

ADYABATİK OLMAYAN KÜRESEL SİMETRİK
KÜTLEÇEKİMSSEL PROBLEME BİR BAKIŞ

Yüksek Lisans Tezi
Semiha Baylan

Anabilim Dalı: Fizik Mühendisliği
Programı : Fizik Mühendisliği

OCAK 2010

ADYABATİK OLMAYAN KÜRESEL SİMETRİK
KÜTLEÇEKİMSEL ÇÖKME PROBLEMİNE BİR BAKIŞ

Yüksek Lisans Tezi
Semiha Baylan
(509061112)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Aralık 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR (İTÜ)
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU (İTÜ)
Prof. Dr. Ayşe H. BİLGE (İTÜ)

OCAK 2010

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimim süresince bana duyduğu güveni her zaman hissettirerek beni cesaretlendiren, tez çalışmam süresince tüm bilgisi ile bana yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Neşe ÖZDEMİR'e çok teşekkür ederim.

Tüm sıkıntılara ortak olan, hiç bir zaman desteğini benden esirgemeyen sevgili dostum Elif KAYA'ya hep yanımda olduğu için çok teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, bana karşı gösterdikleri sevgi, sabır, anlayış ile birlikte, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürler.

Ocak 2010

Semiha BAYLAN

Fizik Mühendisi

ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Hiperyüzeylerin Tanımı	2
1.2 Dışsal Eğrilik	3
1.3 Gauss-Codazzi Denklemleri	4
1.4 İndirgenmiş Hal	7
2. YÜZEY TABAKASININ RELATİVİSTİK TEORİSİ	9
2.1. Einstein Alan Denklemleri	11
2.2. Boşlukta Küresel Toz Kabuk	13
2.3. Kerr Alanı Çözümü	17
3. ADYABATİK OLMAYAN KÜTLEÇEKİMSEL ÇÖKME	21
3.1. İç uzay-zaman	21
3.2. İç uzay-zaman	23
3.3. Hiperyüzey Üzerinde Denklemler	25
SONUÇ VE ÖNERİLER	27
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	31

SEMBOL LİSTESİ

Σ	:	Hiperyüzey
$\mu, \nu, \rho, \kappa, \lambda, \dots$	:	$(n + 1)$ -boyutlu uzay-zaman indisleri
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \dots$	:	(n) -boyutlu uzay-zaman indisleri
∇_μ	:	Kovaryant türev
$\mathbf{K}_{\mu\nu}$	:	Simetrik Dışsal Eğrilik Tensörü
$\mathbf{n}^\alpha$	:	Normal vektör
$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$	:	Christoffel sembolü
$\mathbf{G}_{\mu\nu}$	:	Einstein Alan Tensörü
$\mathbf{T}_{\mu\nu}$	:	Enerji-Momentum Tensörü
$\mathbf{R}_{\kappa\lambda\mu}^\nu$	:	Riemann Eğrilik Tensörü

ADYABATİK OLMAYAN KÜRESEL SİMETRİK KÜTLEÇEKİMSSEL ÇÖKME PROBLEMİNE BİR BAKIŞ

ÖZET

Küresel simetrik radyasyon yayan elektrik yüklü ideal bir akışkanın radyasyon yayarak adyabatik olmayan bir şekilde kütleçekimsel çökme problemini bu çalışmada inceledik. Kozmolojik sabit ve elektrik yükünün çökme problemine etkisi incelenmiş, adyabatik olmayan çökme işleminin gerçekleşmesi için elektrik yükünün ve kozmolojik sabitin varlığının yeterli olduğu gösterilmiştir.

Uzay-zamanda maddesel yapıların varlığı enerji-mometum tensöründeki süreksizliklere neden olmakta, uzay-zamanı zamansal bir hiperyüzeyin böldüğü iki ayrı bölgeye ayırmaktadır. Genel görelilik teorsinde bir uzayı tam olarak tarif etmek istersek birbirinden farklı bu iki bölgenin onları sınırlayan yüzey üzerinde sağlaması gereken koşullar karşımıza çıkmaktadır.

Bir yıldızın iç ve dış bölgelerini tanımlayan uzay-zaman iki farklı bölüme ayrılmış olarak aşağıdaki gibi düşünülebilir

$$M = M^+ \cup M^-. \quad (1)$$

$$\partial M^+ \cap \partial M^- = \Sigma \quad (2)$$

şeklinde tanımlanan ortak sınır Σ yüzeyi 3-boyutlu bir hiperyüzeydir ve her iki bölge ($M^\pm$) için Einstein alan denklemleri ayrı ayrı sağlanmalıdır

$$G_{\mu\nu}^\pm = \kappa T_{\mu\nu}^\pm. \quad (3)$$

Burada "+" ve "-", taşıyan tensörün M^+ ve M^- bölümleri temsil etmektedir. Her iki bölge için çizgi elemanı

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^\pm dx_\pm^\mu dx_\pm^\nu, \quad (4)$$

dır ve indirgenmiş Σ yüzeyinde ise metrik

$$d\sigma^2 = h_{ij} dx^i dx^j \quad (5)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Her iki bölgenin geometrisi de, Σ yüzeyinin $M^\pm$ bölgesinin farklı yerlerine nasıl gömüldüğünü yansıtır. Σ uzayı iki farklı bölgeye ayırdığından, bu iki farklı bölgenin geometrisini dış eğrilikleri yardımıyla karşılaştırabiliriz. $K_{\mu\nu}^\pm$ iç (+) ve dış (-) bölgeler için dışsal eğrilik tensörünün bileşenlerini gösterebiliriz, $M^\pm$ bölgeleri için, Σ yüzeyinde baz vektörü e_μ nün $\mathbf{n}$ -doğrultusundaki kovaryant türevi olarak tanımlanır

$$K_{\mu\nu}^\pm = n \cdot \nabla_\mu^\pm e_\nu = \epsilon n_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha |^\pm. \quad (6)$$

$M^\pm$ bölgeleri için indirgenmiş metrik $h_{\mu\nu}$, Σ yüzeyi üzerinde birbirine eşit olmalıdır.

Uzay-zaman eşleştirme koşullarına göre eğrilik tensörü ve enerji-momentum tensörünü Einstein alan denklemleri ile ilişkilendirmek için enerji-momentum tensörünün Σ üzeri dışında her yerde sürekli olması sağlanmalıdır. Aynı zamanda metrik tensörünün de tüm uzayda sürekli olması gerekmektedir.

Einstein tensörü, metrik tensörünün ikinci türevini içermektedir. $g_{\mu\nu;\alpha}n^\alpha$ 'nın türevinin süreksiz olabileceği gözönüne alınırsa, ikinci türev $\theta(x)$ basamak fonksiyonunun türevi delta fonksiyonu olabilir; $\theta'(x) = \delta(x)$.

En genel halde, Enerji-momentum tensörü sınırlar boyunca, aşağıdaki gibidir

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}\delta(y) + T_{\alpha\beta}^+\theta(y) + T_{\alpha\beta}^-\theta(-y). \quad (7)$$

Burada $T_{\alpha\beta}^\pm$ iç (+) ve dış (-) bölgelere, $S_{\alpha\beta}$ ise yüzeye ait enerji-momentum tensörüdür. Yüzey üzerindeki enerji-momentum tensörü $S_{\alpha\beta}$, yüzey kalınlığı sıfıra giderken, bu kalınlık üzerinden integral olarak tanımlanabilir

$$S_{\alpha\beta} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} T_{\alpha\beta} dy. \quad (8)$$

İyi tanımlı bir tensör olabilmesi için $S_{\alpha\beta}$ 'nın iperyüzey üzerinde bulunması gerekir. $S_{\alpha\beta}$ tensörünün bu şekilde tanımlanması *ince kabuk yaklaşımı* olarak adlandırılır.

Bir koordinat takımı oluşturulursa, bunlar (x^i) hiperyüzeyi üzerindeki koordinatlar olacak, ve y ise (ortagonal) dik yöndeki koordinat olacaktır. İnce kabuk yaklaşımı kullanılarak, S_{ij} için aşağıdaki ifade bulunur

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [\epsilon n^\mu \nabla_\mu (K_{ij} - h_{ij}K) + U_{ij}] dy. \quad (9)$$

Elde edilen denklemde U_{ij} , K_{ab} 'nin kuadratik terimlerini ve üç-eğriliğini içermektedir. Bu nedenle, bağlı olarak düşünülmektedir ve integralin kalan terimi tam bir diferansiyel olarak yazılabilir

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \epsilon([K_{ij}] - h_{ij}[K]). \quad (10)$$

Bu tanım Einstein alan denklemlerinde kullanılırsa

$$[K_{ij}] - h_{ij}[K] = \epsilon \kappa S_{ij} \quad (11)$$

elde edilir ve bu denklem *Lanczos denklemi* olarak adlandırılır. $S_{\mu\nu}$ 'nün diğer bileşenleri ise sıfırdır

$$S_{nn} = S_{ni} = 0. \quad (12)$$

Lanczos denklemi yeniden

$$[K_{ij}] = \kappa \epsilon (S_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} S) \quad (13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem yüzeyin enerji-momentum tensörü ile farklı iki bölgeyi yüzey üzerinde karşılaştırmaktadır ve yüzeyin hareket denklemlerinden birisini verir. Bu nedenle, basitlik açısından sadece zamansal hiperyüzeyleri gözönüne alacağız ve $\epsilon = 1$ varsayacağız.

Lanczos denklemi ile birlikte aşağıdaki denklemler üretilir

$${}^{(3)}\nabla_j S_i^j + [T_{in}] = 0, \quad (14)$$

ve

$$S_{ij}\{K^{ij}\} + [T_{nn}] = 0. \quad (15)$$

Yüzey üzerindeki metrik iç bölgeye ait uzay-zamanın hareketsiz koordinatları cinsinden

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (16)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\xi^i = (\tau, \theta, \phi)$ yüzey koordinatları ve $R(\tau)$ yüzeye ait yarıçaptır. İç uzay-zaman içinde metrik yüklü küresel simetrik çöken ideal bir akışkanı temsil etmektedir ve şu şekilde yazılır

$$ds_-^2 = -A(r, t)^2 dt^2 + B(r, t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (17)$$

$\chi_-^a(t, r, \theta, \phi)$ iç uzay-zamana ait koordinatlardır. A ve B ise, yarıçap ve zamana bağlı fonksiyonlar olup Einstein-Maxwell Alan denklemlerinin çözümlerinden bulunur.

Einstein alan denklemlerinin sağ tarafı kaynak terimi olup, yıldızın yapısını tanımlamaktadır

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)w_\alpha w_\beta + pg_{\alpha\beta} + q_\alpha w_\beta + q_\beta w_\alpha \quad (18)$$

burada μ enerji yoğunluğu, p is izotropik basınç, w_α 4-hız vektörü q_α radyal yöndeki ısı akışını temsil etmektedir. Koordinat seçimiyle w_α ve w_α birbirlerin dik olarak alınabilir

Yüzeyin dışında kalan uzay-zamanı radyasyon yayan küresel simetrik Vaidya metriği ile ifade ediyoruz

$$ds_+^2 = -\left(1 - \frac{2m(\nu)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) d\nu^2 - 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2 \quad (19)$$

Burada içeriden farklı olarak yüzeyin yarıçapı ν zaman parametresine bağlıdır, yani yüzeyimiz zamanla çökmekte ya da genişlemektedir. Burada birinci sınır koşulu $(ds_-^2)_\Sigma = (ds_+^2)_\Sigma = ds_\Sigma^2$, dur ve denklemlerde yerine konulduğunda aşağıdaki bağıntılar elde edilir

$$r_\Sigma(v) = R(\tau), \quad (20)$$

$$\frac{1}{dv^2} \left[-\left(\frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dv^2 - 2dvdr \right]_\Sigma = \frac{1}{dv^2} [-d\tau^2]_\Sigma, \quad (21)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) + 2\frac{dr}{dv} \right]_\Sigma = \left[\frac{1}{\dot{v}^2} \right]_\Sigma. \quad (22)$$

Enerji momentum tensöründeki süreksizlikler incelendiğinde

$$p_{\Sigma} = \left(qB + \frac{Q^2}{B^4 r^4 \kappa} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \quad (23)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada Λ kozmoloji sabiti, Q elektrik yükü, q ısı akışı ve p basıncı temsil etmektedir.

ON THE NON-ADIABATIC SPHERICAL SYMMETRIC GRAVITATIONAL COLLAPSE

SUMMARY

We consider spherically symmetric radiating collapse of an ideal charged fluid in the presence of the cosmological constant. In the literature spherically symmetric radiating collapse of an ideal fluid was studied with cosmological constant. Here we consider charged generalization of the case. The interior spacetime can be modelled by de Sitter-Vaidya and the exterior spacetime is considered as Reissner-Nördström de Sitter spacetime. Besides the effects of the cosmological constant, we also examined the effects of electrical charge. Finally, we compare our results with the results in the literature and show that heat flux can be chosen as zero to get collapsing configuration.

The existence of the matter fields causes the jump discontinuity in the energy-momentum tensor and splits the spacetime into two distinct region by a timelike hypersurface. To describe a physical spacetime exactly, we encounter boundary conditions to be satisfied by these two distinct field equations on the boundary hypersurface.

It can be thought that, spacetime describing the interior and the exterior of a star consists of two separated regions matched on the boundary surface

$$M = M^+ \cup M^-. \quad (24)$$

The boundary hypersurface is a 3-dimensional hypersurface

$$\partial M^+ \cap \partial M^- = \Sigma \quad (25)$$

where the Einstein field equations are satisfied for either $(M^\pm)$ regions

$$G_{\mu\nu}^\pm = \kappa T_{\mu\nu}^\pm. \quad (26)$$

Here "+" and "-" represent exterior M^+ and interior M^- regions. The line elements of the interior and the exterior regions are defined by

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^\pm dx_\pm^\mu dx_\pm^\nu, \quad (27)$$

and the metric on the induced hypersurface is

$$d\sigma^2 = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (28)$$

The geometry of the regions reflects how hypersurface Σ is embedded into the different parts of the spacetime $M^\pm$. Since the hypersurface Σ splits the spacetime

into two parts these two separated regions can be matched by means of their extrinsic curvatures. Let us suppose that $K_{\mu\nu}^{\pm}$ represent extrinsic curvature tensor for interior (+) and exterior (-) regions, the extrinsic curvature of the regions $M^{\pm}$ can be defined by the covariant derivative of the base vectors e_{μ} on the surface Σ in the $\mathbf{n}$ -direction as

$$K_{\mu\nu}^{\pm} = n \cdot \nabla_{\mu}^{\pm} e_{\nu} = \epsilon n_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} |^{\pm} . \quad (29)$$

The induced metrics $h_{\mu\nu}$ of regions $M^{\pm}$ must be equal to each other on the boundary Σ .

According to matching conditions of the spacetime, to relate the curvatures of the spacetime with the Einstein field equations we should consider that energy-momentum tensor is supposed to be continuous everywhere throughout the interior and exterior regions except on the boundary surface Σ . Furthermore, the metric tensor is supposed to be continuous throughout whole the spacetime.

Einstein tensor contains the second derivative of the metric tensor. The discontinuity of the $g_{\mu\nu;\alpha} n^{\alpha}$ gives that the second derivative can be written in terms of derivative of the delta function $\theta(x)$; $\theta'(x) = \delta(x)$.

In the most general form, the energy-momentum tensor is given by

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \delta(y) + T_{\alpha\beta}^{+} \theta(y) + T_{\alpha\beta}^{-} \theta(-y) . \quad (30)$$

Here $T_{\alpha\beta}^{\pm}$ belongs to interior (+) and exterior (-) regions, $S_{\alpha\beta}$ is the surface energy-momentum tensor. The surface energy-momentum tensor on the hypersurface $S_{\alpha\beta}$ can be defined as the integral over the thickness as the thickness goes to zero

$$S_{\alpha\beta} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} T_{\alpha\beta} dy . \quad (31)$$

To get a well defined result $S_{\alpha\beta}$ is supposed to be on the hypersurface only. The definition of this type is called $S_{\alpha\beta}$ "thin shell approximation" .

Let us form coordinate basis and suppose that (x^i) be coordinates on the hypersurface and y be coordinates orthogonal to surface. By using thin shell approximation we have

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [\epsilon n^{\mu} \nabla_{\mu} (K_{ij} - h_{ij} K) + U_{ij}] dy \quad (32)$$

in which quadratic terms of U_{ij} , K_{ab} are involved. These terms can be thought as surface term and then, the rest can be written as an exact derivative

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \epsilon ([K_{ij}] - h_{ij} [K]) . \quad (33)$$

When we insert the results in the Einstein field equations we get

$$[K_{ij}] - h_{ij} [K] = \epsilon \kappa S_{ij} \quad (34)$$

and it is called *Lanczos equation*. But, the other components of $S_{\mu\nu}$ are zero

$$S_{nn} = S_{ni} = 0. \quad (35)$$

The Lanczos equation can be rewritten as

$$[K_{ij}] = \kappa\epsilon(S_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}S). \quad (36)$$

This equation meets the energy-momentum tensor of the surface with the energy momentum tensors of interior and exterior regions on the boundary surface and gives one of the equation of motion of the surface. For the sake of the simplicity we just consider only timelike hypersurfaces and choose $\epsilon = 1$.

By using Lanczos equation we get following relations

$${}^{(3)}\nabla_j S_i^j + [T_{in}] = 0, \quad (37)$$

and

$$S_{ij}\{K^{ij}\} + [T_{nn}] = 0. \quad (38)$$

The metric of the hypersurface has the following form in terms of interior non-moving coordinates

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (39)$$

Let us suppose that $\xi^i = (\tau, \theta, \phi)$ is the surface's coordinate basis and $R(\tau)$ is the radius of the hypersurface. The interior spacetime consists of a charged shear-free spherically symmetric collapsing fluid and can be represented by line element

$$ds_-^2 = -A(r, t)^2 dt^2 + B(r, t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \quad (40)$$

We suppose $\chi_-^a(t, r, \theta, \phi)$ is interior spacetime coordinate basis, A and B are time and radial coordinate dependent functions and determined by Einstein-Maxwell field equations.

Energy momentum tensor is the source of the Einstein field equations and define the interior part of a star

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)w_{\alpha}w_{\beta} + pg_{\alpha\beta} + q_{\alpha}w_{\beta} + q_{\beta}w_{\alpha}. \quad (41)$$

Here μ is energy density, p is isotropic pressure, w_{α} is a 4-speed vector q_{α} is heat flux in the radial direction. By using appropriate coordinate system it is always possible to choose w_{α} and w_{α} orthogonal.

The exterior region is defined by a radiating spherical symmetric Vaidya space-time and its line element is

$$ds_+^2 = -\left(1 - \frac{2m(\nu)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) d\nu^2 - 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2. \quad (42)$$

It should be emphasized that the radius of the surface changes with time ν , that is, the surface expands or contracts in time. When we apply the first boundary

condition, the equality of the metric tensors on the boundary $(ds_-^2)_\Sigma = (ds_+^2)_\Sigma = ds_\Sigma^2$ and substitute in the related equations we have the following relations

$$r_\Sigma(v) = R(\tau), \quad (43)$$

$$\frac{1}{dv^2} \left[- \left(\frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dv^2 - 2dvdr \right]_\Sigma = \frac{1}{dv^2} [-d\tau^2]_\Sigma, \quad (44)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) + 2 \frac{dr}{dv} \right]_\Sigma = \left[\frac{1}{\dot{v}^2} \right]_\Sigma. \quad (45)$$

When the discontinuity in the energy-momentum tensor is examined we get a state equation among the physical quantities about the matter

$$p_\Sigma = \left(qB + \frac{Q^2}{B^4 r^4 \kappa} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right). \quad (46)$$

Here Λ is cosmologic constant, Q is electric charge of the star, q is the heat flux p is the pressure basıncı temsil etmektedir.

1. GİRİŞ

Genel görelilik teorisinde yıldızları ve onlara ait kara deliklerin oluşumu, kara delik bölgesinden kaçış, kozmik sansürleme gibi bazı fiziksel olayları anlamak ve fiziksel yapıyı oluşturmak için birbirinden farklı iki uzay-zamanı birlikte düşünmemiz gerekmektedir. Bunun için, birbirinden farklı özelliklere sahip iki uzay-zamanı maddeye yani yıldızın iç (interior) bölge ve madde-siz ortama ait radyasyon ve elektromanyetik alan içerebilen kısmı dış (exterior) bölge olarak adlandırıp bu iki uzayı sınır yüzeyi olan yıldızın yüzeyi üzerinde karşılaştırmamız gerekmektedir. Yıldız yüzeyi her iki uzayı birbirinden ayıran zamansal bir hiperyüzeydir. Gözönüne aldığımız uzaylar küresel simetriye sahip olduklarından yıldızın dışına ait uzay eğer sadece yıldızın kütlesi ile karakterize ediliyorsa Schwarzschild vakumu, ayrıca elektrik yük içeriyorsa Reissner-Nordström uzayı, bunların dışında sadece radyal yönde ışıksal radyasyon yayan bir uzay gözönüne alınıyorsa Vaidya, yüklü hali olarak da Vaidya-Reissner-Nordström uzayı olarak seçilir [1,2,4].

Bu çalışmanın birinci bölümünde bir yıldızın iç ve dış bölgesine ait uzayların tanımı, eşleşme koşulları, metrik tensörü ve enerji-momentum tensöründeki sürekliliklerin matematiksel yapısı incelenmiş, ikinci bölümünde yüzey tabakasının relativistik teorisi çalışılmıştır. Üçüncü bölümde ise radyal yönde ışıksal radyasyon yayan Q yüklü Vaidya-Reissner-Nordström uzayında küresel simetrik gravitasyonel çökme probleminde eşleşme koşulları kozmolojik sabit Λ varlığında verilmiştir.

1.1 Hiperyüzeylerin Tanımı

Dört boyutlu bir uzay manifoldu içerisinde bir Σ hiperyüzeyi [3,4]

$$\Phi(x^\alpha) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde bir denklem ile verilebilir. Burada x^α nın parametrik denklemi

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a) \quad (1.2)$$

ve y^a , ($a = 1, 2, 3$) hiperyüzeye ait iç koordinatlardır. Hiperyüzeyin normali $\Phi_{,\alpha}$ vektörü ile tanımlanır ve birim normal vektör n_α , hiperyüzeyin ışıksal olmadığı durum için

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \Sigma \text{ zamansal ise} \\ -1, & \Sigma \text{ uzaysal ise} \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

ile verilir. n_α

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}} \quad (1.4)$$

dir. Birim normal vektör Σ hiperyüzeyi ışıksal olduğunda tanımlı değildir, çünkü $g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}$ sıfıra eşit olur. Bu durum için aşağıdaki normal vektör tanımlanır

$$k_\alpha = -\Phi_{,\alpha}. \quad (1.5)$$

Σ hiperyüzeyi üzerinde "indirgenmiş metrik", uzay-zamanın uzunluk elemanının hiperyüzey üzerindeki uzaklığa kısıtlanması ile elde edilir. Parametrik denklemler tekrar gözönüne alınarak aşağıdaki vektör tanımlanırsa

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$$

bu vektör Σ hiperyüzeyi üzerindeki eğrilere teğet olduğundan, ışıksal olmayan durum için, $e_a^\alpha n_\alpha = 0$, ve ışıksal olan durum için de $e_a^\alpha k_\alpha = 0$ şeklindeki denklemleri sağlamaktadır. Σ üzerinde uzaklığı ele alırsak

$$ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) = h_{ab} dy^a dy^b \quad (1.6)$$

elde edilir ve burada

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$$

şeklinde olup, hiperyüzeyin indirgenmiş metriği adını alır. h_{ab} metriği $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ uzay-zaman koordinatları dönüşümü altında değişmez, skaler gibi davranır. $y^a \rightarrow y'^a$ hiperyüzey koordinat dönüşümü altında tensör gibi davranır. Işıksal olmayan durumlar için metriğin tersi

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta,$$

ile verilir, burada h^{ab} , indirgenmiş metriğin tersidir. Birinci cins Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{\gamma a; \beta} e_b^\beta \quad (1.7)$$

indirgenmiş metrik cinsinden

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}) \quad (1.8)$$

şeklinde dir.

1.2 Dışsal Eğrilik

Riemann eğrilik tensörü uzayın iç geometrik özelliklerini temsil eden bir büyüklüktür ve uzayın boyutu ile aynı boyuta sahip gözlemciler tarafından ölçülebilmektedir. Örneğin 2-boyutlu bir yüzey gözönüne alındığında, bu yüzeye ait iç geometri o yüzey üzerinde yaşayan varlıklar tarafından ölçülebilir. Genelde Riemann tensörü sıfır olursa bur uzaya düz uzay denir. 2-boyutlu Euclid'yen bir düzlemin kendi üzerine kapatılması ile elde edilen bir yüzey gözönüne alalım. Bu düzlem kendi üzerine yerel geometrisinde değişiklikler olmayacak şekilde kapatılırsa elde edile silindirik yüzeyin iç geometrisi hala Euclid'yen ve iç eğriliği, Riemann eğriliği sıfırdır. Ancak bu uzaya dışarıdan örneğin 3-boyutlu bir Euclid'yen uzaydan bakılırsa yüzeyin silindirik bir yapıya sahip olduğu yani eğri bir yüzeye sahip olduğu görülür, uzay *dışsal (extrinsic) eğriliğe* sahiptir. Aşağıda kendisinden bir fazla boyuta sahip bir uzayın dışsal eğriliğini tanımlayacağız.

$(n + 1)$ -boyutlu M^{n+1} uzayına gömülü (n) -boyutlu M^n uzayı gözönüne alalım. Bu uzaya *hiperyüzey* diyeceğiz. Yunan harfli indisler M^{n+1} , Latin harfli indisler M^n uzayına ait büyüklükleri temsil etsin. Dış eğriliğin bir ölçüsü birim normal vektörün hiperyüzey üzerinde konuma bağlı olarak nasıl değiştiğidir.

Dışsal eğrilik tensörü K , M^n üzerinde (0,2) tipi (2-kovaryant) simetrik bir tensördür ve

$$K_{ab} = -e_b \cdot \nabla_a n \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada kovaryant türev M^{n+1} uzayında alınmıştır.

Birim normal vektör yüzey üzerindeki baz vektörlerine dik olduğundan $\nabla_a(e_b \cdot n) = 0$ yazılabilir buradan (1.9) denklemi

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (1.10)$$

olarak yazılabilir burada ";" $(n+1)$ boyutlu uzayda kovaryant türevi temsil etmektedir. olarak ifade edilebilir. M^n ve M^{n+1} boyutlu uzaylara ait Riemann tensörü ile M^n uzayının dışsal eğriliği arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha \quad (1.11)$$

denklemi Gauss-Weingarten denklemidir. Ayrıca, K_{ab} tensörü, metrik tensörü ve normal vektör türevi ile şöyle ilişkilidir

$$K \equiv h^{ab} K_{ab} = n_{;\alpha}^\alpha. \quad (1.12)$$

Burada K da hiperyüzeyi dik olarak kesen jeodeziklerin bir kongrüansının genişlemesine eşittir yani hiperyüzey üzerinde teğet vektörü n^α ya eşittir. Hiperyüzey, $K > 0$ olduğu durumda hiperyüzey dışbükey, $K < 0$ olduğunda ise içbükeydir.

h_{ab} tamamen hiperyüzey geometrisinin iç (intrinsic) yapısı ile ilişkili iken, K_{ab} dış (extrinsic) özelliği ile ilişkilidir. Bu tensörler, bir hiperyüzeyin karakterizasyonunu hemen hemen tamamlamayı sağlar.

1.3 Gauss-Codazzi Denklemi

İndirgenmiş metrik h_{ab} ve onunla ilişkili olarak tanımlanmış olan intrinsic kovaryant türevin ardından eğrilik tensörünü şöyle ifade edebiliriz

$$R_{dab}^c = \Gamma_{db,c}^c - \Gamma_{da,b}^c + \Gamma_{ma}^c \Gamma_{db}^m - \Gamma_{mb}^c \Gamma_{da}^m. \quad (1.13)$$

3-boyuttaki Riemann tensörü R_{dab}^c ile dört boyuttaki Riemann tensörü $R_{\delta\alpha\beta}^\gamma$ arasındaki ilişkiyi tanımlamak için aşağıdaki kavramları gözönüne alacağız.

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} e_c^\gamma = (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma \quad (1.14)$$

olduğundan sol taraf için

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} e_c^\gamma = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha e_{b;\gamma}^\beta e_c^\gamma = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha (e_{b;\gamma}^\beta e_c^\gamma) \quad (1.15)$$

yazarız. (1.11) denklemi yardımıyla

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} e_c^\gamma = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha (\Gamma_{bc}^d e_d^\beta - \varepsilon K_{bc} n^\beta) \quad (1.16)$$

$$= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d e_{a;\beta}^\alpha e_d^\beta - \varepsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta \quad (1.17)$$

$$= e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^e e_e^\alpha - \varepsilon K_{ad} n^\alpha) - \varepsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta \quad (1.18)$$

bulunur. Denklem (1.14) in sağ tarafından

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \varepsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma &= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d e_{d;\gamma}^\alpha e_c^\gamma - \varepsilon K_{ab,c} n^\alpha - \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma \\ &= \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^e e_e^\alpha - \varepsilon K_{dc} n^\alpha) - \varepsilon K_{ab,c} n^\alpha - \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma \end{aligned} \quad (1.19)$$

ifadesi elde edilir. (1.14) denklemi için sol ve sağ tarafta bulunan ifadeler yerine konursa

$$\begin{aligned} e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma &= -\Gamma_{bc}^d \Gamma_{ad}^e e_e^\alpha + \varepsilon \Gamma_{bc}^d K_{ad} n^\alpha + \varepsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\beta + \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^e e_e^\alpha \\ &\quad - \varepsilon \Gamma_{ab}^d K_{dc} n^\alpha - \varepsilon K_{ab,c} n^\alpha - \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma \end{aligned} \quad (1.20)$$

ve bu bağıntıda $e_{a;\gamma\beta}^\alpha e_c^\gamma e_b^\beta$ için denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} e_{a;\gamma\beta}^\alpha e_c^\gamma e_b^\beta &= -\Gamma_{cb}^d \Gamma_{ad}^e e_e^\alpha + \varepsilon \Gamma_{cb}^d K_{ad} n^\alpha + \varepsilon K_{cb} e_{a;\gamma}^\alpha n^\gamma + \Gamma_{ac,b}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ac}^d \Gamma_{db}^e e_e^\alpha \\ &\quad - \varepsilon \Gamma_{ac}^d K_{db} n^\alpha - \varepsilon K_{ac,b} n^\alpha - \varepsilon K_{ac} n_{;\beta}^\alpha e_b^\beta \end{aligned} \quad (1.21)$$

elde ederiz. (1.20) denkleminde (1.21) denklemini çıkararak aşağıda yer alan tanımlamaları kullanırsak

$$K_{ab|c} = K_{ab,c} - \Gamma_{ca}^d K_{db} - \Gamma_{cb}^d K_{ad} \quad (1.22)$$

$$K_{ac|b} = K_{ac,b} - \Gamma_{ba}^d K_{dc} - \Gamma_{bc}^d K_{ad} \quad (1.23)$$

$$K_{ab|c} - K_{ac|b} = -\Gamma_{ca}^d K_{db} - K_{ac,b} + \Gamma_{ba}^d K_{dc} \quad (1.24)$$

$$R_{abc}^m = \Gamma_{ac,b}^m - \Gamma_{ab,c}^m + \Gamma_{ab}^m \Gamma_{ac}^d - \Gamma_{dc}^m \Gamma_{ab}^d \quad (1.25)$$

eğrilik denkleme ulaşmış oluruz

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = R_{abc}^m e_m^\mu + \varepsilon (K_{ab|c} - K_{ac|b}) n^\mu - \varepsilon K_{ac} n_{;\beta}^\mu e_b^\beta + \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\mu e_c^\gamma. \quad (1.26)$$

Eğrilik tensörünün $e_{d\mu}$ boyunca izdüşümü alınır;

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu e_{d\mu} = \left(R_{abc}^m e_m^\mu + \varepsilon (K_{ab|c} - K_{ac|b}) n^\mu - \varepsilon K_{ac} n_{;\beta}^\mu e_b^\beta + \varepsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\mu e_c^\gamma \right) e_{d\mu} \quad (1.27)$$

ve

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma e_d^\delta = R_{abcd} + \varepsilon (K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}) n^\mu \quad (1.28)$$

buluruz. Aynı denklemin n_μ için izdüşümüne bakılarak ise Gauss-Codazzi denklemi adı verilen eşitlik elde edilir.

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = K_{ab|c} - K_{ac|b} \quad (1.29)$$

Gauss-Codazzi denklemleri, uzay-zaman eğrilik tensörünün, bir hiperyüzeyin iç ve dış eğrilikleri cinsinden yazılabileceğini göstermektedir. Burada verilmeyen $R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma$, nin diğer bileşenleri ise h_{ab} , K_{ab} ve bu büyüklükleri içeren büyüklükler cinsinden ifade edilememektedir.

1.4 İndirgenmiş Hal

Gauss-Codazzi denklemleri indirgenmiş halde Einstein tensörü

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \quad (1.30)$$

cinsinden yazılabilir. Uzay-zaman Ricci tensörü

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (1.31)$$

$$= (\varepsilon n^\mu n^\nu + h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (1.32)$$

$$= \varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu \quad (1.33)$$

ve Ricci skaleri ise aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = (\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta) (\varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu) \\ &= 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Yukarıda Ricci skaleri için bulunan

$$R = 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta$$

eşitliği üzerinden giderek, hiperyüzey üzerinde tanımlanan Ricci skaleri için son ifade bulunacaktır. İlk olarak eşitliğin ilk terim için şu hesaplamalar yapılacaktır

$$h^{ab} = g^{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (1.35)$$

$$2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta = 2\varepsilon (g^{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta) R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu e_a^\alpha e_b^\beta \quad (1.36)$$

$$= 2\varepsilon g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu = R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad (1.37)$$

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -n_{;\alpha\beta}^\alpha n^\beta + n_{;\beta\alpha}^\alpha n^\beta \quad (1.38)$$

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -(n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + n_{;\alpha}^\alpha n_{;\beta}^\beta + (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} - n_{;\beta}^\alpha n_{;\alpha}^\beta \quad (1.39)$$

$$K^2 = n_{;\alpha}^\alpha n_{;\beta}^\beta \quad (1.40)$$

ve sonuçta

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = K^2 - K^{ab} K_{ab} - (n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} \quad (1.41)$$

bulunur. Aşağıdaki bağıntıları kullanarak

$$\begin{aligned} h^{ab}h^{mn}R_{\mu\alpha\nu\beta}e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta &= h^{ab}h^{mn}[R_{manb} + \varepsilon(K_{mb}K_{an} - K_{mn}K_{ab})] \\ &= h^{ab}(h^{mn}R_{manb}) + \varepsilon h^{ab}h^{mn}(K_{mb}K_{an} - K_{mn}K_{ab}) \end{aligned}$$

$${}^{(3)}R = h^{ab}R_{amb}^m \quad (1.42)$$

$$h^{ab}h^{mn}K_{mn}K_{ab} = K^2 \quad (1.43)$$

$$h^{ab}h^{mn}K_{mb}K_{an} = K^{ab}K_{ab} \quad (1.44)$$

$$h^{ab}h^{mn}R_{\mu\alpha\nu\beta}e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta = {}^{(3)}R + \varepsilon(K^{ab}K_{ab} - K^2) \quad (1.45)$$

eğrilik skaleri

$$R = 2\varepsilon[(n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} - (n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + K^2 - K^{ab}K_{ab}] + {}^{(3)}R + \varepsilon(K^{ab}K_{ab} - K^2) \quad (1.46)$$

$$R = 2\varepsilon[(n_{;\beta}^\alpha n^\beta - n_{;\beta}^\beta n^\alpha)_{;\alpha}] + \varepsilon(K^2 - K^{ab}K_{ab}) + {}^{(3)}R \quad (1.47)$$

yazılır. Einstein alan denklemleri 3-boyutlu hiperyüzeye ait içsel eğrilikler ve dışsal eğrilikler cinsinden

$$\begin{aligned} -2\varepsilon G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= -2\varepsilon(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta})n^\alpha n^\beta \\ &= -2\varepsilon(K^2 - K^{ab}K_{ab} - (n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} + Rg_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta) \\ &= -2\varepsilon K^2 + 2\varepsilon K^{ab}K_{ab} + 2\varepsilon[(n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} - (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha}] \\ &\quad + \varepsilon^2[{}^{(3)}R + \varepsilon(K^2 - K^{ab}K_{ab}) + 2\varepsilon(n_{;\beta}^\alpha n^\beta - n^\alpha n_{;\beta}^\beta)_{;\alpha}] \\ &= {}^{(3)}R - \varepsilon K^2 + \varepsilon K^{ab}K_{ab} \end{aligned} \quad (1.48)$$

şeklinde ifade edilir. Denklemleri sadeleştirirsek

$$-2\varepsilon G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = {}^{(3)}R - \varepsilon^2 K + \varepsilon K^{ab}K_{ab} \quad (1.49)$$

$$G_{\alpha\beta}e_a^\alpha n^\beta = K_{a|b}^b - K_{,a} \quad (1.50)$$

buluruz. (1.48) and (1.50) denklemleri Σ hiperyüzeyi üzerinde Einstein alan denklemlerinin bir kısmını oluştururlar.

2. YÜZEY TABAKASININ RELATİVİSTİK TEORİSİ

Bir yüzey boyunca enerji-momentum tensöründe sıçramalı süreksizlik varsa geometrinin ne olacağı genel görelilik teorisinin en çok çalışılan konularından birisidir. Uzak-zamanda maddesel yapıların varlığı, enerji-momentum tensöründeki süreksizliklere neden olmakta, uzay-zamanı zamansal bir hiperyüzeyin böldüğü iki ayrı bölgeye ayırmaktadır. Genel görelilik teorisinde bir uzayı tam olarak tarif etmek, iç ve dış bölgelere ait çözümlerin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi bulmak istersek birbirinden ayrık bu iki bölgenin, onları sınırlayan yüzey üzerinde sağlaması gereken koşulları ifade etmemiz gerekir [2,4].

Bir yıldızın iç ve dış bölgelerini tanımlayan uzay-zamanı iki farklı bölüme ayrılmış olarak düşünebiliriz. Yani, sınır yüzeyi boyunca bir sıçramalı süreksizliğe sahip olan enerji-momentum tensörü uzay-zamanı bir sınır yüzeyiyle iki farklı bölgeye ayırmış gibi düşünülebilir ve aşağıdaki gibi temsil edilebiliriz

$$M = M^+ \cup M^-. \quad (2.51)$$

Ortak Σ sınır yüzeyi için ise

$$\partial M^+ \cap \partial M^- = \Sigma \quad (2.52)$$

ifadesini yazabiliriz. Bu yüzey aynı zamanda 3-boyutlu bir hiperyüzeydir. Her iki bölge ($M^\pm$) içerisinde de Einstein alan denklemlerinin sağlandığı varsayılır. Böylece

$$G_{\mu\nu}^\pm = \kappa T_{\mu\nu}^\pm \quad (2.53)$$

ifadesi yazılabilir. Burada "+" ve "-", taşıyan tensörün M^+ ve M^- bölgeleri içerisinde değerlendirildiği anlamında kullanılır. Birinci koşul her iki bölge için çizgi elemanın eşitliği, yani metrik tensörünün sürekliliği olarak

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^\pm dx_\pm^\mu dx_\pm^\nu \quad (2.54)$$

ile verilir. Σ yüzeyine uzunluk elemanı

$$d\sigma^2 = h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.55)$$

şeklindedir. Burada h_{ij} yüzeye ait metriktir ve *indirgenmiş metrik* adını alır. Σ yüzeyinin üzerinde, M^- bölgesinden M^+ bölgesine yönlendirilmiş birim normal vektör $\mathbf{n}$ tanımlanabilir. Σ yüzeyinin hem uzaysal hem de zamansal olabilirliği $\mathbf{n}$ birim vektörünün normalizasyonu ile verilir:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \equiv \epsilon = \begin{cases} 1, & \Sigma \text{ zamansal ise} \\ -1, & \Sigma \text{ uzaysal ise} \end{cases} \quad (2.56)$$

Her iki bölgenin geometrisi de, Σ yüzeyinin $M^\pm$ bölgesinin farklı yerlerine nasıl gömülmüş olduğunu yansıtır. Σ uzayı iki farklı bölgeye ayırdığından, bu iki farklı bölgenin geometrisini dış eğrilikleri yardımıyla karşılaştırabiliriz.

$K_{\mu\nu}^\pm$ iç (+) ve dış (−) bölgeler için dışsal eğrilik tensörünün bileşenlerini gösterebiliriz, (1.9) denkleminde $M^\pm$ bölgeleri için dışsal eğrilik, Σ yüzeyinde baz vektörü e_μ nün $\mathbf{n}$ -doğrultusundaki kovaryant türevi olarak tanımlanır

$$K_{\mu\nu}^\pm = n \cdot \nabla_\mu^\pm e_\nu = \epsilon n_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha |^\pm. \quad (2.57)$$

$M^\pm$ bölgeleri için indirgenmiş metrik $h_{\mu\nu}$, Σ yüzeyi üzerinde birbirine eşit olmalıdır. İndirgenmiş metrik izdüşüm işlemi ile

$$h_{\mu\nu}^\pm = g_{\mu\nu}^\pm - \epsilon n_\mu^\pm n_\nu^\pm \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir. Σ üzerinde $h_{\mu\nu}^+$ ve $h_{\mu\nu}^-$ arasında ancak koordinat dönüşümüne izin verilebilir yani her iki metrik birbirinden koordinat dönüşümü kadar farklı olabilirler. Bu sebeple $h_{\mu\nu}^+ = h_{\mu\nu}^-$ eşitliği vardır. İndirgenmiş metrik cinsinden

$${}^{(n)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha = {}^{(n+1)}R_{\gamma\sigma\rho}^\lambda h_\lambda^\alpha h_\beta^\gamma h_\mu^\sigma h_\nu^\rho + \epsilon(K_\mu^\alpha K_{\beta\nu} - K_\nu^\alpha K_{\beta\mu}) \quad (2.59)$$

$${}^{(n)}\nabla_\alpha K_{\beta\mu} - {}^{(n)}\nabla_\mu K_{\beta\alpha} = {}^{(n+1)}R_{\sigma\rho\delta}^\lambda n_\lambda h_\beta^\sigma h_\alpha^\rho h_\mu^\delta \quad (2.60)$$

(2.59) Gauss'un *Theorema Egregium* ve (2.60) *Codazzi* denklemleri kullanılarak;

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu |^\pm = -\frac{1}{2}\epsilon^{(3)}R + \frac{1}{2}(K^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta})^\pm \quad (2.61)$$

$$G_{\mu\nu}h_\alpha^\mu n^\nu |^\pm = -({}^{(3)}\nabla_\mu K_\alpha^\mu - {}^{(3)}\nabla_\alpha K)^\pm \quad (2.62)$$

$$G_{\mu\nu}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu |^\pm = {}^{(3)}G_{\alpha\beta} + \epsilon n^\mu \nabla_\mu (K_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}K)^\pm - 3\epsilon K_{\alpha\beta}K |^\pm \\ + 2\epsilon K_\alpha^\mu K_{\mu\beta} |^\pm + \frac{1}{2}\epsilon h_{\alpha\beta}(K^2 + K^{\mu\nu}K_{\mu\nu})^\pm \quad (2.63)$$

elde edilir.

2.1 Einstein Alan Denklemleri

Eğrilik tensörü ve enerji-momentum tensörü, Einstein alan denklemleri ile ilişkilendirilir. Bunun için enerji-momentum tensörünün Σ üzeri dışında her yerde sürekli olması sağlanmalıdır (ikinci sınır koşulu). Aynı zamanda metrik tensörünün de tüm uzayda sürekli olması gerekmektedir [2-4].

Einstein tensörü, metrik tensörünün ikinci türevini içermektedir. Ancak $g_{\mu\nu;\alpha}n^\alpha$ nın türevinin süreksiz olması sağlandığından, ikinci türev delta fonksiyonu olabilir $\theta'(x) = \delta(x)$. Burada $\theta(x)$ basamak fonksiyonudur

$$\theta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{array} \right\} \quad (2.64)$$

y ortogonal koordinat olarak alınır ise $\frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{n}$ ' dir ve Σ yüzeyinde $y=0$ dır. En genel halde, Enerji-momentum tensörü sınırlar boyunca, aşağıdaki gibidir

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}\delta(y) + T_{\alpha\beta}^+\theta(y) + T_{\alpha\beta}^-\theta(-y) \quad (2.65)$$

Yüzey üzerindeki enerji-momentum tensörü $S_{\alpha\beta}$ üzerinden integral olarak tanımlanabilir

$$S_{\alpha\beta} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} T_{\alpha\beta} dy. \quad (2.66)$$

İyi tanımlı bir tensör olabilmesi için $S_{\alpha\beta}$ nın hiperyüzey üzerinde bulunması gerekir

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta S_{\alpha\beta} = S_{\mu\nu}. \quad (2.67)$$

$S_{\alpha\beta}$ tensörünün bu şekilde tanımlanması *ince kabuk yaklaşımı* olarak adlandırılır.

Bir koordinat takımı oluşturulursa, bunlar (x^i) hiperyüzeyi üzerindeki koordinatlar olacak, ve y ise (ortagonal) dik y öndeki koordinat olacaktır. İnce kabuk yaklaşımı kullanılarak, S_{ij} için aşağıdaki ifade bulunur. Denklem (2.63) kullanılarak,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [\epsilon n^\mu \nabla_\mu (K_{ij} - h_{ij} K) + U_{ij}] dy. \quad (2.68)$$

Elde edilen denklemde U_{ij} , K_{ab} 'nin kuadratik terimlerini ve üç-eğriliğini içermektedir. Bu nedenle, bağlı olarak düşünülmektedir ve integralin kalan terimi tam bir diferansiyel olarak yazılabilir

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G_{ij} dy = \epsilon ([K_{ij}] - h_{ij} [K]). \quad (2.69)$$

Burada parantez operatörü genel bir tensör için şu şekilde tanımlanmaktadır

$$[T] = T^+ - T^-, \quad (2.70)$$

Bu tanım Einstein alan denklemlerinde kullanılırsa

$$[K_{ij}] - h_{ij} [K] = \epsilon \kappa S_{ij}. \quad (2.71)$$

elde edilir ve bu denklem *Lanczos denklemi* olarak adlandırılır. $S_{\mu\nu}$ 'nin diğer bileşenleri ise sıfırdır

$$S_{nn} = S_{ni} = 0. \quad (2.72)$$

Herhangi bir tensör $T^\pm$ için

$$\{T\} = \frac{1}{2}(T^+ + T^-) \quad (2.73)$$

olarak tanımlanırsa

$$[TS] = [T]\{S\} + \{T\}[S], \quad (2.74)$$

$$\{TS\} = \{T\}\{S\} + \frac{1}{4}[T][S] \quad (2.75)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikleri kullanarak Lanczos denklemi yeniden

$$[K_{ij}] = \kappa \epsilon (S_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} S) \quad (2.76)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem yüzeyin enerji-momentum tensörü ile farklı iki bölgeyi yüzey üzerinde karşılaştırmaktadır ve yüzeyin hareket denklemlerinden birisini verir. Bu çalışmada sınır yüzeyi olarak sadece zamansal hiperyüzeyleri gözönüne alacağız ve $\epsilon = 1$ varsayacağız.

Diğer hareket denklemleri, (2.61) ve (2.62) denklemlerinin sağ taraflarının, Einstein denklemi ile birlikte enerji-momentum tensörüyle yer değiştirilmesiyle elde edilir.

[] işlemi ve Lanczos denklemi ile birlikte aşağıdaki denklemler üretilir

$$^{(3)}\nabla_j S_i^j + [T_{in}] = 0, \quad (2.77)$$

ve

$$S_{ij}\{K^{ij}\} + [T_{nn}] = 0. \quad (2.78)$$

2.2 Boşlukta Küresel Toz Kabuk

Enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibi olan bir yüzey düşünelim [4]

$$S^{ij} = \sigma u^i u^j, \quad u^i u_i = -1. \quad (2.79)$$

Boşlukta $M^\pm$ bölgesinde enerji-momentum tensörü $T_{\mu\nu}^\pm = 0$, Σ yüzeyine teğet ve yüzeyle birlikte hareket eden tozun hızı u^i olsun. (2.77) denkleminde göre

$$^{(3)}\nabla_j(\sigma u^j u^i) = u^i {}^{(3)}\nabla_j(\sigma u^j) + \sigma u^j {}^{(3)}\nabla_j u^i = 0 \quad (2.80)$$

bağıntısı vardır. Denklemi u_i ile çarpıp $u_i u^j {}^{(3)}\nabla_j u^i = u_i a^i = 0$ özelliğini kullanarak

$$\nabla_j(\sigma u^j) = 0 \quad (2.81)$$

buluruz. Bu bağıntı parçacık sayısının korunduğunu göstermektedir ve

$$u^j {}^{(3)}\nabla_j u^i = 0 \quad (2.82)$$

olması, toz parçacıklarının serbest düşme hareketi yaptıklarını ve dünya çizgilerinin de Σ üzerindeki jeodeziklere uyduğunu göstermektedir. $T_{\mu\nu}=0$ kabul ederek, denklem (2.78) uygulanabilir

$$S_{ij}\{K^{ij}\} = \sigma u_i u_j \{K^{ij}\} = 0. \quad (2.83)$$

Şimdi uzaya ait metrik örneklerine bakalım ve boşluğa gömülmüş küresel simetrik bir toz kabuk düşünelim. Kabuğun dış uzayı için Schwarzschild metriği gözönüne alalım,

$$(ds^2)^+ = g_{\mu\nu}^+ dx_+^\mu dx_+^\nu = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.84)$$

İç uzay için ise, düz uzay-zaman metriği kullanılabilir.

$$(ds^2)^- = g_{\mu\nu}^- dx_-^\mu dx_-^\nu = -dT^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.85)$$

Kabuk üzerinde, 3-boyutlu uzay-zaman için çizgi elemanı

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.86)$$

ve τ kabuğun üzerinde öz zamandır. Denklem (2.77) den

$$u^{i(3)} \nabla_j (\sigma u_i u^j) = 0, \quad (2.87)$$

$$\dot{\sigma} = -\sigma^{(3)} \nabla_j u^j = -\sigma \frac{1}{\sqrt{|h|}} (\sqrt{|h|} u^j)_{,j} \quad (2.88)$$

Burada $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{d\tau}$ dır ve

$$h = -R^4(\tau) \sin^2 \theta, \quad (2.89)$$

ve $\mathbf{u} = u^\tau \mathbf{e}_\tau = \mathbf{e}_\tau$ ise,

$$\dot{\sigma} = -\sigma \frac{1}{R^2} (\dot{R}^2), \tau = -2\sigma \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.90)$$

integral sonucunda

$$\sigma R^2 = \text{sabit} \quad (2.91)$$

bulunur. Durgun kütle ise

$$\mu = 4\pi\sigma R^2, \quad (2.92)$$

olarak elde edilir. Parçacığın dışarıda ölçülen 4-hız vektörü

$$u_+^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\dot{t}, \dot{R}, 0, 0). \quad (2.93)$$

ve n_α normal vektörü

$$n_\alpha^+ = (-\dot{R}, \dot{t}, 0, 0). \quad (2.94)$$

$$u^\alpha u_\alpha \mid^+ = -n_\alpha n^\alpha \mid^+ = \dot{t}^2 g_{tt}^+ + \dot{R}^2 g_{rr}^+ = -1 \quad (2.95)$$

olduğundan

$$\dot{t} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \dot{R}^2}}{1 - \frac{2M}{R}} \quad (2.96)$$

bulunur.

$u^\beta \nabla_\beta$ ifadesinin kovaryant türevi için , $u_\alpha u^\alpha = -1$ tanımı kullanılırsa,

$$u_\alpha a^\alpha \mid^+ = u_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \mid^+ = u_t u^\beta \nabla_\beta u^t \mid^+ + u_r u^\beta \nabla_\beta u^r \mid^+ \quad (2.97)$$

ve elde edilen eşitlikten, $u^\beta \nabla_\beta u^+$ ifadesi aşağıdaki denklemde yerine konulur

$$\begin{aligned} n_\alpha a^\alpha \mid^+ &= n_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \mid^+ = n_t u^\beta \nabla_\beta u^t \mid^+ + n_r u^\beta \nabla_\beta u^r \mid^+ \\ &= (n_r - n_t \frac{u_r}{u_t}) u^\beta \nabla_\beta u^r \mid^+ . \end{aligned} \quad (2.98)$$

Kovaryant türevi için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$u^\beta \nabla_\beta u^r \mid^+ = u_{,\alpha}^r u^\alpha \mid^+ + \Gamma_{\alpha\beta}^r u^\alpha u^\beta \mid^+ . \quad (2.99)$$

Burada $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ konneksiyon katsayısıdır ve

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.100)$$

şeklinde. (2.84) ile verilen metriği kullandığımızda, $\Gamma_{\alpha\beta}^r u^\alpha u^\beta \mid^+$ ifadesi aşağıdaki gibi bulunur

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^r u^\alpha u^\beta \mid^+ &= \frac{1}{2} g^{rr} (g_{r\alpha,\beta} + g_{r\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,r}) u^\alpha u^\beta \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} (2g_{rr,r} u^r u^r - g_{tt,r} u^t u^t) \mid^+ = \frac{M}{R^2} \end{aligned} \quad (2.101)$$

ise

$$u^\beta \nabla_\beta u^r \mid^+ = \dot{\delta} R + \frac{M}{R^2} . \quad (2.102)$$

Denklem (2.93), (2.94) ve (2.96) ve (2.84)) ile verilen metrik de kullanılarak,

$$(n_r - n_t \frac{u_r}{u_t}) \mid^+ = (n_r - n_t \frac{g_{rr} u^r}{g_{tt} u^t}) \mid^+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}} . \quad (2.103)$$

ifadesi bulunur ve denklem (2.98) aşağıdaki hale gelir

$$n_\alpha a^\alpha |^+ = \frac{\dot{\delta}R + \frac{M}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}}. \quad (2.104)$$

İç bölge için aynı ifadeyi hesaplamak istersek, $M=0$ alınır

$$n_\alpha a^\alpha |^- = \frac{\dot{\delta}R}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}}. \quad (2.105)$$

Denklem (2.83) ve $n_\alpha a^\alpha |^\pm = K_{ij}^\pm u^i u^j$ denklemi kullanılarak, hareket denklemleri bulunur

$$n_\alpha a^\alpha |^+ + n_\alpha a^\alpha |^- = 0. \quad (2.106)$$

(2.104) ve (2.105) denklemleri kullanılarak,

$$\frac{\dot{\delta}R}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}} + \frac{\dot{\delta}R + \frac{M}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}} = 0 \quad (2.107)$$

denklemini elde edilir ki, bu da genişleyen bir kabuğun hareket denklemdir. Bu ifade $\dot{R}$ ile çarpıldığından da ise;

$$\frac{d}{d\tau} \left[\sqrt{1 + \dot{R}^2} + \sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2} \right] = 0 \quad (2.108)$$

denklemini elde edilir ve

$$\sqrt{1 + \dot{R}^2} + \sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2} = 2a \quad (2.109)$$

alınarak

$$\sqrt{1 + \dot{R}^2} = a + \frac{M}{2aR}. \quad (2.110)$$

ifadesi elde edilmiş olur ki, burada a integral sabitidir ve $R \rightarrow \infty$ iken $\dot{R}=0$ ise $a = 1$ ' dir. Bu denkleme ek olarak $[a^\alpha n_\alpha] = \frac{\kappa}{2} \sigma$ eşitliği kullanılırsa

$$4\pi R^2 \sigma = \frac{M}{a} \quad (2.111)$$

bulunur. Sağ taraf bize parçacıkların kabuk içindeki durgun kütlelerini vermektedir. Schwarzschild çözümünde gravitasyonel kütle M kabuğun toplam kütleleridir. Aradaki fark ise

$$\frac{M}{a} - M = \frac{M(1 - a)}{a} \quad (2.112)$$

kabuğun "bağlanma enerjisi" sini vermektedir. Sonsuzda sıfır hıza ulaşan kabuğun bağlanma enerjisi sıfırdır.

2.3 Kerr Alanı Çözümü

Kerr metriğine ait kovaryant ve kontravaryant bileşenleri Boyer-Lindquist koordinatları cinsinden [4]

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2M}{\Sigma}r) & 0 & 0 & -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & (r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}) \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}) \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 & -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

şeklinde yazılır. Bu tanıma göre $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ve $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ dir. $r = \text{sabit}$ yüzeyi için birim normal vektör şöyle tanımlanmaktadır; $n = n^r e_r$, $g_{rr}(n^r)^2 = 1$. Buna göre (2.113) metriği kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilmiş olur

$$n = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} e_r. \quad (2.115)$$

Şimdi ise sabit yarıçaplı bir yüzey için dışsal eğriliği (exterior curvature) bulmak istiyoruz. (2.57) denklemi dışsal eğrilikleri bulmak üzere kullanıldığında, sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi verilir

$$K_{\theta\theta} = n^r \Gamma_{r\theta\theta} = -\frac{1}{2} n^r \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -r n^r = -r \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \quad (2.116)$$

$$K_{tt} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \left(1 - 2\frac{r^2}{\Sigma}\right) M \frac{\Delta}{\Sigma^3} \quad (2.117)$$

$$K_{t\phi} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \frac{\partial g_{t\phi}}{\partial r} = \left(1 - 2\frac{r^2}{\Sigma}\right) Ma \frac{\Delta}{\Sigma^3} \sin^2 \theta \quad (2.118)$$

$$K_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} = -\left[r + \left(1 - 2\frac{r^2}{\Sigma}\right) \frac{Ma^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right] \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \sin^2 \theta \quad (2.119)$$

$r = 0$ durumunu gözönüne alırsak eğer, öncelikle $r = 0$ için metrik elemanları

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \cos^2 \theta, a^2 \cos^2 \theta, a^2 \sin^2 \theta), \quad (2.120)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \text{diag}(-a^2 \cos^2 \theta, a^2, 1, \cot^2) \quad (2.121)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda yüzey üzerinde dışsal eğrilik, aşağıdaki şekilde sadeleşir

$$K_\theta^\theta = 0, \quad K_\phi^\phi = -M \frac{\sin^2 \theta}{a^2 \cos^3 \theta}, \quad K_t^t = a K_\phi^\phi = \frac{M}{a^2 \cos^3 \theta} \quad (2.122)$$

Böylece,

$$K = K_t^t + K_\theta^\theta + K_\phi^\phi = \frac{M}{a^2 \cos \theta}$$

bulunur. Ayrıca, $K_j^{i\pm}$ dışsal eğriliklerinin birbirinden işaret kadar farklıdır yani; $K_j^{i+} = -K_j^{i-}$ dir. İki özdeş uzay-zamanın $r = 0$ da birbirine yapıştırıldığını düşünelim. Yüzey tabakasının enerji-momentum tensörü (2.71) Lanczos denkleminde bulunur ve (2.122) denklemi, ($G = 1 = c$) birim sistemi kullanılarak

$$\begin{aligned} S_t^t &= \frac{1}{4\pi} \frac{M \sin^2 \theta}{a^2 \cos^3 \theta}, & S_\theta^\theta &= \frac{1}{4\pi} \frac{M}{a^2 \cos \theta}, \\ S_\phi^\phi &= -\frac{1}{4\pi} \frac{M}{a^2 \cos^3 \theta}, & S_t^\phi &= \frac{1}{4\pi} \frac{M}{a^3 \cos^3 \theta} \end{aligned} \quad (2.123)$$

elde edilir. Bu ifadeler tek bir denklemde (2.79)

$$S_j^i = \sigma (u^i u_j + k^i k_j), \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{M}{a^3 \cos \theta} \quad (2.124)$$

olarak da yazılabilir. 4-hız

$$u^i = (u^t, u^\theta, u^\phi) = (\tan \theta, 0, \frac{1}{a \sin \theta \cos \theta})$$

ve normal vektör

$$k^i = (k^t, k^\theta, k^\phi) = (0, \frac{1}{a \cos \theta}, 0). \quad (2.125)$$

Kerr uzay-zamanı için eşleşme koşullarını yazmış olduk. Yüzey tabakası negatif enerji-yoğunluklu madde ile dolu olduğundan gerilme tensörü $t_j^i = \sigma k^i k_j$ nin tek bir bileşeni t_θ^θ sıfırdan farklıdır. Yüzey ile birlikte hareket eden parçacıkların koordinat hızları v^i

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} = u^t v^i \quad (2.126)$$

denkleminde

$$v^\phi = \frac{1}{a \sin^2 \theta} \quad (2.127)$$

olarak bulunur. Işığın ϕ -doğrultusundaki koordinat hızı yüzey tabakasına ait metrikte $ds = dr = 0$ alarak

$$e^\phi = \frac{1}{a \sin \theta}, \quad (2.128)$$

ve buradan

$$v^\phi = \frac{e^\phi}{\sin \theta} \quad (2.129)$$

olarak bulunur yani parçacıklar takyonik hızda hareket etmektedirler. Bu fikir Kerr-Newman (dönen elektrik yüklü karadelik) uzay-zamanına genelleştirilebilir

3. ADYABATİK OLMAYAN KÜTLEÇEKİMSSEL ÇÖKME

3.1 İç Uzay-zaman

Yüzey üzerindeki, metriği içerde kalan uzay-zamanın hareketsiz koordinatları cinsinden [1]

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\xi^i = (\tau, \theta, \phi)$ yüzey koordinatları ve $R(\tau)$ yüzeye ait yarıçaptır. İç uzay-zaman içinde metrik yüklü küresel simetrik çöken ideal bir akışkanı temsil etmektedir ve şu şekilde yazılır

$$ds_-^2 = -A(r, t)^2 dt^2 + B(r, t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (3.2)$$

$\chi_-^a(t, r, \theta, \phi)$ iç uzay-zamana ait koordinatlardır. A ve B ise, yarıçap ve zamana bağlı fonksiyonlar olup Einstein-Maxwell Alan denklemlerinin çözümlerinden bulunur [3].

Aşağıda bulunan denklem iç sınır yüzeyinin hareketini temsil etmektedir

$$f^-(r, t) = r - r_{\Sigma} = 0. \quad (3.3)$$

Burada r_{Σ} iç bölge için sabit olarak alınmıştır çünkü çok yavaş bir hareket vardır, yavaş bir şekilde çöken bir akışkan. Yüzey için normal vektör

$$\frac{\partial f^-}{\partial \chi^i} = (0, 1, 0, 0) \quad (3.4)$$

ve normalizasyonundan

$$n^{\alpha-} n_{\alpha}^- = g^{\alpha\beta} n_{\beta}^- n_{\alpha}^- = N^2 f_{,\beta}^- f_{,\alpha}^- = 1 \quad (3.5)$$

buluruz. $N = B(r_{\Sigma}, t)$ ise, n_{α}^- için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$n_{\alpha}^- = \{0, B(r_{\Sigma}, t), 0, 0\} \quad (3.6)$$

Eğer birinci sınır koşulu kullanılarak; $(ds_-^2)_\Sigma = (ds_+^2)_\Sigma = ds_\Sigma^2$ (2.1.1) denkleminde $r = sbt$. veya $dr = 0$ alınır, denklem (2.1.2) ile eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilmiş olur

$$A(r_\Sigma, t) \frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (3.7)$$

$$B(r_\Sigma, t)r_\Sigma = R(\tau) \quad (3.8)$$

Daha sonraki denklemlerde $dt/d\tau \equiv \dot{t}$ notasyonu kullanılacaktır. Christoffel sembolü Γ_{jk}^i kullanılarak, dışsal eğrilikler aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$K_{\tau\tau}^- = -n_1^- \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} - n_1^- \Gamma_{00}^1 \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} = -B \frac{A}{B^2} \frac{\partial A}{\partial r} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 = -\frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{1}{A^2} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial r} \quad (3.9)$$

$$K_{\theta\theta}^- = -n_1^- \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - n_1^- \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = B \frac{1}{B} r \left(r \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right) + B \right) = r \frac{\partial(Br)}{\partial r} \quad (3.10)$$

$$K_{\phi\phi}^- = \sin^2 \theta \left(r \frac{\partial(Br)}{\partial r} \right). \quad (3.11)$$

Einstein alan denklemlerinin sağ tarafı kaynak terimi olup, yıldızın yapısını tanımlamaktadır

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)w_\alpha w_\beta + pg_{\alpha\beta} + q_\alpha w_\beta + q_\beta w_\alpha \quad (3.12)$$

burada μ enerji yoğunluğu, p is izotropik basınç, w_α 4-hız vektörü q_α radyal yöndeki ısı akışını temsil etmektedir. Koordinat seçimiyle w_α ve w_α birbirlerin dik olarak alınabilir

$$w^\alpha = \frac{1}{A} \delta_0^\alpha \quad (3.13)$$

$$q^\alpha = \{0, q, 0, 0\} \quad (3.14)$$

Sıfırdan farklı alan denklemleri ise aşağıdaki gibidir:

$$G_{00}^- = -\frac{A^2}{B^2} \left(\frac{2}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 + \frac{4}{rB} \frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{3}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 = \mu A^2 \quad (3.15)$$

$$G_{11}^- = \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{rB} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2}{rA} \frac{\partial A}{\partial r} \quad (3.16)$$

$$+ \frac{B^2}{A^2} \left(-\frac{2}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = p B^2 \quad (3.17)$$

$$G_{22}^- = \frac{1}{\sin^2 \theta} G_{33}^- = r^2 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rB} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{rA} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\ + r^2 \frac{B^2}{A^2} \left(-\frac{2}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = p B^2 r^2 \quad (3.18)$$

$$G_{01}^- = -\frac{2}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial t} + \frac{2}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial t} = -q B^2 A \quad (3.19)$$

3.2 Dış Uzay-zaman

Yüzeyin dışında kalan uzay-zamanı radyasyon yayan küresel simetrik Vaidya metriği ile ifade ediyoruz

$$ds_+^2 = - \left(1 - \frac{2m(\nu)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) d\nu^2 - 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2 \quad (3.20)$$

ve dış uzayda yüzey genişlemesi şu denklemle ifade edilebilir

$$f^+(r, \nu) = r - r_\Sigma(\nu) = 0. \quad (3.21)$$

Burada içeriden farklı olarak yüzeyin yarıçapı ν zaman parametresine bağlıdır, yani yüzeyimiz zamanla çökmekte ya da genişlemektedir. Dış uzayda yüzeyin

birim normal vektörde benzer şekilde hesaplanabilir

$$\frac{\partial f^+}{\partial \chi_+^\alpha} = \left(-\frac{dr_\Sigma}{dv}, 1, 0, 0 \right) \quad (3.22)$$

$$N = \left[\frac{2dr_\Sigma}{dv} + \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \right]^{-1/2} \quad (3.23)$$

$$n_\alpha^+ = N \left(-\frac{dr_\Sigma}{d\Sigma v}, 1, 0, 0 \right) \quad (3.24)$$

Burada da birinci sınır koşulu uygulanıp $(ds_-^2)_\Sigma = (ds_+^2)_\Sigma = ds_\Sigma^2$, (2.1.1) ile (2.2.1) denklemleri eşitlendiğinde aşağıdaki bağıntılar elde edilir

$$r_\Sigma(v) = R(\tau), \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{dv^2} \left[- \left(\frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dv^2 - 2dvdr \right]_\Sigma = \frac{1}{dv^2} [-d\tau^2]_\Sigma, \quad (3.26)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) + 2\frac{dr}{dv} \right]_\Sigma = \left[\frac{1}{\dot{v}^2} \right]_\Sigma \quad (3.27)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler (3.2.7) kullanılarak birim normal vektör (2.2.5)

$$\frac{dv}{d\tau} \left(-\frac{dr_\Sigma}{dv} \right) = -\dot{r}, \quad n_\alpha^+ = \{-\dot{r}, \dot{v}, 0, 0\} \quad (3.28)$$

ve dış eğrilikler

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau}^+ &= -n_0^+ \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} - n_1^+ \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} - n_0^+ \Gamma_{00}^0 \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} - n_1^+ \Gamma_{00}^1 \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} - 2 \left(n_1^+ \Gamma_{01}^1 \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial \tau} \right) \\ &= \dot{r} \dot{\delta v} - \dot{v} \dot{\delta r} - 3 \dot{r} \left(\frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda r}{3} \right) \dot{v}^2 - \dot{v}^3 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{dm}{dv} + \left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \left(\frac{m}{r^2} - \frac{q^2}{r^3} - \frac{\Lambda r}{3} \right) \right] \quad (3.30)$$

$$K_{\theta\theta}^+ = -n_0^+ \Gamma_{22}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} - n_1^+ \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \quad (3.31)$$

$$= \dot{r}r + \dot{v}r \left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \quad (3.32)$$

$$K_{\phi\phi}^+ = \sin^2 \theta K_{\theta\theta}^+ \quad (3.33)$$

Denklem (3.2.9) ifadesi, (3.2.7) denklemi ve bu denklemin τ' ya göre türevi kullanılarak daha kapsamlı şöyle yazılır

$$K_{\tau\tau}^+ = \left(\frac{\dot{\delta}v}{\dot{v}} - \dot{v} \left(\frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda r}{3} \right) \right)_{\Sigma} \quad (3.34)$$

Metrik (2.3.1) için dış uzay-zaman için sıfırdan farklı tek Einstein alan denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$G_{\alpha\beta}^+ = -\frac{2}{r^2} \frac{dm}{dv} \delta_{\alpha}^0 \delta_{\beta}^0 \quad (3.35)$$

şekilde yazılabilir .

3.3 Hiper Yüzey üzerinde Denklemler

İkinci sınır koşulu; $[K_{ij}] \equiv K_{ij}^+ - K_{ij}^- = 0$ denklem (3.1.10) ve (3.2.10) için yazılırsa

$$\left[\dot{r}r + \dot{v}r \left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \right]_{\Sigma} = \left[r \frac{\partial(Br)}{\partial r} \right]_{\Sigma} \quad (3.36)$$

Denklem (2.2.7) yardımı ile de şu şekilde yazılabilir

$$\dot{v} \mathbf{r} \left[\left(\frac{1}{\dot{v}} \right)^2 - 2 \frac{d\mathbf{r}}{dv} \right] + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} = \mathbf{r} \frac{d\tau}{dv} - 2 \frac{dv}{d\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dv} \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} = r(B' r + B). \quad (3.37)$$

Ayrıca, (3.2.6), (3.1.8) ve (3.1.7) yardımı ile de aşağıdaki eşitlikler yazılır

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d(B(r_{\Sigma}, t)r_{\Sigma})}{d\tau} = \frac{d(B(r_{\Sigma}, t)r_{\Sigma})}{A(r_{\Sigma}, t)dt} = \frac{r_{\Sigma}}{A} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3.38)$$

Denklem (3.2.3) denklem (3.3.2) içinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\dot{v}} = \frac{r_{\Sigma}}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{r_{\Sigma}}{A} \frac{\partial B}{\partial t} + 1 \quad (3.39)$$

denklemi elde edilir ve denklem (3.2.7) şu hale gelir

$$\left(\frac{1}{\dot{v}} \right)^2 = 2 \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{v}} + 1 - \frac{2m(v)}{Br} \quad (3.40)$$

(3.2.4) ve (3.2.3) bağıntılarını (3.2.5) içinde yerine yazdığımızda ise $m(\nu)$ için aşağıdaki bağıntı bulunmuş olur

$$m(v) = -\frac{Br}{2} \left[\frac{r^2}{B^2} B'^2 - \frac{r^2}{A^2} \dot{B}^2 + \frac{2r}{B} B' \right] \quad (3.41)$$

Burada $B' \equiv \frac{\partial B}{\partial r}$. (3.2.4) ifadesinin τ' ya göre türevi alındığında

$$\dot{\delta}v = -\frac{1}{AT^2} \left[-\frac{r}{A^2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{r}{A} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{r}{B^2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{r}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial r} \right] \quad (3.42)$$

bulunur. Burada $T = \left(\frac{r_\Sigma}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{r_\Sigma}{A} \frac{\partial B}{\partial t} + 1 \right)$ dir. (3.1.9) ile (3.2.12) bağıntıları

$[K_{ij}] \equiv K_{ij}^+ - K_{ij}^- = 0$ denklemi için tekrar yazılırsa;

$$\left(-\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial r} \right)_\Sigma = \left(\frac{\dot{\delta}v}{\dot{v}} - \frac{\dot{v}m}{r^2} + \frac{Q^2 \dot{v}}{r^3} + \frac{\Lambda r \dot{v}}{3} \right)_\Sigma \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.3.6), (3.3.7), (3.3.4), (3.2.6) ve (3.1.8) yardımıyla, denklem (3.3.8)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial r} \right)_\Sigma &= \frac{1}{AT} \left[\frac{r}{B^2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{r}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial t} + \frac{r}{A^2} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{r}{A} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{rA}{2B^3} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 - \frac{r}{2AB} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 + \frac{A}{B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{Q^2 A}{2B^3 r^3} + \frac{BA\Lambda r}{2} \right]_\Sigma \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklini alır. Denklem T ile çarpıldığında

$$p_\Sigma = \left(qB + \frac{Q^2}{B^4 r^4 \kappa} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \quad (3.45)$$

elde edilir. Burada Λ kozmoloji sabiti, Q elektrik yükü, q ısı akışı ve p basıncı temsil etmektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada uzay-zamanı zamansal bir hiperyüzey ile birbirinden iki farklı bölgeye ayırdığı düşünülen fiziksel yapıların matematiksel modellemesi incelenmiş, çeşitli uzaylar için eşleşme koşulları verilerek radyasyon yayan küresel simetrik yüklü akışkan problemi incelenmiştir. Burada iç uzay olarak küresel simetrik elektrik yüklü bir akışkan küre dış uzay-zaman olarak Vaidya tipi bir uzay gözönüne aldık. Kozmolojik sabiti de gözönüne alarak literatürde verilen adyabatik olmayan çökme problemini çalıştık. Hareket denklemlerinde elektrik yükü ve kozmolojik sabitlerin etkilerini gösterdik. Literatürde ısı akışı olmaksızın yani adyabatik olmayan çökme çözümü olmadığı gösterilmişti [1]. Çalışmada kozmolojik sabit ve elektrik yükünün varlığının adyabatik çökmeye izin verdiği gösterilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda akışkanın özellikleri değiştirilerek örneğin basıncıdaki değişikliklerin koşulları nasıl değiştireceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Santos, N. O.**, *Non adiabatic radiating collapse*, Mont. Not. Astr. Soc., 216, 1985, 403-410
- [2] **Poisson, E.**, 2004: *A relativist's toolkit : the mathematics of black-hole mechanics*, , Cambridge, UK ; New York : Cambridge University Press.
- [3] **Caroll, Sean M.**, c2004: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, P. –, SanFrancisco: Addition Wesley.
- [4] **Grön, O., Hervik S.**, c2007: *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*, P.–, New York: Springer.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Semiha BAYLAN

Doğum Yeri ve Tarihi: 1 Ocak 1983

Adres: İstinye Mahallesi üç şehitler sok. No: 5/1 D: 8 İstinye/Sarıyer

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği