C , RB/psi	2.0×10^{-6}
S ,	1.0
r_e , ft	5000
$2l_w$, ft	3.2
p_i , psi	5000
p_{wf0} , psi	5000



Şekil 5.7 Parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem problemlerine ait basınç-zaman verilerinin gösterimi.



Şekil 5.8 Hem üretim hem de kapama dönemlerine ait basınç-türev davranışları gösterimi.

Bu uygulamada amaç paker aralığı ve/veya düşey gözlem noktalarındaki basınç (azalım + kapama) verilerine çakışma yaparak model parametrelerini tahmin etmektir. Bu örnek için ilk parametre tahmini uygulamasında, her tabaka kendi içinde homojen /anizotrop olacak şekilde iki tabakalı bir model gibi düşünülmüş ve önsel bilgi olmadığı varsayılmıştır. Bir başka ifadeyle, minimizasyonda kullanılan hedef fonksiyonuna önsel kovaryans C_M matrisi dahil edilmemiştir (Bölüm 3, Denklem 3.1 ve Denklem 3.6). Bu model parametrelerinde sonsuz varyans, yani tamamı ile belirsizlik, olan duruma karşılık gelir ve simülatörde gridblok ölçeğinde (her gridbloktaki geçirgenlikleri ve gözeneklilikleri) parametre tahmini yerine zonasyon (her tabakanın yatay ve düşey yönde farklı ancak bu yönlerde tek bir geçirgenlikle ve tek bir gözeneklilikle temsil edilen bir sistem) uygulaması yapılmıştır. Bu uygulamada, farklı basınç setleri çakışmada göz önünde bulundurularak toplam 7 parametre (k_{h1} , k_{v1} , k_{h2} , k_{v2} , p_i , C , S) tahmin edilmeye çalışılmıştır. Çeşitli veri setleriyle yapılan çakıştırma uygulamaları sonucunda elde edilen sonuçlar (% 95 güvenilirlik aralıkları ve her veri setine ait çakışmadan elde edilen RMS değerleri ile birlikte) Tablo 5.5'de sunulmuştur. Bu uygulamada her parametreye ait duyarlılık

katsayıları, böyle uygulamalarda adjoint yöntem üzerinde etkinliğinden dolayı gradyent simülatör kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 5.5'den görüldüğü üzere, ilk uygulamada sadece paker aralığında ölçülen basınç verileri kullanılmıştır. Parametre tahmini sonucu elde edilen parametreler incelendiğinde ilk tabakadaki k_v değeri gerçek değer oldukça uzağında olduğu görülmektedir. Bunlara ilaveten ilk tabakadaki k_h ve k_v değerlerinin güvenilirlik aralığı oldukça büyük çıkmıştır. Tahmin edilen diğer parametreler, doğru değerlere oldukça yakın çıkmıştır. Regrasyon sonucu paker değerine ait RMS değeri paker verileri üzerindeki hataların standart sapmasına yaklaşık olarak eşdeğerdir. İkinci uygulamada paker verilerine ilaveten, birinci düşey gözlem probuna ait basınç verileride regrasyon analizinde kullanılmıştır. Tahmin edilen parametreler doğru değerlere oldukça yakındır. Bu değerlere ait güvenilirlik aralıkları da kabul edilebilir sınırlar içerisindedir. Regrasyon sonucu elde edilen paker ve birinci düşey gözlem probuna ait basınç verilerinin RMS değeri veriler üzerindeki hataların standart sapmalarına eşdeğerdir. Bu uygulamada birinci tabakaya ait k_h ve k_v değerleri doğru olarak bulunması, düşey gözlem problemlerindeki basınç verilerinin analizde paker verileri ile beraber kullanımının önemini göstermektedir. Üçüncü uygulamada, paker ve ikinci düşey gözlem probuna ait basınç verileri kullanılmıştır. İkinci uygulamada olduğu gibi tüm parametreler kabul edilebilir sınırlar içerisinde tahmin edilmiştir. Bir sonraki uygulamada, hem paker hem de problemlerde ölçülen veriler beraber kullanılmıştır. Elde edilen parametreler doğru değerlere oldukça yakın çıkmıştır ve tahmin edilen parametrelere ait güvenilirlik aralıkları en küçük bu uygulamada çıkmıştır. Her basınç veri setine ait RMS değerleri, basınç verilerine ait hataların standart sapmasına eşdeğerdir. En son uygulamada, sadece prob lokasyonlarında ölçülen basınç verileri kullanılmıştır. Düşey gözlem problemlerinin beraber analizinden S , C ve p_i bulunamayacağından dolayı bu parametrelerin bir önceki analizde saptanan değerleri kullanılmıştır ve regrasyon analizine dahil edilmemiştir. Yapılan analiz sonucu, parametreler kabul edilebilir sınırlar içerisinde tahmin edilmiştir.

Onur ve Kuchuk (1999) tarafından geliştirilen analitik çözümleri kullanan doğrusal olmayan regresyon algoritması ile aynı verileri için yapılan uygulamadan elde edilen sonuçlar ise Tablo 5.6'da sunulmuştur. Bu uygulamalardan da Tablo 5.5'de sonuçları gösterilen uygulamalara benzer sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 5.6 dikkatli

incelendiğinde, paker ve birinci düşey gözlem probuna ait basınç verilerinin analizinden elde edilen parametrelere bakıldığında birinci tabakaya ait k_h ve k_v parametreleri tam olarak saptanamamıştır. Bu aslında hedef fonksiyonun lokal bir minumuma takıldığını göstermektedir. Çünkü bu problemde üretimin yapıldığı ikinci tabakadaki k_h değeri ile S arasında çok büyük bir korelasyonun olmasından kaynaklanmaktadır. Bu uygulama Tablo 5.5’de sunulan ilk tahmin değerleri ile tekralanmış ve parametrelerin doğru değerlerine çok yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Bu uygulamalar sırasında da sayısal simülatör üzerine kurulu ve analitik çözümleri temel alan doğrusal olmayan algoritmaların performansları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda analitik çözümleri üzerine kurulu doğrusal olmayan regrasyon algoritmasını kullanan programın performansı, beklenildiği gibi sayısal simülatörü üzerine kurulu doğrusal olmayan regrasyon algoritmasını kullanan programın performansından daha hızlıdır. Örneğin, hem paker hem düşey gözlem problemlerinde ölçülen basınçları kullanılarak yapılan uygulamada analitik model üzerine kurulu doğrusal olmayan regrasyon algoritmasını kullanan program yaklaşık 60 saniye işlem zamanı gerektirirken, sayısal simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan regrasyon algoritması yaklaşık 180 saniye işlem zamanı gerektirmiştir. Her iki uygulama karşılaştırılırken tahmin edilecek parametreler için aynı başlangıç tahmin değerleri kullanılmıştır. İki tabakalı sistemler için analitik çözüm üzerine kurulu parametre tahmin algoritması tek tabakalı uygulamaya göre çok daha fazla işlem zamanı gerektirmektedir. Bu hem bilinmeyen parametre sayının artmasından hem de birden fazla tabaka için geliştirilen analitik çözümlerin karmaşıklığından kaynaklanmaktadır. Bu uygulamada sayısal simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritması ile analitik model üzerine kurulu algoritmanın işlem zamanı karşılaştırıldığında analitik model üzerine kurulu algoritmanın 3 kat daha hızlı olduğu görülmektedir.

Tablo 5.5 ve Tablo 5.6’dan görüleceği gibi, bu çalışmada geliştirilen ayrık sayısal simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan regrasyon algoritmasından elde edilen sonuçlarla, analitik çözümlmeyi temel alan doğrusal olmayan regrasyon algoritmasından elde edilen sonuçlar hemen hemen birbirinin aynısıdır. Bu da geliştirilen r - θ - z simülatör üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmin algoritmasını doğrulamaktadır.

Tablo 5.5 Sayısal simülator üzerine kurulu regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları.

No	Tarif	k_{h1} , md	k_{v1} , md	k_{h2} , md	k_{v2} , md	C, rb/psi	S	Pi, psi	RMS (paker), psi	RMS (prob-1), psi	RMS (prob-2), psi
1	Doğru Değer	5.0	1.0	100.0	10.0	2×10^{-6}	1.0	5000.0			
2	İlk Tahmin Değeri	50	5	50	5	1×10^{-5}	5.0	4500.0			
3	Paker	3.3 (± 616.2)	490.8 (± 782413)	104.5 (± 17.3)	8.9 (± 7.2)	2.3×10^{-6} ($\pm 3.6 \times 10^{-7}$)	1.1 (± 0.4)	5000.0 (± 0.6)	0.739	---	---
4	Paker+Prob-1	5.2 (± 8.9)	0.9 (± 0.6)	100.2 (± 2.1)	10.0 (± 0.3)	2.2×10^{-6} ($\pm 2.8 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.1)	5000.0 (± 0.0)	0.738	0.010	---
5	Paker+Prob-2	5.2 (± 1.8)	0.9 (± 0.5)	98.5 (± 11.0)	11.5 (± 5.3)	2.2×10^{-6} ($\pm 3.0 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.2)	5000.0 (± 0.0)	0.738	---	0.011
6	Paker+Prob-1+Prob-2	5.3 (± 1.2)	1.0 (± 0.1)	99.9 (± 0.7)	10.0 (± 0.2)	2.2×10^{-6} ($\pm 2.7 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.0)	5000.0 (± 0.0)	0.739	0.010	0.011
7	Prob-1+Prob-2	5.4 (± 1.2)	1.0 (± 0.1)	99.7 (± 0.7)	10.0 (± 0.2)	2.2×10^{-6} *	1.0*	5000.0*	---	0.010	0.011

* Uygulama-6'dan elde edilen değerler kullanılmıştır

Tablo 5.6 Analitik çözümleri temel alan doğrusal olmayan regresyon algoritması kullanılarak yapılan uygulamaların sonuçları

No	Tarif	k_{h1} , md	k_{v1} , md	k_{h2} , md	k_{v2} , md	C, rb/psi	S	Pi, psi	RMS (paker), psi	RMS (prob-1), psi	RMS (prob-2), psi
1	Doğru Değer	5.0	1.0	100.0	10.0	2×10^{-6}	1.0	5000.0			
2	İlk Tahmin Değeri	25	5	500	50	1×10^{-5}	5.0	4500.0			
3	Paker	1362.4 (± 1858.1)	0.3 (± 0.4)	98.7 (± 13.4)	9.4 (± 5.0)	2.1×10^{-6} ($\pm 3.0 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.3)	5000.1 (± 0.4)	0.733	---	---
4	Paker+Prob-1	1.2×10^{-6} ($\pm 1.2 \times 10^{-3}$)	1.9 (± 0.6)	99.2 (± 1.2)	9.5 (± 0.2)	2.2×10^{-6} ($\pm 1.9 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.0)	5000.0 (± 0.0)	0.734	0.010	---
5	Paker+Prob-2	5.3 (± 1.5)	1.1 (± 0.6)	100.7 (± 8.7)	9.2 (± 3.1)	2.2×10^{-6} ($\pm 2.6 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.0)	5000.0 (± 0.0)	0.733	---	0.011
6	Paker+Prob-1+Prob-2	5.0 (± 1.1)	1.0 (± 0.1)	100.5 (± 0.7)	9.6 (± 0.2)	2.2×10^{-6} ($\pm 1.9 \times 10^{-7}$)	1.0 (± 0.0)	5000.0 (± 0.0)	0.734	0.011	0.011
7	Prob-1+Prob-2	4.8 (± 1.1)	1.0 (± 0.1)	100.5 (± 0.7)	9.6 (± 0.2)	2.2×10^{-6} *	1.0*	5000.0*	---	0.011	0.011

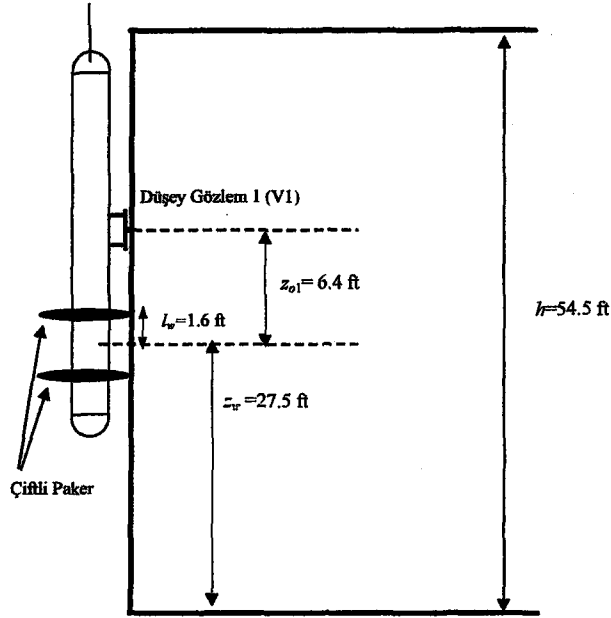
* Uygulama-6'dan elde edilen değerler kullanılmıştır

5.1.3 Sentetik örnek uygulama 3

Üçüncü sentetik test uygulaması için göz önünde bulundurulmuş sistem tek tabakalı heterojen sisteme aittir. Şekil 5.9’da teste ait şema ve simülatörde kullanılan model parametreleri ise Tablo 5.7’de verilmektedir.

Şekil 5.9’de gösterilen paker aralığında ve düşey gözlem noktasındaki basınçları hesaplamak için toplam $N = 1550$ ($N_r = 25$, $N_\theta = 1$, $N_z = 62$) simülatör bloğundan oluşan grid sistemi kullanılmıştır. Bu örnek uygulamada, sistem tek tabakalı heterojen ve anizotrop olarak tasarlanmıştır. Yatay ve düşey geçirgenlikler log normal dağılımlı heterojen saha, gözeneklilik ise normal heterojen saha olarak jeostatistiksel yöntemler kullanılarak türetilmiştir. Yatay yöndeki $\ln k_h$ geçirgenlik sahası için ortalaması 2.99 (20 mD) ve varyansı 1.0 olan dağılım ve korelasyon uzunluğu 50 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Düşey yöndeki geçirgenlik sahası için ise ortalaması 1.79 (6 mD) ve varyansı 0.5 olan dağılım ve korelasyon uzunluğu 27.5 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Gözeneklilik için ortalaması 0.32 ve varyansı 0.0025 olan normal dağılım ve korelasyon uzunluğu 50 ft olan izotrop küresel varyogram kullanılmıştır. Yatay ve düşey geçirgenlikler arasında ve geçirgenlikler ile gözeneklilik arasında korelasyon olmadığı kabul edilmiştir.

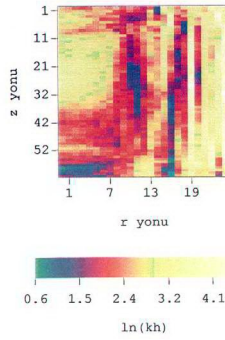
Bölüm 3’de verilen Cholesky ayrışımından elde edilen bir gerçekleştirme, gerçek sistem olarak düşünülmüştür. Bu gerçeklemeye ait $\ln k_h$, $\ln k_v$ ve gözeneklilik sahaları sırasıyla Şekil 5.10, 5.11 ve 5.12’de gösterilmektedir.



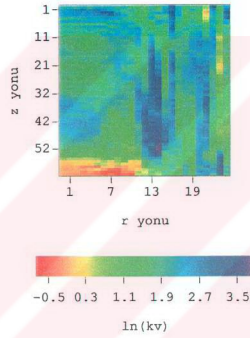
Şekil 5.9 Tek tabakalı heterojen sistemde çiftli-paker prob düşey girişim test şeması.

Tablo 5.7 Tek tabakalı heterojen örnek uygulama için kayaç, akışkan ve diğer model parametreleri.

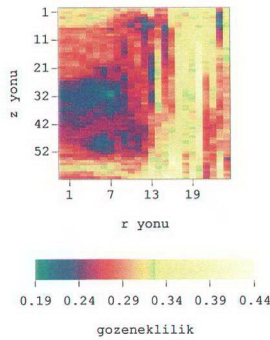
ϕ ,	Heterojen
h , ft	54.5
k_h , mD	Heterojen
k_v , mD	Heterojen
c_t , psi^{-1}	2.5×10^{-5}
μ , cp	0.387
r_w , ft	0.354
z_w , ft	27.5
z_o , ft	6.4
C , RB/psi	4.0×10^{-6}
S ,	5.0
q , RB/D	20
r_e , ft	1000
$2l_w$, ft	3.2
p_i , psi	3500
p_{wf0} , psi	3500



Şekil 5.10 Realizasyondan elde edilen $\ln k_h$ sahası.



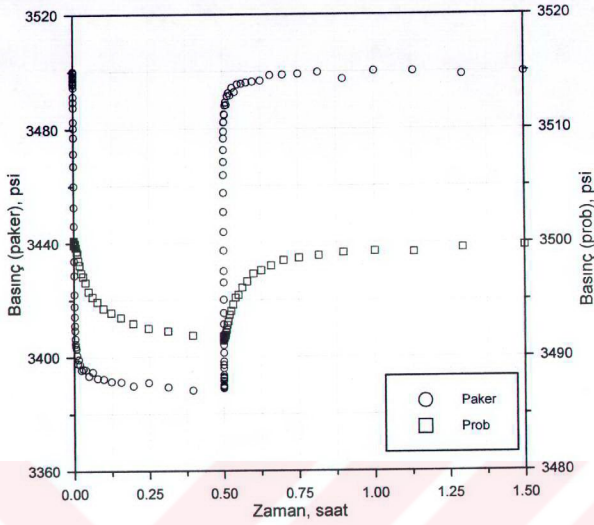
Şekil 5.11 Realizasyondan elde edilen $\ln k_v$ sahası.



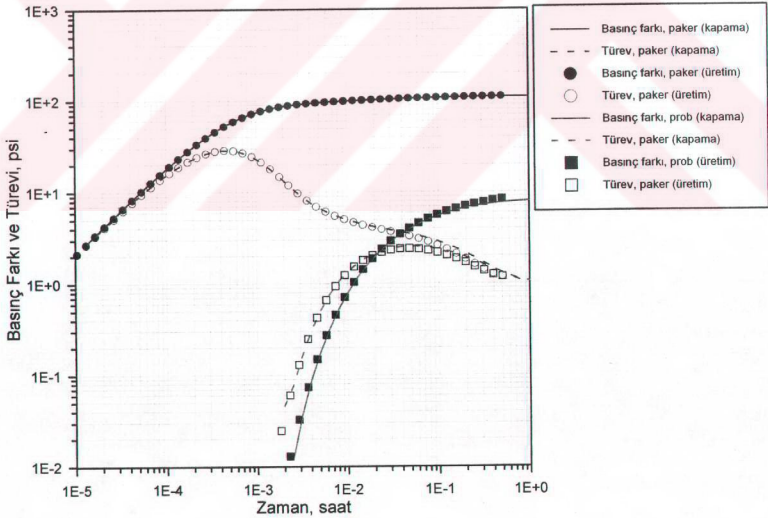
Şekil 5.12 Realizasyondan elde edilen gözeneklilik sahası.

Bu düşey girişim testinin 30 dakika üretim (drawdown) ve 60 dakika kapama (buildup) dönemlerinden oluştuğu kabul edilerek, paker aralığı ve gözlem probu basınç verileri simülatörden elde edilmiştir. Zar etkisi, simülasyonda Bölüm 2’de bahsedilen ilave kararlı akış koşullarında ilave basınç düşümü olarak (“ince zar faktörü” kavramı) modellenmiştir. Simülatörden üretilen paker basınç verilerine, sıfır ortalamalı ve 0.5 psi^2 varyanslı, her iki düşey gözlem prob basınçlarına ise sıfır ortalamalı 0.01 psi^2 varyanslı normal dağılımlı hatalar eklenmiştir. Şekil 5.13’de parametre tahmin için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem prob basıncına karşılık zaman verileri gösterilmektedir Şekil 5.14’de hem basınç azalım hemde basınç yükselim dönemine ait paker ve gözlem probu basınç değişimi ve türev davranışları gösterilmektedir. Bu grafikte, akış rejimlerinin net olarak görülebilmesi amacıyla türev verileri hesaplanırken hata eklenmemiş basınç farkı verileri kullanılmıştır. Bu grafikten de görüleceği üzere, hem paker hemde gözlem probunda ölçülen kapama dönemine ait basınç farkı verileri, üretim dönemine ait basınç farkı verileri ile çakışmaktadır. Buna karşın, üretim zamanının kısalığından dolayı, kapama dönemine ait türev verileri, $t=0.06$ saatten sonra üretim dönemine ait türev verilerine tam olarak çakışmamaktadır. Hem kapama dönemine ait hemde üretim dönemine ait türev verileri, çevrel akışa akışa ait davranışı göstermemekle birlikte, son logaritmik devirde küresel akışı gösteren $-1/2$ eğimli doğrunun üzerine düşmektedir.

Bu uygulamayı yapmaktaki amaç, paker aralığı ve/veya düşey gözlem noktalarındaki basınç (azalım + kapama) verilerine çakışma yaparak, bir başka deyişle bu verileri sağlayan, gridblok ölçeğinde $3 \times 1550 + 2 = 4652$ ($\ln k_{hj}$, $\ln k_{vj}$, ϕ_j , $j=1,2,...,1550$, zar faktörü ve kuyucu depolanma sabiti) model parametrelerini tahmin ederek basınç verileriyle hangi gridbloklarda parametreleri daha iyi çözümlenebileceğini belirlemektir. Model parametrelerine ait önsel ortalamaları ilk tahmin değerleri olarak farklı basınç seti verilerine Levenberg-Marquardt algoritması ile yapılan koşullama sonrası elde edilen sonsal tahminler elde edilmiştir. Bu uygulamalarda zar faktörü ve kuyucu depolanma katsayısı bilinmeyen parametre tahmini zar faktörüne ait önsel ortalama 5 ve varyansı 25 olarak kabul edilirken, kuyucu depolama katsayısına ait önsel ortalama 4×10^{-6} RB/psi ve varyansı 5×10^{-5} (RB/psi)² kabul edilmiştir.



Şekil 5.13 Parametre tahmini için kullanılacak paker aralığı ve düşey gözlem problemlerine ait basınç-zaman verilerinin gösterimi.

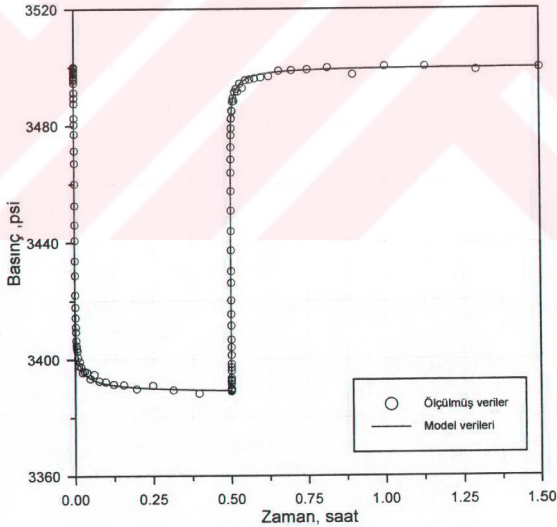


Şekil 5.14 Hem üretim hem de kapama dönemlerine ait basınç-türev davranışlarının gösterimi.

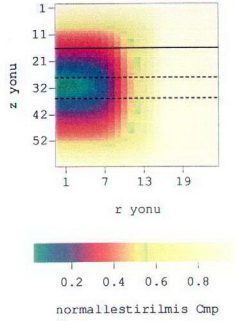
İlk olarak sadece paker aralığında 118 farklı zaman değerinde üretim ve kapama döneminde ölçülen basınç verileri kullanılarak, yukarıda belirtilen 4652 tane parametre tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bu uygulamada, kuyuiçi depolanma katsayısı ve zar faktörü bilinmeyen parametre vektörüne hem dahil edilerek hem de dahil edilmeyerek parametreler tahmin edilmiştir. Özellikle zar faktörünün yatay geçirgenliklerle korelasyonundan dolayı hedef fonksiyonu çok fazla aşağı çekilememektedir. Bundan dolayı zar faktörü ve kuyuiçi depolanma sabitinin bilinmeyen parametre vektörüne dahil edilmeyerek yapılan uygulamaya ilişkin sonuçlar burada gösterilmiştir. Şekil 5.15'de parametre tahmini sonucu elde edilen model verileri ve ölçülmüş verilerin uyumu görülmektedir. Bu grafikte görüldüğü üzere, ölçülmüş basınç verileri ile modelden elde edilen basınç verilerinin uyumu mükemmeldir.

Şekil 5.16, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18'da ise parametre kestirimi sonrasında elde edilen, sırasıyla $\ln k_h$, $\ln k_v$ ve gözenekliliğe ait normalleştirilmiş sonsal kovaryans matrisinin alansal grafikleri sunulmuştur. Bu grafiklerin tamamında normalleştirme işlemi, Denklem 3.24'den hesaplanan sonsal kovaryans değeri önsel modele ait varyanslara bölünerek yapılmıştır. Bu grafiklerin tamamında, kesikli çizgilerin arasında kalan bölüm üretimin yapıldığı paker aralığını (z yönünde üstten 28. – 35. gridler) göstermekte; düz çizgi ise probun bulunduğu gridi (z yönünde üstten 16. grid) göstermektedir. Normalleştirilmiş kovaryans matrisinin değeri 0 ile 1 arasında değişmektedir. Alansal grafiklerde eğer sonsal kovaryansın değeri 0'a yakınsa o bölgede tahmin edilen parametrelerin doğru olarak çözülebileceği anlamı çıkarılabilir. Sonsal kovaryans değeri 1'e yakınsa, başlangıçtaki varyans değerinin azaltmadığı ve bu bölgelerde kestirilen parametrelerin doğru olarak tahmin edilemeyeceği anlamındadır. Diğer bir ifade ile sonsal kovaryans matrisi tahmindeki belirsizliği gösterir ve kovaryansın 0'a yakın olması belirsizliğin aşağı çekildiği anlamını taşır. Şekil 5.16'de görüldüğü üzere, z yönünde üretime açık gridlerin tam karşısındaki bölgede kovaryansın değeri 0.02 civarındadır. Bu bölgedeki küçük sonsal kovaryans değerleri, yatay geçirgenliğin en doğru olarak bu bölgede çözüldüğünün göstergesidir. Küçük sonsal kovaryans değeri r yönünde 5. gridden (yaklaşık 1.63 ft) sonra artmakta ve r yönünde 16. gridden (yaklaşık 55 ft) sonra önsel varyans değerine ulaşmaktadır. Sonsal kovaryansın değeri, paker aralığının

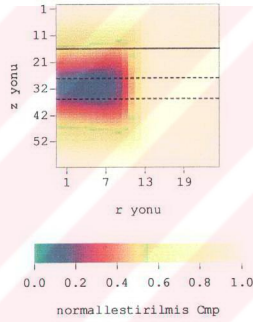
üstünden ve altından başlayarak tabakanın z yönünde sınırlarına doğru simetrik olarak artmaktadır. Simetrik olarak bu artış nedeni, kullanılan önsel modele ait kovaryans matrisidir. Şekil 5.17’de sunulan $\ln k_v$ ’ye ait sonsal kovaryansın alansal değişiminde de görüldüğü üzere, sonsal kovaryansın en düşük olduğu yer üretime açık olan paker aralığının r yönündeki 5. ve 7. gridbloklar arasındaki bölgedir. Bu bölgede dahi sonsal kovaryansın değeri, sadece paker aralığında ölçülen basınç verilerinin kullanılmasından dolayı 0.11 mertebesinde dir. Kullanılan önsel modelden dolayı, sonsal kovaryansın değeri paker aralığının sınırlarından (kesikli çizgiler ile gösterilmektedir) tabakanın alt ve üst sınırlarına doğru simetrik olarak artmaktadır. Şekil 5.18’de sunulan gözenekliliğin kestiriminden sonra elde edilen sonsal kovaryansın alansal değişimine bakıldığında, kovaryans değerinin hemen her yerde 1’e eşit olduğu görülmektedir. Kestirilen gözeneklilik değerleri, önsel modele ait varyans değerinin de küçük olmasından dolayı önsel ortalamadan sapmamaktadır. Diğer bir ifade ile, gözenekliliğe ait doğru değerler, paker basıncının gözenekliliğe duyarlılığı olmasına rağmen sistemin bir çok yerinde tahmin edilememiştir.



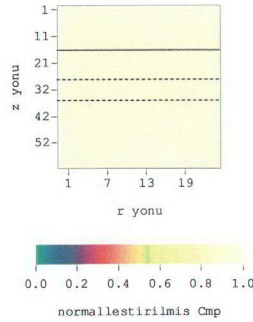
Şekil 5.15 Sadece paker aralığında ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.



Şekil 5.16 Kestirilen $\ln h_r$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).



Şekil 5.17 Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).



Şekil 5.18 Kestirilen gözeneçliliğe ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece paker basıncı verileri kullanıldı).

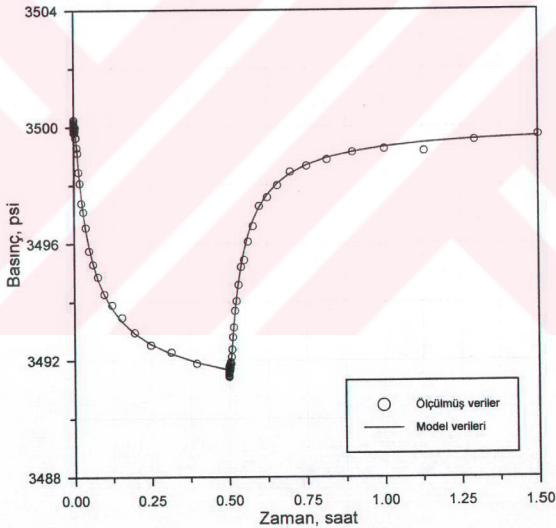
Bir sonraki uygulamada sadece düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak parametreler tahmin edilmiştir. Sadece gözlem probunda ölçülen basınç verisinden paker aralığındaki zar faktörü ve kuyucu depolanma katsayısını tahmin etmek zor olduğundan dolayı, bu parametreler bilinmeyen parametre vektörüne dahil edilmemiştir. Şekil 5.19'de parametre tahmini sonucu elde edilen model verileri ve ölçülmüş verilerin uyumu görülmektedir. Bu grafikte de görüldüğü üzere, ölçülmüş basınç verileri ile modelden elde edilen basınç verilerinin uyumu mükemmeldir.

Şekil 5.20, Şekil 5.21 ve Şekil 5.22'de ise parametre kestirimi sonrasında elde edilen, sırasıyla $\ln k_h$, $\ln k_v$ ve gözenekliliğe ait normalleştirilmiş sonsal kovaryans matrisi sunulmuştur. Şekil 5.20'de gösterilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryans matrisinin alansal grafiğinde, kovaryans değerinin en düşük olduğu yer, paker aralığının üst sınırı ile propun bulunduğu gridin arasında, r yönünde 7. ve 9. gridler ile sınırlı bölgedir. Sonsal kovaryansın değeri bu bölgeyi merkez yapacak şekilde çevrel olarak kuyuya doğru büyümekte ve kuyuya yaklaşıkça çevrel davranış bozulmaktadır. Sonsal kovaryansın değeri, r yönünde 14. gridbloktan (yaklaşık 30 ft) sonra önsel varyansa eşit olmaktadır. 5.21'da ise $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryans matrisinin alansal grafiği sunulmuştur, grafikte de görüleceği üzere kovaryans değerinin en düşük olduğu yer, paker aralığının üst sınırı ile propun bulunduğu gridin arasında, r yönünde 3. ve 5. gridler ile sınırlı bölgedir. Bir önceki grafikte de olduğu gibi, bu grafikte de bu bölgeden başlayarak duyarlılık katsayısı radyal bir şekilde artmaya başlıyor ve kuyu civarında bu çevrel davranış bozulmaktadır. Sonsal kovaryansın değeri, r yönünde 10. gridbloktan (yaklaşık 8 ft) sonra önsel varyansa eşit olmaktadır. Diğer uygulamada olduğu gibi sadece prob verilerinin kullanılmasıyla yapılan parametre tahmini işleminden elde edilen gözeneklilik değerlerine ait sonsal kovaryans değerleri (Şekil 5.22'de gösterilmiştir), önsel kovaryansın değerini değiştirememektedir.

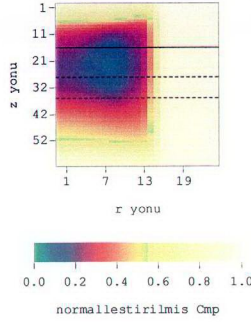
Burada son olarak, paker aralığında ölçülen basınç farkı verilerine ilave olarak, düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileride kullanılarak parametreler tahmin edilmiştir. Diğer bir ifade ile bu uygulamada 236 tane basınç verisi kullanılarak 4652 tane parametre tahmin edilmiştir. Diğer uygulamalarda olduğu gibi, ilk olarak Şekil 5.23'de modelden elde edilen veriler ile gözlem verilerin zamanla değişimi sunulmuştur. Çizilen grafikte de görüldüğü üzere, modelden elde edilen paker ve

düşey gözlem probu basınçlarının ölçülmüş basınç verileri ile uyumu oldukça iyi görünmektedir.

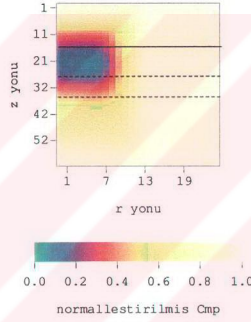
Şekil 5.24'de ise, her Levenberg-Marquardt iterasyonunda hedef fonksiyonun azalmasını gösteren grafik sunulmuştur (hem paker hem de proba ait basınç verilerinin beraber kullanıldığı durum). Bu grafikte de görüldüğü gibi, ilk 20 iterasyonda hedef fonksiyonu yaklaşık 100 kat azalmış, ondan sonraki iterasyonlarda bu azalmanın değişimi hemen hemen sabit olmuştur. Aslında bu davranış Levenberg-Marquardt algoritmasının tipik bir özelliğidir. İlk başlardaki iterasyonlarda hedef fonksiyonun değeri çok fazla değişirken, ondan sonraki iterasyonlarda hedef fonksiyonundaki azalım daha az olmaktadır. Bunun olası nedeni, bilinmeyen parametre sayısının çok olması ve bu parametrelerin birbiri ile korelasyonlu olmasından dolayı bu uygulamanın oldukça doğrusal olmayan bir problem oluşundandır.



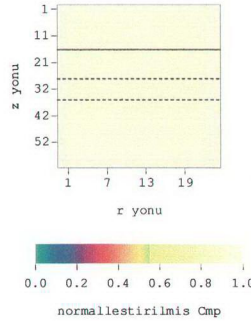
Şekil 5.19 Sadece düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.



Şekil 5.20 Kestirilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).



Şekil 5.21 Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).

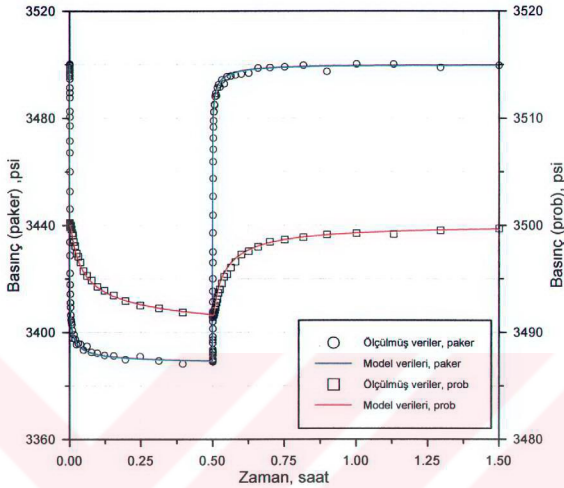


Şekil 5.22 Kestirilen gözenekliliğe ait sonsal kovaryansın alansal değişimi (sadece prob basıncı verileri kullanıldı).

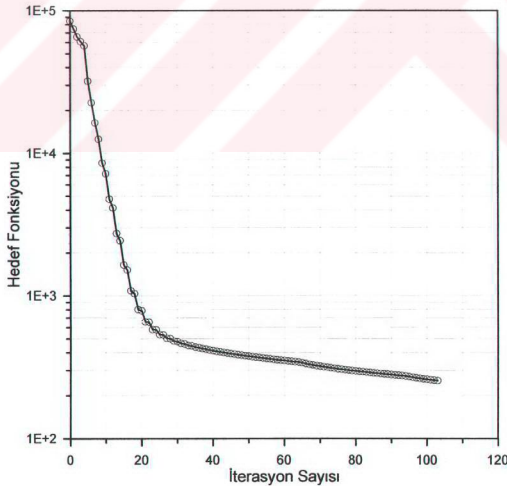
Şekil 5.25 ve Şekil 5.26’de sırasıyla parametre tahmini sonucu elde edilen $\ln k_h$ ve $\ln k_v$ ’ye ait sahalara sunulmuştur. Şekil 5.27 ve Şekil 5.28’de ise kestirilen $\ln k_h$ ve $\ln k_v$ ’ye ait sonsal kovaryans değerlerinin alansal değişimi sunulmuştur. Burada sağlıklı bir analiz yapabilmek için, kestirilen parametre sahası ve ona ait sonsal kovaryansın alansal değişimine beraber bakılması gerekmektedir. Bundan dolayı, Şekil 5.25 ile Şekil 5.27 beraber değerlendirildiğinde, doğru değerlere en yakın kestirilen değerlerin paker aralığının içerisindeki bölgedeki değerler olduğu görülebilmektedir. Paker aralığı ile prob arasındaki bölgedeki kestirilen $\ln k_h$ değerlerinin doğru değerlere oldukça yakın olduğu görülmektedir. Yaklaşık olarak 15. gridbloktan (yaklaşık 40 ft) sonra kestirilen değerler önsel ortalamalara, hesaplanan sonsal kovaryans değerleri ise önsel modele ait varyanslara eşit olmaktadır. Şekil 5.26 ile Şekil 5.28’de beraber değerlendirildiğinde doğru değerlere en yakın kestirilen değerlerin paker aralığının üst sınırı ile probun bulunduğu gridin arasında r yönünde 3. ve 5. gridler olduğu görülmektedir. Tabakanın üst ve alt sınırlarına yakın gridbloklarda sonsal kovaryansın değeri, yaklaşık olarak önsel modele ait varyansın değerine eşittir. Yaklaşık olarak 9. gridbloktan (yaklaşık 5 ft) sonra hesaplanan sonsal kovaryans değerleri ise önsel modele ait varyanslara eşit olmaktadır. Bunlara ilaveten bu uygulamada üretimin olduğu paker aralığındaki zar faktörü kuyuyu depolama sabitide regrasyona dahil edilmiştir. Kuyuyu depolama sabiti $C = 4 \times 10^{-6}$ RB/psi bulunurken, zar faktörü $S = 2.6$ olarak tahmin edilmiştir (doğru değer 5.0). Heriki parametre içinde bulunan sonsal kovaryans değerleri 0’a çok yakındır. Burada kuyuyu depolama sabitinin bulunmasına rağmen zar faktörünün iyi bulunamamasının nedeni, yatay geçirgenliklerin zar faktörü ile olan korelasyonudur.

Bu uygulamaların tamamında elde edilen sonuçlar, 4. Bölümde gösterilen duyarlılık katsayılarının alansal dağılımlarını gösteren grafikleri desteklemektedir. Bu bölümde gösterilen sonsal kovaryans matrisinin alansal grafikleri, bir önceki bölümde gösterilen duyarlılık katsayılarının alansal grafiklerini desteklemektedir. Bunu kolaylıkla tahmin edilen yatay ve düşey geçirgenliklerin sonsal kovaryans değerlerinin alansal grafiklerinde görmek mümkündür. Bu grafikler, duyarlılık katsayılarının alansal grafiklerini gerçeklemektedir. Bununla birlikte, bir önceki bölümde gösterilen duyarlılık katsayılarına ait grafiklerde gözenekliliğin, hem paker hem de prob basınçlarına duyarlılığının olmasına rağmen, yapılan uygulamalarda,

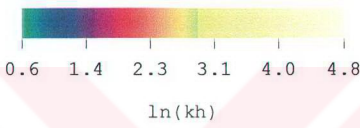
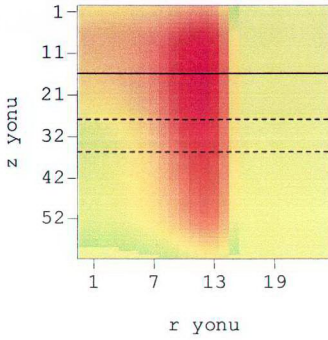
gözeneklilik hemen hemen hiç doğru olarak tahmin edilememiştir. Bunun olası nedeni, oluşturulan önsel model varyanslarından kaynaklanmaktadır.



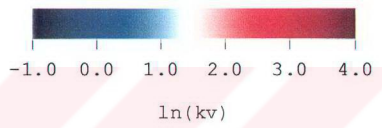
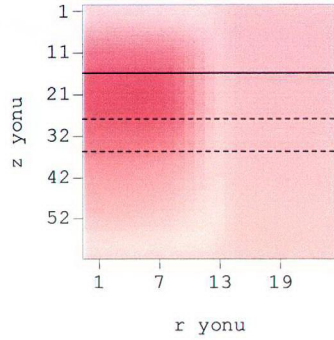
Şekil 5.23 Hem paker aralığında hem de düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulama.



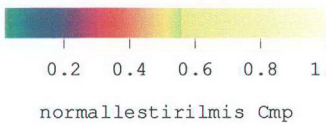
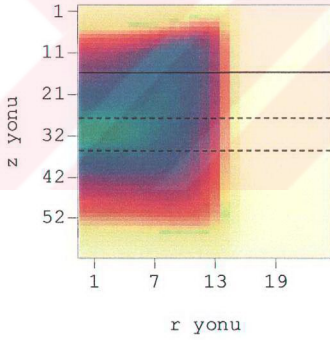
Şekil 5.24 Hem paker aralığında hem de düşey gözlem probunda ölçülen basınç verileri kullanılarak yapılan uygulamada, hedef fonksiyonun iterasyon sayısı ile değişimi.



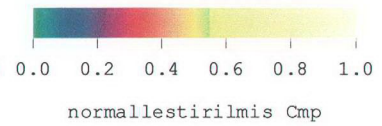
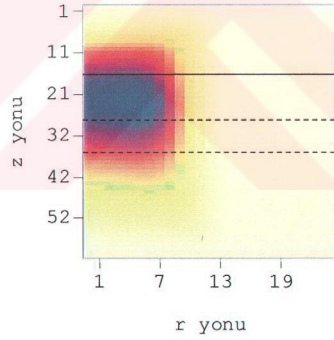
Şekil 5.25 Uygulama sonucu elde edilen $\ln k_h$ sahası.



Şekil 5.26 Uygulama sonucu elde edilen $\ln k_v$ sahası.



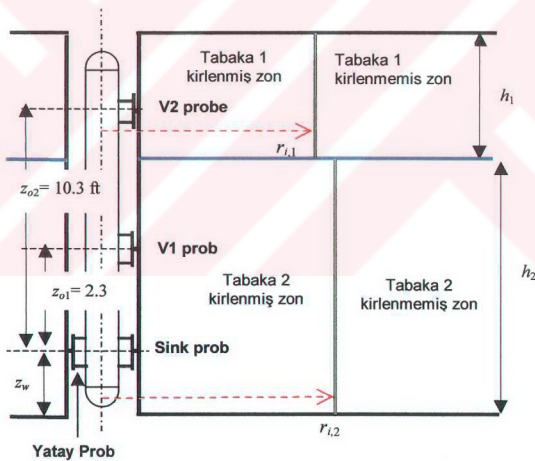
Şekil 5.27 Kestirilen $\ln k_h$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi.



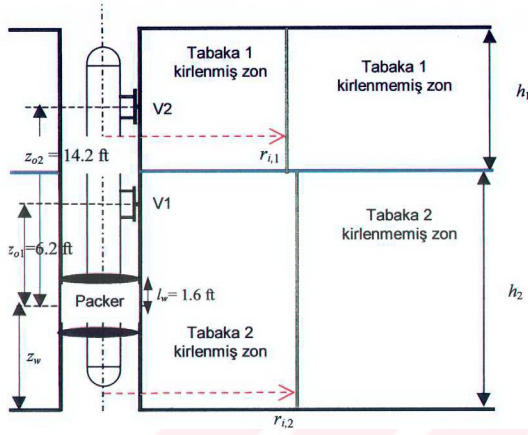
Şekil 5.28 Kestirilen $\ln k_v$ 'ye ait sonsal kovaryansın alansal değişimi.

5.1.4 Sentetik örnek uygulama 4

Bilindiği gibi, genelde sondaj işlemi sırasında kuyudaki çamur formasyona filtre olur ve formasyonun içindeki orjinal akışkanı öteler ve bundan dolayı kuyu etrafında mobilitesi daha farklı olan kuyuya bitişik bir alan içerisinde küçük ayrı bir bölge oluşur (fitrasyon bölgesi). İster su bazlı ister petrol bazlı çamur kullanılmış olsun, bu zona filtre olan akışkanın akmazlığı ve sıkıştırılabilirliği formasyonun orjinal akışkanın akmazlığı ve sıkıştırılabilirliğinden ve hatta bu zondaki etken geçirgenlik formasyonunkinden farklı olacaktır. Literatürde, bu tür sistemlerde, özellikle Şekil 5.29 ve Şekil 5.30'da kuyuya bitişik farklı yarıçaplarda kirlenme zonları olan tabakalı sistemlerde, düşey girişim testlerini modelleyecek ve otomatik parametre tahmini yapılabilecek analitik çözümler ve yazılım programları mevcut değildir. Bu çalışmada geliştirilen simülator kullanılarak bu tür sistemler modellenebilmekte ve parametre tahmini yapılabilmektedir.



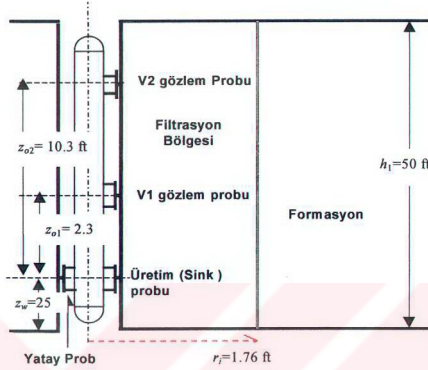
Şekil 5.29 İki tabakalı, çiftli kompozit modelde çok-problu düşey girişim test şeması.



Şekil 5.30 İki tabakalı, ikili kompozit modelde paker problemleri için düşey girişim test şeması.

Bu son sentetik uygulamada, tek tabakalı, iki-bölgeli heterojen-anizotrop bir sistem düşünülmüştür (Şekil 5.31). Böyle bir sistemde, yapılan düşey girişim testi basınç verilerinden kirlenmiş ve kirlenmemiş bölgenin hangi parametrelerinin güvenilir olarak belirlenebileceği araştırılmıştır. Şekil 5.31’de görülen filtrasyon (kirlenmiş) bölgesi ve kirlenmemiş bölge, kendi içinde homojen/anizotrop olarak modellenmiş ve parametre tahmini bu şekilde gerçekleştirilmiştir. Ancak bu bölgelerdeki yatay ve düşey geçirgenlikler ve gözeneklilikler farklı olarak seçilmiştir. Model parametrelerine ait değerler Tablo 5.8’de sunulmaktadır. Şekil 5.31’den de görüleceği üzere bu uygulamada basıncın 4 ayrı noktada kaydedildiği kabul edilmiş ve bu proplara ait basınç davranışları Şekil 5.32’de sunulmuştur. Şekil 5.32’de gösterilen basınçları hesaplamak için toplam $N = 19656$ ($N_r = 26$, $N_\theta = 12$, $N_z = 63$) simülatör bloğundan oluşan grid sistemi kullanılmıştır. Gerçek bir teste benzemesi açısından her bir probtan kaydedilen basınç setleri üzerine sıfır ortalamalı ve farklı varyanslı (üretim probu için standart sapma 5 psi, yatay gözlem probu için 0.2 psi, V1 prob için 0.05 psi, V2 prob için 0.01 psi) normal dağılımlı rasgele hata eklenmiştir. Şekil 5.33’de kapama dönemine ait basınç farkı verilerinin türevleri sunulmuştur. Türev verileri, kapama anından sonra ölçülen zaman değerlerine göre hesaplanmıştır. Bu grafikte de görüleceği üzere, geç zamanlarda görülen ve toplam

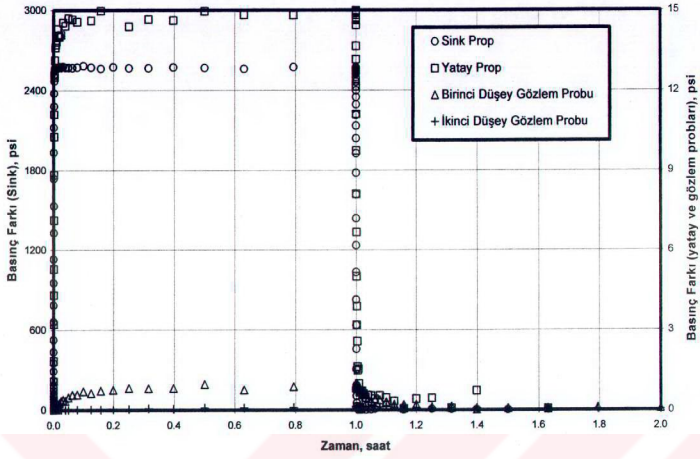
sistemi temsil eden çevrel akış rejimi görülmemekle birlikte üretim (sink), yatay ve birinci gözlem probunun logaritmik türev verilerinden iyi tanımlanabilecek küresel akış rejimi gözlemlenebilmektedir.



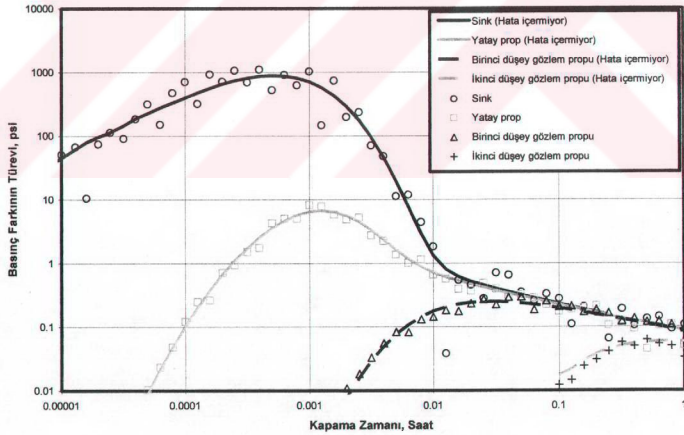
Şekil 5.31 Sentetik tek tabakalı, kompozit bir modelde çoklu-prob düşey girişim test şeması.

Tablo 5.8 Tek tabakalı, kompozit sentetik uygulama için kayaç ve akışkan özellikleri

Formasyon parametreleri		Filtrasyon bölgesi parametreleri	
$k_{h,u}$, md	50	$k_{h,i}$, md	15
$k_{v,u}$, md	5	$k_{v,i}$, md	1.5
μ_u , cp	0.8	μ_i , cp	1.0
ϕ_u	0.15	ϕ_i	0.15
$c_{t,u}$, psi ⁻¹	1.0×10^{-4}	$c_{t,i}$, psi ⁻¹	3.0×10^{-5}
Diğer parametreler			
h , ft	50		
r_w , ft	0.328		
p_i , psi	5000		
r_e , ft	1000		
q , bbl/day	2.		
C , bbl/psi	1×10^{-8}		
S ,	0		
P_i , psi,	5000		



Şekil 5.32 Parametre tahmi için kullanılan basınç verileri



Şekil 5.33 Kapama dönemine ait basınç verilerinin logaritmik türevi.

Hangi basınç setinden formasyona ait hangi parametrelerin belirlenebileceğini saptamak amacıyla farklı basınç setleri kullanılarak parametre tahmini yapılmıştır.

Tablo 5.9’de farklı basınç setleri kullanılarak parametre tahmin sonuçları sunulmuştur.

Tablo 5.9 Parametre tahmin sonuçları.

No	Tanım	$(k_p/\mu)_i$ md/cp	$(k_p/\mu)_i$ md/cp	ϕ_i	c_{ii} psi ⁻¹	$(k_p/\mu)_u$ md/cp	$(k_p/\mu)_u$ md/cp	ϕ_u	c_{uu} psi ⁻¹
1	Doğru Değerler	15	1.5	0.15	3×10^{-5}	62.5	6.25	0.15	1×10^{-4}
2	Başlangıç Değerler	10	0.1	0.1	1×10^{-6}	200	15	0.1	1×10^{-5}
3	S+H+V1+V2	15.1 (±0.2)	1.5 (±0.04)	0.08 (±3463)	6×10^{-5} (±2.7)	62.3 (±5.2)	5.0 (±2.1)	0.02 (±542)	7×10^{-4} (±18)
4	H+V1+V2	15.2 (±0.06)	1.6 (±0.04)	0.3 (±786)	1.4×10^{-5} (±0.03)	61.4 (±0.4)	8.8 (±0.6)	0.22 (±506)	1×10^{-4} (±0.2)
5	H+V1	15.6 (±0.5)	1.6 (0.13)	0.3 (±4621)	1.4×10^{-5} (±0.2)	62.8 (±1.1)	6.8 (±0.8)	0.1 (±1035)	1.7×10^{-4} (±1.9)
6	V1+V2	86.8 (±106)	0.06 (±1.9)	0.001 (±0.62)	1.1×10^{-5} (±0.005)	62.2 (±0.5)	5.1 (±4.0)	0.34 (±237)	3.7×10^{-5} (±1.9)

Tablo 5.9’da sunulan uygulamalarda ilk olarak, sink, yatay prob ve düşey gözlem propları beraber kullanılmıştır (No:3, S+H+V1+V2). Tablodan da görüleceği üzere hem yatay hem de dikey geçirgenlikler doğru değerlere oldukça yakındır. Buna karşın, toplam sıkıştırılabilirlik ve gözeneklilik değerleri doğru değerlerin oldukça uzağındadır. Ancak tahmin edilen sıkıştırılabilirlik ve gözeneklilik değerinin çarpımı, doğru değerlerin çarpımına oldukça yakındır. Bu parametreler (gözeneklilik ve sıkıştırılabilirlik) birbiri ile korelasyonlu olduğu için bağımsız olarak bu parametreleri bulmak mümkün gözükmemektedir. Bundan sonraki uygulamalarda da analiz sonucu elde edilen gözeneklilik ve sıkıştırılabilirliğin çarpımı, doğru değerlerin çarpımı ile karşılaştırılacaktır. Çünkü, sıkıştırılabilirlik ve gözenekliliği ayrı ayrı tahmin etmek mümkün değildir.

Üretim yapılan sink propun yarıçapı yaklaşık 0.5 cm olduğundan, üretim esnasında basıncın çok düşmesinden dolayı burada bazı durumlarda iki faz oluşabilmektedir veya Darcy olmayan akış söz konusu olabilmektedir. Bundan dolayı böyle durumlarda, sink propda kaydedilen basınç seti regrasyon analizine dahil edilmez. Bundan bir sonraki parametre tahmin işleminde, sink propuna ait basınç seti kullanılmamış yalnız yatay ve düşey gözlem propları (No:4, H+V1+V2)

kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar hem formasyona ait hemde filtrasyon bölgesine ait parametrelerin tahmin edilebileceğini göstermiştir.

Bir sonraki adımda, 2. düşey gözlem propuna ait verilerde kullanılmamış, sadece yatay ve 1. düşey gözlem propuna ait basınç verileri (No:5, H+V1) kullanılarak parametre tahmin işlemi gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğru sonuçlar ile kıyaslandığında, hem filtrasyon bölgesine ait hem de formasyona ait parametrelerin saptanabildiği görülmektedir.

Son olarak, yalnız düşey gözlem proplarına ait basınç verileri (No:6, V1+V2) kullanılarak parametre tahmin işlemi gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, yalnız formasyona ait parametrelerin tahmin edilebildiği buna karşın filtrasyon bölgesine ait parametrelerin gerçek değerlerinden oldukça uzak olduğu görülmüştür. Bu sonuç, yalnız düşey gözlem propuna ait basınç verilerin kullanılarak her iki bölgeye ait parametrelerin bulunamayacağını göstermiştir. Bu konuya ilişkin ayrıntılı bilgiler Gök ve diğ. (2003) ait çalışmada bulunabilir.

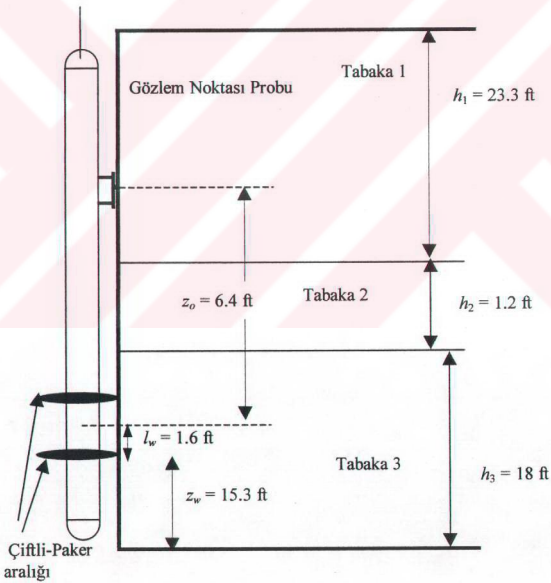
5.2 Saha Verisi Uygulaması

Bu bölümde son olarak gerçek bir saha verisi ile uygulama yapılmıştır. Göz önünde bulundurulmuş saha örneği kuyu loglarından elde edilen bilgilerden üç tabakalı olarak tanımlanan bir sistemde yapılmış bir çiftli-paker/prob düşey girişim testine attır (Şekil 5.34). Formasyona ve test ait parametre değerleri Tablo 5.10'da sunulmuştur.

Test sırasında kaydedilmiş debi, paker aralığı basıncı ve gözlem probu basınçları Şekil 5.35'de gösterilmektedir. Şekil 5.36'da kapama dönemi paker ve prob basınç farkı verilerinin değişken debili süper pozisyon zaman fonksiyonuna göre alınmış türevleri sunulmaktadır. Kapama öncesi iki farklı debi ile paker aralığından üretim yapıldığından (Şekil 5.35'de görüldüğü gibi 0.3 saatten sonra debi önemli ölçüde artırılmıştır) türevleme değişken debili süper pozisyon zamanına göre yapılmış ve bu şekilde türevlenen veriler kapama zamanına karşı logaritmik eksenlerde grafiği çizilmiştir. Bu tür grafikler kararsız kuyu basınç testlerinde test sırasında basınç verileri tarafından yansıtılan akış rejimlerinin tanınmasında temel araçtır (Bourdet, 2002).

Tablo 5.10 Saha verisi için parametre değerleri.

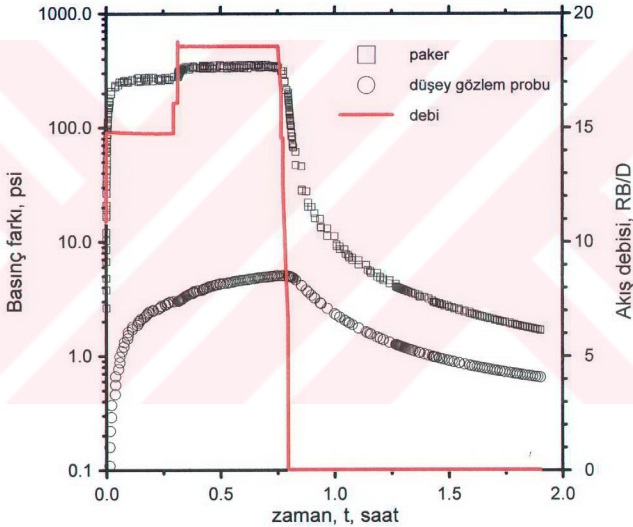
ϕ_1 ,	0.245
ϕ_2 ,	0.110
ϕ_3 ,	0.205
h_1 , ft	23.3
h_2 , ft	1.2
h_3 , ft	18.0
$c_{t1}=c_{t2}=c_{t3}$, psi^{-1}	4.5×10^{-5}
$\mu_1=\mu_2=\mu_3$, cp	1.0
r_w , ft	0.354
z_w , ft	15.3
z_o , ft	6.4
l_w , ft	1.6
Paker üçüncü (alt) tabakada	
Prob birinci (üst tabakada)	



Şekil 5.34 Düşey girişim testine ait şematik gösterim (saha örneği).

Şekil 5.36'dan görüleceği gibi, kapama dönemi zamanlarının sonlarına yakın, hem paker aralığı hem de gözlem probu basınç-türev verileri -1/2 eğimli doğruyla temsil

edilebilecek küresel akış rejimi davranışı göstermektedir. Ayrıca Şekil 5.36’da dikkat edilecek olursa, prob basınç türev verileri, paker aralığına ait olanlardan küçüktür. Genelde, erken zamanlarda, gözlem probu türev değerleri, daima paker aralığı basınç türev verilerinden küçüktür. Ara ve geç-zaman dönemlerinde, paker aralığı ve gözlem probu basınç setine ait türev verilerinin değerleri, çiftli-paker ve gözlem probunun bulunduğu tabakaların geçirgenliklerindeki fark bağlı olarak değişebilmektedir (Kuchuk, 1994; Kuchuk, 1996). Eğer gözlem probunun yer aldığı tabaka geçirgenliği, çiftli pakerin bulunduğu tabakanın geçirgenliğine göre oldukça büyük ise, gözlem probu basınç türev verileri paker aralığı basınç türevinden küçük olmaktadır. Bunu tersi durumlarda da benzeri davranışlar görülebilmektedir.



Şekil 5.35 Basınç farkı ve debi verileri (saha örneği).

Bu bilgilerden ve de gözlem probunda 0.01 psi çözünürlüklü bir basınç ölçerle basıncın yaklaşık 1 dakikada algılandığı bilgisi ve gözlemlenen küresel akış rejimlerinden, kabaca tabaka geçirgenliklerine ait değerler belirlenebilir. Bu tahmini değerler parametre tahmini sırasında başlangıç değerler ve parametre sınırlandırma algoritmalarında kullanılabilmektedir. Hem paker hem de gözlem prob basınç verilerinin türevleri küresel akış rejimini gösterdiğinden (Şekil 5.36), paker ve gözlem probu

basınç verilerinin küresel akış rejimi analizi yapılarak küresel geçirgenlikleri, $k_{sp}^{3/2} = k_h \sqrt{k_v}$, basınca karşılık $1/\sqrt{t}$ grafiğinden (kapama dönemi için $1/\sqrt{\Delta t} - 1/\sqrt{t_p + \Delta t}$) elde edilen doğrunun eğiminden, m_{sp} (psi(saat)^{1/2}) (Culham,1974)

$$m_{sp} = \frac{2453q\mu\sqrt{\mu\phi c_i}}{k_{sp}^{3/2}} = \frac{2453q\mu\sqrt{\mu\phi c_i}}{k_h \sqrt{k_v}} \quad (5.1)$$

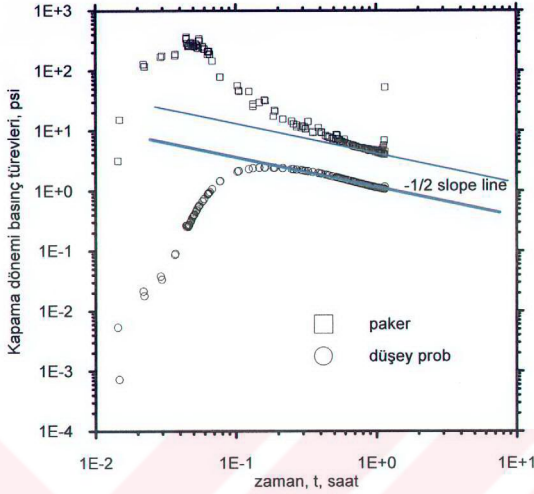
belirlenebilmektedir. Teorik anlamda, Denklem 5.1 tek tabakalı sistemler için geçerlidir, Ancak, tabakalı sistemlerde geçirgenlik için bazı yaklaşık değerler elde etmek için kullanılabilir. Denklem 5.1 tabakalı sistemler için uygulandığında, Denklem 5.1'deki k_h , k_v ve ϕc_i değerlerinin ortalama değerleri temsil edeceği kabul edilebilir. Göz önünde bulundurulan kapama dönemi pakere ve gözlem probu basınç verilerine standart küresel akış rejimi analizi (Culham, 1974) uygulanmış ve pakere basınç verileri için küresel geçirgenlik $k_{sp}^{3/2} = k_h \sqrt{k_v} = 14$, $k_{sp} = 5.8$ mD ve pakere aralığı zar faktörü $S = 1.6$, gözlem probu için küresel geçirgenlik $k_{sp}^{3/2} = k_h \sqrt{k_v} = 50$, $k_{sp} = 13.6$ mD olarak hesaplanmıştır. Bu değerler, gözlem probunun, pakere'ye göre daha yüksek geçirgenlikli bir tabakada olduğuna işaret etmektedir.

Pakere aralığı için hesaplanan zar faktörü değerinden ve pakere aralığı yaklaşık "kararlı akış" denkleminden,

$$\Delta p \approx \frac{70.6q_{sc}B\mu}{k_h} \left(\frac{1}{r_s} + \frac{S}{l_w} \right) \quad (5.2)$$

pakere aralığı bölgesi için yaklaşık bir yatay geçirgenlik değeri hesaplanabilir. Denklem 5.2'de r_s etkin küresel yarıçap olarak tanımlanır (Raghavan ve Clark, 1975):

$$r_s = 2l_w \left[\ln \left\{ \frac{0.5 + 0.5 \sqrt{1 + (r_w / l_w)^2 \frac{k_v}{k_h}}}{-0.5 + 0.5 \sqrt{1 + (r_w / l_w)^2 \frac{k_v}{k_h}}} \right\} \right]^{-1} \quad (5.3)$$



Şekil 5.36 Kapama dönemi paker ve gözlem probunda ölçülen basınç verilerinin türevi.

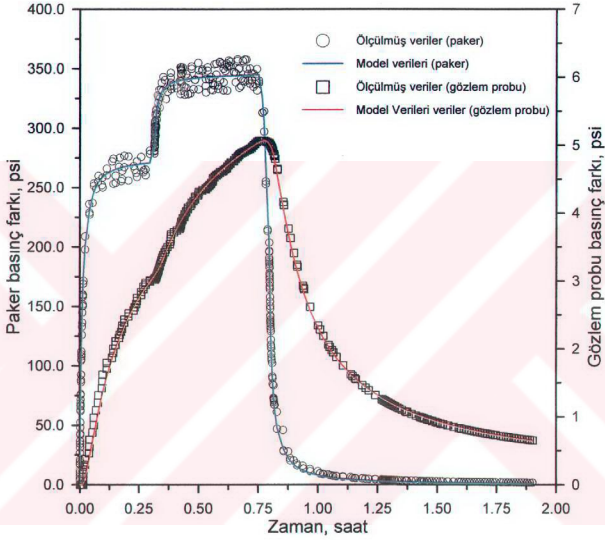
Denklem 5.2 ve 5.3 yardımıyla ve zar faktörü $S = 1.6$ değerini kullanarak, paker bölgesi için $k_h = 10$ mD olarak hesaplanmıştır. Bu k_h değeri paker aralığı için hesaplanan küresel geçirgenlik değerinde yerine koyularak $k_{sp}^{3/2} = k_h \sqrt{k_v} = 14$, paker bölgesi düşey geçirgenlik değeri yaklaşık $k_v = 2$ mD olarak hesaplanmıştır. Paker bölgesi için hesaplanan bu yaklaşık değerler, büyük olasılıkla daha çok üçüncü tabaka (Şekil 5.34) değerlerini ağırlıklı ortalama değerleri olarak temsil etmektedir. Şüphesiz, bu değerleri hesaplamak için pek çok varsayım yapılmıştır. Dolayısıyla, bu değerler, ancak doğrusal olmayan parametre tahmininde bu parametreler için ilk başlangıç değerleri olarak kullanılacaktır ve doğrusal olmayan regresyonla bu değerler yineleme işlemi ile iyileştirilir. Burada gösterilmemekle beraber, kuyu-log verileri ikinci tabakanın oldukça düşük geçirgenlik ve gözenekliliğe sahip olduğuna işaret etmektedir. Tablo 5.10'da verilen gözeneklilik ve kalınlık verileri kuyu log verilerinden belirlenmiştir.

Kuyu log verileri, üç-tabakalı bir sisteme işaret ettiğinden ve de gridblok ölçeğinde heterojenliği tanımlayabileceğimiz bir önsel bilgi olmadığı için, bu saha verisi için doğrusal olmayan parametre tahmini uygulamasında, sistem simülâtörde üç tabakalı, ancak her tabaka kendi içinde homojen/anizotrop olacak şekilde düşünülmüştür.

Önsel kovaryans matris hedef fonksiyona dahil edilmemiştir. Bu uygulamada toplam $N = 2100$ ($N_r = 25, N_0 = 1, N_z = 84$) simülâtör bloğu göz önünde bulundurulmuştur. Hem üretim hem de kapama dönemi paker aralığı ve gözlem probu basınç verilerini simülâtör kullanılarak yapılan otomatik çakıştırma yöntemiyle, toplam sekiz parametre (her tabaka için k_h ve k_r değerleri, paker aralığı zar faktörü ve paker aralığı kuyuiçi depolama sabiti) tahmin edilmiştir. Bu uygulamada, paker aralığı ve gözlem probu verilerinde hatanın standart sapması, düzgünleştirilmiş spline yöntemi ile saptanmıştır. Bu değerler paker aralığı basıncı için 5 psi ve gözlem probu basıncı için 0.06 psi olarak belirlenmiştir. Otomatik çakıştırmadan elde edilen optimum parametre değerleri, Tablo 5.11’de sunulmuş ve paker aralığı ve gözlem probu için ölçüm ve model verileri arasında elde edilen çakışmalar Şekil 5.37’de gösterilmiştir. Şekil 5.37’de görüldüğü gibi simülâtörden elde edilen model basınçları ölçülmüş basınç verileri ile çok iyi çakışmaktadır Çakışma sonrası elde edilen RMS değerleri, paker ve prob verilerinin içerdiği hataların standart sapmasına yaklaşık olarak eşit çıkmıştır. Doğru bir çakıştırma işleminde, hesaplanan RMS değerleri yaklaşık olarak gözlem verileri üzerindeki “ölçüm hatalarının” veya gürültünün standart sapmasını temsil eder. Tablo 5.11’de “±” olarak verilen değerler tahmin edilen parametre değerleri için % 95 mutlak güvenilirlik aralıkları değerlerini temsil etmektedir. Tahmin edilen parametre değerinin büyüklüğü baz alındığında, güvenilirlik aralığı değeri büyüdükçe, tahmin edilen parametre değerinin güvenilirliği azalır. Bu açıklama çerçevesinde, Tablo 5.11’de tahmin edilen parametre değerleri ve bu parametrelere ait güvenilirlik aralıkları incelendiğinde, ikinci tabakadaki yatay geçirgenlik değerinin bu basınç verilerinden güvenilir olarak belirlenmediği ortaya çıkmaktadır. Buna karşın bu tabakanın düşey geçirgenliğinin daha güvenilir olarak belirlendiği anlaşılmaktadır. Aslında bu sonuçlar anlamlıdır çünkü ikinci tabakada ölçülmüş basınç verisi yoktur ve üst (1.) tabakadaki gözlem probu ile alt (3.) tabakadaki paker aralığı basınçlarını ikinci tabakanın düşey yöndeki geçirgenliği, yatay geçirgenliğine göre daha çok kontrol etmektedir. Gözlem probunu ve paker aralığının yer aldığı 1. ve 3. tabakalara ait yatay/düşey geçirgenliklerin, paker aralığı zar faktörünün ve kuyuiçi depolama sabitlerinin kabul edilebilir güvenilirlikle tahmin edildiği de ayrıca Tablo 5.11’den anlaşılmaktadır.

Tablo 5.11 Düşey girişim testi verileri için parametre tahmin sonuçları (saha örneği).

	k_{h1} , mD	k_{h2} , mD	k_{h3} , mD	k_{v1} , mD	k_{v2} , mD	k_{v3} , mD	C , RB/psi	S
Başlangıç değerleri	50	5	10	20	3	2	1×10^{-5}	0
Otomatik çakıştırma	38.1 ± 2.7	0.005 ± 0.003	7.4 ± 0.7	23.5 ± 5.1	1.2 ± 0.1	3.1 ± 0.8	2.5×10^{-5} $\pm 10^{-6}$	0.9 ± 0.2



Şekil 5.37 Model ve ölçüm basınç verilerinin karşılaştırılması.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmada, düşey yöndeki geçirgenlik değerlerinin belirlenmesine de olanak tanıdığı için endüstride yaygın kullanım alanı bulan bir kuyunun farklı noktalarında yerel olarak yapılabilen düşey girişimli basınç-zaman seti verilerinden (örneğin çok problu ve paker-problu testler) heterojen kayaç özelliklerinin belirlenmesi problemi üzerinde durulmuştur. Yatay ve düşey yöndeki heterojenlikten etkilendiği bilinen düşey girişim testi basınç verilerinin yatay ve düşey yöndeki heterojenliğin çözülmesinde ne derece etkili olduğu bu çalışmada araştırılmıştır. Heterojenlik bu çalışmada, hem her tabakada farklı kayaç ve akışkan özelliklerine sahip zonların olduğu şekliyle düşünülmüş hem de gridblok ölçeğinde kayaç özelliklerinin jeostatistiksel modellere uygun olarak değiştiği durum olarak düşünülmüştür.

Düşey girişim testlerinin modellenmesi, için çalışmada üç boyutlu (3-B) r - θ - z , tek fazlı sayısal bir akış simülatörü geliştirilmiştir. Geliştirilen simülatör hemen hemen her tür düşey tek kuyulu basınç testlerini modellemek için kullanılacak kadar geneldir. Ancak çalışmada sadece düşey girişim testleri üzerine odaklanılmıştır. Geliştirilen simülatörün hem analitik hem de ticari ECLIPSE 100 simülatörü kullanarak doğru çalıştığı gösterilmiştir. Ayrıca, bu sayısal simülatöre ters problem metodolojisi üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmini entegre edilmiştir. Doğrusal olmayan parametre tahmini, gradyent temelli Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Levenberg-Marquardt yönteminde gerekli olan duyarlılık katsayılarının etkin bir şekilde hesaplanması için üç farklı yöntem (sonlu fark, gradyent simülatör ve adjoint) çalışmada göz önünde bulundurulmuş ve bu yöntemlere ait duyarlılık katsayısı formülleri geliştirilmiştir. Üç boyutlu (3-B) r - θ - z bir simülatör için geliştirilen bu formüller, literatürde ilk defa bu çalışmada sunulmuştur. Bu yöntemlerden hangilerinin hangi durumlarda hesaplama zamanları bakımından kullanılması gerektiği belirlenmiştir.

Çeşitli homojen ve heterojen modellerde farklı düşey girişim testi konfigürasyonları göz önünde bulundurularak, kuyu boyunca düşey yönde farklı noktalarda kaydedilmiş basınç verilerinin geçirgenliğe, gözenekliliğe, zar faktörüne, ilk basınçlara, vs. duyarlıkları hesaplanmış ve hangi tür basınç verilerinin bu parametrelere nasıl duyarlılık gösterdiği ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Ayrıca, düşey girişim testlerinden elde edilen basınç verilerinin geçirgenlik gözeneklilik gibi kayaç özelliklerine formasyonun neresinde duyarlı olduğu anlaşılması için duyarlılıkların alansal grafikleri çizilmiştir.

Düşey girişim basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımları, son yıllarda yaygın kabul bulan Bayes olasılık teoremi üzerine kurulu ters problem metodolojisi kullanarak kestirilmiştir. Bu ters problem metodolojisi ile hem doğrudan ölçümler yolu ile elde edilen statik verilere (kuyu logları ve karot analizlerinden elde edilen geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerine ve bu özelliklerin jeostatistikten belirlenen uzaysal korelasyonlarına) hem de dolaylı ölçümlerden kuyu basınç testi verilerine koşullu geçirgenlik ve gözeneklilik değerlerinin kestirimi olasıdır.

Düşey girişimli basınç testlerine koşullama (otomatik çakıştırma) ile, kayaç özelliklerindeki heterojenliği hem düşey hem de yatay yönde konumsal olarak güvenilir olarak çözümlemede ne ölçüde başarılı olunabileceği çalışmada ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Bu konuda elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- (i) Test süresi genelde 1 saat ile sınırlı olan düşey girişim testleri basınç verilerinden sadece paker aralığı basınç verilerine koşullama ile paker aralığına yakın bir bölge içerisindeki gridblokların yatay geçirgenliklerin güvenilir olarak bulunabileceği anlaşılmıştır. Bu basınç verilerinden, ayrıca paker aralığının alt ve üst sınırlarına bitişik gridblokların düşey geçirgenliklerinin daha güvenilir olarak tahmin edilebildiği görülmüştür.
- (ii) Gözlem probu basınç verilerine koşullama ile, en güvenilir olarak, gözlem probuna yakın paker aralığı (alt veya üst) sınırındaki gridblokların yatay geçirgenliğinin tahmin edileceği gösterilmiştir.

Ayrıca, gözlem problemlerine koşullama ile, gözlem probu ile paker aralığı üst (ve/veya probun nerede bulunduğuna bağlı olarak) sınırları arasındaki gridblokların düşey geçirgenlikleri ile prob ile tabaka sınırları arasındaki gridblokların düşey geçirgenliklerinin daha güvenilir olarak tahmin edileceği bulunmuştur.

- (iii) Her iki veri türüne, paker aralığı ve gözlem noktası prob basınç verilerine, birlikte koşullamanın yapıldığı durumlarda, beklenen bir sonuç olarak, yukarıda (i) ve (ii) de belirtilen paker aralığı ve gözlem prob basınçlarının ayrı ayrı çözümlemede etkin olduğu gridblokları kapsayacak şekilde daha geniş bir bölge içerisinde yatay ve düşey geçirgenlikler güvenilir olarak belirlenmektedir. Bu da paker aralığı ve gözlem prob basınç verilerinin farklı bölgelerdeki parametrelere ait bilgi içerdiğinden, birden fazla veri setinin çalışmada birlikte kullanılarak, daha geniş bir bölgede parametrelerin değerlerinin daha güvenilir olarak bulunması gerektiğini önermektedir.

Yukarıda da belirtildiği üzere bu çalışmada, her tabakanın farklı kayaç ve akışkan özelliklerine sahip birden fazla zondan oluştuğunu kabul eden heterojen model uygulamalarına yer verilmiş ve bu tür sistemlerden parametre tahmini üzerinde durulmuştur. Bu tür modeller, genellikle sondaj akışkanının formasyona filtrasyonundan dolayı formasyonun yakın civarında mobilitesi ve storativitesi daha farklı kirlenmiş bölgelerin basınç testleri üzerinde etkisini çalışmak için kullanılabilir. Bu problem, her tabakada iki ayrı zonun olduğu düşünülerek modellenebilir ve parametre tahmini yapılabilir. Bu çalışmada böyle bir sistemde çok-probu bir düşey girişim testi tasarlanmış ve hangi basınç seti verilerinden kirlenmiş ve kirlenmemiş zonlara ait hangi parametrelerin güvenilir olarak bulunabileceği araştırılmıştır. Bu konuda elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

- (i) Üretim probu veya onun tam karşısındaki yatay prob verilerinin herhangi bir düşey gözlem probuna ait basınç seti ile birlikte analizi hem kirlenmiş hem de kirlenmemiş zona ait tüm parametrelerin saptanmasına yetecektir. Buna karşın, sadece düşey gözlem probu verilerinin kullanılması yalnız

kirlenmemiş zona ait özelliklerin saptanmasına yardımcı olacaktır. Diğer bir ifade ile düşey gözlem problemlerinde ölçülen basınç verileri kirlenmiş zonun özelliklerinden fazla etkilenmemektedir.

Son olarak, bu çalışmada bulunan sonuçlarda göz önünde bulundurularak bundan sonra yapılacak çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur. Bunları aşağıdaki şekilde özetlemek mümkündür:

- (i) Bu çalışmada geliştirilen simülatör ile düşey bir kuyuya olan akışı modellemek mümkündür. Benzer şekilde, bu çalışmada geliştirilen programlar ile ancak düşey bir kuyuda ölçülmüş basınç verileri kullanılarak parametre tahmini yapılır. Son yıllarda endüstride delinen kuyuların tamamına yakını yönlü yada yatay olarak delinmektedir. Yönlü yada yatay kuyuya akışı modelleyen bir simülatör geliştirilebilir ve geliştirilecek bu sayısal simülatöre ters problem metodolojisi üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmini entegre edilebilir. Bu sayede, yönlü yada yatay kuyuda ölçülmüş basınç testleri kullanılarak parametre tahmini yapılabilir.
- (ii) Bu çalışmada geliştirilen simülatör tek fazlı akış üzerine kurulmuştur. Genellikle sondaj akışkanının formasyona filtrasyonundan dolayı formasyonun yakın civarında iki fazlı kirlenmiş bir bölge bulunur. İki fazlı (su ve petrol) bir simülatör kullanılarak bu tip düşey girişim testlerin modellenmesi daha gerçekçi olacaktır.
- (iii) Bu çalışmada geliştirilen simülatör gözenekli ortamda akışkan akışını modellemek için kullanılmaktadır. Doğal çatlaklı rezervuarlarda sayısal olarak modelleyen bir simülatör geliştirilerek, ters problem metodolojisi üzerine kurulu doğrusal olmayan parametre tahmini entegre edilebilir.
- (iv) Doğrusal olmayan parametre tahmini, gradyent temelli Levenberg-Marquardt algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Gridblok ölçeğinde parametre tahmini yapılırken, yarı-Newton yada conjugate gradyent yöntemlerinin Levenberg Marquardt algoritmasına göre

hesaplama zamanı bakımından daha etken yöntemler olduğu gösterilmiştir. Yarı-Newton yada “conjugate gradient” minimizasyon algoritmaları bu çalışmada oluşturulan simülatöre entegre edilebilir.



KAYNAKLAR

- Aasum, Y., Kasap, E., and Lake, L.W.,** 1993. Analytical upscaling of small scale permeability using a full tensor, *SPE Rock Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs Symposium*, Denver, CO, USA, April 12-14.
- Anterion, F., Karcher, B., and Eymard, R.,** 1989. Use of parameter gradients for reservoir history matching, *10th SPE Reservoir Simulation Symposium*, Houston, TX, February 6-8, SPE 18433.
- Aziz, K., and Settari, A.,** 1979. Petroleum Reservoir Simulation, Applied Science Publishers, New York.
- Bard, Y.,** 1974. Nonlinear Parameter Estimation, Academic Press, San Diego, 56.
- Bi, Z.,** 1999. Conditioning to 3D Stochastic Channels to Well Test Pressure Data, *Ph.D. Dissertation*, the University Of Tulsa.
- Bi, Z., Oliver, D.S., and Reynolds, A.C.,** 2000. Conditioning to 3D stochastic channels to pressure data, *SPE Journal*, December, 474-484
- Bourdet, D.,** 2002. Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models, Elsevier Science, Amsterdam.
- Brekke, K.,** 1996. Horizontal Well Productivity and Risk Assessment, *Ph.D. Dissertation*, the University of Tulsa.
- Carvalho, R., Thompson, L.G., Redner, R., and Reynolds, A.C.,** 1996. Simple procedures for imposing constraints for nonlinear least squares optimization, *SPE Journal*, December, 395-402.
- Chavent, G.M., Dupuy, M., and Lemmonnier, P.,** 1975. History matching by use of optimal control theory, *SPE Journal*, February, 74-86.
- Chen, W.H., Gavalas, G.R., Seinfeld, J.H., and Wasserman, M.L.,** 1974. A new algorithm for Automatic History Matching, *SPE Journal*, December, 593-608.

- Chu, L., Reynolds, A.C., and Oliver, D. S., 1995.** Computation of sensitivity coefficients for conditioning the permeability field to well-test pressure data, *In Situ*, **19**, 179-223.
- Culham, W.E., 1974.** Pressure buildup equations for spherical flow regime problems, *SPEJ*, December, 545-555.
- Deutsch, C. V., and Journal, A.G., 1993.** GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide, Oxford University Press, New York.
- Deutsch, C., Tran, T.T., and Pyrcz, M. J., 2002.** Geostatistical assignment of reservoir properties on unstructured grids, *the 2002 Annual Technical Conference*, San Antonio, TX, USA, September 29 - October 2, SPE 77427.
- Dogru, A.H., Dixon, T.N., and Edgar, T.F., 1977:** Confidence limits on the parameters and predictions of slightly compressible, single phase reservoirs, *SPE Journal*, February, 42-56.
- Dogru, A.H., and Seinfeld J.H., 1979.** Design of well tests to determine the properties of stratified reservoirs, *SPE's fifth Symposium on Reservoir Simulation*, Denver, Colorado, USA, Feb. 1-2, SPE 7694.
- Eisenstat, S. C., 1977.** Yale Sparse Matrix Package, I. The Symmetric Codes, Yale University, Department of Computer Science, *Technical Report*, **112**, May.
- Fletcher, R., 1971.** Practical Methods of Optimization, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Gao, G., and Reynolds, A.C., 2003.** Controlling overshooting/undershooting in large scale automatic history matching problems, *TUPREP Research Project*, **20**, the University of Tulsa, May, 128-161.
- Goode, P.A., and Thambynayagam, R.K.M., 1990.** Analytic models for a multiple probe formation tester, *the 1990 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, New Orleans, LA, USA, September 23-26, SPE 20737.
- Gök, İ.M., Onur, M., Hegeman P.S., and Kuchuk F.J., 2003.** Effect of an invaded zone on pressure transient data from multiprobe and packer-probe wireline formation testers in single and multilayer systems, *the 2003 SPE Annual Technical Conference*, Denver, CO, USA, October 5-8.
- Hawkins, M.F., 1956.** A note on the skin effect, *Trans., AIME*, 356-357.
- He, N., Reynolds, A.C., and Oliver, D.S., 1997.** Three-dimensional reservoir description from multiwell pressure data and prior information, *SPE Journal*, **2**, 312-327.

- Hurst, W.**, 1953. Establishment of skin effect and its impediment to fluid flow into a well bore, *Pet. Eng.*, October, B-6 - B-16.
- Journel, A.G., and Huijbregts, CH. J.**, 1978. Mining Geostatistics, Academic Press, London.
- Kasap, E., and Lake, L.W.**, 1990. Calculating the effective permeability tensor of a gridblock, *SPEFE*, June, 193-206.
- Kreyszig, E.**, 1999. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, New York.
- Kuchuk, F.J.**, 1994. Pressure behavior of MDT packer module and DST in crossflow-multilayer reservoirs, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **11**, 123-135.
- Kuchuk, F.J.**, 1996. Multiprobe wireline formation tester pressure behavior in crossflow-layered reservoirs, *IN SITU*, **20(1)**, 1-40.
- Kuchuk, F.J., and Onur, M.**, 2003. Estimating permeability distribution from 3D interval pressure transient tests, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **39(1-2)**, 5-27.
- Lake, L.W., and Carrol, H.B. Jr.**, 1986. Reservoir Characterization, Academic Press. Inc., Orlando, FL.
- Levenberg, K.**, 1944. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares, *Quart. Appl. Math.*, **2**, 164-168.
- Li, R., Reynolds, A.C., and Oliver, D.S.**, 2001. History matching of three-phase flow production data, *Reservoir Simulation Symposium*, Houston, TX, USA, February 11-14 2001, SPE 66351.
- MacDonald R.C., and Coats, K.H.**, 1970. Methods for numerical simulation of water and gas coning, *SPE Journal*, December, 425-436.
- Marquart, D.W.**, 1963. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters, *SIAM J.*, **11**, 431-441.
- Meijerink, J.A., and Vander Vorst, H.A.**, 1977. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, *Mathematics of Computations*, **31**, January, 148-162.
- Mengen, A.E.**, 2004. Application of different optimization techniques to parameter estimation from interference well test data, *M. Sc. Thesis*, Istanbul Technical University, February.

- Nacul, E.C., and Aziz, K.,** 1991. Use of irregular grid in reservoir simulation, *the 1991 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, TX, USA, Oct. 6-9, SPE 22886.
- Oliver, D.S.,** 1994. Incorporation of transient pressure data into reservoir characterization, *In Situ*, **18**, 243-275.
- Oliver, D.S., He, N., and Reynolds A.C.,** 1996. Conditioning permeability fields to pressure data, *5th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Leoben, Austria, September 3-6.
- Onur, M.,** 1999. Rezervuar Mühendisliği II Ders Notları, İTÜ Petrol ve Doğal Gaz Mühendisliği.
- Onur, M., and Al-Saddique, M.,** 1999. Comparison of derivative algorithms used in pressure transient analysis, *the Arabian Journal for Sci. & Eng.*, **24**, April, 59-78.
- Onur, M., Hegeman, P.S., and Kuchuk, F.J.,** 2002. Pressure-pressure convolution analysis of multiprobe and packer-probe wireline formation tester data, *2002 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, San Antonio, TX, USA, September 29 - October 2, SPE 77343.
- Onur, M., and Kuchuk, F.J.,** 1999. Integrated nonlinear regression analysis of multiprobe wireline formation tester packer and probe pressures and flow rate measurements, *1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Houston, TX, USA, October 3-6 SPE 56616.
- Onur, M., and Kuchuk, F.J.,** 2000. Nonlinear regression analysis of well-test pressure data with uncertain variance, *the 2000 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, TX, USA, Oct. 1-4, SPE 62918.
- Peaceman, D.W.,** 1983. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability, *SPE Journal*, June, 531-569.
- Pedrosa Jr. O. A., and Aziz K.,** 1986. Use of hybrid grid in reservoir simulation, *SPE Reservoir Engineering*, November, 611-622.
- Proett, M.A., Gilbert, G.N., Chin, W.C., and Monroe M.L.,** 2001. New wireline formation testing tool with advanced sampling technology, *SPEREE*, April, 76.
- Raghavan, R., and Clark, K.K.,** 1975. Vertical permeability from limited entry flow tests in thick formation, *SPE Journal*, February, 65-73.

- Schlumberger GeoQuest**, 2002. Eclipse 100 Reference Manual, Version 2002.
- Settari, A., and Aziz, K., 1972.** Use of irregular grid in reservoir simulation, *SPE Journal*, April, 103-14.
- Tarantola, A., 1987.** Inverse Problem Theory, Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- Van Everdingen, A. F., 1953.** The skin effect and its influence on the capacity of a well, *Trans., AIME*, 171-176.
- Welty, D.H., and Meijerink, J.A., 1981.** An improved formulation and solution method for single phase flow problems, *Soc. Pet. Eng. J.*, June, 289-295.
- Whittle, T.M., and Gringarten, A.C., 2003:** Will wireline formation tests replace well tests, *the 2003 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver, CO, USA, October 5-8 October, SPE 84086.
- Wu, Z., Reynolds, A.C., and Oliver, D.S., 1999.** Conditioning geostatistical models to two-phase production data, *SPE Journal*, June, 142-155.
- Xu, W., Tran, T.T., Srivastava, R.M., and Journel, A.G., 1992.** Integrating seismic data in reservoir modeling: the collocated cokriging alternative, *67th SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Washington, DC, USA, October 4-7.
- Yeh, N., and Reynolds, A.C., 1989.** Analysis of pressure data from a restricted entry well in a multilayer reservoir, *SPEFE*, March, 81-89.
- Zeybek, A.D., and Onur, M., 2003.** Conditioning fractal (fBm/fGn) porosity and permeability fields to multiwell pressure data, *Math Geology*, **35(5)**, 577-612.
- Zimmerman, T., MacInnis, J., Hoppe, J., Pop, J., and Long, T., 1990.** Application of emerging wireline formation technologies, *the Eighth Offshore Southeast Conference*, Singapore, December 4-7, OSEA-90105.
- Zhang, F., Reynolds, A.C., and Oliver, D.S., 2002.** Evaluation of the reduction in uncertainty obtained by conditioning a 3D stochastic channel to multiwell pressure data, *Math Geology*, **34(6)**, 715-742.

EK-A

3B r - θ - z SAYISAL SİMÜLATÖRÜNE AİT SONLU-FARK DENKLEMLERİ

Burada, geliştirilen 3B r - θ - z simülatörüne ait sonlu fark denklemleri ile kuyucu sınırlayıcı denklemlere ve sınır koşullarına ait detaylar sunulmaktadır.

A.1 Sonlu Fark Denklemleri

Göz önünde buludurulan akış sistemi için kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_r(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z(r, \theta, z)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] = c_1 \phi(r, \theta, z) c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

şeklinde verilir. Denklem A.1'de D , belirli bir referanstan (örneğin deniz seviyesinden) gravite yönünde pozitif olarak ölçülen derinliği temsil etmektedir. Şekil A.1'de gösterilen ve geometrik merkezi (r_i, θ_j, z_k) noktası olan bir gridbloğunda, Denklem A.1'in sonlu farklar cinsinden ifadesini, önce Denklem A.1'in her iki tarafını r ile çarpıp, sonra sırasıyla, θ yönünde blok sınırları $\theta_{j-1/2}$ 'den $\theta_{j+1/2}$ 'ye, r yönünde $r_{i-1/2}$ 'den $r_{i+1/2}$ 'ye ve z yönünde de $z_{k-1/2}$ 'den $z_{k+1/2}$ 'ye entegre ederek elde edebiliriz:

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_r(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + r \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k_z(r, \theta, z)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] \right] d\theta dr dz = \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \left[r c_1 \phi(r, \theta, z) c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right] d\theta dr dz \quad (\text{A.2})$$

Denklem A.2'de, örneğin θ yönünde blok sınırları $\theta_{j-1/2}$ 'den $\theta_{j+1/2}$ 'ye integral işlemi

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \frac{k_r(r, \theta, z)}{\mu(r, \theta, z)} \frac{\partial p}{\partial r} d\theta \right] + \frac{1}{r} \left[\int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu(r, \theta, z)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[r \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} \frac{k_z(r, \theta, z)}{\mu(r, \theta, z)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) d\theta \right] = c_1 \left[r \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} c_i \phi(r, \theta, z) \frac{\partial p}{\partial t} d\theta \right] \quad (A.3)
\end{aligned}$$

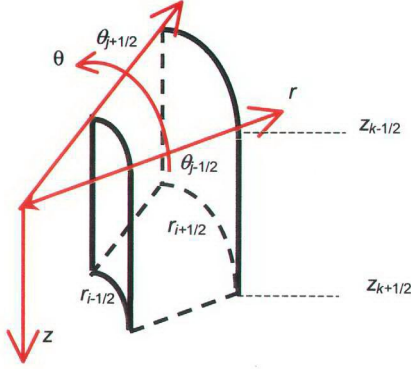
sonunda

$$\begin{aligned}
& \Delta \theta_j \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{k_r(r, \theta_j, z)}{\mu(r, \theta_j, z)} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r, \theta_j, z_k} \right] + \frac{1}{r} \left\{ \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu(r, \theta, z)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r, \theta_{j+1/2}, z_k} - \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu(r, \theta, z)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r, \theta_{j-1/2}, z_k} \right\} \\
& + \Delta \theta_j r \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{k_z(r, \theta_j, z)}{\mu(r, \theta_j, z)} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right]_{r, \theta_j, z_k} \right\} = c_1 r c_i \phi(r, \theta_j, z) \Delta \theta_j \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{r, \theta_j, z} \quad (A.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Denklem A.2'deki diğer integral işlemlerinin gerçekleştirilmesi sonunda

$$\begin{aligned}
& \Delta \theta_j \Delta z_k \left\{ \left[r \frac{k_r(r, \theta_j, z_k)}{\mu(r, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_{i+1/2}, \theta_j, z_k} - \left[r \frac{k_r(r, \theta_j, z_k)}{\mu(r, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_{i-1/2}, \theta_j, z_k} \right\} \\
& + \ln(r_{i+1/2} / r_{i-1/2}) \Delta z_k \left\{ \left[\frac{k_\theta(r_i, \theta, z_k)}{\mu(r_i, \theta, z_k)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r_i, \theta_{j+1/2}, z_k} - \left[\frac{k_\theta(r_i, \theta, z_k)}{\mu(r_i, \theta, z_k)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r_i, \theta_{j-1/2}, z_k} \right\} \\
& + \frac{(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \Delta \theta_j}{2} \left\{ \left[\frac{k_z(r_i, \theta_j, z)}{\mu(r_i, \theta_j, z)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right]_{r_i, \theta_j, z_{k+1/2}} - \left[\frac{k_z(r_i, \theta_j, z)}{\mu(r_i, \theta_j, z)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right]_{r_i, \theta_j, z_{k-1/2}} \right\} \\
& = c_1 \frac{(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \Delta \theta_j \Delta z_k}{2} c_i \phi(r_i, \theta_j, z_k) \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{r_i, \theta_j, z_k} \quad (A.5)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.



Şekil A.1 r - θ - z sisteminde bir gridbloğun gösterimi.

Denklem A.5, (r_i, θ_j, z_k) noktalarında ($1 \leq i \leq N_r$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq k \leq N_z$) geçerlidir.

Denklem A.5'deki uzaysal kısmi türevler, merkezi sonlu farklar yaklaşımı kullanılarak yaklaşık olarak aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$\left[r \frac{k_r(r, \theta_j, z_k)}{\mu(r, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_{i+1/2}, \theta_j, z_k} \approx \frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1} - r_i} \frac{k_r(r_{i+1/2}, \theta_j, z_k)}{\mu(r_{i+1/2}, \theta_j, z_k)} [p(r_{i+1}, \theta_j, z_k) - p(r_i, \theta_j, z_k)] \quad (\text{A.6})$$

$$\left[r \frac{k_r(r, \theta_j, z_k)}{\mu(r, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r_{i-1/2}, \theta_j, z_k} \approx \frac{r_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1}} \frac{k_r(r_{i-1/2}, \theta_j, z_k)}{\mu(r_{i-1/2}, \theta_j, z_k)} [p(r_i, \theta_j, z_k) - p(r_{i-1}, \theta_j, z_k)] \quad (\text{A.7})$$

$$\left[\frac{k_\theta(r_i, \theta_j, z_k)}{\mu(r_i, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r_i, \theta_{j+1/2}, z_k} \approx \frac{k_\theta(r_i, \theta_{j+1/2}, z_k)}{\mu(r_i, \theta_{j+1/2}, z_k) (\theta_{j+1} - \theta_j)} [p(r_i, \theta_{j+1}, z_k) - p(r_i, \theta_j, z_k)] \quad (\text{A.8})$$

$$\left[\frac{k_\theta(r_i, \theta_j, z_k)}{\mu(r_i, \theta_j, z_k)} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r_i, \theta_{j-1/2}, z_k} \approx \frac{k_\theta(r_i, \theta_{j-1/2}, z_k)}{\mu(r_i, \theta_{j-1/2}, z_k) (\theta_j - \theta_{j-1})} [p(r_i, \theta_j, z_k) - p(r_i, \theta_{j-1}, z_k)] \quad (\text{A.9})$$

$$\left[\frac{k_z(r_i, \theta_j, z)}{\mu(r_i, \theta_j, z)} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right]_{r_i, \theta_j, z_{k+1/2}} \quad (A.10)$$

$$\approx \frac{k_z(r_i, \theta_j, z_{k+1/2})}{\mu(r_i, \theta_j, z_{k+1/2})} \left\{ \left[\frac{p(r_i, \theta_j, z_{k+1}) - p(r_i, \theta_j, z_k)}{z_{k+1} - z_k} \right] - \gamma \frac{(D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k})}{z_{k+1} - z_k} \right\}$$

ve

$$\left[\frac{k_z(r_i, \theta_j, z)}{\mu(r_i, \theta_j, z)} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right]_{r_i, \theta_j, z_{k-1/2}} \quad (A.11)$$

$$\approx \frac{k_z(r_i, \theta_j, z_{k-1/2})}{\mu(r_i, \theta_j, z_{k-1/2})} \left\{ \left[\frac{p(r_i, \theta_j, z_k) - p(r_i, \theta_j, z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} \right] - \gamma \frac{(D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})}{z_k - z_{k-1}} \right\}$$

Bu çalışmada tamamıyla kapalı (implicit) yöntem kullanıldığından, Denklem A.5'deki basıncın zamana göre kısmi türevi geri sonlu fark formülü kullanılarak yaklaşık olarak temsil edilir:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{r_i, \theta_j, z_k}^{n+1} = \frac{p^{n+1}(r_i, \theta_j, z_k) - p^n(r_i, \theta_j, z_k)}{\Delta t^{n+1}} \quad (A.12)$$

Burada zaman adımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1} \quad (A.13)$$

Sonlu fark denklemlerinin yazımında basitlik sağlaması için, bundan sonraki aşamalarda aşağıdaki tanımlar kullanılacaktır:

$$p^{n+1}(r_i, \theta_j, z_k) \equiv p_{i,j,k}^{n+1}, \quad (A.14a)$$

$$k_r(r_{i\pm 1/2}, \theta_j, z_k) \equiv k_{r,i\pm 1/2,j,k}, \quad (A.14b)$$

$$k_{\theta}(r_i, \theta_{j\pm 1/2}, z_k) \equiv k_{\theta,i,j\pm 1/2,k}, \quad (\text{A.14c})$$

$$k_z(r_i, \theta_j, z_{k\pm 1/2}) \equiv k_{z,i,j,k\pm 1/2}, \quad (\text{A.14d})$$

$$\mu(r_{i\pm 1/2}, \theta_j, z_k) \equiv \mu_{i\pm 1/2,j,k}, \quad (\text{A.14e})$$

$$\mu(r_i, \theta_{j\pm 1/2}, z_k) \equiv \mu_{i,j\pm 1/2,k}, \quad (\text{A.14f})$$

$$\mu(r_i, \theta_j, z_{k\pm 1/2}) \equiv \mu_{i,j,k\pm 1/2}. \quad (\text{A.14g})$$

Denklem A.6 – Denklem A.11, Denklem A.5’de kullanılırsa (Denklem A.14’deki tanımlama ile) aşağıdaki sonlu farklar denklemi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} & T_{r,i+1/2,j,k} (p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{r,i-1/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) + T_{\theta,i,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) \\ & - T_{\theta,i,j-1/2,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) + T_{z,i,j,k+1/2} (p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{z,i,j,k-1/2} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) \quad (\text{A.15}) \\ & = \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) + \gamma_{z,i,j,k+1/2} - \gamma_{z,i,j,k-1/2} \end{aligned}$$

Denklem A.15’de kullanılan tanımlamalar aşağıda verilmektedir:

$$T_{r,i+1/2,j,k} = \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1} - r_i} \right) \Delta z_k \Delta \theta_j \lambda_{r,i+1/2,j,k}, \quad (\text{A.16})$$

$$T_{\theta,i,j+1/2,k} = \frac{\ln(r_{i+1/2}/r_{i-1/2}) \Delta z_k}{(\theta_{j+1} - \theta_j)} \lambda_{\theta,i,j+1/2,k}, \quad (\text{A.17})$$

$$T_{z,i,j,k+1/2} = \frac{\Delta \theta_j (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{2(z_{k+1} - z_k)} \lambda_{z,i,j,k+1/2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{z,i,j,k+1/2} = T_{z,i,j,k+1/2} \gamma(D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}), \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{c_1 \phi_{i,j,k} c_{t,j,k}}{\Delta t^{n+1}} \frac{\Delta \theta_j}{2} (r_{i-1/2}^2 - r_{i+1/2}^2) \Delta z_k, \quad (\text{A.20})$$

$$\lambda_{r,i+1/2,j,k} = \frac{k_{r,i+1/2,j,k}}{\mu_{i+1/2,j,k}}, \quad (\text{A.21})$$

$$\lambda_{\theta,i,j+1/2,k} = \frac{k_{\theta,i,j+1/2,k}}{\mu_{i,j+1/2,k}}, \quad (\text{A.22})$$

$$\lambda_{z,i,j,k+1/2} = \frac{k_{z,i,j,k+1/2}}{\mu_{i,j,k+1/2}}. \quad (\text{A.23})$$

Denklem A.15 – Denklem A.23’de i, j ve k ’nin aralıkları; $1 \leq i \leq N_r$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq k \leq N_z$ şeklindedir. $\Delta \theta_j$ ve Δz_k , θ - ve z yönlerinde i, j, k ’ninci gridbloğunun uzunluklarını göstermektedir.

r , θ ve z yönlerinde gridblok sınırlarında “iletkenlik” terimleri ($\lambda_{r,i+1/2,j,k}$, $\lambda_{\theta,i,j+1/2,k}$ ve $\lambda_{z,i,j,k+1/2}$) standart harmonik ortalamalar kullanılarak hesaplanmaktadır:

$$\lambda_{r,i+1/2,j,k} = \frac{\lambda_{r,i,j,k} \lambda_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1}/r_i)}{\lambda_{r,i,j,k} \ln(r_{i+1}/r_{i+1/2}) + \lambda_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2}/r_i)}, \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda_{\theta,i,j+1/2,k} = \frac{\lambda_{\theta,i,j,k} \lambda_{\theta,i,j+1,k} (\theta_{j+1} - \theta_j)}{\lambda_{\theta,i,j,k} (\theta_{j+1} - \theta_{j+1/2}) + \lambda_{\theta,i,j+1,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j)}, \quad (\text{A.25})$$

$$\lambda_{z,i,j,k+1/2} = \frac{\lambda_{z,i,j,k} \lambda_{z,i,j,k+1} (z_{k+1} - z_k)}{\lambda_{z,i,j,k} (z_{k+1} - z_{k+1/2}) + \lambda_{z,i,j,k+1} (z_{k+1/2} - z_k)}. \quad (\text{A.26})$$

A.2 Kuyuyu Sınırlayıcı Denklemler

Bölüm 2’de belirtildiği gibi, kuyu yüzeyinde üretime açık birden fazla aralıktan kuyuya aynı kuyuyu depolama etkileri altında zamana göre değişimi belirlenmiş bir yüzey debisi ile üretim yapıldığında sınır koşulu, Denklem 2.14 ile temsil edilebilir:

$$q_a(t) = c_2 \sum_{m=1}^{N_a} \int_{\theta_{b,a}(m)}^{\theta_{s,a}(m)} \int_{h_{b,a}(m)}^{h_{s,a}(m)} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w, z, \theta} dz d\theta - 24 C_a \frac{dp_{wf,a}}{dt} \quad (A.27)$$

Burada, N_a , kuyuya üretim yapılan kuyu yüzeyinde toplam üretime açık aralık sayısını, $\theta_{b,a}(m)$ - $\theta_{s,a}(m)$ ve $h_{b,a}(m)$ - $h_{s,a}(m)$ ise, tanımlanan bir m açık aralılığının, sırasıyla, θ ve z yönündeki sınırlarını göstermektedir. Denklem A.27’nin sonlu fark temsili aşağıdaki denklem ile verilir:

$$\sum_{m=1}^{N_a} \sum_{j=N_{\theta b(m)}}^{N_{\theta s(m)}} \sum_{k=N_{hb(m)}}^{N_{hs(m)}} T_{r,1/2,j,k} [p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,a,k}^{n+1}] - \psi_a p_{wf,k,a}^{n+1} = \frac{q_a^{n+1}}{c_2} - \psi_a p_{wf,a,k}^n, \quad (A.28)$$

ve

$$\psi_a = \frac{c_3}{c_2 \Delta t^{n+1}} C_a \quad (A.29)$$

olarak tanımlanır ($c_3 = 24$ ve $c_2 = 1.127 \times 10^{-3}$). Denklem A.28’de dikkat edilmesi gereken, tanımlanan bir açık aralık m için j indeksinin $N_{\theta b}$ ’den $N_{\theta s}$ ’ye ve k indeksinin ise N_{hb} ’den N_{hs} ’ye değiştiğidir. $N_{\theta b}$ ve $N_{\theta s}$, üretime açık m aralılığının θ yönünde, sırasıyla başladığı ve bittiği gridblok numarasını, N_{hb} ve N_{hs} ise üretime açık m aralılığının z yönünde, sırasıyla başladığı ilk ve bittiği gridblok numaralarını temsil etmektedir. Denklem A.28, $T_{r,1/2,j,k}$ terimi

$$T_{r,1/2,j,k} = \frac{r_w}{(r_1 - r_w)} \Delta z_k \Delta \theta_j \lambda_{r,1/2,j,k} \quad (A.30)$$

denklemlerle verilmektedir ve kuyuya bitişik üretime açık ilk gridblok sınırlarında harmonik ortalama uygulanamayacağından, Denklem A.30’da $\lambda_{r,1/2,j,k} = k_{r,1,j,k} / \mu_{1,j,k}$

olarak alınır. Zar faktörü etkileri ince zar faktörü kavramı ile modellendiğinde (bkz Bölüm 2), Denklem A.30 aşağıdaki denklem ile değiştirilmektedir:

$$T_{r,1/2,j,k} = \frac{k_{r,1,j,k}}{\mu_{1,j,k}} \Delta\theta_j \Delta z_k \frac{1}{\left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_{3/2}}{r_w}\right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, \quad (\text{A.31})$$

Denklem A.27 veya onun sonlu-fark temsili Denklem A.28’de debi, kuyuiçi depolama katsayısı ve kuyudibi basıncı p_{wf} için kullanılan alt indis a , üretim aralığını temsil etmek için kullanılmıştır. Çünkü düşey gözlem probleminin olduğu yerlerde kuyuiçi depolama etkilerinin göz önünde bulundurulduğu durumlarda, o noktadaki basıncı üretim noktasındaki kuyudibi basıncından ayırt etmek gerekecektir. Bölüm 2’de belirtildiği gibi, gözlem noktalarındaki kuyuiçi depolama etkilerini dahil eden sınır koşulu en genel şekliyle Denklem 2.15 ve Denklem 2.16 kullanılarak aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir:

$$q_g(t) = c_2 \int_{\theta_{b,g}}^{\theta_{s,g}} \int_{h_{b,g}}^{h_{s,g}} \left(\frac{k_r}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w, z, \theta} dz d\theta - 24C_g \frac{dp_{wf,g}}{dt}. \quad (\text{A.32})$$

Burada, $g=1,2,\dots,N_g$ ve N_g , test sırasında basıncı kaydetmek için göz önünde bulundurulan toplam gözlem probu sayısını temsil etmektedir. Örneğin, Şekil 2.1 ve 2.3’deki konfigürasyonlar için bir düşey gözlem probu olduğu için $N_g = 1$, Şekil 2.2’de ise iki gözlem probu olduğu için $N_g = 2$ olacaktır. Denklem A.32’de q_g g. gözlem probundan yapılacak olası üretimi temsil etmektedir. Bazı durumlarda, kuyu yüzeyindeki çamur kekini delerek formasyon yüzeyine iliştirilen gözlem probunun hidrolik bağlantı içinde olup olmadığını anlamak amacıyla kısa süreli gözlem probundan üretim yapılabilmektedir. Bu nedenle, Denklem A.32’de gözlem problemlerindeki bu olası üretimi modelleyebilmek için q_g debi terimi konulmuştur. Ancak, gözlem problemlerinden üretimin yapılmadığı girişim testleri sırasında, tüm problemler için, $g=1,2,\dots,N_g$, Denklem A.32’de $q_g = 0$ alınır. Denklem 2.15’de, C_g g. gözlem probundaki kuyuiçi (veya alet) depolama katsayısını, p_{wfg} ise g. gözlem probundaki “kuyudibi” basıncını temsil etmektedir. $\theta_{b,g}-\theta_{s,g}$ ve $h_{b,g}-h_{s,g}$, g. probun sırasıyla, θ ve z yönlerinde bulunduğu (veya üretim yaptığı) göstermektedir.

Gözlem problemleri, simülâtörde kuyuya bitişik tek bir gridbloğu ile temsil edilmektedirler. Denklem A.32'nin sonlu fark temsili

$$\sum_{j=N_{\theta b,g}}^{N_{\theta s,g}} \sum_{k=N_{hb,g}}^{N_{hs,g}} T_{r,1/2,j,k} [p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,g,k}^{n+1}] - \Psi_g p_{wf,g,k}^{n+1} = \frac{q_g^{n+1}}{c_2} - \Psi_g p_{wf,g,k}^n, \quad (A.33),$$

ve

$$\Psi_g = \frac{c_3}{c_2 \Delta t^{n+1}} C_g \quad (A.34)$$

şeklinde verilir. Denklem A.33'de tanımlanan bir g . gözlem probu için j indeksinin $N_{\theta b,g}$ 'den $N_{\theta s,g}$ 'ye ve k indeksinin ise $N_{hb,g}$ 'den $N_{hs,g}$ 'ye değiştiğidir. $N_{\theta b,g}$ ve $N_{\theta s,g}$, g . probun θ yönünde, sırasıyla başladığı ve bittiği gridblok numarasını, $N_{hb,g}$ ve $N_{hs,g}$ ise z yönünde, sırasıyla başladığı ve bittiği gridblok numaralarını temsil etmektedir. Herhangi bir gözlem probu, simülâtörde tek bir gridblok ile temsil edildiğinde (genelde yapılan uygulama bu şekildedir) Denklem A.33'de $N_{\theta b,g}=N_{\theta s,g}$ ve $N_{hb,g}=N_{hs,g}$ olarak alınır. Denklem A.33, $T_{r,1/2,j,k}$ terimi, Denklemler A.30 ve A.31 verildiği gibidir.

Denklem A.28 ve Denklem A.33 ile ifade edilen N_g adet denklem, kuyuiçi sınırlayıcı (wellbore constraint) denklem olarak isimlendirilir ve aslında tek denklem olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\sum_{m=1}^{N_{g,l}} \sum_{j=N_{\theta b,l}(m)}^{N_{\theta s,l}(m)} \sum_{k=N_{hb,l}(m)}^{N_{hs,l}(m)} T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l,k}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l,k}^{n+1} = \frac{q_l^{n+1}}{c_2} - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l,k}^n, \quad (A.35)$$

$l = 1, 2, \dots, N_w$

Burada,

$$\Psi_l^{n+1} = \frac{c_3}{c_2 \Delta t^{n+1}} C_l. \quad (A.36)$$

Örneğin, çiftli-paker aralıklı ve iki düşey gözlem probu, bir düşey girişim testi modellendiğinde, Denklem A.35 $l = 1$ için, çiftli-paker aralığı için kuyuiçi sınırlayıcı

denklemini (Denklem A.28), $l=2$ için ve $l=3$ için sırasıyla düşey gözlem probu 1 ve 2 için kuyuiçi sınırlayıcı denklemini (Denklem A.33'ü) ifade edecektir. Bu durumda, Denklem A.36'da C_1 , çiftli-paker aralığı için kuyuiçi depolama sabitini, C_2 ve C_3 'de 1. ve 2. düşey gözlem problemleri için kuyuiçi depolama katsayısını temsil edecektir. Dolayısıyla, böyle bir test için toplam üç adet ($N_w = 3$) kuyuiçi sınırlayıcı denklem olacaktır. Diğer tip düşey girişim testleri için Denklem A.35'den, benzer şekilde kuyuiçi sınırlayıcı denklemleri tanımlanabilir.

Bölüm 2'de ayrıntılı değinildiği gibi, modellemede, z doğrultusunda gravite etkileri göz önünde bulundurulduğundan, rezervuar içinde olduğu gibi, kuyuiçinde de kuyudibi basıncının graviteden dolayı derinlikle değişmesi gerekir. Öyleyse, gravite etkisi söz konusu olduğunda, Denklem A.35'deki $p_{wf,l,k}$ basıncının açık aralık boyunca belirli bir referanstan $D_{i,j,k}$ derinliğine sahip herhangi bir z_k grid noktasındaki ($k=N_{hb,l}, \dots, N_{hs,l}$) kuyudibi basıncını temsil edecektir (yani, $p_{wf,l}(z_k)$) ve bu basınç açık aralık boyunca z_k değiştikçe değişmesi gerekir. Dolayısıyla, gradyent γ 'nın sabit olduğunu kabul ettiğimizde (çalışmada az ve sabit sıkıştırılabilirlikli akışkan akışı göz önünde bulundurulduğundan bu gerçekçi bir varsayımdır) kuyudibi basıncını

$$p_{wf,l,k}^{n+1} = p_{wf,l}^{n+1} + \gamma(D_{l,k} - D_l^0) \quad (A.37)$$

denklemini ile ifade etmemiz gerekecektir. Denklem A.37'da, $p_{wf,l}^{n+1}$, referans derinlik D_l^0 daki kuyudibi referans basıncını temsil etmektedir. Uygulamalarda, hem üretim aralığı hem de gözlem problemleri için referans derinlik D_l^0 , formasyonun en üst noktası olarak alınmıştır. Denklem A.37, $D_{l,k}$ ise, z_k grid noktasının deniz seviyesinden derinliğini temsil etmektedir. Denklem A.37, Denklem A.35'de yerine konulursa, kuyuiçi sınırlayıcı denklemler, kuyudibi referans basıncı $p_{wf,l}^{n+1}$ cinsinden

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N_{a,j}} \sum_{j=N_{\theta b,j}(m)}^{N_{\theta s,j}(m)} \sum_{k=N_{hb,j}(m)}^{N_{hs,j}(m)} T_{r,1/2,j,k} (p_{l,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^{n+1} \\ & = \frac{q_l^{n+1}}{C_2} + \gamma \sum_{m=1}^{N_{a,j}} \sum_{j=N_{\theta b,j}(m)}^{N_{\theta s,j}(m)} \sum_{k=N_{hb,j}(m)}^{N_{hs,j}(m)} T_{r,1/2,j,k} (D_{l,k} - D_l^0) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^n, \quad l=1,2,\dots,N_w \end{aligned} \quad (A.38)$$

şeklinde ifade edilir.

Benzeri şekilde, sonlu fark denklemi Denklem A.15'i, $i=1$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq k \leq N_z$ için kullanılırken, üretime açık aralığa denk gelen kısımlarında ve gözlem problemlerinin olduğu yerlerde, bu denklemde $p_{i-1,j,k}$ basınçları kuyudibi basıncını temsil edeceğinden bu basınçları Denklem A.37'nin sağ tarafındaki ifade ile değiştirmek gerekecektir. Dolayısıyla, Denklem A.15'i, $i=1$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq k \leq N_z$ için aşağıda verilen denklem ile değiştirmek gerekir:

$$\begin{aligned}
& T_{r,3/2,j,k} (p_{2,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) \\
& + T_{\theta,1,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,1,j-1/2,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j-1,k}^{n+1}) \\
& + T_{z,1,j,k+1/2} (p_{1,j,k+1}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{z,1,j,k-1/2} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k-1}^{n+1}) \\
& = \tilde{V}_{1,j,k}^{n+1} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^n) + \gamma_{z,1,j,k+1/2} - \gamma_{z,1,j,k-1/2} - T_{r,1/2,j,k} \gamma (D_{l,k} - D_l^0)
\end{aligned} \tag{A.39}$$

A.3. Sınır Koşulları

Yukarıda verilen kuyuiçi sınırlayıcı denklemlerin yanında, sonlu fark denklemi, Denklem A.15'in r , θ ve z yönlerinde belirlenmiş sınır koşullarını sağlaması gerekir.

Örneğin, simüle edilecek sistem θ yönünde tümüyle 360° lik tam bir sektör olarak modellendiğinde (bkz. Bölüm 2, Şekil 2.7), Bölüm 2'de de verildiği gibi, kullanılacak uygun sınır koşulları

$$\left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r, \theta=0, z} = \left[\frac{k_\theta(r, \theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r, \theta=2\pi, z}, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq z \leq h, \tag{A.40}$$

$$p(r, \theta = 0, z) = p(r, \theta = 2\pi, z), \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq z \leq h \tag{A.41}$$

denklemleriyle ifade edilir. Sonlu fark denklemi, Denklem A.15'in Denklem A.40 ve Denklem A.41 ile verilen sınır koşullarını sağlaması için, Denklem A.15 $j=1$ ve $j=N_\theta$ için kullanılırken,

$j=1$ için

$$p_{i,j-1,k}^{n+1} = p_{i,N_\theta,k}^{n+1} \quad (\text{A.42a})$$

$$T_{\theta,i,j-1/2,k} = T_{\theta,i,1/2,k} \quad (\text{A.42b})$$

ve $j=N_\theta$ için

$$p_{i,j+1,k}^{n+1} = p_{i,1,k}^{n+1} \quad (\text{A.42c})$$

$$T_{\theta,i,j+1/2,k} = T_{\theta,i,1/2,k} \quad (\text{A.42d})$$

değişiklikleri yapılır. Burada, $T_{\theta,i,1/2,k}$ aşağıdaki denklemden hesaplanır:

$$T_{\theta,i,1/2,k} = \frac{\ln[r_{i+1/2} / r_{i-1/2}] \Delta z_k}{\theta_{N_\theta} - \theta_1} \lambda_{\theta,i,1/2,k} \quad (\text{A.42e})$$

ve

$$\lambda_{\theta,i,1/2,k} = \frac{\lambda_{\theta,i,N_\theta,k} \lambda_{\theta,i,1,k} (\theta_{N_\theta} - \theta_1)}{\lambda_{\theta,i,1,k} (\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta}) + \lambda_{\theta,i,N_\theta,k} (\theta_1 - \theta_{1/2})} \quad (\text{A.42f})$$

Eğer simüle edilecek sistem θ yönünde tümüyle 360° lik tam bir sektör yapmıyor ise (örneğin bkz. Bölüm 2, Şekil 2.4) ve θ yönünde sınırlar, akışa kapalı olarak modellenirse, bu durumda kullanılacak uygun sınır koşulları

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{r,\theta=\theta_p,z} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, \quad 0 \leq z \leq h \quad (\text{A.43})$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{r,\theta=\theta_e,z} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (\text{A.44})$$

denklemleriyle verilir. Sonlu fark denklemi, Denklem A.15'in Denklem A.43 ve Denklem A.44 ile verilen sınır koşullarını sağlaması için, Denklem A.15 $j=1$ ve $j=N_\theta$ için kullanılırken,

$$T_{\theta,j,1/2,k} = T_{\theta,j,N_\theta+1/2,k} = 0 \quad (\text{A.45})$$

alınır.

Simülatörümüzde, rezervuar r yönünde ($r=r_e$) dış sınırı akışa kapalı bir sistem olarak modellendiğinden, kullanılacak uygun sınır koşulu

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_e, \theta, z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h, 0 \leq \theta \leq \theta_e \quad (\text{A.46})$$

denklemleriyle verilir. Denklem A.15'in Denklem A.46 ile verilen sınır koşullarını sağlaması için, Denklem A.15 $i=N_r$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq k \leq N_z$ için kullanılırken

$$T_{r,N_r+1/2,j,k} = 0, \quad (\text{A.47})$$

almak gerekir.

Simülatörümüzde, rezervuarın alt ve üst sınırında, akışa kapalı sınır koşullarını

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{r, \theta, z=0} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq \theta \leq \theta_e \quad (\text{A.48})$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{r, \theta, z=h} = 0, \quad r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq \theta \leq \theta_e \quad (\text{A.49})$$

sağlamak için Denklem A.15'i $k=1$ ve $k=N_z$, $1 \leq j \leq N_\theta$ ve $1 \leq r \leq N_r$ için kullanılırken,

$$T_{z,i,j,1/2} = T_{z,i,j,N_z+1/2} = 0, \quad (\text{A.50})$$

alınır.

Ayrıca, kuyu yüzeyinde üretime açık olmayan yerlerde, kuyuya akış olmamasını sağlamak amacıyla, üretime açık kısmi aralıklar dışında (örneğin bkz. Bölüm 2, Şekil 2.2'deki gibi) aşağıda verilen sınır koşul denkleminin sağlanması gerekir:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_w, \theta, z} = 0, \quad z \notin [h_{b,a}(m), h_{s,a}(m)] \quad \text{ve} \quad \theta \notin [\theta_{b,a}(m), \theta_{s,a}(m)] \quad (\text{A.51})$$

$m=1,2,\dots,N_a$. Burada N_a , toplam açık aralık sayısı ve $\theta_{b,a}(j)-\theta_{s,a}(j)$ ve $h_{b,a}(j)-h_{s,a}(j)$ ise, verilen bir m açık aralılığının, sırasıyla, θ ve z yönlerinde sınırlarını göstermektedir. Denklem A.51'de kullanılan $\notin$ sembolü, “elemanı değildir” anlamındadır. Denklem A.51 ile verilen bu sınır koşulu sağlamak için Denklem A.15'i $i=1$, $j \in [N_{\theta b,a}(m), N_{\theta s,a}(m)]$ ve $k \in [N_{hb,a}(m), N_{hs,a}(m)]$ kullanırken

$$T_{r,1/2,j,k} = 0 \quad (\text{A.52})$$

alınır. Burada, $N_{\theta b}$ ve $N_{\theta s}$, üretime açık m aralılığının θ yönünde, sırasıyla başladığı ve bittiği gridblok numarasını, N_{hb} ve N_{hs} ise üretime açık m aralılığının z yönünde, sırasıyla başladığı ilk ve bittiği gridblok numaralarını temsil etmektedir.

A.4. Matris-Vektör Problemi

Denklem A.15 ile verilen $N (=N_r N_\theta N_z)$ sayıda sonlu fark denklemi ile Denklem A.38 ile verilen kuyuiçi sınırlayıcı N_w adet denklem, toplam $N+N_w$ sayıda (verilen bir t^{n+1} zamanında) $N+N_w$ bilinmeyenli (N adet grid noktası basıncı ve N_w adet “kuyu” basıncı) bir denklem takımını oluşturur. Bölüm 2’de ayrıntılı değinildiği gibi bu denklem takımı matris-vektör formunda

$$A_{n+1} \bar{p}^{n+1} = \bar{d}^n \quad (\text{A.53})$$

şeklinde yazılabilir. Burada, A_{n+1} $(N_w+N) \times (N_w+N)$ boyutlu katsayı matrisini temsil eder. $\bar{p}^{n+1}$ (N_w+N) bilinmeyen basınç vektörüdür:

$$\bar{p}^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{wf,1}^{n+1} \\ p_{wf,2}^{n+1} \\ \vdots \\ p_{wf,N_w}^{n+1} \\ p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_N^{n+1} \end{bmatrix} \quad (A.54)$$

$\bar{d}^n$ ise bir önceki zaman değerindeki (N_w+N) boyutlu sağ yan vektörüdür.

$$\bar{d}^n = \begin{bmatrix} d_{w,1}^n \\ d_{w,2}^n \\ \vdots \\ d_{w,N_w}^n \\ d_1^n \\ d_2^n \\ \vdots \\ d_N^n \end{bmatrix} \quad (A.55)$$

Burada N_w , çözümlenecek üretim ve gözlem noktalarında toplam basınç sayısını, N ($=N_x \times N_y \times N_z$) ise kullanılan toplam grid blok sayısını temsil etmektedir. Denklem A.54'deki t^{n+1} zamanındaki bilinmeyen basınçların nasıl sıralandığı, katsayı matrisi, A_{n+1} 'in yapısı ve matris çözümü yöntemlerine ayrıntılı olarak değinildiği için burada değinilmeyecektir. Burada değinilecek olan sağ-yan vektörü $\bar{d}^n$ 'nin nasıl oluşturulduğu ve hesaplanacağı olacaktır.

Bölüm 2'de de ayrıntılı olarak değinildiği gibi ve Denklem A.54 ile verilen sıralamaya göre, oluşturulan $N+N_w$ denklemden oluşan denklem takımının ilk N_w sayıda denklemi, kuyucu sınırlayıcı Denklem A.37'den elde edilir:

$$\sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{bh,l}(m)}^{N_{bx,l}(m)} \sum_{k=N_{bh,l}(m)}^{N_{bx,l}(m)} T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^{n+1} = d_{w,l}^n, \quad l=1,2,...,N_w \quad (A.56)$$

Burada $d_{w,l}^n$

$$d_{w,l}^n = \frac{q_l^{n+1}}{c_2} + \gamma \sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{\theta,l}(m)}^{N_{\theta,l}(m)} \sum_{k=N_{h,l}(m)}^{N_{h,l}(m)} T_{r,l/2,j,k} (D_{l,k} - D_l^0) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^n, \quad l=1,2,\dots,N_w \quad (A.57)$$

denklemlerle verilir ve Denklem A.55'deki sağ-yan vektörünün ilk N_w elemanın denklemini temsil eder. Denklem A.55'deki sağ-yan vektörünün diğer N adet elemanına ($d_s^n, s=1,\dots,N$) ait denklem ise, Denklem A.15 ile verilen sonlu fark denklemin düzenlenmesiyle elde edilen

$$\begin{aligned} & T_{r,i+1/2,j,k} p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{r,i-1/2,j,k} p_{i-1,j,k}^{n+1} + T_{\theta,i,j+1/2,k} p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{\theta,i,j-1/2,k} p_{i,j-1,k}^{n+1} \\ & + T_{z,i,j,k+1/2} p_{i,j,k+1}^{n+1} + T_{z,i,j,k-1/2} p_{i,j,k-1}^{n+1} - (\sum T_{i,j,k}) p_{i,j,k}^{n+1} = d_s^n \end{aligned} \quad (A.58)$$

denklemden elde edilir. Burada d_s^n

$$d_s^n = -\tilde{V}_s^{n+1} p_s^n + \tilde{\gamma}_{z,s}, \quad s=1,\dots,N \quad (A.59)$$

denklemlerle verilir ve Bölüm 2'de açıklanan ve Denklem 2.65 ile tanımlanan tek boyutlu sıralamaya ait indeksi temsil eder:

$$s = i + (j-1) \times N_r + (k-1) \times N_r \times N_\theta; \quad i=1,\dots,N_r, j=1,\dots,N_\theta, k=1,\dots,N_z \quad (A.60)$$

Denklem A.58 ($\sum T_{i,j,k}$) ve Denklem A.59'de ise $\tilde{V}_s^{n+1}$ ve $\tilde{\gamma}_{z,s}$ terimleri

$$\begin{aligned} \sum T_{i,j,k} &= T_{r,i+1/2,j,k} + T_{r,i-1/2,j,k} + T_{\theta,i,j+1/2,k} + T_{\theta,i,j-1/2,k} + T_{z,i,j,k+1/2} + T_{z,i,j,k-1/2} \\ &+ \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \end{aligned} \quad (A.61)$$

$$\tilde{\gamma}_{z,s} = \gamma_{z,i,j,k+1/2} - \gamma_{z,i,j,k-1/2}, \quad (A.62)$$

ve

$$\tilde{V}_s^{n+1} = \frac{V_{p,s}}{\Delta t^{n+1}} \quad (A.63)$$

olarak tanımlanır. Denklem A.63'de $V_{p,s}$ (veya üç boyutlu indekslemeyle $V_{p,i,j,k}$)

$$V_{p,s}^1 = c_1 \phi_{i,j,k} c_{t,i,j,k} \frac{\Delta\theta_j}{2} (r_{i-1/2}^2 - r_{i+1/2}^2) \Delta z_k \quad (\text{A.64})$$

denklemleriyle verilir.

A.5 Başlangıç Koşulu

Denklem A.53 ile verilen matris problemi, $n=0,1,2,\dots,n_e$ (burada n_e simülasyonun bitiş adımını temsil etmektedir) olacak şekilde çözümlenir. $n = 0$ olduğunda, Denklem A.53,

$$A_1 \bar{p}^1 = \bar{d}^0 \quad (\text{A.65})$$

şeklinde yazılır ve denklemdeki sağ yan vektör, $\bar{d}^0$ başlangıç basınç değerlerinden hesaplanır. Hatırlanacağı gibi, kuyuyu sınırlayıcı denklemler için sağ-yan vektörünün ilk N_w adet elemanı Denklem A.56 ile verilir. Denklem A.57, $n = 0$ için

$$d_{w,l}^0 = \frac{q_l^1}{c_2} + \gamma \sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{ob,l}(m)}^{N_{as,l}(m)} \sum_{k=N_{hb,l}(m)}^{N_{hs,l}(m)} T_{r,1/2,j,k} (D_{l,k} - D_l^0) - \Psi_l^1 p_{wf,l}^0, \quad l = 1, 2, \dots, N_w \quad (\text{A.66})$$

şeklinde verilir. Burada $p_{wf,l}^0$, 1. “kuyu” için kuyudibi ilk akış (referans) basıncını temsil etmektedir ve kullanıcı tarafından değeri belirlenmelidir. Dikkat edilecek olursa, kuyuyu depolamasının sıfırdan farklı olduğu durumlarda, kuyudibi ilk basıncı rezervuar içersindeki basınçtan farklı olarak düşünülebilecektir. Aslında, bu durum denge üstü (overbalance) ve denge altı (underbalance) sondaj koşulları sonrasında yapılacak basınç testlerin daha gerçekçi olarak modellenmesine imkan tanımaktadır. Böyle durumlarda, kuyu ile rezervuar hidrostatik dengede olmayacaktır. Örneğin, denge üstü durumunda, kuyu içersindeki ilk basınç, rezervuar içersindeki ilk basınçtan daha büyük olacaktır.

Hatırlanacağı gibi, rezervuar sistemi için sağ-yan vektörünün N adet elemanı elemanı Denklem A-58 ile verilir. Denklem A.58, $n = 0$ için

$$d_s^0 = -\tilde{V}_s^1 p_s^0 + \tilde{\gamma}_{z,s}, \quad s=1,\dots,N \quad (\text{A.67})$$

Burada p_s^0 , Denklem A-60 ile verilen bir boyulu indekse göre s .ninci gridbloğunun ilk basıncını temsil etmektedir ve aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanır:

$$p_s^0 = p^0 + \gamma(D_s - D^0). \quad (\text{A.68})$$

Burada D^0 , bir ilk basınç değerinin p^0 bilindiği referans derinliği (datum) temsil etmektedir ve bu referans derinlik kullanıcı tarafından belirlenmektedir. Uygulamalarımızda, D^0 formasyonun üst noktasının deniz seviyesinden derinliği olarak alınmıştır.

A.6 Simülasyon Zaman Adımlarının Belirlenmesi

Denklem A.53 ile verilen matris-vektör problemi, $t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots, n_e$ olarak çözülür. Burada Δt^{n+1} simülatörde kullanılacak zaman adımlarını temsil eder. Çalışmada zaman adımları logaritmik zaman ekseninde ($\ln(t)$ veya $\log(t)$) eşit olacak şekilde seçilmektedir. Bu yöntem, genelde kuyubasınç testi verilerinin örneklenmesinde (sampling) de kullanılmaktadır ve basınç değişiminin fazla olduğu erken zamanlarda ve ani debi değişikliklerinde, t ekseninde küçük zaman adımlarının seçilmesine ve değişimin az olduğu zaman değerlerinde ise t ekseninde büyük zaman adımlarının kullanımını sağlamaktadır. Dolayısıyla, bu yöntemle basıncın hızlı ve büyük değişim gösterdiği zaman değerlerinde, daha hassas şekilde hesaplanması mümkün olmaktadır. Bu yöntemde, kullanıcı tarafından, başlangıç ($t_b \neq 0$) ve bitiş (t_s) zamanları verilen bir sabit debi aralığında (simülatörde debi-zaman verileri, parçalı sürekli bir fonksiyon olarak modellenmektedir), logaritmik zaman eksenindeki geometrik faktör α_t

$$\alpha_t = \left(\frac{t_s}{t_b} \right)^{1/N_t}. \quad (\text{A.69})$$

denkleminde hesaplanır. Burada N_t , $[t_b, t_s]$ zaman aralığında kullanılacak toplam zaman noktası sayısını göstermektedir ve bu değer kullanıcı tarafından seçilen log devri başına kullanılacak toplam zaman noktası değerinden (N_{devir}) aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanır:

$$N_t = \text{nint}[N_{devir} \log(t_s / t_b)] \quad (\text{A.70})$$

Burada $\text{nint}(x)$, en yakın tam sayı değerini göstermektedir. Geometrik faktör α_t hesaplandıktan sonra, zaman değerleri,

$$t^{n+1} = t^n \alpha_t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.71})$$

denkleminde hesaplanır. Denklem A.68 ile hesaplanan zaman değerlerinden de, zaman adımları

$$\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.72})$$

denkleminde hesaplanır.

EK-B

3B r - θ - z SAYISAL SİMÜLATÖRÜ İÇİN GRADYENT VE ADJOINT SİMÜLATÖR YÖNTEMLERİ İÇİN DUYARLILIK KATSAYISI DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ

Burada, 3B r - θ - z simülatörü ile doğrusal olmayan parametre tahmini yapıldığında, duyarlılık basınç verilerinin parametrelere göre duyarlılık katsayılarının hesaplanabileceği gradyent ve adjoint simülatör yöntemlerine ait denklemler türetilmektedir. İzleyen alt bölümlerde önce gradyent simülatör, daha sonrada adjoint yöntem için denklemler sunulmaktadır.

B.1 Gradyent Simülatör Yöntemi

Gradient simülatör yöntemine ait duyarlılık katsayısı denklemleri Bölüm 2’de ve Ek-A’da ayrıntılı olarak verilen 3B r - θ - z simülatörü için bloklar arasında yazılan ayrık denklemlerle (sonlu fark) ve kuyiçi sınırlayıcı ayrık denklemlerin birlikte kullanılmasıyla türetilir. Dolayısıyla, Bölüm 2 ve Ek-A’da türetilen ilgili ayrık denklemler burada bir kez daha özetlenecektir.

Bölüm 2 ve Ek-A’dan hatırlanacağı gibi (Denklem A.37), en genel şekliyle N_w adet kuyiçi sınırlayıcı denklem

$$\sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{\theta,l}(m)}^{N_{\theta,l}(m)} \sum_{k=N_{h,l}(m)}^{N_{h,l}(m)} T_{r,l/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^{n+1} = \frac{q_l^{n+1}}{c_2} + \gamma \sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{\theta,l}(m)}^{N_{\theta,l}(m)} \sum_{k=N_{h,l}(m)}^{N_{h,l}(m)} T_{r,l/2,j,k} (D_{l,k} - D_l^0) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^n, \quad l = 1, 2, \dots, N_w \quad (B.1)$$

ayrık denklemi şeklinde ifade edilir. Herhangi bir (i, j, k) gridbloğu için ayrık denklem ise

$$\begin{aligned} & T_{r,j+1/2,j,k} (p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{r,i-1/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) + T_{\theta,i,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) \\ & - T_{\theta,i,j-1/2,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) + T_{z,i,j,k+1/2} (p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{z,i,j,k-1/2} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) \\ & = \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) + \gamma_{z,i,j,k+1/2} - \gamma_{z,i,j,k-1/2} \end{aligned} \quad (B.2)$$

şeklinde verilir. Ayrıca Ek-A'dan hatırlanacağı gibi, üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerin bulunduğu gridbloklarda Denklem B.2 ile verilen genel ayrık denklemi $i=1, j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m), m = 1, \dots, N_{a,l}, l = 1, \dots, N_w$, için kullanılırken aşağıdaki gibi değiştirilir (Denklem A.38):

$$\begin{aligned}
& T_{r,3/2,j,k} (p_{2,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) \\
& + T_{\theta,1,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,1,j-1/2,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j-1,k}^{n+1}) \\
& + T_{z,1,j,k+1/2} (p_{1,j,k+1}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{z,1,j,k-1/2} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k-1}^{n+1}) \\
& = \tilde{V}_{1,j,k}^{n+1} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^n) + \gamma_{z,1,j,k+1/2} - \gamma_{z,1,j,k-1/2} - T_{r,1/2,j,k} \gamma (D_{l,k} - D_l^0)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Denklem B.1, Denklem B.2 ve Denklem B.3'de kullanılan tüm değişkenlere ve indekslere ait tanımlamalar Bölüm 2 ve Ek-A'da verilmiştir.

Bölüm 2 ve Ek-A'da detaylı olarak gösterildiği gibi, Denklem B.1, Denklem B.2 ve Denklem B.3 kullanılacak uygun başlangıç ve sınır koşulları ile matris-vektör formunda yazılır (Ek-A, Denklem A.52) ve ileri simülatör uygulamasıyla, basınçlar her zaman adımında hesaplanır.

3 boyutlu indekslemeyi baitleştirme amacıyla, Bölüm 2'de değinilen blok indekslemesi kullanılacaktır. Bir başka deyişle, blok indekslemesinde r indeksine sahip gridbloğu, 3 boyutlu indekslemede koordinatı (i, j, k) olan gridbloğuna karşılık gelir. Bu indekslemede birincil değişkenler (primary variables) olarak isimlendirilen gridblok basınçları, p_r , for $r=1, \dots, N$, ($N = N_r \times N_\theta \times N_z$) ile N_w tane kuyu basıncı, $p_{wf,l}$ for $l=1, \dots, N_w$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\tilde{p}^{n+1}$ 'i $n+1$ zaman adımındaki ileri simülatör uygulamasından hesaplanan birincil değişkenleri (basınçları) ihtiva eden $N+N_w$ boyutlu bir sütun vektörü olarak tanımlarsak,

$$\vec{p}^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{wf,1}^{n+1} \\ p_{wf,2}^{n+1} \\ \vdots \\ p_{wf,N_w}^{n+1} \\ p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ \vdots \\ p_N^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (B.4)$$

Denklem B-1 ile tanımlanan kuyu sınırlayıcı ve Denklem B.2 ve Denklem B.3 ile tanımlı gridbloklar için yazılan ayırık denklem takımlarını, sırasıyla, aşağıdaki denklemlerle temsil edebiliriz:

$$f_{w,l}(\vec{p}^{n+1}, \vec{p}^n, \vec{m}) = f_{w,l}^{n+1} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N_w \quad (B.5)$$

ve

$$f_r(\vec{p}^{n+1}, \vec{p}^n, \vec{m}) = f_r^{n+1} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (B.6)$$

Denklemler B.5 ve B.6'da, $\vec{m}$, M boyutlu ($M = 5N + 2N_w$) model parametre vektörünü temsil eder ve

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{k}_r \\ \vec{k}_\theta \\ \vec{k}_z \\ \vec{S} \\ \vec{C} \\ \vec{p}^0 \\ \vec{p}_{wf}^0 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

şeklinde yazılır. Burada $\vec{k}_r$, r yönünde gridblok geçirgenliklerini ihtiva eden N boyutlu vektör, $\vec{k}_\theta$, θ yönünde gridblok geçirgenliklerini ihtiva eden N boyutlu

vektör, $\vec{k}_z$, z yönünde gridblok geçirgenliklerini ihtiva eden N boyutlu vektör, $\vec{\phi}$ gridblok gözenekliliklerini ihtiva eden N boyutlu vektördür. $\vec{p}^0$ her gridbloktaki ilk basınçları ihtiva eden N boyutlu vektör ve $\vec{p}_{wf}^0$ ise, $t = 0$ anındaki ilk kuyudibi akış basınçlarını ihtiva eden N_w boyutlu vektördür. $\vec{c}$, kuyuiçi depolama katsayılarını ihtiva eden N_w boyutlu vektör ve $\vec{S}$, zar faktörlerini ihtiva eden $N_s = \sum_{l=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{N_{a,l}} (N_{\theta s,m} - N_{\theta b,m} + 1)(N_{hs,m} - N_{hb,m} + 1)$ boyutlu vektördür. Denklem B.5 ve B.6 ile verilen denklem sistemi, aşağıda ifade edilen vektör denklemini şeklinde yazılabilir:

$$\vec{f}^{n+1} = \vec{f}(\vec{p}^{n+1}, \vec{p}^n, \vec{m}) = \begin{bmatrix} f_{w,1}^{n+1} \\ f_{w,1}^{n+1} \\ \vdots \\ f_{w,N_w}^{n+1} \\ f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{B.8})$$

Dikkat edilecek olursa, hem $\vec{p}^{n+1}$ hem de $\vec{f}^{n+1}$ $N+N_w$ boyutlu sütun vektörleridir. Denklem B.8'de kuyusınırlayıcı ve gridblok ayrık denklemleri, sırasıyla, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$f_{w,l}^{n+1} = \sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{\theta b,l}(m)}^{N_{\theta s,l}(m)} \sum_{k=N_{hb,l}(m)}^{N_{hs,l}(m)} T_{r,l/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^{n+1} - \frac{q_l^{n+1}}{c_2} - \gamma \sum_{m=1}^{N_{a,l}} \sum_{j=N_{\theta b,l}(m)}^{N_{\theta s,l}(m)} \sum_{k=N_{hb,l}(m)}^{N_{hs,l}(m)} T_{r,l/2,j,k} (D_{l,k} - D_l^0) + \Psi_l^{n+1} p_{wf,l}^n, \quad l = 1, 2, \dots, N_w \quad (\text{B.9})$$

ve

$$f_r^{n+1} \equiv f_{i,j,k}^{n+1} = T_{r,i+1/2,j,k} (p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{r,i-1/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) + T_{\theta,i,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,i,j-1/2,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) + T_{z,i,j,k+1/2} (p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{z,i,j,k-1/2} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) - \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) - \gamma_{z,i,j,k+1/2} + \gamma_{z,i,j,k-1/2} \quad (\text{B.10a})$$

Denklem B.10a ile verilen genel ayrık denklemi $i=1$, $j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m)$, $k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m)$, $m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$, için kullanılırken Denklem B.3 göz önünde bulundurulacaktır, yani

$$\begin{aligned} f_r^{n+1} = & T_{r,3/2,j,k} (p_{2,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) \\ & + T_{\theta,1,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,1,j-1/2,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j-1,k}^{n+1}) \\ & + T_{z,1,j,k+1/2} (p_{1,j,k+1}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{z,1,j,k-1/2} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k-1}^{n+1}) \\ & - \tilde{V}_{1,j,k}^{n+1} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^n) - \gamma_{z,1,j,k+1/2} + \gamma_{z,1,j,k-1/2} + T_{r,1/2,j,k} \gamma (D_{l,k} - D_l^0) \end{aligned} \quad (B.10b)$$

denklemlerle değiştirilecektir.

Gradyent simülâtör yönteminde (Anterion ve diğ., 1989; Killough, 1995, Bi ve diğ., 2000), Denklem B.8'in, bilinmeyen model parametresi m_r 'ye göre türevinin alınmasıyla elde edilir:

$$\frac{d\tilde{f}(\tilde{p}^{n+1}, \tilde{p}^n, \tilde{m})}{dm_r} = \frac{d\tilde{f}^{n+1}}{dm_r} = \left[\nabla_{\tilde{p}^{n+1}} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \tilde{p}^{n+1}}{\partial m_r} + \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \tilde{p}^n}{\partial m_r} + \frac{\partial \tilde{f}^{n+1}}{\partial m_r} = 0. \quad (B.11)$$

ve Denklem B.11 düzenlemesinden

$$\left[\nabla_{\tilde{p}^{n+1}} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \tilde{p}^{n+1}}{\partial m_r} = - \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T \frac{\partial \tilde{p}^n}{\partial m_r} - \frac{\partial \tilde{f}^{n+1}}{\partial m_r}, \quad (B.12)$$

$n=0,1,\dots,L$ için duyarlılık katsayısını hesaplayabileceğimiz denklem elde edilir.

Denklem B.12'den de anlaşılacağı gibi, gradyent simülâtör yönteminde, duyarlılık katsayılarını verilen bir zaman adımı n 'de hesaplayabilmek için Denklem B.12'yi toplam parametre sayısı $M+1$ kez çözümlmek gerekecektir. İleride gösterileceği gibi, Denklem B.12'nin sol tarafındaki katsayı matrisi $\left[\nabla_{\tilde{p}^{n+1}} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T$, ileri simülâtör uygulamasında basınçları çözmek için kullanılan katsayı matrisine eşittir. Bu nedenle, Denklem B.12'nin sadece sağ tarafındaki vektör sürekli değişir. Bir başka ifadeyle, Denklem B.12'nin sadece sağ tarafını verilen bir zaman adımı n 'de M kez değiştirilerek, tüm duyarlılık katsayılarını hesaplanır. Seyrek (sparse) matris teknikleri

kullanılırsa ki biz uygulamalarımızda seyrek matris teknikleri kullanmaktayız, sadece n . adımda, katsayı matrisinin bir kez ayrışımı (örneğin LU ayrışımı) yapılır ve daha sonra geri-ileri yer değiştirme her bir sağ yan vektörü için uygulanarak n 'ci adımdaki tüm duyarlılık katsayıları hesaplanır. Denklem B.12'yi $\partial \bar{p}^{n+1} / \partial m_r$, $(N_w + N)$ -boyutlu vektördür ve elemanları birincil değişkenlerin (basınçların, Denklem B.4) model parametresi m_r 'ye göre türevlerini, yani duyarlılık katsayılarını, ihtiva eder. $n = 0$ için, Denklem B.12 çözümlenirken, $\partial \bar{p}^0 / \partial m_r = \bar{0}$ alınır.

B.1.1 Duyarlılık Katsayıları İçin Formüller.

Denklem B.12'den duyarlılık katsayılarını hesaplamak için, Denklem B.12'nin sol

tarafındaki $(N_w + N) \times (N_w + N)$ boyutlu kat sayı matrisi $\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$

$$\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \\ \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \\ \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \\ \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^{n+1}} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_1^{n+1}} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_2^{n+1}} & \dots & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_N^{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (B.13)$$

oluşturmak gerekir. Ancak bu matris, gösterilebilir ki, ileri simülör uygulamasında basınçları çözmek için kullanılan katsayı matrisinin aynısıdır, yani

$$\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T = A_{n+1} \text{ (Denklem A.52 veya Bölüm 2, Şekil 2.9). Dolayısıyla,}$$

Denklem B.12'nin sol tarafındaki bu katsayı matrisi doğrudan ileri simülör uygulamasındaki $n+1$ zaman adımındaki katsayı matrisi A_{n+1} 'e eşit alınır.

Denklem B.12'nin, sağ tarafındaki $(N_w+N) \times (N_w+N)$ boyutlu $\left[\nabla_{\vec{p}^n} (\vec{f}^{n+1})^T \right]^T$ matris

$$\left[\nabla_{\vec{p}^n} (\vec{f}^{n+1})^T \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial p_N^n} \\ \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial p_N^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial p_N^n} \\ \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial p_N^n} \\ \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial p_N^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_1^n} & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial p_N^n} \end{bmatrix}. \quad (B.14)$$

şeklinde verilir.

Denklem B.12'de, $\partial \vec{p}^{n+1} / \partial m_r$, (N_w+N) -boyutlu sütun vektörüdür:

$$\frac{\partial \vec{p}^{n+1}}{\partial m_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,1}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial p_{wf,2}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,N_w}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial p_1^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial p_2^{n+1}}{\partial m_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_N^{n+1}}{\partial m_r} \end{bmatrix} \quad (B.15)$$

Denklem B.12'de $\partial \vec{f}^{n+1} / \partial m_r$ ise $(N+1)$ -boyutlu sütun vektörüdür (kaynak terimi olarak da isimlendirilir):

$$\frac{\partial \bar{f}^{n+1}}{\partial m_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial m_r} \\ \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial m_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial m_r} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Denklem B.12 ile verilen gradyent sistemi denklemini çözmek için, $\left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T = A_{n+1}$ olduğundan, sadece $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisi ile $\partial \bar{f}^{n+1} / \partial m_r$ sütun vektörünü hesaplamamız gerekecektir. İzleyen alt bölümlerde bu matris ve sütun vektörünün 3B r-theta-z simülatörü için hesaplandığı formüller verilmektedir.

B.1.2 $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ Matrisinin Oluşturulması

Denklem B.10 ile verilen, gridbloklar için yazılmış ayrıık akış denklemlerini akış terimi (F) ve akümülayon termi (A) şeklinde iki kısımdan oluşacak şekilde yazabiliriz:

$$f_r^{n+1} = f_{i,j,k}^{n+1} = F_{i,j,k}^{n+1} - A_{i,j,k}^{n+1} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Akış ve akümülayon terimleri, sırasıyla, (Denklem B.12'den) aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} F_{i,j,k}^{n+1} = & T_{r,i+1/2,j,k} (p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{r,i-1/2,j,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) \\ & + T_{\theta,i,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,i,j-1/2,k} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) \\ & + T_{z,i,j,k+1/2} (p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{z,i,j,k-1/2} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

ve

$$A_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) + \gamma_{z,i,j,k+1/2} - \gamma_{z,i,j,k-1/2}. \quad (\text{B.19})$$

Ek-A'dan hatırlanacağı gibi, Denklem B.19'da

$$\gamma_{z,i,j,k+1/2} = T_{z,i,j,k+1/2} \gamma(D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}), \quad (\text{B.20})$$

$$\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{c_1 \phi_{i,j,k} c_{i,j,k}}{\Delta t^{n+1}} \frac{\Delta \theta_j}{2} (r_{i-1/2}^2 - r_{i+1/2}^2) \Delta z_k, \quad (\text{B.21})$$

şeklinde verilir.

Üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerin bulunduğu gridbloklar için ($i=1, j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m), m = 1, \dots, N_{a,l}, l = 1, \dots, N_w$)

Denklem B.17'de Denklem B.3'den elde edilen ve aşağıda verilen akış ve akümülayon terimleri kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} F_{1,j,k} = & T_{r,3/2,j,k} (p_{2,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{r,1/2,j,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) \\ & + T_{\theta,1,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - T_{\theta,1,j-1/2,k} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j-1,k}^{n+1}) \\ & + T_{z,1,j,k+1/2} (p_{1,j,k+1}^{n+1} - p_{1,j,k}^{n+1}) - T_{z,1,j,k-1/2} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$A_{1,j,k} = \tilde{V}_{1,j,k}^{n+1} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^n) + \gamma_{z,1,j,k+1/2} - \gamma_{z,1,j,k-1/2} - T_{r,1/2,j,k} \gamma(D_{1,k} - D_l^0) \quad (\text{B.23})$$

kullanılacaktır. (İleride Denklem B.9 ile verilen kuyu sınırlayıcı ayrık denklemlerin nasıl devreye sokulacağı konusuna girilecektir. Şimdilik sadece B.10a ve B.10b'den elde edilen sadece gridbloklar için yazılan ayrık akış denkleminde odaklanmaktayız.)

Denklem B.17'nin birincil değişken p_r^{n+1} 'e ($r \equiv (i,j,k)$) göre türevi

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_r^n} = \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_r^n} - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_r^n} \quad (\text{B.24})$$

denklemleriyle verilir. Denklem B.23, $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisinin elemanlarını temsil eder (Denklem B.14). Denklem B.17, Denklem B.18, Denklem B.19, Denklem B.22 ve Denklem B.23'den görülebileceği gibi, gridblok akış ayrık denklemlerinin sadece akümülayon terimleri, birincil değişken $p_r^n (\equiv p_{i,j,k}^n)$ ($r=1,2,\dots,N$) ihtiva ettiğinden ve $f_{i,j,k}$ denklemlerinin hiç biri birincil değişken $p_{wf,l}^n$ leri ($l=1,\dots,N_w$) ihtiva etmediğinden bu birincil değişkenlere göre tüm türevler sıfırdır. Dolayısıyla, $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisinin çapraz elemanları hariç tüm diğer elemanları sıfır olacaktır (Denklem B.14). Bir başka ifadeyle, $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ $(N_w+N) \times (N_w+N)$ boyutlu çapraz bir matris olacaktır. Dolayısıyla, bu matrisin $(p_r^n (\equiv p_{i,j,k}^n))$ ($r=1,2,\dots,N$) birincil değişkenine göre türevlerini ihtiva eden sıfır olmayan çapraz elemanları ayrık akış denklemleri $f_{i,j,k}^{n+1}$ 'dan hesaplanır:

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^n} = \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^n} - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^n} = - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^n} = \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}. \quad (B.25)$$

Şimdi de, Denklem B.14 ile verilen $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisinin, kuyu sınırlayıcı akış denklemlerin $f_{w,l}$ ($l=1,\dots,N_w$) birincil değişkenler göre türevlerini inceleyelim. Denklem B.9'dan görüleceği gibi, kuyu sınırlayıcı akış denklemleri $f_{w,l}$ ($l=1,\dots,N_w$) birincil değişkenler $p_{i,j,k}^n$ leri ihtiva etmemektedir. Dolayısıyla, $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisindeki kuyu sınırlayıcı akış denklemlerinin birincil değişkenler $p_{i,j,k}^n$ göre türevlerini temsil eden tüm elemanlar sıfırdır. Buna karşın, Denklem B.9'dan görüleceği gibi, kuyu sınırlayıcı akış denklemleri $f_{w,l}$ ($l=1,\dots,N_w$) birincil değişkenler $p_{wf,l}^n$ leri ihtiva etmektedir ve dolayısıyla, $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisindeki kuyu sınırlayıcı akış denklemlerinin birincil değişkenler $p_{wf,l}^n$ göre türevlerini temsil eden tüm çapraz elemanlar sıfırdan farklıdır. Bu türevler, Denklem B.9'dan elde edilen aşağıda verilen denklemden hesaplanır:

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial p_{wf,l}^n} = \Psi_l^{n+1}, \quad l = 1, 2, \dots, N_w. \quad (B.26)$$

Burada Ψ_l^{n+1} , Ek-A, Denklem A.35 ile tanımlanmaktadır.

Sonuç olarak, Denklem B.14 ile verilen $(N_w+N) \times (N_w+N)$ boyutlu $\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T$ matrisi, çapraz bir matristir ve çaprazındaki elemanlar Denklemler B.25 ve B.26 kullanılarak hesaplanır ve

$$\left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T = \begin{bmatrix} \Psi_1^{n+1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Psi_2^{n+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \Psi_{N_w}^{n+1} & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \tilde{V}_1^{n+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \tilde{V}_2^{n+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{V}_N^{n+1} \end{bmatrix} \quad (B.27)$$

denklemiyle ifade edilebilir.

B.1.3 Kaynak Terimi $\partial \bar{f}^{n+1} / \partial m_r$ Oluşturulması

Denklem B.12'den duyarlılık katsayılarını hesaplamak için, ayrık akış denklemlerinin verilen bir model parametresine göre türevlerini ihtiva eden $(N+N_w)$ -boyutlu “kaynak terimi” vektörünün elemanlarının (Denklem B.16) oluşturulması gerekir. İzleyen alt bölümlerde, bu vektörün çalışmada göz önünde bulundurulanan 3B r - θ - z simülatörü model parametrelerine göre ifadeleri oluşturulmaktadır.

B.1.3.1 Geçirgenliklere göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , herhangi bir gridbloktaki r , θ veya z -yönündeki geçirgenliği temsil ettiğinde ($m_r = k_r$, k_θ veya k_z), kaynak terimi $\partial \bar{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemleri sunuyoruz. Hatırlanacağı gibi, geçirgenlik vektörleri $\bar{k}_r$, $\bar{k}_\theta$, $\bar{k}_z$ N boyutludur ve sırasıyla aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir:

$$\bar{k}_r = [k_{r,1} \quad k_{r,2} \quad \cdots \quad k_{r,N}]^T \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{k}_\theta = [k_{\theta,1} \quad k_{\theta,2} \quad \cdots \quad k_{\theta,N}]^T \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{k}_z = [k_{z,1} \quad k_{z,2} \quad \cdots \quad k_{z,N}]^T \quad (\text{B.30})$$

Denklem B.18 ve B.19'dan dikkat edilecek olursa, gridblok ayrık denklemlerinin (üretim aralığı ve gözlem problemlerinin olduğu gridbloklar hariç) akış terimi (Denklem B.18) geçirgenlik k (k_r , k_θ ve k_z) ve akümülayon terimi (Denklem B.19) ise sadece k_z 'ye bağımlıdır (T iletkenlik ve $\gamma_{z,i,j,k+1/2}$ “gravite” tanımları Ek-A'da verilmiştir). Dolayısıyla, Denklem B.17 ile verilen gridblok ayrık denklemlerinin $k = k_r$ veya k_θ 'ya göre türevleri

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k} = \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k}; \quad k = k_r, k_\theta \quad (\text{B.31})$$

denklemlerinden, $k = k_z$ 'ye göre türevi ise

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k} = \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k} - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k}; \quad k = k_z \quad (\text{B.32})$$

denklemlerinden hesaplanır.

Üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerinin bulunduğu gridbloklar ($i=1, j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m), m = 1, \dots, N_{a,l}, l = 1, \dots, N_w$) söz konusu olduğunda, Denklemler B.22 ve B.23'den görüldüğü gibi, akış terimi (Denklem B.22) geçirgenlik k (k_r , k_θ ve k_z) ve akümülayon terimi (Denklem B.23) ise k_r ve k_z 'ye bağımlıdır. Bu nedenle, üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerinin bulunduğu gridbloklarda, $k = k_r$ 'a göre türevler,

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k} = \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k} - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k}; \quad k = k_r, \quad (\text{B.33})$$

$k = k_z$ 'de göre türevler,

$$\frac{\partial f_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k} = \frac{\partial F_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k} - \frac{\partial A_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k}; \quad k = k_z, \quad (\text{B.34})$$

ve $k = k_\theta$ 'ya göre türevler

$$\frac{\partial f_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k} = \frac{\partial F_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k}; \quad k = k_\theta, \quad (\text{B.35})$$

denklemlerinden hesaplanır.

Kuyudibi sınırlayıcı akış denklemleri söz konusu olduğunda, Denklem B.9'dan açıkça görüleceği gibi, kuyudibi sınırlayıcı akış denklemleri, sadece r -yönündeki iletkenliklere dolayısıyla sadece r -yönündeki geçirgenliklere bağlıdır (k_θ ve k_z 'den bağımsızdır). Dolayısıyla, kuyudibi sınırlayıcı akış denklemlerinin ($l=1,2,\dots,N_w$) θ -ve z -yönündeki geçirgenliklere göre türevleri sıfırdır ve r -yönündeki geçirgenliklere göre türevleri, $\partial f_{w,l}^{n+1} / \partial k_r$, $l = 1,2,\dots,N_w$, sıfırdan farklıdır.

Denklem B.18 ve B.22'den görüleceği gibi, $(i+1,j,k)$, (i,j,k) ve $(i-1,j,k)$ gridbloklarındaki akış terimleri, $k_{r,i,j,k}$ 'ye, $(i,j+1,k)$, (i,j,k) ve $(i,j-1,k)$ gridbloklarındaki akış terimleri $k_{\theta,i,j,k}$ 'ya ve $(i,j,k+1)$, (i,j,k) ve $(i,j,k-1)$ gridbloklardaki akış terimleri $k_{z,i,j,k}$ 'ye bağımlıdır. O halde, $(i \pm 1, j, k)$ gridbloklarındaki akış terimlerinin $k_{r,i,j,k}$ 'ya göre türevleri

$$\frac{\partial F_{i \pm 1, j, k}^{n+1}}{\partial k_{r, i, j, k}} = \frac{\partial T_{r, i \pm 1/2, j, k}}{\partial k_{r, i, j, k}} (p_{i, j, k}^{n+1} - p_{i \pm 1, j, k}^{n+1}) \quad (\text{B.36})$$

ve $(i, j \pm 1, k)$ gridbloklarındaki akış terimlerinin $k_{\theta, i, j, k}$ 'ya göre türevleri

$$\frac{\partial F_{i, j \pm 1, k}^{n+1}}{\partial k_{\theta, i, j, k}} = \frac{\partial T_{\theta, i, j \pm 1/2, k}}{\partial k_{\theta, i, j, k}} (p_{i, j, k}^{n+1} - p_{i, j \pm 1, k}^{n+1}) \quad (\text{B.37})$$

ve $(i, j, k \pm 1)$ gridbloklarındaki akış terimlerinin $k_{z, i, j, k}$ 'ya göre türevleri

$$\frac{\partial F_{i,j,k\pm 1}^{n+1}}{\partial k_{z,i,j,k}} = \frac{\partial T_{z,i,j,k\pm 1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k\pm 1}^{n+1}) \quad (\text{B.38})$$

denklemlerinden hesaplanabilir. (i,j,k) gridbloğu için akış teriminin, sırasıyla, $k_{r,i,j,k}$, $k_{\theta,i,j,k}$, $k_{z,i,j,k}$ türevleri ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k_{r,i,j,k}} &= - \left(\frac{\partial F_{i+1,j,k}^{n+1}}{\partial k_{r,i,j,k}} + \frac{\partial F_{i-1,j,k}^{n+1}}{\partial k_{r,i,j,k}} \right) \\ \text{or} \\ &= - \frac{\partial T_{r,i+1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i+1,j,k}^{n+1}) - \frac{\partial T_{r,i-1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} &= - \left(\frac{\partial F_{i,j+1,k}^{n+1}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} + \frac{\partial F_{i,j-1,k}^{n+1}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} \right) \\ \text{or} \\ &= - \frac{\partial T_{\theta,i,j+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j+1,k}^{n+1}) - \frac{\partial T_{\theta,i,j-1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k_{z,i,j,k}} &= - \left(\frac{\partial F_{i,j,k+1}^{n+1}}{\partial k_{z,i,j,k}} + \frac{\partial F_{i,j,k-1}^{n+1}}{\partial k_{z,i,j,k}} \right) \\ \text{veya} \\ &= - \frac{\partial T_{z,i,j,k+1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k+1}^{n+1}) - \frac{\partial T_{z,i,j,k-1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

denklemlerinden hesaplanır.

Denklem B.32’de gerekli olan akümülyasyon terimleri $A_{i,j,k}$ ’nın $k_{z,i,j,k}$ ’ya göre türevleri Denklem B.19 (ve B.20) kullanılarak elde edilen

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial k_{z,i,j,k}} &= \frac{\partial \gamma_{z,i,j,k+1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} - \frac{\partial \gamma_{z,i,j,k-1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} \\ &= \frac{\partial T_{z,i,j,k+1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} \gamma(D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - \frac{\partial T_{z,i,j,k-1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} \gamma(D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

denklemden hesaplanır. Denklem B.33’de gerekli olan akümülayon terimleri $A_{1,j,k}$ ’nın $k_{r,1,j,k}$ ’ya göre türevleri Denklem B.23 kullanılarak elde edilen

$$\frac{\partial A_{1,j,k}^{n+1}}{\partial k_{r,1,j,k}} = -\gamma(D_{l,k} - D_l^0) \frac{\partial T_{r,1/2,j,k}}{\partial k_{r,1,j,k}} \quad (\text{B.43})$$

denklemden hesaplanır.

Son olarak, Denklem B.9 ile verilen kuyudibi akış sınırlayıcı denklemlerinin $(f_{w,l}^{n+1}, l = 1, 2, \dots, N_w)$ r -yönündeki $k_{r,i,j,k}$ geçirgenliklerine göre türevlerini hesaplayacağımız denklemleri türetiyoruz. Denklem B.9’da görüleceği gibi, $f_{w,l}$ sadece $T_{r,1/2,j,k}$ iletkenlik terimini içerir ve dolayısıyla sadece $f_{w,l}$ ’nin $k_{r,1,j,k}$ ($j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m)$, $m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$) türevleri sıfırdan farklı olacaktır. Bu türevler

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial k_{r,1,j,k}} = \frac{\partial T_{r,1/2,j,k}}{\partial k_{r,1,j,k}} \left[(p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \gamma(D_{l,k} - D_l^0) \right] \quad (\text{B.44})$$

($j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m)$, $m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$) olacak şekilde denklemden hesaplanır.

Denklem B.36 - Denklem B.44’de gerekli iletkenlik T ’lerin geçirgenliklere göre kısmi türevleri izleyen alt bölümde sunulmaktadır.

B.1.3.1.1 İletkenlik T ’lerin geçirgenliklere göre kısmi türevleri

Ek-A’da r -yönü için iletkenlik tanımları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$T_{r,i+1/2,j,k} = \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1} - r_i} \right) \Delta z_k \Delta \theta_j \frac{k_{r,i+1/2,j,k}}{\mu_{i+1/2,j,k}} \quad (\text{B.45})$$

$i=1, \dots, N_r-1$, $j=1, \dots, N_\theta$, $k = 1, \dots, N_z$. Üretim aralığı ve gözlem probleminin olduğu noktalar için ($m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$)

$$T_{r,1/2,j,k} = \begin{cases} \frac{\Delta\theta_j \Delta z_k k_{r,1,j,k}}{\mu_{1,j,k} \left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln\left(\frac{r_{3/2}}{r_w}\right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, & \begin{cases} j = N_{\theta h,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m) \\ k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m) \end{cases} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

ve r -yönünde akışa kapalı sınır modellemek için tüm j ve k değerleri için

$$T_{r,N_r+1/2,j,k} = 0. \quad (\text{B.47})$$

Benzer şekilde θ -yönündeki iletkenlikler aşağıdaki denklemler tanımlanır:

$$T_{\theta,i,j+1/2,k} = \frac{\ln[r_{i+1/2}/r_{i-1/2}]\Delta z_k}{\Delta\theta_j} \frac{k_{\theta,i,j+1/2,k}}{\mu_{i,j+1/2,k}} \quad (\text{B.48})$$

$j=1, \dots, N_\theta-1$, tüm i ve k değerleri için. Eğer $\theta_0 = 0$ and $\theta_e \neq 2\pi$ olacak şekilde θ -yönünde kısmi akışa kapalı sınırlar modelliyorsak,

$$T_{\theta,i,1/2,k} = T_{\theta,i,N_\theta+1/2,k} = 0 \quad (\text{B.49})$$

olarak alınır. Buna karşın $\theta_0 = 0$ and $\theta_e = 2\pi$ olacak şekilde θ -yönünde tümüyle akışa kapalı sınır modelliyorsak, akıda sürekliliği sağlamak için

$$T_{\theta,i,1/2,k} = T_{\theta,i,N_\theta+1/2,k} = \frac{\ln[r_{i+1/2}/r_{i-1/2}]\Delta z_k}{\theta_{N_\theta} - \theta_1} \frac{k_{\theta,i,1/2,k}}{\mu_{i,1/2,k}} \quad (\text{B.50})$$

(burada $k_{\theta,i,1/2,k} = k_{\theta,i,N_\theta+1/2,k}$, ve $\mu_{i,1/2,k} = \mu_{i,N_\theta+1/2,k}$) denklemi kullanılır.

z -yönündeki iletkenlikler aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$T_{z,i,j,k+1/2} = \frac{\Delta\theta_j (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{2(z_{k+1} - z_k)} \frac{k_{z,i,j,k+1/2}}{\mu_{i,j,k+1/2}} \quad (\text{B.51})$$

$k=1, \dots, N_z-1$, tüm i ve j değerleri için. Akışa kapalı alt ve üst sınırlar için

$$T_{z,i,j,1/2} = T_{z,i,j,N_z+1/2} = 0 \quad (\text{B.52})$$

olarak alınır.

r -yönünde gridblok sınırlarındaki geçirgenlikler ($1 < i \leq N_r - 1$, $1 \leq j \leq N_\theta$, $1 \leq k \leq N_z$ için) gridbloklardaki geçirgenliklere bilinen harmonik ortalama formülüyle ilişkilendirilir:

$$k_{r,i+1/2,j,k} = \frac{k_{r,i,j,k} k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1} / r_i)}{k_{r,i,j,k} \ln(r_{i+1} / r_{i+1/2}) + k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)} \quad (\text{B.53})$$

Sınırlarda ise,

$$k_{r,1/2,j,k} = k_{r,1,j,k} \quad (\text{B.54})$$

$$k_{r,N_r+1/2,j,k} = k_{r,N_r,j,k} \quad (\text{B.55})$$

olarak alınır.

O halde r -yönü geçirgenlikleri için aşağıdaki kısmi türevleri ($1 < i \leq N_r - 1$, $1 \leq j \leq N_\theta$, $1 \leq k \leq N_z$ için) aşağıdaki formüllerden hesaplanabilir:

$$\frac{\partial k_{r,i+1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} = \frac{k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)}{k_{r,i,j,k} [k_{r,i,j,k} \ln(r_{i+1} / r_{i+1/2}) + k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)]} k_{r,i+1/2,j,k} \quad (\text{B.56})$$

ve sınırlarda

$$\frac{\partial k_{r,1/2,j,k}}{\partial k_{r,1,j,k}} = \frac{\partial k_{r,N_r+1/2,j,k}}{\partial k_{r,N_r,j,k}} = 1. \quad (\text{B.57})$$

Diğer r -yönü için gerekli türevleri ($1 < i \leq N_r$, $1 \leq j \leq N_\theta$, $1 \leq k \leq N_z$ için) kısmi türevler

$$k_{r,i-1/2,j,k} = \frac{k_{r,i-1,j,k} k_{r,j,k} \ln(r_i / r_{i-1})}{k_{r,i-1,j,k} \ln(r_i / r_{i-1/2}) + k_{r,j,k} \ln(r_{i-1/2} / r_{i-1})} \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial k_{r,i-1/2,j,k}}{\partial k_{r,j,k}} = \frac{k_{r,i-1,j,k} \ln(r_i / r_{i-1/2})}{k_{r,j,k} [k_{r,i-1,j,k} \ln(r_i / r_{i-1/2}) + k_{r,j,k} \ln(r_{i-1/2} / r_{i-1})]} k_{r,i-1/2,j,k} \quad (\text{B.59})$$

denklemden hesaplanır.

Benzer şekilde, θ -yönü için gridblok sınır geçirgenlikleri ve $k_{\theta,i,j+1/2,k}$ ve $k_{\theta,i,j-1/2,k}$ 'nın $k_{\theta,i,j,k}$ 'ya göre kısmi türevleri aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$k_{\theta,i,j+1/2,k} = \frac{k_{\theta,i,j,k} k_{\theta,i,j+1,k} (\theta_{j+1} - \theta_j)}{k_{\theta,i,j+1,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j) + k_{\theta,i,j,k} (\theta_{j+1} - \theta_{j+1/2})} \quad (\text{B.60})$$

$j=1, \dots, N_\theta-1$ için

$$\frac{\partial k_{\theta,i,j+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} = \frac{k_{\theta,i+1,j,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j)}{k_{\theta,i,j,k} [k_{\theta,i,j,k} (\theta_{j+1} - \theta_{j+1/2}) + k_{\theta,i+1,j,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j)]} k_{\theta,i,j+1/2,k} \quad (\text{B.61})$$

ve

$$\frac{\partial k_{\theta,i,j-1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} = \frac{k_{\theta,i,j-1,k} (\theta_j - \theta_{j-1/2})}{k_{\theta,i,j,k} [k_{\theta,i,j-1,k} (\theta_j - \theta_{j-1/2}) + k_{\theta,i,j,k} (\theta_{j-1/2} - \theta_{j-1})]} k_{\theta,i,j-1/2,k} \quad (\text{B.62})$$

Eğer $\theta_0 = 0$ ve $\theta_e = 2\pi$ olacak şekilde θ -yönünde tümüyle akışa kapalı sınır modelliyorsak

$$k_{\theta,i,1/2,k} = k_{\theta,i,N_\theta+1/2,k} = \frac{k_{\theta,i,1,k} k_{\theta,i,N_\theta,k} (\theta_{N_\theta} - \theta_1)}{k_{\theta,i,N_\theta,k} (\theta_1 - \theta_{1/2}) + k_{\theta,i,1,k} (\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta})} \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{\partial k_{\theta,i,1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,1,k}} = \frac{k_{\theta,i,N_\theta,k} (\theta_1 - \theta_{1/2})}{k_{\theta,i,1,k} [k_{\theta,i,N_\theta,k} (\theta_1 - \theta_{1/2}) + k_{\theta,i,1,k} (\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta})]} k_{\theta,i,1/2,k} \quad (\text{B.64})$$

ve

$$\frac{\partial k_{\theta,i,N_{\theta}+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,N_{\theta},k}} = \frac{k_{\theta,i,1,k}(\theta_{N_{\theta}+1/2} - \theta_{N_{\theta}})}{k_{\theta,i,N_{\theta},k} [k_{\theta,i,N_{\theta},k}(\theta_1 - \theta_{1/2}) + k_{\theta,i,1,k}(\theta_{N_{\theta}+1/2} - \theta_{N_{\theta}})]} k_{\theta,i,N_{\theta}+1/2,k} \quad (\text{B.65})$$

denklemleri kullanılır. Burada θ -yönünde heterojen geçirgenlik sahası söz konusu olduğunda, Denklemler B.64 ve B.65'ün eşit olmayacağını not etmek ilginçtir.

Benzer şekilde, z -yönü için gridblok sınır geçirgenlikleri ve $k_{z,i,j,k+1/2}$ ve $k_{z,i,j,k-1/2}$ 'nın $k_{z,i,j,k}$ 'ya göre kısmi türevleri aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$k_{z,i,j,k+1/2} = \frac{k_{z,i,j,k} k_{z,i,j,k+1} (z_{k+1} - z_k)}{k_{z,i,j,k} (z_{k+1} - z_{k+1/2}) + k_{z,i,j,k+1} (z_{k+1/2} - z_k)} \quad (\text{B.66})$$

$k=1, \dots, N_z-1$ için,

$$\frac{\partial k_{z,i,j,k+1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} = \frac{k_{z,i,j,k+1} (z_{k+1/2} - z_k)}{k_{z,i,j,k} [k_{z,i,j,k} (z_{j+1} - z_{k+1/2}) + k_{z,i,j,k+1} (z_{k+1/2} - z_k)]} k_{z,i,j,k+1/2} \quad (\text{B.67})$$

ve

$$\frac{\partial k_{z,i,j,k-1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} = \frac{k_{z,i,j,k-1} (z_k - z_{k-1/2})}{k_{z,i,j,k} [k_{z,i,j,k-1} (z_k - z_{k-1/2}) + k_{z,i,j,k} (z_{k-1/2} - z_{k-1})]} k_{z,i,j,k-1/2} \quad (\text{B.68})$$

ve alt ve üst sınırlar için

$$\frac{\partial k_{z,i,j,1/2}}{\partial k_{z,i,j,1}} = \frac{\partial k_{z,i,j,N_z+1/2}}{\partial k_{z,i,j,N_z}} = 1 \quad (\text{B.69})$$

Denklem B.45 – Denklem B.47 ve Denklem B.53 ve Denklem B.59 kullanılarak r -yönündeki iletkenliğin r -yönündeki geçirgenliğe göre kısmi türevleri o halde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{r,i+1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} &= \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1} - r_i} \right) \frac{\Delta z_k \Delta \theta_j}{\mu_{i+1/2,j,k}} \frac{\partial k_{r,i+1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} \\
&= \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i+1} - r_i} \right) \frac{\Delta z_k \Delta \theta_j}{\mu_{i+1/2,j,k}} \frac{k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)}{k_{r,i,j,k} [k_{r,i,j,k} \ln(r_{i+1} / r_{i+1/2}) + k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)]} k_{r,i+1/2,j,k} \\
&= \frac{k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)}{k_{r,i,j,k} [k_{r,i,j,k} \ln(r_{i+1} / r_{i+1/2}) + k_{r,i+1,j,k} \ln(r_{i+1/2} / r_i)]} T_{r,i+1/2,j,k}
\end{aligned} \tag{B.70}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{r,i-1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} &= \left(\frac{r_{i-1/2}}{r_i - r_{i-1}} \right) \frac{\Delta z_k \Delta \theta_j}{\mu_{i-1/2,j,k}} \frac{\partial k_{r,i-1/2,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} \\
&= \frac{k_{r,i-1,j,k} \ln(r_i / r_{i-1/2})}{k_{r,i,j,k} [k_{r,i-1,j,k} \ln(r_i / r_{i-1/2}) + k_{r,i,j,k} \ln(r_{i-1/2} / r_{i-1})]} T_{r,i-1/2,j,k}
\end{aligned} \tag{B.71}$$

denklemlerinden hesaplanabilir. Üretim aralığı ve gözlem probleminin olduğu r -yönündeki gridblokların ($m=1, \dots, N_{a,l}$, $l=1, \dots, N_w$) iletkenliklerinin bu bloklardaki r -yönündeki geçirgenliğe göre kısmi türevleri ise,

$$\frac{\partial T_{r,i,j,k}}{\partial k_{r,i,j,k}} = \begin{cases} \frac{\Delta \theta_j \Delta z_k}{\mu_{1,j,k} \left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln \left(\frac{r_{3/2}}{r_w} \right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, & \begin{cases} j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m) \\ k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m) \end{cases} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{B.72}$$

denklemden hesaplanır.

Benzer şekilde, θ -yönü iletkenliklerin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{\theta,i,j+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} &= \frac{\ln[r_{i+1/2} / r_{i-1/2}] \Delta z_k}{\Delta \theta_j \mu_{i,j+1/2,k}} \frac{\partial k_{\theta,i,j+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} \\
&= \frac{k_{\theta,i+1,j,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j)}{k_{\theta,i,j,k} [k_{\theta,i,j,k} (\theta_{j+1} - \theta_{j+1/2}) + k_{\theta,i+1,j,k} (\theta_{j+1/2} - \theta_j)]} T_{\theta,i,j+1/2,k}
\end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\frac{\partial T_{\theta,i,j-1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,j,k}} = \frac{k_{\theta,i,j-1,k}(\theta_j - \theta_{j-1/2})}{k_{\theta,i,j,k} [k_{\theta,i,j-1,k}(\theta_j - \theta_{j-1/2}) + k_{\theta,i,j,k}(\theta_{j-1/2} - \theta_{j-1})]} T_{\theta,i,j-1/2,k} \quad (B.74)$$

denklemlerinden hesaplanır. Eğer $\theta_0 = 0$ ve $\theta_e \neq 2\pi$ olacak şekilde θ -yönünde kısmen akışa kapalı bir sınır modellenirse, θ -yönü sınır iletkenliklerinin kısmi türevleri

$$\frac{\partial T_{\theta,i,1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,1,k}} = \frac{\partial T_{\theta,i,N_\theta+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,N_\theta,k}} = 0 \quad (B.75)$$

olarak alınır. $\theta_0 = 0$ ve $\theta_e = 2\pi$ olacak şekilde θ -yönünde tümüyle akışa kapalı bir sınır modellediğimizde ise, θ -yönü sınır iletkenliklerinin kısmi türevleri

$$\frac{\partial T_{\theta,i,1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,1,k}} = \frac{\partial T_{\theta,i,N_\theta+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,1,k}} = \frac{k_{\theta,i,N_\theta,k}(\theta_1 - \theta_{1/2})}{k_{\theta,i,1,k} [k_{\theta,i,N_\theta,k}(\theta_1 - \theta_{1/2}) + k_{\theta,i,1,k}(\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta})]} T_{\theta,i,1/2,k} \quad (B.76)$$

ve

$$\frac{\partial T_{\theta,i,1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,N_\theta,k}} = \frac{\partial T_{\theta,i,N_\theta+1/2,k}}{\partial k_{\theta,i,N_\theta,k}} = \frac{k_{\theta,i,1,k}(\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta})}{k_{\theta,i,N_\theta,k} [k_{\theta,i,N_\theta,k}(\theta_1 - \theta_{1/2}) + k_{\theta,i,1,k}(\theta_{N_\theta+1/2} - \theta_{N_\theta})]} T_{\theta,i,1/2,k} \quad (B.77)$$

denklemlerinden hesaplanır.

Benzer şekilde, z -yönü iletkenliklerin kısmi türevleri

$$\frac{\partial T_{z,i,j,k+1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} = \frac{k_{z,i,j,k+1}(z_{k+1/2} - z_k)}{k_{z,i,j,k} [k_{z,i,j,k}(z_{j+1} - z_{k+1/2}) + k_{z,i,j,k+1}(z_{k+1/2} - z_k)]} T_{z,i,j,k+1/2} \quad (B.78)$$

ve

$$\frac{\partial T_{z,i,j,k-1/2}}{\partial k_{z,i,j,k}} = \frac{k_{z,i,j,k-1}(z_k - z_{k-1/2})}{k_{z,i,j,k} [k_{z,i,j,k-1}(z_k - z_{k-1/2}) + k_{z,i,j,k}(z_{k-1/2} - z_{k-1})]} T_{z,i,j,k-1/2} \quad (B.79)$$

denklemlerinden hesaplanır. Akış kapalı alt ve üst sınırlardaki z -yönü iletkenliklerinin kısmi türevleri ise

$$\frac{\partial T_{z,i,j,1/2}}{\partial k_{z,i,j,1}} = \frac{\partial T_{z,i,j,N_z+1/2}}{\partial k_{z,i,j,N_z}} = 0 \quad (\text{B.80})$$

olarak alınır.

B.1.3.2 Gözenekliliklere göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , herhangi bir gridbloktaki gözenekliliği temsil ettiğinde ($m_r = \phi$), kaynak terimi $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemler sunulmaktadır. Hatırlanacağı gibi, gözeneklilik vektörü $\vec{\phi}$ N boyutludur:

$$\vec{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N]^T. \quad (\text{B.81})$$

Denklem B.17 - Denklem B.19 ve Denklem B.21'den dikkat edilecek olursa, gridblok ayrık denklemlerinin (üretim aralığı ve gözlem problemlerinin olduğu gridbloklarda dahil olmak üzere) sadece akümülayon terimi (Denklem B.19 ve Denklem B.21) gözenekliliğe bağlıdır. Dolayısıyla, $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ vektörünün gözenekliliğe göre sıfır olmayan elemanları

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial \phi_{i,j,k}} = - \frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial \phi_{i,j,k}} \quad (\text{B.82})$$

denklemden hesaplanır. Denklem B.19 ve B.21'in Denklem B.82'de kullanılmasıyla

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial \phi_{i,j,k}} = - \frac{\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}}{\phi_{i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) \quad (\text{B.83})$$

duyarlılığın doğrudan hesaplanacağı denklem elde edilir. Kuyudibi sınırlayıcı ayrık denklemi (Denklem B.9) gözenekliliği içermediğinden, $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ vektörünün kuyudibi sınırlandırıcı ayrık denklemlerinin gözenekliliğe göre türevlerini ifade eden elemanları sıfır olacaktır (Denklem B.16).

B.1.3.3 Zar faktörüne göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , üretim aralığı ve gözlem noktalarındaki zar faktörü değerini temsil ettiği durumda ($m_r = S$), kaynak terimi $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemleri sunuyoruz.

Hatırlanacağı gibi, zar faktörü vektörü $\sum_{l=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{N_{a,l}} (N_{\theta s,m} - N_{\theta b,m} + 1)(N_{hs,m} - N_{hb,m} + 1)$

boyutludur. Zar faktörü sadece üretime açık ve gözlem problemlerinin olduğu gridbloklarının $(l = 1, \dots, N_w, m = 1, \dots, N_{a,l}, j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m))$ ile

iletkenlik terimlerinde

$$T_{r,1/2,j,k} = \begin{cases} \frac{\Delta \theta_j \Delta z_k k_{r,1,j,k}}{\mu_{1,j,k} \left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln \left(\frac{r_{3/2}}{r_w} \right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]}, & \begin{cases} j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m) \\ k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m) \end{cases} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.84})$$

yer almaktadır. Dolayısıyla, üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerinin bulunduğu gridbloklar ($i=1, j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m), m = 1, \dots, N_{a,l}, l = 1, \dots, N_w$) söz konusu olduğunda, Denklem B.22, Denklem B.23 ve Denklem B.83'den görüldüğü gibi, akış terimi (Denklem B.22) ve akümülayon terimi (Denklem B.23) zar faktörüne bağlıdır. Bu nedenle, üretimin olduğu kuyudibi ve gözlem problemlerinin bulunduğu gridbloklarda, kaynak terimi vektörünün zar faktörü S 'ye göre türevleri,

$$\frac{\partial f_{1,j,k}^{n+1}}{\partial S_{j,k}} = \frac{\partial F_{1,j,k}^{n+1}}{\partial S_{j,k}} - \frac{\partial A_{1,j,k}^{n+1}}{\partial S_{j,k}} \quad (\text{B.85})$$

veya Denklem B.22 ve Denklem B.23'ün Denklem B.85'de kullanılmasıyla elde edilen,

$$\frac{\partial f_{1,j,k}^{n+1}}{\partial S_{j,k}} = -\frac{\partial T_{r,1/2,j,k}}{\partial S_{j,k}} \left[(p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \gamma(D_{l,k} - D_l^0) \right] \quad (\text{B.86})$$

denkleminde hesaplanır. Ayrıca, Denklem B.9’da görüleceği gibi, $f_{w,l}$ sadece $T_{r,1/2,j,k}$ iletkenlik terimini içerir ve dolayısıyla sadece $f_{w,l}$ ’nin $S_{j,k}$ ($j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m)$, $m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$) türevleri sıfırdan farklı olacaktır. Bu türevler

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial S_{j,k}} = \frac{\partial T_{r,1/2,j,k}}{\partial S_{j,k}} \left[(p_{1,j,k}^{n+1} - p_{wf,l}^{n+1}) - \gamma(D_{l,k} - D_l^0) \right] \quad (\text{B.87})$$

($j = N_{\theta b,l}(m), \dots, N_{\theta s,l}(m), k = N_{hb,l}(m), \dots, N_{hs,l}(m)$, $m = 1, \dots, N_{a,l}$, $l = 1, \dots, N_w$) olacak şekilde denkleminde hesaplanır.

Denklem B.86 ve Denklem B.87’de gerekli olan iletkenliğin zar faktörüne göre kısmi türevi Denklem B.84’den elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{r,1/2,j,k}}{\partial S_{j,k}} &= - \frac{\Delta \theta_j \Delta z_k k_{r,1,j,k}}{\mu_{1,j,k} \left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln \left(\frac{r_{3/2}}{r_w} \right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]^2} \\ &= - \frac{T_{r,1/2,j,k}}{\left[\frac{r_{3/2}^2}{r_{3/2}^2 - r_w^2} \ln \left(\frac{r_{3/2}}{r_w} \right) - \frac{1}{2} + S_{j,k} \right]} \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

B.1.3.4 İlk basınçlara göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , herhangi bir (i,j,k) gridbloğundaki ilk basıncı temsil ettiğinde ($m_r = p^0$), kaynak terimi $\partial \bar{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemleri sunuyoruz. Hatırlanacağı gibi, ilk basınç vektörü $\bar{p}_0$ N boyutludur:

$$\bar{p}^0 = [p_1^0 \quad p_2^0 \quad \dots \quad p_N^0]^T. \quad (\text{B.89})$$

Denklem B.18 ve Denklem B.19’dan görüleceği gibi, sadece akümüülasyon terimi, $n = 0$ olduğunda, $p_{i,j,k}^n$ ilk basınçları ihtiva eder. Eğer $n = 0$ ’daki ilk basınçları, $p_{i,j,k}^0$ olarak temsil edersek, gridblok ayrı denklemlerinin ilk basınç değerlerine göre türevi, $n = 0$ için tüm gridbloklarda

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^0} = -\frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^0} = \tilde{v}_{i,j,k}^{n+1} \quad (\text{B.90})$$

denklemden hesaplanır. $n \neq 0$ farklı ise, tüm gridbloklarda,

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial p_{i,j,k}^0} = 0 \quad (\text{B.91})$$

olarak alınır.

B.1.3.5 Kuyudibi ilk akış basınçlarına göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , kuyudibi ilk akış basınçlarını temsil ettiğinde ($m_r = p_{wf}^0$), kaynak terimi $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemleri sunuyoruz. Hatırlanacağı gibi, ilk basınç vektörü $\tilde{p}_{wf}^0$ N_w boyutludur:

$$\tilde{p}_{wf}^0 = [p_{wf,1}^0 \quad p_{wf,2}^0 \quad \cdots \quad p_{wf,N_w}^0]^T. \quad (\text{B.92})$$

Sadece kuyudibi akış sınırlayıcı ayrık denklemleri (Denklemler B.9), kuyudibi akış ilk basınçlarını, $n = 0$ olduğunda, $p_{wf,l}^n$ ilk basınçları ihtiva eder. Eğer $n = 0$ 'daki kuyudibi ilk basınçları, $p_{wf,l}^0$ olarak temsil edersek, kuyudibi sınırlayıcı ayrık denklemlerinin kuyudibi ilk basınç değerlerine göre türevi, $n = 0$ ve $l=1,2,\dots,N_w$ için

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial p_{wf,l}^0} = \Psi_l^{n+1} \quad (\text{B.93})$$

denklemden hesaplanır. $n \neq 0$ farklı ise, $l=1,2,\dots,N_w$ için

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial p_{wf,l}^0} = 0 \quad (\text{B.94})$$

olarak alınır.

B.1.3.6 Kuyuiçi depolama sabitlerine göre kaynak vektörünün oluşturulması

Bu alt bölümde, m_r , kuyuiçi depolama sabitlerini temsil ettiğinde ($m_r = C_l$, $l=1,2,\dots,N_w$), kaynak terimi $\partial \tilde{f}^{n+1} / \partial m_r$ için denklemleri sunuyoruz. Hatırlanacağı gibi, kuyuiçi depolama sabiti vektörü $\tilde{C}$ N_w boyutludur:

$$\tilde{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{N_w}]^T. \quad (B.95)$$

Sadece kuyudibi akış sınırlayıcı ayrık denklemlerinde (Denklem B.9), kuyuiçi depolama sabitlerini Ψ_l^{n+1} terimi içerisinde (Ek-A, Denklem A.35) ihtiva edilir. Öyleyse, kuyudibi sınırlayıcı ayrık denklemlerinin kuyuiçi depolama sabitine göre türevi, $l=1,2,\dots,N_w$ için

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial C_l} = -\frac{\Psi_l^{n+1}}{C_l} (p_{wf,l}^{n+1} - p_{wf,l}^n) \quad (B.96)$$

denkleminde hesaplanır.

B.1.4 Bazı Özel Durumlar İçin Grayent Simülatör Yönteminden Duyarlılık Katsayılarının Hesaplanması

Bundan önceki bölümlerde verilen gradyent simülatör formülasyon, simülatör gridblok ölçeğinde, örneğin her gridbloktaki gözenekliliğe göre, duyarlılık katsayıları hesaplanacak şekilde türetilmiştir. Bazı özel durumlarda, örneğin bazı parametrelere göre uniform veya homojen sistem göz önünde bulundurulduğunda (örneğin tabakaları tek geçirgenlik veya gözeneklilikle temsil edeceğimiz basit modellerde), bu formülasyon kullanılabilir. Ancak, böyle modeller için bu formülasyonun kullanılması etkin olmayacaktır. Nedeni de, grayent simülatörü toplam N adet gridblok sayısı kadar sağ yan vektörünü değiştirerek çözüp bu şekilde elde edilen duyarlılık katsayılarını daha sonra toplayarak, göz önünde bulundurulan homojen sistem parametresine göre duyarlılığı hesaplamak zorunda olacağımızdandır. Farzedelimki, gözenekliliğe göre homojen bir sistem göz önünde bulunduruyoruz, $\phi_r = \phi_{i,j,k} = \phi$, $r=1,\dots,N$, burada N simülasyonda göz önünde bulundurulan toplam gridblok sayısını temsil etmektedir. Daha önceki bölümlerde verdiğimiz gradyent

simülatör formülasyon, basınçların her gridblok içersindeki gözenekliliğin fonksiyonu olduğunu kabul eder

$$p = p(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \quad (\text{B.97})$$

Denklem B.97'nin gözenekliliğe göre toplam diferansiyeli

$$dp = \sum_{r=1}^N \frac{\partial p(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)}{\partial \phi_r} d\phi_r \quad (\text{B.98})$$

şeklinde yazılır. Göz önünde bulundurduğumuz gözenekliliğe göre homojen sistemde tüm gridbloklar için $\phi_r = \phi$ olduğundan, Denklem B.98'den

$$\frac{dp}{d\phi} = \sum_{r=1}^N \frac{\partial p(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)}{\partial \phi_r} \frac{d\phi_r}{d\phi} = \sum_{r=1}^N \frac{\partial p(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)}{\partial \phi_r} \quad (\text{B.99})$$

denklemini yazabiliriz. Çünkü göz önünde bulundurulmuş sistem için $d\phi_r / d\phi = 1$, $r = 1, \dots, N$, dir. Denklem B.99'dan görüleceği gibi, daha önceki gardyen formülasyonunda böyle bir homojen sistem için duyarlılık katsayılarını N kez hesaplayıp, toplamamız gerekecektir. Homojen bir sistem için duyarlılığı bu şekilde hesaplamak, hesaplama zamanı açısından etken değildir. Böyle homojen sistemler için, gradyent simülatör yöntemi kullanıldığında etken olarak duyarlılık katsayılarını hesaplayabileceğimiz bir yöntem geliştirmek mümkündür. Tek yapacağımız, kaynak

terimi vektörünü, $\frac{\partial \vec{f}^{n+1}}{\partial m_r}$, her bir gridblok gözeneklilikleri yerine, tek bir gözenekliliğe göre düşünmek olacaktır. Bu homojen sistem durumunda, kaynak vektörü

$$\frac{\partial \tilde{f}^{n+1}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^{n+1}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_{w,2}^{n+1}}{\partial \phi} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{w,N_w}^{n+1}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2^{n+1}}{\partial \phi} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_N^{n+1}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.100})$$

şeklinde düşünülecektir. Kuyusınırlayıcı ayırık denklemler gözenekliliği (Denklem B.9) ihtiva etmediğinden, Denklem B.100 ile verilen kaynak vektörünün $\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial \phi}$, $l=1, \dots, N_w$, elemanları sıfıra eşit olacaktır:

$$\frac{\partial f_{w,l}^{n+1}}{\partial \phi} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N_w. \quad (\text{B.101})$$

Ayrık gridblok akış denklemlerinde, gözeneklilik sadece akümülayon teriminde (Denklem B.19) yer aldığından ve her gridblok için aynı gözeneklilik değeri söz konusu olduğundan,

$$\frac{\partial f_{i,j,k}^{n+1}}{\partial \phi} = -\frac{\partial A_{i,j,k}^{n+1}}{\partial \phi} = -\frac{\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}}{\phi} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) \quad (\text{B.102})$$

denklemini elde ederiz. Denklemler B.101 ve B.102 ile verilen ifadeleri Denklem B-100'de yerine koyarsak

$$\frac{\partial \tilde{f}^{n+1}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{\tilde{V}_1^{n+1}}{\phi} (p_1^{n+1} - p_1^n) \\ -\frac{\tilde{V}_2^{n+1}}{\phi} (p_2^{n+1} - p_2^n) \\ \vdots \\ -\frac{\tilde{V}_N^{n+1}}{\phi} (p_N^{n+1} - p_N^n) \end{bmatrix} \quad (\text{B.103})$$

vektörü elde edilir. Bu demektir ki, Denklem B.103 kaynak terimi olarak gradyent simülatör yönteminde (Denklem B.12) kullanıldığında, her hangi bir zaman adımı n 'de tüm gözenekliliğe göre duyarlılık katsayılarını bir sağ yan vektörü ile hesaplayabiliriz. Homojen sistemler için bu tür gradyent simülatör formülasyonu, N kez sağ yan vektörü değiştirip Denklem B.99'dan duyarlılık katsayısını hesaplamamızı gerektiren gradyent simülatör formülasyonuna göre N kez daha hızlı olacaktır. Benzeri gradyent simülatör formülasyonları, homojen geçirgenlikler vs. içinde yapılabilmektedir. Çalışmada geliştirilen simülatörde, homojen durumlar bu etken gradyent simülatör formülasyonunu kullanmaktayız.

B.2 ADJOINT SİMÜLATÖR YÖNTEMİ

Bu bölümde, çalışmada geliştirilen r - θ - z simülatörü için duyarlılık katsayılarını hesaplayabileceğimiz ayrık adjoint simülatör yöntemine ait denklemler geliştirilmektedir.

Adjoint yöntemde, basınç vektörü $\bar{p}$ 'nin fonksiyonu olarak keyfi bir skaler β fonksiyonu tanımlanır:

$$\beta = \beta(\bar{p}^1, \bar{p}^2, \dots, \bar{p}^L) \quad (\text{B.104})$$

Burada L , duyarlılık katsayısını hesaplamak istediğimiz en son zaman t^L 'ye karşılık gelmektedir. Bu yöntemde amaç, β 'nın duyarlılık katsayılarını hesaplamaktır. Burada β , kuyudibi basıncı p_{wf} 'yi temsil edebileceği gibi gözlem probu olan noktalarındaki

basınçları veya herhangi bir simülasyon bloğu s 'deki basınç p_s , $s = 1, 2, \dots, N$, yi de temsil edebilir. Ajoint fonksiyonel olarak isimlendirilen J , β ile

$$\bar{f}^{n+1} = \bar{f}(\bar{p}^{n+1}, \bar{p}^n, \bar{m}) = \begin{bmatrix} f_{w,1}^{n+1} \\ f_{w,2}^{n+1} \\ \vdots \\ f_{w,N_w}^{n+1} \\ f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{B.105})$$

ayrık sonlu-fark denklemlerine ait $(N+N_w)$ -boyutlu $\bar{f}^{n+1}$ vektörünün fonksiyonu olarak

$$J = \beta + \sum_{n=0}^L \bar{\lambda}^{n+1} \bar{f}^{n+1} \quad (\text{B.106})$$

yazılır. Burada $\bar{\lambda}^{n+1}$, $(N+N_w)$ boyutlu adjoint değişken (veya Lagrange değişken) vektörüdür:

$$\bar{\lambda}^{n+1} = [\lambda_{w,1}^{n+1}, \lambda_{w,2}^{n+1}, \dots, \lambda_{w,N_w}^{n+1}, \lambda_1^{n+1}, \lambda_2^{n+1}, \dots, \lambda_N^{n+1}]^T \quad (\text{B.107})$$

Denklem B.106 ile tanımlı J 'nin toplam diferansiyelini alıp sonuçta elde edilen denklem düzenlenirse toplam diferansiyel dJ elde edilir:

$$dJ = d\beta + \sum_{n=0}^L \left\{ (\bar{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\bar{p}^{n+1}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T d\bar{p}^{n+1} + (\bar{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\bar{m}} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T d\bar{m} \right\} + \sum_{n=0}^L (\bar{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \right]^T d\bar{p}^n \quad (\text{B.108})$$

Denklem B.108'i indekslemeyi değiştirerek aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$dJ = d\beta + \sum_{n=1}^L \left\{ \left[(\tilde{\lambda}^n)^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^n)^T \right]^T + (\tilde{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T \right] d\tilde{p}^n + (\tilde{\lambda}^n)^T \left[\nabla_{\tilde{m}} (\tilde{f}^n)^T \right]^T d\tilde{m} \right\} \quad (B.109)$$

$$+ (\tilde{\lambda}^{L+1})^T \left\{ \left[\nabla_{\tilde{p}^{L+1}} (\tilde{f}^{L+1})^T \right]^T d\tilde{p}^{L+1} + \left[\nabla_{\tilde{m}} (\tilde{f}^{L+1})^T \right]^T d\tilde{m} \right\} + (\tilde{\lambda}^1)^T \left[\nabla_{\tilde{p}^0} (\tilde{f}^1)^T \right]^T d\tilde{p}^0$$

Denklem B.104 ile tanımlı β 'nın toplam diferansiyeli ise

$$d\beta = \sum_{n=1}^L \left[\nabla_{\tilde{p}^n} \beta \right]^T d\tilde{p}^n \quad (B.110)$$

şeklinde yazılır.

Adjoint yöntemde, $L+1$ adımındaki adjoint değişken vektörü sıfır vektör olarak alınır:

$$\tilde{\lambda}^{L+1} = \vec{0} \quad (B.111)$$

Denklem B.110 ve Denklem 111, Denklem 109'da kullanılırsa ve sonuçta elde edilen denklem düzenlenirse

$$dJ = \sum_{n=1}^L \left\{ \left[(\tilde{\lambda}^n)^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^n)^T \right]^T + (\tilde{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T + \left(\nabla_{\tilde{p}^n} \beta \right)^T \right] d\tilde{p}^n \right\} \quad (B.112)$$

$$+ \left\{ \sum_{n=1}^L (\tilde{\lambda}^n)^T \left[\nabla_{\tilde{m}} (\tilde{f}^n)^T \right]^T \right\} d\tilde{m} + (\tilde{\lambda}^1)^T \left[\nabla_{\tilde{p}^0} (\tilde{f}^1)^T \right]^T d\tilde{p}^0$$

denklemini elde edilir.

Adjoint sistem denklemini, Denklem B.112'de $d\tilde{p}^n$ 'in katsayısı sıfıra eşitlenerek elde edilir. Bir başka deyişle, adjoint değişkenlerin aşağıdaki denklemi sağlaması istenir:

$$(\tilde{\lambda}^n)^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^n)^T \right]^T + (\tilde{\lambda}^{n+1})^T \left[\nabla_{\tilde{p}^n} (\tilde{f}^{n+1})^T \right]^T + \left(\nabla_{\tilde{p}^n} \beta \right)^T = \vec{0} \quad (B.113)$$

Denklem B.113'ün transpozisini alıp elde edilen denklemi düzenlersek adjoint değişken vektörünü çözeceğimiz denklem

$$\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^n)^T \bar{\lambda}^n = -\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T \bar{\lambda}^{n+1} - \nabla_{\bar{p}^n} \beta \quad (\text{B.114})$$

elde edilir. Denklem B.114'den $\bar{\lambda}^n$ 'ler, $n=L, L-1, \dots, 1$ olacak şekilde, Denklem B.111 ile verilen koşul kullanılarak zamanda geriye doğru çözülür. Denklem B.114'de $\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^n)^T$ $(N+N_w) \times (N+N_w)$ boyutlu katsayı matrisi olup simülasyonda basınçları çözerken kullanılan katsayı matrisi A 'nın transpozesidir. Ancak A simetrik olduğundan, bu matrisin transpozesi kendisine eşit olacaktır. Dolayısıyla, $\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^n)^T = A$.

$\nabla_{\bar{p}^n} (\bar{f}^{n+1})^T$ ise, $(N+N_w) \times (N+N_w)$ boyutlu çapraz matristir ve Denklem B.27 ile verilen matrisin aynısıdır. Denklem B.114'deki $\nabla_{\bar{p}^n} \beta$ ise $(N+N_w)$ boyutlu vektördür (adjoint sistem kaynak terimi olarak da isimlendirilmektedir):

$$\nabla_{\bar{p}^n} \beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial p_{wf,1}^n} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_{wf,2}^n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_{wf,N_w}^n} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_1^n} \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_2^n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_N^n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.115})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki herhangi bir kuyudibi basıncına $p_{wf,l}^L$ 'ye ($l=1,2,\dots,N_w$) göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\bar{p}^n} \beta$ vektörü

$$\nabla_{\bar{p}^n} \beta = \nabla_{\bar{p}^n} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,1}^n} & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,2}^n} & \dots & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,l}^n} & \dots & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,N_w}^n} & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_1^n} & \dots & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_2^n} & \dots & \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_N^n} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.116})$$

şeklinde verilir ve $n \neq L$ olduğunda $N+N_w$ boyutlu sıfır vektöre eşittir:

$$\nabla_{\bar{p}^n} \beta = \nabla_{\bar{p}^n} p_{wf,l}^L = \vec{0}, \quad (\text{B.117})$$

ve $n = L$ olduğunda ise

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{p}^L} \beta = \nabla_{\bar{p}^L} p_{wf,l}^L &= \left[\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,1}^L} \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,2}^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,l}^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,N_w}^L} \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_1^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_2^L} \quad \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_N^L} \right]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

şeklinde verilir.

Benzer şekilde, eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki simülâtör bloğu basıncı p_s^L ye, $s = 1, 2, \dots, N$, göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\bar{p}^n} \beta$ vektörü

$$\nabla_{\bar{p}^n} \beta = \nabla_{\bar{p}^n} p_s^L = \left[\frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,1}^n} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,2}^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,N_w}^n} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_1^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_s^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_N^n} \right]^T \quad (\text{B.119})$$

şeklinde verilir ve $n \neq L$ olduğunda $N+N_w$ boyutlu sıfır vektöre eşittir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{p}^n} \beta = \nabla_{\bar{p}^n} p_s^L &= \left[\frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,1}^n} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,2}^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,N_w}^n} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_1^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_s^n} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_N^n} \right]^T, (\text{B.120}) \\ &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T = \vec{0}^T \end{aligned}$$

ve $n = L$ olduğunda ise

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{p}^L} \beta = \nabla_{\bar{p}^L} p_s^L &= \left[\frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,1}^L} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,2}^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,N_w}^L} \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_1^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_s^L} \quad \dots \quad \frac{\partial p_s^L}{\partial p_N^L} \right]^T, (\text{B.121}) \\ &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Denklem B.114 ile verilen adjoint sistem denklemi, Denklem B.12 ile verilen gradient simülâtör yöntemi çözümleme işlemi bakımından birbirine çok benzemektedir. Dolayısıyla, Denklem B.114 ve Denklem B.12'yi bir zaman adımı için bilgisayarda çözümleme işleminin hemen hemen aynı CPU zamanını alacağını bekleyebiliriz. Ancak, eğer model parametre sayısının M ve çalışmada kullanacağımız ölçüm basınç veri sayısının N_d olduğunu düşünürsek, duyarlılık katsayılarını hesaplamak için gradyent simülâtör yönteminde Denklem B.12'yi M kez çözmek gerekirken, adjoint yönteminde Denklem B.114'ü N_d defa çözmek gerekecektir. Eğer eldeki ölçüm veri sayısı model parametre sayısından kat kat küçükse ($N_d \ll M$) ki bu heterojen geçirgenlik ve gözeneklilik dağılımına sahip sistemler için $N_d \ll M$ ilişkisi her zaman geçerli olacaktır, o zaman adjoint yöntem, gradient simülâtör yöntemine göre duyarlılık katsayılarını hesaplamak için oldukça avantajlı olacaktır.

Adjoint yöntemde, Denklem B.114'den adjoint değişken vektörü $\tilde{\lambda}^n$ 'ler, $n = L, L-1, \dots, 1$, hesaplandıktan sonra, duyarlılık katsayıları hesaplanır. Duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemler, Denklem B.113'ün Denklem 112'de yerine koyması ile elde edilir. Bu işlemi yaparsak, Denklem B.112 aşağıda verilen denkleme indirgenir:

$$dJ = \left\{ \sum_{n=1}^L (\tilde{\lambda}^n)^T [\nabla_{\bar{m}} (\tilde{f}^n)^T] \right\} d\bar{m} + (\tilde{\lambda}^1)^T [\nabla_{\bar{p}^0} (\tilde{f}^1)^T] d\bar{p}^0 \quad (\text{B.122})$$

J keyfi bir skaler fonksiyon olduğundan, model parametre vektörü $\bar{m}$ ve başlangıç basınç vektörü $\bar{p}^0$ 'ın fonksiyonu olarak da düşünülebilir ve J 'nin toplam diferansiyeli alınırsa,

$$dJ = (\nabla_{\bar{m}} J)^T d\bar{m} + (\nabla_{\bar{p}^0} J)^T d\bar{p}^0 \quad (\text{B.123})$$

denklemini yazılabilir. Denklem B.122 ile B.123 kıyaslandığında

$$\nabla_{\bar{p}^0} J = \nabla_{\bar{p}^0} (\bar{f}^1)^T \bar{\lambda}^1 \quad (\text{B.124})$$

ve

$$\nabla_{\bar{m}} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\bar{m}} (\bar{f}^n)^T \bar{\lambda}^n \quad (\text{B.125})$$

olacağı görülür. Denklem B.124 ve Denklem B.125 adjoint yöntemde duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri oluşturur.

B.2.1 İlk Basınç Vektörü $\bar{p}^0$ 'a Göre Duyarlılık Katsayıları.

İlk basınç vektörü $\bar{p}^0$ 'ın bilinmeyen parametre olduğu durumlarda duyarlılık katsayısı Denklem B.124'ten hesaplanır. Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'in ($l=1,2,\dots,N_w$) her gridbloktaki ilk basınca göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\bar{p}^0} J = \nabla_{\bar{p}^0} p_{wf,l}^L$ vektörü, Denklem B.124'ten

$$\nabla_{\bar{p}^0} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,l}^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} = \nabla_{\bar{p}^0} (\bar{f}^1)^T \bar{\lambda}^1 \quad (\text{B.126})$$

elde edilir. $\nabla_{\bar{p}^0} (\bar{f}^1)^T$ $N \times (N+N_w)$ boyutlu bir matristir ve $\nabla_{\bar{p}^0} (\bar{f}^1)^T \bar{\lambda}^1$

$$\nabla_{\vec{p}^0}(\vec{f}^1)^T \vec{\lambda}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,1}^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,1}^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,1}^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_{wf,1}^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_{wf,1}^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} \\ \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_1^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_1^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_1^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_1^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_2^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_2^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_2^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_2^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_2^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_2^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_N^0} & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_N^0} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_N^0} & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_N^0} & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_N^0} & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^1 \\ \lambda_{w,2}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \vdots \\ \lambda_N^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.127})$$

eşittir. Sadece $f_{w,l}^1, l=1,2,\dots,N_w$, ve $f_j^1, j=1,2,\dots,N$, denklemleri ilk basınç değerlerini ihtiva ettiğinden (Denklem B.9 ve Denklem B.10, $n=0$ ise), Denklem B.126 ve B.127'den

$$\begin{aligned}
\nabla_{\vec{p}^0} p_{wf,l}^L &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_{wf,N_w}^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,1}^0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1^0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_2^0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^1 \\ \lambda_{w,2}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \vdots \\ \lambda_N^1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^1 \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \lambda_{w,2}^1 \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^1 \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} \\ \lambda_1^1 \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1^0} \\ \lambda_2^1 \frac{\partial f_2^1}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \lambda_N^1 \frac{\partial f_N^1}{\partial p_N^0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(B.128)

elde edilir. Denklem B.128'den duyarlılık katsayılarını doğrudan hesaplayacağımız denklemler elde edilir:

$$\frac{\partial p_{w,l}^L}{\partial p_{wf,k}^0} = \lambda_{w,k}^1 \frac{\partial f_{w,k}^1}{\partial p_{wf,k}^0}; \quad l=1,2,\dots,N_w; \quad k=1,2,\dots,N_w, \quad (\text{B.129})$$

ve

$$\frac{\partial p_{w,l}^L}{\partial p_s^0} = \lambda_s^l \frac{\partial f_s^1}{\partial p_s^0}; \quad l = 1, 2, \dots, N_w; \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.130})$$

Burada gradyent yöntemde olduğu gibi

$$\frac{\partial f_{w,k}^1}{\partial p_{wf,k}^0} = \Psi_k^1; \quad k = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.131})$$

ve

$$\frac{\partial f_s^1}{\partial p_s^0} = \tilde{V}_s^1, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.132})$$

ilişkilerinden hesaplanır (Denklem B.90 ve B.93).

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki simülatör bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\bar{p}^0$ 'a göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, benzer şekilde hesaplayabiliriz. Bu durumda, Denklem B.124'ten

$$\nabla_{\bar{p}^0} p_s^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_s^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,1}^0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,2}^0} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1^0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_2^1}{\partial p_2^0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_N^1}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^1 \\ \lambda_{w,2}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \vdots \\ \lambda_N^1 \end{bmatrix}$$

(B.133)

denklemini yazabiliriz. Denklem B.133'ün sağ tarafındaki matris-vektör çarpım işlemini yaparsak

$$\nabla_{\vec{p}^0} p_s^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,N_w}^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_1^0} \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_s^L}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^1 \frac{\partial f_{w,1}^1}{\partial p_{wf,1}^0} \\ \lambda_{w,2}^1 \frac{\partial f_{w,2}^1}{\partial p_{wf,2}^0} \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^1 \frac{\partial f_{w,N_w}^1}{\partial p_{wf,N_w}^0} \\ \lambda_1^1 \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1^0} \\ \lambda_2^1 \frac{\partial f_2^1}{\partial p_2^0} \\ \vdots \\ \lambda_N^1 \frac{\partial f_N^1}{\partial p_N^0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.134})$$

elde edilir. Denklem B.134'den elde edilen ve aşağıda verilen denklemlerden duyarlılık katsayılarını doğrudan hesaplayabiliriz:

$$\frac{\partial p_s^L}{\partial p_{wf,l}^0} = \lambda_{w,l}^1 \frac{\partial f_{w,l}^1}{\partial p_{wf,l}^0}; \quad l = 1, 2, \dots, N_w, s = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.135})$$

ve

$$\frac{\partial p_s^L}{\partial p_j^0} = \lambda_j^1 \frac{\partial f_j^1}{\partial p_j^0}; \quad j = 1, 2, \dots, N, s = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.136})$$

elde edilir. Denklemler B.135 ve B.136'daki eşitliklerin sağ tarafındaki kısmi türevler, Denklemler B.131 ve B.132'den hesaplanır.

B.2.2 Gözeneklilik İçin Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\vec{m}$, N -boyutlu gözeneklilik vektörü olarak seçildiğinde, gözenekliliğe göre duyarlılık katsayılarının hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\nabla_{\vec{\phi}} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{\phi}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n \quad (\text{B.137})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,i}^L$ 'ye göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\vec{\phi}} J = \nabla_{\vec{\phi}} p_{wf,i}^L$ vektörü, Denklem B.137'den

$$\nabla_{\vec{\phi}} p_{wf,i}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,i}^L}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial p_{wf,i}^L}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial p_{wf,i}^L}{\partial \phi_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,i}^L}{\partial \phi_N} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{\phi}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.138})$$

elde edilir. Burada $\nabla_{\vec{\phi}} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N \times (N+N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{\phi}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$ N -boyutlu vektörü

$$\nabla_{\vec{\phi}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial \phi_1} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_1} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_2} & \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial \phi_3} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial \phi_3} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial \phi_3} & \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_3} & \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_3} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial \phi_N} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial \phi_N} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial \phi_N} & \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_N} & \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_N} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.139})$$

şeklinde yazılabilir. Sadece f_s^n , $s = 1, 2, \dots, N$, ayrı denklemleri (Denklem B.10a) s grid bloğundaki gözeneklilik ϕ_s 'i ihtiva ettiğinden, Denklem B.139

$$\nabla_{\vec{\phi}}(\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_3^n}{\partial \phi_3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^n \frac{\partial f_1^n}{\partial \phi_1} \\ \lambda_2^n \frac{\partial f_2^n}{\partial \phi_2} \\ \vdots \\ \lambda_3^n \frac{\partial f_3^n}{\partial \phi_3} \\ \vdots \\ \lambda_N^n \frac{\partial f_N^n}{\partial \phi_N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.140})$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem B.140'ın Denklem B.138'de kullanılmasıyla, gözenekliliğe göre duyarlılık katsayılarını doğrudan hesaplayabileceğimiz denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,j}^L}{\partial \phi_s} = \sum_{n=1}^L \lambda_s^n \frac{\partial f_s^n}{\partial \phi_s}, \quad s = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.141})$$

Burada $\partial f_s^n / \partial \phi_s$, $s = 1, 2, \dots, N$, kısmi türevleri gradyent simülatör için verilen aynı denklemden (Denklem B.83)

$$\frac{\partial f_s^n}{\partial \phi_s} = -\frac{\tilde{V}_s^n}{\phi_s} (p_s^n - p_s^{n-1}), \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.142})$$

hesaplanır.

Herhangi bir t^L zamanındaki herhangi bir simülatör bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\vec{\phi}$ 'a göre duyarlılık katsayısını hesaplayabileceğimiz denklemleri Denklem B.137'de $\nabla_{\vec{\phi}} J = \nabla_{\vec{\phi}} p_s^L$ olarak benzer şekilde türetebiliriz:

$$\frac{\partial p_s^L}{\partial \phi_j} = \sum_{n=1}^L \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial \phi_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N; s = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.143})$$

B.2.3 r yönündeki Geçirgenlik İçin Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\vec{m}$, N -boyutlu r -yönündeki geçirgenlik vektörü olarak seçildiğinde, r -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayılarının hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\nabla_{\vec{k}_r} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{k}_r} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n \quad (\text{B.144})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'nin r -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\vec{k}_r} J = \nabla_{\vec{k}_r} p_{wf}^L$ vektörü alınarak, Denklem B.144'den

$$\nabla_{\vec{k}_r} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{r,1}} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{r,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{r,N}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{k}_r} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.145})$$

denklemini yazabiliriz. Burada $\nabla_{\vec{k}_r} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N \times (N+N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{k}_r} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$ N -boyutlu vektörü

$$\nabla_{\vec{k}_r} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{r,1}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{r,1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{r,1}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{r,1}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{r,1}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{r,1}} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{r,2}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{r,2}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{r,2}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{r,2}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{r,2}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{r,2}} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{r,3}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{r,3}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{r,3}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{r,3}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{r,3}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{r,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{r,N}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{r,N}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{r,N}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{r,N}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{r,N}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{r,N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.146})$$

şeklinde verilir. Denklem B.146'daki matris-vektör çarpma işlemini yapıp elde edilen N -boyutlu vektörü Denklem B.145'te yerine koyarsak r -yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{r,s}} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial k_{r,s}} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{r,s}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.147})$$

Denklem B.147'de kullanılacak kuyuiçi sınırlayıcı $f_{w,l}$ ve gridblok akış ayrık denklemleri f_j^n 'nin r -yönündeki geçirgenliklere göre kısmi türevleri, Bölüm 1.3.1'de grayent simülator için geliştirilen formüllerden hesaplanır. Dolayısıyla burada bu formüller tekrar edilmemektedir.

Herhangi bir t^L zamanındaki simülator bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\bar{k}_r$ 'a göre duyarlılık katsayısını hesaplayacağımız duyarlılık katsayısı denklemleri $p_{wf,l}^L$ 'nin r -yönü geçirgenliklerine göre olan duyarlılık katsayılarına benzer şekilde türetilir:

$$\frac{\partial p_k^L}{\partial k_{r,s}} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial k_{r,s}} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{r,s}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.148})$$

B.2.4 θ yönündeki Geçirgenlik İçin Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\bar{m}$, N -boyutlu θ -yönündeki geçirgenlik vektörü olarak seçildiğinde, θ -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayılarının hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\nabla_{\bar{k}_\theta} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\bar{k}_\theta} (\bar{f}^n)^T \bar{\lambda}^n \quad (\text{B.149})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'nin θ -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\bar{k}_\theta} J = \nabla_{\bar{k}_\theta} p_{wf}^L$ vektörü alınarak, Denklem B.149'dan

$$\nabla_{\vec{k}_\theta} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{\theta,1}} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{\theta,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{\theta,N}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{k}_\theta} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.150})$$

denklemini yazabiliriz. Burada $\nabla_{\vec{k}_\theta} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N \times (N+N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{k}_\theta} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$

N -boyutlu vektörü

$$\nabla_{\vec{k}_\theta} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{\theta,1}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{\theta,1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{\theta,1}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{\theta,1}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{\theta,1}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{\theta,1}} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{\theta,2}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{\theta,2}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{\theta,2}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{\theta,2}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{\theta,2}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{\theta,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{\theta,N}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{\theta,N}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{\theta,N}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{\theta,N}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{\theta,N}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{\theta,N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.151})$$

şeklinde verilir. Denklem B.151'deki matris-vektör çarpma işlemini yapıp elde edilen N -boyutlu vektörü Denklem B.150'de yerine koyarsak θ -yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{\theta,s}} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial k_{\theta,s}} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{\theta,s}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.152})$$

Denklem B.152'de kullanılacak kuyuiçi sınırlayıcı $f_{w,l}$ ve gridblok akış ayrık denklemleri f_j 'nin θ yönündeki geçirgenliklere göre kısmi türevleri, Bölüm 1.3.1'de grayent simülatör için geliştirilen formüllerden hesaplanır. Bu bölümden görüleceği gibi, kuyuiçi sınırlayıcı ayrık denklemleri $f_{w,l}$ θ -yönündeki geçirgenliklere bağlı olmadığından, Denklem B.152 aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{\theta,s}} = \sum_{n=1}^L \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{\theta,s}}, \quad s = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (B.153)$$

Herhangi bir t^L zamanındaki simülatör bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\vec{k}_\theta$ 'ya göre duyarlılık katsayısını hesaplayacağımız duyarlılık katsayısı denklemleri $p_{wf,l}^L$ 'nin θ -yönü geçirgenliklerine göre olan duyarlılık katsayılarına benzer şekilde türetilir:

$$\frac{\partial p_k^L}{\partial k_{\theta,s}} = \sum_{n=1}^L \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{\theta,s}}, \quad s = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N, \quad (B.154)$$

Bu noktada, Denklem B.153 ve Denklem B.154'ün sağ tarafları aynı gibi gözükmele beraber bu denklemlerin sağ taraflarının farklı olduğunu belirtmek faydalı olacaktır. Farklı olmasının nedeni, Denklem B-153 ve B-154 kullanılmadan önce, adjoint sistem denkleminde (Denklem B.114) $p_{wf,l}^L$ ve p_s^L için farklı kaynak terimleri kullanılarak çözüleceğinden, $p_{wf,l}^L$ (Denklem B.116 – Denklem B.118) ve p_s^L (Denklem B.119 – Denklem B.121) için hesaplanacak adjoint (Lagrange) değişkenleri farklı olacağındandır. Bu açıklama diğer duyarlılık katsayıları içinde geçerlidir.

B.2.5 z yönündeki Geçirgenlik İçin Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\vec{m}$, N -boyutlu z -yönündeki geçirgenlik vektörü olarak seçildiğinde, z -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayılarının hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\nabla_{\vec{k}_z} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{k}_z} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n \quad (B.155)$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'nin z -yönü geçirgenliklerine göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\vec{k}_z} J = \nabla_{\vec{k}_z} p_{wf,l}^L$ vektörü alınarak, Denklem B.155'den

$$\nabla_{\vec{k}_z} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{z,1}} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{z,2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{z,N}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{k}_z} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.156})$$

denklemini yazabiliriz. Burada $\nabla_{\vec{k}_z} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N \times (N+N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{k}_z} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$ N -boyutlu vektörü

$$\nabla_{\vec{k}_z} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{z,1}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{z,1}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{z,1}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{z,1}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{z,1}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{z,1}} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{z,2}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{z,2}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{z,2}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{z,2}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{z,2}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{z,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial k_{z,N}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial k_{z,N}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial k_{z,N}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial k_{z,N}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial k_{z,N}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial k_{z,N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.157})$$

şeklinde verilir. Denklem B.157'deki matris-vektör çarpma işlemini yapıp elde edilen N -boyutlu vektörü Denklem B.156'de yerine koyarsak z -yönündeki geçirgenliğe göre duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial k_{z,s}} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial k_{z,s}} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{z,s}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.158})$$

Denklem B.152'de kullanılacak kuyuiçi sınırlayıcı $f_{w,l}$ ve gridblok akış ayrık denklemleri f_j 'nin z -yönündeki geçirgenliklere göre kısmi türevleri, Bölüm 1.3.1'de grayent simülatör için geliştirilen formüllerden hesaplanır.

Herhangi bir t^L zamanındaki simülatör bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\vec{k}_z$ 'ya göre duyarlılık katsayısını hesaplayacağımız duyarlılık katsayısı denklemleri

$p_{wf,l}^L$ 'nin z-yönü geçirgenliklerine göre olan duyarlılık katsayılarına benzer şekilde türetilir:

$$\frac{\partial p_k^L}{\partial k_{z,s}} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial k_{z,s}} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial k_{z,s}} \right], \quad s = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.159})$$

B.2.6 Kuyuiçi Depolama Sabitlerine Göre Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\vec{m}$, N_w -boyutlu kuyuiçi depolaması sabitlerini ihtiva eden vektör ($\vec{C}$) olarak seçildiğinde, kuyuiçi depolama sabitlerine göre duyarlılık katsayılarının hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\nabla_{\vec{C}} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{C}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n \quad (\text{B.160})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'ye göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\vec{C}} J = \nabla_{\vec{C}} p_{wf,l}^L$ vektörü alınarak, Denklem B.160'dan

$$\nabla_{\vec{C}} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial C_1} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial C_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial C_{N_w}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{C}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.161})$$

ilişkisi elde edilir. Burada $\nabla_{\vec{C}} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N_w \times (N + N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{C}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$ N_w -boyutlu vektör

$$\nabla_{\vec{C}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial C_1} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial C_1} & \frac{\partial f_1^n}{\partial C_1} & \frac{\partial f_2^n}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial C_1} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial C_2} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial C_2} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial C_2} & \frac{\partial f_1^n}{\partial C_2} & \frac{\partial f_2^n}{\partial C_2} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial C_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial C_{N_w}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial C_{N_w}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial C_{N_w}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial C_{N_w}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial C_{N_w}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial C_{N_w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.162})$$

şeklinde verilir. Denklem B.162'deki matris-vektör çarpma işlemini yapıp elde edilen N_w -boyutlu vektörü Denklem B.161'de yerine koyarsak kuyuiçi depolama sabitlerine göre duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial C_i} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial C_i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial C_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_w; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.163})$$

Denklem B.162'de kullanılacak kuyuiçi sınırlayıcı $f_{w,l}$ ve gridblok akış ayrık denklemleri f_j 'nin kuyuiçi depolama sabitlerine göre kısmi türevleri, Bölüm 1.3.1'de grayent simülatör için geliştirilen formüllerden hesaplanır. Bu bölümden görüleceği gibi, sadece kuyuiçi sınırlayıcı ayrık denklemleri $f_{w,l}$ kuyuiçi depolama sabitlerine bağlı olduğundan, Denklem B.163 aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial C_i} = \sum_{n=1}^L \sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_w; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.164})$$

Herhangi bir t^L zamanındaki simülatör bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\vec{C}$ 'ye göre duyarlılık katsayısını hesaplayacağımız duyarlılık katsayısı denklemleri $p_{wf,l}^L$ 'nin $\vec{C}$ 'ye göre olan duyarlılık katsayılarına benzer şekilde türetilir:

$$\frac{\partial p_s^L}{\partial C_i} = \sum_{n=1}^L \sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_w; s = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.165})$$

B.2.7 Zar Faktörlerine Göre Duyarlılık Katsayıları.

Denklem B.125'te $\vec{m}$, N_s -boyutlu zar faktörlerini eden vektör ($\vec{S}$) olarak seçilir.

Burada

$$N_s = \sum_{l=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{N_{a,l}} (N_{\theta s,m} - N_{\theta b,m} + 1)(N_{hs,m} - N_{hb,m} + 1) \quad (\text{B.166})$$

denklemleriyle tanımlanır. O halde zar faktörlerine göre duyarlılık katsayılarını hesaplayabileceğimiz denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\nabla_{\vec{S}} J = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{S}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n \quad (\text{B.167})$$

Eğer amacımız herhangi bir t^L zamanındaki kuyudibi basıncı $p_{wf,l}^L$ 'ye göre duyarlılık katsayısını hesaplamak ise, $\nabla_{\vec{S}} J = \nabla_{\vec{S}} p_{wf,l}^L$ vektörü alınarak, Denklem B.167'den

$$\nabla_{\vec{S}} p_{wf,l}^L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial S_1} \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial S_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial S_{N_s}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^L \nabla_{\vec{S}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n, \quad (\text{B.168})$$

ilişkisi elde edilir. Burada $\nabla_{\vec{S}} (\vec{f}^n)^T$ matrisi $N_s \times (N+N_w)$ boyutlu olup $\nabla_{\vec{S}} (\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n$ N_s -boyutlu vektör

$$\nabla_{\vec{S}}(\vec{f}^n)^T \vec{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial S_1} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial S_1} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial S_1} & \frac{\partial f_1^n}{\partial S_1} & \frac{\partial f_2^n}{\partial S_1} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial S_1} \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial S_2} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial S_2} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial S_2} & \frac{\partial f_1^n}{\partial S_2} & \frac{\partial f_2^n}{\partial S_2} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial S_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{w,1}^n}{\partial S_{N_s}} & \frac{\partial f_{w,2}^n}{\partial S_{N_s}} & \dots & \frac{\partial f_{w,N_w}^n}{\partial S_{N_s}} & \frac{\partial f_1^n}{\partial S_{N_s}} & \frac{\partial f_2^n}{\partial S_{N_s}} & \dots & \frac{\partial f_N^n}{\partial S_{N_s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{w,1}^n \\ \lambda_{w,2}^n \\ \vdots \\ \lambda_{w,N_w}^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.169})$$

şeklinde verilir. Denklem B.169'daki matris-vektör çarpma işlemini yapıp elde edilen N_s -boyutlu vektörü Denklem B.168'de yerine koyarsak zar faktörüne göre duyarlılık katsayılarını hesaplayacağımız denklemleri elde ederiz:

$$\frac{\partial p_{wf,l}^L}{\partial S_i} = \sum_{n=1}^L \left[\sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial S_i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \frac{\partial f_j^n}{\partial S_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_w; l = 1, 2, \dots, N_w, \quad (\text{B.170})$$

Denklem B.170'de kullanılacak kuyucu sınırlayıcı $f_{w,l}$ ve gridblok akış ayrık denklemleri f_j 'nin zar faktörlerine göre kısmi türevleri, Bölüm 1.3.3'de gradyent simülasyon için geliştirilen formüllerden hesaplanır.

Herhangi bir t^L zamanındaki simülasyon bloğu basıncı p_s^L 'nin, $s = 1, 2, \dots, N$, $\vec{S}$ 'ye göre duyarlılık katsayısını hesaplayacağımız duyarlılık katsayısı denklemleri $p_{wf,l}^L$ 'nin $\vec{S}$ 'ye göre olan duyarlılık katsayılarına benzer şekilde türetilir:

$$\frac{\partial p_s^L}{\partial S_i} = \sum_{n=1}^L \sum_{l=1}^{N_w} \lambda_{w,l}^n \frac{\partial f_{w,l}^n}{\partial S_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_w, s = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{B.171})$$

ÖZGEÇMİŞ

20 Ağustos 1975’de Kahramanmaraş’ta doğdu. 1981 yılında Kadirli’de öğrenim hayatına başladı. 1992 yılında Kadirli Lisesi’nden mezun oldu. 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi-Maden Fakültesi’nden Petrol ve Doğal Gaz Mühendisi olarak mezun oldu ve aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi-Fen Bilimleri Petrol ve Doğal Gaz Mühendisliği Programı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi-Petrol ve Doğal Gaz Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Şubat 2000 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı ve aynı programda doktora eğitimine başladı. Halen araştırma görevlisi olarak aynı bölümde görev yapmakta ve doktora eğitimine devam etmektedir. “Kuyu testlerinin modern yöntemler ile analizi” ve “jeotermal rezervuarların simülasyonu” üzerine uluslararası dergilerde ve kongrelerde yayımlanmış yayınları bulunmaktadır

