İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

EUCLID UZAYLARINDAKİ HİPERYÜZEYLERİN GAUSS TASVİRİNİN TİPLERİ VE CHENG YAU OPERATÖRÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan KAYA

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2022

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

EUCLID UZAYLARINDAKİ HİPERYÜZEYLERİN GAUSS TASVİRİNİN TİPLERİ VE CHENG YAU OPERATÖRÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan KAYA
(509171249)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY

OCAK 2022

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 509171249 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Furkan KAYA , ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "EUCLID UZAYLARINDAKİ HİPERYÜZEYLERİN GAUSS TASVİRİNİN TİPLERİ VE CHENG YAU OPERATÖRÜ" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Uğur DURSUN** Işık Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Elif CANFES İstanbul Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **20 Aralık 2021**
Savunma Tarihi : **7 Ocak 2022**

Aileme,

ÖNSÖZ

Bu çalışma vetiresinde değerli bilgilerini, samimi ilgisini ve yardımlarını esirgemeyen, gösterdiği hoşgörü ve sabırdan dolayı kıymetli Hocam Sayın Nurettin Cenk Turgay'a müteşekkirim. Desteklerini esirgemeyen ailem ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Aralık 2021 Furkan KAYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
SEMBOLLER ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
ÖZET ..... **xvii**
SUMMARY ..... **xix**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL BİLGİLER **5**
2.1 Euclid Uzayının Hiperyüzeyleri 5
2.2 L_k Operatörleri 7
3. NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİ **11**
3.1 Sabit Eğrilikli Yüzeyler 12
3.2 Sabit Asal Eğrilikli Yüzeyler 15
3.3 Weingarten Yüzeyleri 17
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİ **21**
4.1 Minimal Yüzeyler 21
4.2 Helikal Yüzeyler 24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **29**
KAYNAKLAR **31**
ÖZGEÇMİŞ **33**

SEMBOLLER

$\mathbb{E}^n$	: n-Boyutlu Euclid Uzayı
$\tilde{\nabla}$	: Çevreleyen Uzayın Levi-Civita Konneksiyonu
∇	: Hiperüzeyin Levi-Civita Konneksiyonu
S	: Hiperyüzeyin Şekil Operatörü
h	: Hiperyüzeyin İkinci Esas Formu
Δ	: Laplace Operatörü
$\Box$	: Cheng-Yau Operatörü
H	: Ortalama Eğrilik Vektörü
K	: Gauss Eğriliği
G	: Gauss Tasviri

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

EUCLID UZAYLARINDAKİ HİPERYÜZEYLERİN GAUSS TASVİRİNİN TİPLERİ VE CHENG YAU OPERATÖRÜ

ÖZET

Chen ve Piccini tarafından ortaya konan "$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının bir alt manifoldunun Gauss tasviri alt manifoldu ne ölçüde belirler?" probleminden sonra sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldların analizi çok aktif bir araştırma konusu haline gelmiştir. Şimdiye kadar bu probleme bazı faydalı kısmi çözümler sunulmuştur.

$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayının n boyutlu bir M alt manifolduna, eğer x konum vektörü Δ Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu bir toplamı olarak ifade edilebilirse sonlu tiptendir denir. Dolayısıyla M alt manifoldunun sonlu tipten olması için, $x = x_0 + x_1 + x_2 \cdots + x_n$ olmalıdır. Burada x_0 sabit tasvir ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise $\lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $i = 1, 2, \ldots, k$ için $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan sabit olmayan tasvirlerdir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ özdeğerleri birbirinden farklı ise M alt manifoldu k-tipindendir denir.

M, Euclid uzayının bir hiperyüzeyi olsun. Benzer şekilde bir $\psi : M^n \to E^{n+1}$ düzgün fonksiyonuna, eğer M hiperyüzeyinin Laplace operatörünün k tane ayrık özdeğerine karşılık gelen özvektörlerin toplamı olarak yazılıyorsa, k-tipindendir denir. Eğer böyle bir k değeri varsa, ψ fonksiyonuna sonlu tiptendir denir.

Yukarıda verilen tanımdan dolayı M hiperyüzeyinin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şartın

$$\Delta G = \lambda (G + C)$$

diferansiyel denkleminin bir $\lambda \in \mathbb{R}$ özdeğeri ve C sabit vektörü için sağlanması olduğu elde edilir. $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki düzlemler, dik silindirler ve küreler 1-tipi Gauss tasvirine sahip yüzeylerdir.

Euclid uzayındaki sonlu tipten alt manifoldlar pek çok geometrici tarafından çalışılmış ve önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Halen de bu konu ile ilgili pek çok açık problem bulunmakta ve bu açık problemler çözülmeye çalışılmaktadır. Bu problemlerin bazıları da hiperyüzeylerin Gauss tasvirleri ile ilgilidir. Günümüze kadar pek çok geometrici Euclid uzaylarındaki hiperyüzeylerin Gauss tasvirlerinin üzerine çalışmıştır.

Diğer taraftan, Euclid uzayındaki bir M manifolduna, G Gauss tasviri

$$\Delta G = f(G + C)$$

denklemi düzgün bir f fonksiyonu ve bir C sabit vektörü için sağlanırsa, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Eğer bu denklem $C = 0$ için sağlanırsa Gauss tasviri birinci çeşit noktasal 1-tipinden; $C \neq 0$ için sağlanırsa ikinci çeşit noktasal 1-tipindendir denir. Örneğin, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki helikoit, katenoid ve dik koni noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeylerdir. Son senelerde bu kavramlar

genişletilerek genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip alt manifold tanımı verilmiştir. Euclid uzayındaki bir M manifoldunun G Gauss tasviri

$$\Delta G = f_1 G + f_2 C$$

denklemi f_1, f_2 düzgün fonksiyonları ve bir C sabit vektörü için sağlanırsa genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Örneğin, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki tüm dönel yüzeyler genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.

Bu tez çalışmasında $\mathbb{E}^3$ uzayındaki yüzeylerin Gauss tasvirlerinin tiplerine göre sınıflandırılmaları ile ilgili bazı teoremler çalışılmıştır. Üçüncü bölümde Cheng-Yau operatörüne göre noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip sabit ortalama eğrilikli ve sabit esas eğrilikli yüzeyler ile ilgili bilinen sonuçlar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Sonra Weingarten yüzeyleri incelenmiştir. $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki doğrusal Weingarten yüzeyinin Cheng-Yau operatörüne göre ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için bu yüzeyi düzlemin açık bir parçası olması gerektiği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki minimal yüzeylerin Cheng-Yau operatörüne göre genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için bazı teoremler elde edilmiştir. Ayrıca, helikal yüzeyler incelenmiş ve $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki bir helisoidal yüzeyin $\square$ noktasal 1-tipinden Gauss haritasına sahip olması için gerek ve yeter şartın o yüzeyin bir dönel yüzey olması veya sabit Gauss eğriliğine sahip olması gerektiği gösterilmiştir.

THE TYPES OF THE GAUSS MAP AND CHENG YAU OPERATOR OF HYPERSURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

SUMMARY

Finite type maps from a submanifold of a Euclidean space into another Euclidean space have been studied by many geometers and important results have been obtained. There are still many open problems related to this subject to be solved.

Let M be a hypersurface of $\mathbb{E}^{n+1}$. A smooth function $\psi : M^n \to E^{n+1}$ is said to be of k-type if it can be expressed as a sum eigenvectors corresponding to k distinct eigenvalues of the Laplace operator of M. If such a k exists, then ψ is said to be finite type.

After the problem 'To what extent does the type of the Gauss map of a submanifold of $\mathbb{E}^m$ determine the submanifold?' was introduced by Chen and Piccini, the study of submanifolds with finite type Gauss map became a very active research subject. Many affirmative partial solutions to this problem have appeared and provide some particular results.

Some of these problems are related with the Gauss map of hypersurfaces. Many geometers has studied type of the Gauss map of hypersurfaces in Euclidean spaces so far.

From the definition above it is obtained that a hypersurface M has 1-type Gauss map if and only if the differential equation

$$\Delta G = \lambda(G + C)$$

is satisfied for an eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$ and constant vector C. For example, planes, circular cylinders and spheres in $\mathbb{E}^3$ are surfaces with 1-type Gauss maps. The other examples in Euclidean spaces are mass symmetric 2-type submanifolds and minimal hypersurfaces of a hypersphere with constant sectional curvature.

On the other hand, a submanifold M of a Euclidean space has a pointwise 1-type if the Gauss map of M satisfies

$$\Delta G = f(G + C)$$

for some smooth function f and constant vector C, where Δ denotes the Laplace operator defined on M. If this equation is satisfied for $C = 0$ then a pointwise 1-type Gauss map is said to be of the first kind, otherwise, it is said to be of the second kind. For example, a catenoid, a helicoid and a right cone in $\mathbb{E}^3$ are surfaces with pointwise 1-type Gauss map. In the recent years, by extending this notion, the definiton of generalized 1-type Gauss map has been given.

A submanifold M of a Euclidean space has a generalized 1-type Gauss map if Gauss map of M satisfies

$$\Delta G = f_1 G + f_2 C$$

for smooth functions f_1, f_2 and constant vector C, where Δ denotes the Laplace operator defined on M. For example all rotational surfaces in the Euclidean space $\mathbb{E}^3$ has generalized 1-type Gauss map. If the f_1 and f_2 functions are constant in this equation, then the M has a 1 type Gauss map. If $f_1 = f_2$ in this equation then M has a pointwise 1-type Gauss map.

On the other hand, a surface is said to be Weingarten if its principal curvatures k_1, k_2 satisfy

$$k_1 = \phi(k_2)$$

for a smooth fuction ϕ. These kind of surfaces has caught the interest of many geometers so far. Note that surfaces with constant Gaussian curvature can be assumed to be a Weingarten surface. In particular, a surface is said to be linear Weingarten if

$$k_2 = ak_1 + b$$

for some constants $a, b \in \mathbb{R}$. This class also contains surfaces with constant mean curvature and also minimal surfaces.

Another well-known class of surfaces in the Euclidean spaces is helicoidal surfaces. Namely, a helicoidal surface is generated by applying a composition of rotation and translation to a suitable curve. Note that class of rotational surfaces is a particular case of this kind of surfaces which appear when the speed of the translation is zero.

On the other hand the Laplace operator Δ of the hypersurface of M^n belongs to a sequence $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ of the second order elliptic differential operators. These operators represent the linear operators of the first variation of corresponding mean curvature of M. The particular cases of L_k are $L_0 = -\Delta$ and the Cheng-Yau operator $\Box$.

In time, the definition of finite type maps is studied by considering the operator L_k instead of Δ. Note that the Cheng-Yau operator $L_1 = \Box$ has caught special attention. Many geometers have obtained classification results about hypersurfaces with $\Box$-finite type Gauss map as well as $\Box$-pointwise 1-type Gauss map. In this thesis, the Gauss map of hypersurfaces of Euclidean spaces is studied by considering the Cheng-Yau operator $\Box$. Then the Weingarten surfaces are investigated.

In Section 3, first the known results for surfaces with constant mean curvature and constant principal curvature with pointwise 1-type Gauss map with respect to the $\Box$ Cheng-Yau operator are explained in detail.

Then the Weingarten surfaces are investigated. It is proved that a linear Weingarten surface in $\mathbb{E}^3$ has $\Box$-pointwise 1-type Gauss map of the second kind if and only if it is an open part of a plane.

In section 4, some theorems are obtained for minimal surfaces to have a generalized 1-type Gauss map. It is shown that a minimal surface in $\mathbb{E}^3$ to have a generalized 1-type Gauss map if and only if it satisfies equation

$$\omega_1 \langle C, e_1 \rangle + \omega_2 \langle C, e_2 \rangle = 0,$$

where

$$\omega_1 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle, \omega_2 = -\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle.$$

Besides, it is shown that a minimal surface in $\mathbb{E}^3$ to have a generalized 1-type Gauss map if it satisfies equation

$$\omega_2^2 e_1(\omega_1) - \omega_1^2 e_2(\omega_2) = \omega_1 \omega_2 (\omega_2^2 + \omega_1^2 - K),$$

where ω_1 and ω_2 are defined by

$$\omega_i = \langle \nabla_{e_i} e_1, e_2 \rangle \quad i = 1, 2.$$

Furthermore, helicoidal surfaces are also studied. It is proved that a helicoidal surface in $\mathbb{E}^3$ has a generalized 1-type Gauss map if and only if it is either a rotational surface or a genuine helicoidal surface with constant Gaussian curvature.

1. GİRİŞ

$\mathbb{E}^m$ Euclid uzayında n boyutlu bir M alt manifoldunun, x konum vektörü Δ Laplace operatörünün özvektörlerinin sonlu bir toplamı olarak ifade edilebilirse, M alt manifoldu sonlu tiptendir denir, [1]. Dolayısıyla M alt manifoldunun sonlu tipten olması için, $x = x_0 + x_1 + x_2 \ldots + x_n$ olmalıdır. Burada x_0 sabit tasvir ve $x_1, \ldots, x_n$'ler ise $\Delta x_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \ldots, k$ şartını sağlayan sabit olmayan tasvirlerdir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ özdeğerleri birbirinden farklı ise M alt manifoldu k-tipindendir denir.

Aslında, sonlu tipten alt manifoldlar ilk olarak Takahashi tarafından 1966 senesinde [2] numaralı makalede çalışılmıştır. Bu makalede $\Delta x = 0$ durumunda x daldırmasının minimal olduğu ve $\Delta x = \lambda x (\lambda \neq 0)$ durumunda ise x daldırmasının bir kürenin içinde minimal olduğu gösterilmiştir.

1986 senesinde Chen, Morgan ve Nore tarafından sonlu tipten alt manifold kavramı bir Euclid uzayının başka bir Euclid uzayına giden düzgün tasvirlere genişletilmesi ile sonlu tipten tasvir tanımı verilmiştir, [3]. Bu çalışmada ayrıca bir tasvirin sonlu tipten olması için gerek ve yeter şartlar da elde edilmiştir.

Chen ve Piccini tarafından özel olarak Euclid uzaylarında sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar üzerine çalışılmış ve $\mathbb{E}^{m+1}$ Euclid uzayında 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt yüzeyler sınıflandırılmıştır, [4]. Ayrıca, $\mathbb{E}^{m+1}$ Euclid uzayındaki kompakt bir M hiperyüzeyinin 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şartın bu hiperyüzeyin bir $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ hiperküresi olması gerektiği gösterilmiştir.

2000 senesinde Kim ve Yoon tarafından noktasal 1-tipinden Gauss tasvirinin tanımı verilmiştir, [5]. Bu makalede üç boyutlu Minkowski uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeyler (İng."ruled surfaces") çalışılmış ve bu yüzeyler için tam sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, üç boyutlu Minkowski uzayında minimal doğrusal yüzeylerin yeni bir karakterizasyonu verilmiştir.

Son yıllarda Euclid uzaylarının hiperyüzeyleri üzerinde $L_0 = -\Delta$ olmak üzere $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ ikinci dereceden operatörleri tanımlanmak suretiyle, L_k operatörüne göre sonlu tipten tasvir tanımı verilmiştir. Burada $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ için L_k operatörleri M hiperyüzeyinin normal varyasyonlarından ileri gelen $(k+1)$'inci

ortalama eğriliğinin birinci varyasyonunun doğrusallaştırılmış operatörüdür. Özel olarak, $L_1 = \Box$ operatörü Cheng-Yau operatörü olarak adlandırılır, [6]. L_k operatörüne göre sonlu tipten tasvirler ilk olarak [7] numaralı makalede çalışılmıştır. Bu makalede, Alias ve Gürbüz tarafından $\mathbb{E}^{n+1}$ Euclid uzayında x konum vektörü $L_k x = Ax + b$ şartını sağlayan hiperyüzeyler incelenmiştir. Burada $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ sabit bir matris ve $b \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ sabit bir vektördür. Her k için bu şartı sağlayan hiperyüzeylerin sıfır $(k+1)$'inci ortalama eğriliğe sahip hiperyüzeyler, dairesel hiperyüzeylerin açık parçası ve $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}, \quad k+1 \leq m \leq n-1$, formundaki dik küresel hipersilindirler olduğu gösterilmiştir.

Özel olarak $L_1 = \Box$ operatörüne göre sonlu tipten tasvirler Kashani tarafından 2009 senesinde ilk olarak çalışılmıştır, [8]. Bu makalede $\mathbb{R}^{n+1}$ Euclid uzayındaki tamamen umbilik olan hiperyüzeyler, $\mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m}$ formundaki silindirler, regle yüzeyler, dönel yüzeyler incelenmiştir.

Diğer taraftan $L_1 = \Box$ operatörüne göre sonlu tipten Gauss tasvirine sahip hiperyüzeyler ile ilgili olarak ilk çalışma [9] makalesinde yapılmıştır. Bu çalışmada aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 1. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayındaki yönlendirilmiş bir M yüzeyinin Gauss tasviri, sürekli bir f fonksiyonu ve bir C sabit vektörü için*

$$\Box G = f(G + C) \tag{1.1}$$

denklemini sağlarsa, M yüzeyine $\Box$ *noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Daha kesin olarak* $\Box$ *noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine,* (1.1) *denklemi eğer* $C = 0$ *için sağlanıyorsa birinci çeşit; aksi takdirde Gauss tasvirine ikinci çeşit denir. Ayrıca* (1.1) *denklemi sabit bir f fonksiyonu için sağlanırsa o zaman M yüzeyinin* $\Box$ *1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu söylenir.*

Ayrıca, [9] numaralı makalede (1.1) denklemini sağlayan yüzeyler çalışılmıştır. Sabit Gauss eğriliğine, sabit ortalama eğriliğe, sabit asal eğriliğine sahip yüzeylere odaklanılmış ve bu yüzeyler için sınıflama ve karakterizasyon teoremleri elde edilmiştir.

[10] numaralı makalede $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki dönel ve helikal yüzeyler Gauss tasvirleri açısından incelenmiştir. (1.1) denklemini sağlayan yüzeylerin tam sınıflandırması yapılmıştır.

2018 senesinde Yoon ve diğerleri tarafından genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri tanımı yapılmıştır, [11]. Bu makalede 3 boyutlu Minkowski uzayında herhangi bir varsayımda bulunmadan genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olası tüm regle yüzeyleri sınıflandırılmıştır. [12] numaralı makalede Laplace operatörü yerine Cheng-Yau operatörü kullanılarak yeni bir tanım verilmiştir. Bu yeni tanım ile $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip konik yüzeyler sınıflandırılmış, herhangi bir silindirik yüzeyin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu ve düzlem hariç tüm açılabilir yüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^{n+2}$ Euclid uzayındaki silindirik hiperyüzeylerin her zaman genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu ispatlanmıştır.

[13] numaralı makalede ise genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri fikrine benzer şekilde $\Box$-1 tipi Gauss tasviri kavramı önerilmiştir:

Tanım 2. *Eğer*

$$\Box G = f_1 G + f_2 C \tag{1.2}$$

denklemi f_1, f_2 düzgün fonksiyonları ve bir C sabit vektörü için sağlanırsa, M yüzeyine genelleştirilmiş $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir.

[13] numaralı makalede ayrıca $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki dönel yüzeyler ve kanal yüzeyleri sınıflandırılmış ve bir dönel yüzeyin genelleştirilmiş $\Box$ 1-tipi Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir kanal yüzeyinin genelleştirilmiş $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şartın bir dönel yüzeyin veya bir torusun bir açık parçası ise sahip olduğu gösterilmiştir.

[14] numaralı makalede ise Laplace operatörü yerine Cheng-Yau operatörü kullanılmıştır. $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki birim hızda profil eğriliğine sahip bir dönel yüzeyin genelleştirilmiş $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kanal yüzeyleri de çalışılmıştır.

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tezin geri kalanında kullanılacak olan kavramlar ve notasyonlar verilecek, ayrıca bazı temel hesaplamalar ayrıntılı olarak gösterilecektir.

Üçüncü bölümde ise $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında $\Box$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler incelenmiş ve $\Box$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip Weingarten yüzeylerin sınıflandırması yapılarak yeni bir sonuç verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise genelleştirilmiş □ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler ile ilgili bazı yeni sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir.

Son bölümde ise tezde yapılanların kısa bir özeti verilmiş ve ileride çalışılabilecek bazı açık problemler sunulmuştur.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin geri kalan kısmında kullanılacak olan temel kavramlar ve notasyonlar verilecektir. Bu kavramlar [1] numaralı kaynaktan ayrıntılı olarak takip edilebilir.

2.1 Euclid Uzayının Hiperyüzeyleri

$\mathbb{E}^{n+1}$ ile metrik tensörü

$$\tilde{g} = \langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \tag{2.1}$$

ile verilen $n+1$ boyutlu Euclid uzayı gösterilsin ve bu uzayın Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olsun.

Burada $\mathbb{E}^{n+1}$ Euclid uzayının bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. M hiperyüzeyinin Levi-Civita konneksiyonu ∇, birim normali N olmak üzere, her X, Y teğet vektör alanı için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N \tag{2.2}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -S(X) \tag{2.3}$$

denklemlerine Gauss ve Weingarten denklemleri denir. Burada h yüzeyin ikinci asal formu ve S ise şekil operatörüdür. Diğer taraftan, M hiperyüzeyinin Gauss tasviri

$$G : M \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1},$$

$$G(p) = N(p)$$

şeklinde tanımlanır. S şekil operatörü kendine eş olduğu için $Se_i = k_i e_i \;\; i = 1,2,...,n$ olacak şekilde $k_1,....,k_n$ düzgün fonksiyonları ve $e_1,....,e_n$ vektör alanları vardır. Bu fonksiyonlara ve vektör alanlarına M hiperyüzeyinin, sırasıyla, asal eğrilikleri ve asal doğrultuları denir. Ayrıca ayrık $i, j, l = 1,2,...,n$ indisleri için

$$e_i(k_j) = \omega_{ij}(e_j)(k_i - k_j), \tag{2.4}$$

$$\omega_{ij}(e_l)(k_i - k_j) = \omega_{il}(e_j)(k_i - k_l) \tag{2.5}$$

şeklindeki denklemler Codazzi denklemleridir ki burada ω_{ij} ile

$$\omega_{ij}(e_l) = \langle \nabla_{e_l} e_i, e_j \rangle \tag{2.6}$$

şeklinde verilen konneksiyon fonksiyonları gösterilmiştir.

Şimdi $n = 2$ durumu göz önüne alınsın. M yüzeyinin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{2.7}$$

$$K = k_1 k_2 \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır. $H = 0$ ise M yüzeyine minimaldir, $K = 0$ ise M yüzeyine düzdür denir. Ayrıca, eğer k_1 ve k_2 asal eğrilikleri bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu için

$$k_2 = f(k_1)$$

denklemini sağlıyorsa, M yüzeyine Weingarten yüzeyidir denir. Özel olarak, eğer

$$k_2 = ak_1 + b$$

ise M yüzeyine doğrusal Weingarten yüzeyi denir. ω_1 ve ω_2 fonksiyonları

$$\omega_1 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle, \quad \omega_2 = -\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Gauss denklemi

$$e_1(\omega_2) - e_2(\omega_1) + \omega_1^2 + \omega_2^2 = -K \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, M yüzeyinin teğet uzayının bir $\{\partial_x, \partial_y\}$ baz alanı için, bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunun gradiyenti

$$\nabla f = \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left\{ (g_{22} f_x - g_{12} f_y)\, \partial_x + (-g_{12} f_x + g_{11} f_y)\, \partial_y \right\} \tag{2.10}$$

formülü ile tanımlanır. Eğer e_1, e_2 ortanormal bir çatı alanı ise (2.10) denklemi

$$\nabla f = e_1(f) e_1 + e_2(f) e_2$$

halini alır.

2.2 L_k Operatörleri

Bu alt bölümde Euclid uzayında tanımlı L_k operatörleri ile ilgili bazı temel kavramlar ve sonuçlar verilecektir. Bu kavramlar ile ilgili geniş bir bilgiye, örneğin, [7] numaralı kaynaktan ulaşılabilir.

$\mathbb{E}^{n+1}$ Euclid uzayının bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın. M hiperyüzeyinin asal eğrilikleri $k_1, k_2 \ldots, k_n$ olmak üzere S şekil operatörünün n tane değişmezi her $p \in M$ için

$$s_k(p) = \sigma_k(k_1(p), \ldots\ldots, k_n(p)), \quad 1 \leq k \leq n \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ kümesinde

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \tag{2.12}$$

şeklinde verilen simetrik fonksiyonlardır. Yani,

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\sigma_2(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
\sigma_3(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca, S şekil operatörünün karakteristik polinomu

$$\mathscr{Q}_k(t) = det(tI - S) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_k t^{n-k} \tag{2.13}$$

yardımıyla belirlenen s_k fonksiyonları kullanılarak hiperyüzeyin ortalama eğriliği H_k

$$\binom{n}{k} H_k = s_k, \quad 0 \leq k \leq n \tag{2.14}$$

denklemiyle tanımlanır. Özellikle $k = 1$ olduğunda

$$H_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{n} tr(S) = H \tag{2.15}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$H_n = k_1 k_2 \cdots k_n$$

fonksiyonu, $n = 2$ iken yüzeyin Gauss eğriliği, $n > 3$ iken de hiperyüzeyin Gauss-Kronecker eğriliği olarak isimlendirilir.

$P_k : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ ile verilen klasik Newton dönüşümleri

$$P_0 = I, \quad P_k = s_k I - S \circ P_{k-1} = \binom{n}{k} H_k I - S \circ P_{k-1} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, I ile $\mathscr{X}(M)$'nin birim operatörü gösterilmiştir. Eşdeğer olarak

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j s_{k-j} S^j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{k-j} H_{k-j} S^j \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir. P_k Newton dönüşümleri ile ilgili olarak

$$L_k(f) = \operatorname{div}(P_k(\nabla(f)) \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanan ikinci dereceden doğrusal $L_k : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ operatörü göz önüne alınsın. $k = 0$ olması durumunda, $P_0 = I$ olduğu için $L_0 = -\triangle$ olur. Burada $\triangle$ ile M hiperyüzeyinin Laplace operatörü gösterilmiştir. $L_1 = \Box$ operatörüne Cheng-Yau operatörü denir, [1].

Doğrudan hesapla

$$\begin{aligned}
L_1(f) &= \operatorname{div}(P_1(\nabla(f)) \\
&= \operatorname{div}(s_1 \nabla f - S(\nabla f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}\left[s_1 e_i(f) e_i - S(e_i(f) e_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}\left[(s_1 e_i(f) - k_i e_i(f)) e_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{e_j} \left[(s_1 - k_i) e_i(f))\right] e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_j \left[(s_1 - k_i) e_i(f))\right] e_i + \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_j \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] \langle e_i, e_j \rangle + \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_j \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] \delta_{ij} + \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] \omega_{ij}(e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left[(s_1 - k_i) e_i(f)\right] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(s_1 - k_i) \omega_{ij}(e_j) e_i(f)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} e_i(k_j) e_i(f) + \sum_{i=1}^{n} (s_1 - k_i) e_i e_i(f) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(s_1 - k_i) \omega_{ij}(e_j) e_i(f)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki ilk terimde (2.4) denklemi ile verilen Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Box f &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_j)(k_i-k_j)e_i(f)+\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)e_ie_i(f) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(s_1-k_i)\omega_{ij}(e_j)e_i(f)\end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_j)(k_i-k_j)e_i(f)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(s_1-k_i)\omega_{ij}(e_j)e_i(f) \\ =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_j)(s_1-k_j)e_i(f) \\ =&\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_j)\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_j)e_i\right)(f) \\ =&\sum_{j=1}^{n}(s_1-k_j)\left(-\nabla_{e_j}e_j\right)(f)\end{aligned}$$

olmasından dolayı (2.19) denklemi

$$\Box f = \left[\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)(e_ie_i-\nabla_{e_i}e_i)\right](f)$$

halini alır. Dolayısıyla, $\Box$ operatörü

$$\Box = \left[\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)(e_ie_i-\nabla_{e_i}e_i)\right] \tag{2.20}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $\Box : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ operatörünün doğal bir genişletilmesi

$$\Box : C^\infty(M,\mathbb{R}^k) \to C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$$

$$\Box\psi = (\Box\psi_1, \Box\psi_2, \ldots, \Box\psi_k)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\psi : M \to \mathbb{R}^k$ fonksiyonu $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ şeklindedir. $k = n+1$ olması durumunda (2.20) denkleminden

$$\Box\psi = \left[\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)(\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{e_i}\psi-\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\psi)\right]$$

elde edilir. Özel olarak, $\psi = G$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\Box G &= \left[\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)(\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{e_i}G-\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}G)\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)(\tilde{\nabla}_{e_i}(k_ie_i)-\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_j)k_je_j)\right]\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemden,

$$\begin{aligned}(\Box G)^{\perp} &= -\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)k_i h(e_i,e_i)G \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)k_i^2 G \\ &= -(s_1s_2-3s_3)G \end{aligned} \tag{2.21}$$

ve

$$\begin{aligned}(\Box G)^{T} &= -\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)\left(e_i(k_i)e_i+k_i\nabla_{e_i}e_i-\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_i)k_je_j\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)\left(e_i(k_i)e_i-\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_i)(k_i-k_j)e_j\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(s_1-k_i)\left(e_i(k_i)e_i+\sum_{j\neq i}e_j(k_i)e_j\right) \\ &= -\nabla s_2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) denklemlerinden ise

$$\Box G = -\nabla s_2-(s_1s_2-3s_3)G \tag{2.23}$$

bulunur. $n=2$ olması durumunda aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 1. *M, $\mathbb{E}^3$ uzayında K Gauss eğriliğine ve H ortalama eğriliğine sahip bir yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin G Gauss tasviri için*

$$\Box G = -\nabla K-2HKG \tag{2.24}$$

elde edilir.

Açıklama 2.1. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki bir M yüzeyine eğer asal eğrilikleri sabitse izoparametriktir denir. Bu durum aşağıdaki üç durumdan birinde mümkündür.

- M bir düzlemin açık bir parçasıdır. Bu durumda, G sabit bir vektör olduğu için $\Box G=0$ olur ve (1.1) denklemi $C=-G$ vektörü için de sağlanır. Yani, M yüzeyinin ikinci çeşit $\Box$ noktasal 1-tipinden olduğu söylenebilir.
- M bir çembersel dik silindirin açık bir parçasıdır. Bu durumda $\Box G=0$ olur.
- M bir kürenin açık bir parçasıdır. Bu durumda $\Box G=\lambda G$ olur.

3. NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİ

Bu bölümde ilk olarak $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki $\square$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler ile ilgili elde edilmiş sonuçların bir kısmı detaylı olarak anlatılacaktır. Daha sonra ise bu sonuçların bir genelleştirilmesi elde edilecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem daha sonraki sonuçların elde edilmesi için kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 2. *[9, 10] $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki yönlendirilmiş bir M yüzeyi göz önüne alınsın ve bu yüzeyin asal eğrilikleri ile asal doğrultuları, sırasıyla, k_1, k_2 ile e_1, e_2 olsun. $C \in C^\infty(M, \mathbb{E}^3)$ vektör alanı ancak ve ancak*

$$e_1(C_1) = \omega_1 C_2 + k_1 C_3, \tag{3.1}$$

$$e_1(C_2) = -\omega_1 C_1, \tag{3.2}$$

$$e_1(C_3) = -k_1 C_1, \tag{3.3}$$

$$e_2(C_1) = \omega_2 C_2, \tag{3.4}$$

$$e_2(C_2) = -\omega_2 C_1 + k_2 C_3, \tag{3.5}$$

$$e_2(C_3) = -k_2 C_2, \tag{3.6}$$

eşitlikleri sağlanırsa sabittir. Burada, $C_1 = \langle C, e_1 \rangle$, $C_2 = \langle C, e_2 \rangle$, $C_3 = \langle C, G \rangle$, $\omega_1 = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle$, $\omega_2 = -\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle$ şeklindedir.

İspat. G, M yüzeyinin Gauss tasviri olmak üzere bir C vektör alanı

$$C = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 G$$

şeklinde yazılır. Doğrudan yapılan hesaplamalarla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_1} C &= e_1(C_1)e_1 + e_1(C_2)e_2 + e_1(C_3)G + C_1 \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 + C_2 \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \\
&\quad + C_3 \tilde{\nabla}_{e_1} G, \\
&= e_1(C_1)e_1 + e_1(C_2)e_2 + e_1(c_3)G + C_1(\omega_1 e_2 + k_1 G) - C_2 \omega_1 e_1 \\
&\quad - C_3 k_1 e_1, \\
&= \big(e_1(C_1) - \omega_1 C_2 - k_1 C_3\big)e_1 + \big(e_1(C_2) + \omega_1 C_1\big)e_2 \\
&\quad + \big(e_1(C_3) + k_1 C_1\big)G
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_2} C &= e_2(C_1)e_1 + e_2(C_2)e_2 + e_2(C_3)G + C_1\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 + C_2\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \\
&\quad + C_3\tilde{\nabla}_{e_2} G, \\
&= e_2(C_1)e_1 + e_2(C_2)e_2 + e_2(C_3)G + C_1\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 + C_2\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \\
&\quad + C_3\tilde{\nabla}_{e_2} G, \\
&= \big(e_2(C_1) - \omega_2 C_2\big)e_1 + \big(e_2(C_2) + \omega_2 C_1 - k_2 C_3\big)e_2 \\
&\quad + (e_2(C_3) + k_2 C_2)G
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) denklemlerinden dolayı $\tilde{\nabla}_{e_1} C = 0$ ve $\tilde{\nabla}_{e_2} C = 0$ olması için gerek ve yeter şart, sırasıyla, (3.1)-(3.3) ve (3.4)-(3.6) denklemlerinin sağlanmasıdır. □

3.1 Sabit Eğrilikli Yüzeyler

Bu alt bölümde [9] numaralı makalede elde edilmiş olan sonuçların bazıları geniş bir şekilde açıklanmıştır.

Teorem 1. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayındaki bir M yüzeyinin $\Box G = 0$ denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart düz olmasıdır.*

İspat. Gerek şartın ispatı için $\Box G = 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (2.24) denkleminden

$$\nabla K + 2HKG = 0$$

bulunur ve bu eşitliğin teğet ve normal kısımlardan ise $K_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
K &= K_0 \\
2K_0 H &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. $K_0 \neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (3.9) denkleminde $H = 0$ elde edilir. $H = 0$ ve $K = K_0$ olduğu için M yüzeyi izoparametrik ve minimal olur. Dolayısıyla, M bir düzlemin açık bir parçasıdır. Fakat bu durum $K_0 \neq 0$ olması ile çelişir. Sonuç olarak M düzdür. Aşağıdaki teoremin ispatı Yardımcı Teorem 1'den hemen görülür. □

Teorem 2. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayında yönlendirilmiş bir M yüzeyinin birinci çeşit $\square$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart sabit Gauss eğriliğine sahip olmasıdır.*

Teorem 3. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayında yönlendirilmiş bir M yüzeyinin birinci çeşit $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart düz veya bir kürenin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M yüzeyi birinci çeşit $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olsun. Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı M yüzeyinin G Gauss tasviri bir λ sabiti için

$$\square G = \lambda G$$

denklemini sağlar. $K = K_0 \neq 0$ sabit olsun. O zaman

$$-2K_0 H = \lambda$$

denklemi ve buradan $H = sabit$ elde edilir ve $H = sabit$ olduğundan M izoparametrik olur. M, izoparametrik ve $K \neq 0$ olduğundan bir kürenin açık bir parçasıdır. $\square$

Önerme 1. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayındaki bağlantılı minimal bir M yüzeyinin ikinci çeşit $\square$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart M yüzeyinin bir düzlemin açık parçası olmasıdır.*

İspat. Eğer M yüzeyi ikinci çeşit $\square$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip ise o zaman (2.12) denklemi $C \neq 0$ sabit vektörü ve düzgün bir f fonksiyonu için sağlanır. $\mathscr{O} = \{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$ kümesi tanımlansın. Şimdi $\mathscr{O} \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. M minimal bir yüzey olduğundan (2.11) ve (2.12) denklemlerinden $f(G+C) = -\nabla K$ denklemi elde edilir. Bu denklemin iki tarafının G ile iç çarpımı alınırsa $C_3 = \langle C, G \rangle = -1$ bulunur. C vektörünün sabit olmasından dolayı (3.3) ve (2.6) denklemlerinden, $k_1 = -k_2$ olmasından dolayı

$$k_1 C_1 = k_2 C_2 = 0 \tag{3.10}$$

olur. Eğer M üzerinde $k_1 = 0$ ise $S = 0$ olur ki bu durum M yüzeyinin bir düzlemin açık bir parçası olması gerektiğini gösterir. Şimdi $\mathscr{O}_2 = \{p \in M \mid k_1(p) \neq 0\}$ açık kümesinin boş olmadığı varsayılsın. Bu durumda (3.10) denklemlerinden $\mathscr{O}$ üzerinde $C_1 = C_2 = 0$ bulunur. Böylece, $C \neq G$ olur ve $\mathscr{O}_2$ kümesi düzlemin açık bir parçası

olur ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\mathscr{O}_2 = \emptyset$ elde edilir ki bu da $\mathscr{O}$ kümesinde $k_1 = 0$ olduğu anlamına gelir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\mathscr{O} = \emptyset$ olmalıdır ki bu durum M yüzeyinin bir düzlemin açık parçası olduğunu gösterir.

Yeter şartın ispatı için, M yüzeyinin bir düzlemin açık bir parçası olduğu varsayılsın. Bu durumda M yüzeyinin Gauss tasviri bir $G_0 \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörü için $G = G_0$ olur ki bu da $\Box G = 0$ denklemini sağlar. Bundan dolayı (2.12) denklemi $C \neq G_0$ ve düzgün bir f fonksiyonu için sağlanır. Buradan M yüzeyinin ikinci çeşit $\Box$ noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu görülür. $\Box$

Teorem 4. *[9] $\mathbb{E}^3$ uzayının sabit ortalama eğriliğe sahip, bağlantılı bir M yüzeyi göz önüne alınsın. O zaman M yüzeyi $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart M yüzeyinin bir kürenin, bir dik çembersel silindirin veya bir düzlemin bir açık parçası olmasıdır.*

İspat. k_1, k_2 M yüzeyinin asal eğrilikleri ve e_1, e_2 ise karşılık gelen asal doğrultular olsun. M yüzeyi sabit ortalama eğriliğe sahip olduğundan, bir h_0 sabiti için

$$k_1 + k_2 = h_0$$

olur. Buradan

$$e_i(k_1) = -e_i(k_2), \quad i = 1,2 \tag{3.11}$$

sonucu elde edilir. Şimdi, M yüzeyinin $\Box$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. O zaman $f = \lambda$ sabiti ve C sabit vektörü için (1.1) denklemi sağlanır. Bu nedenle, (1.1) ve (2.24) denklemlerinden

$$-\nabla K - h_0 K G = \lambda (G + C) \tag{3.12}$$

denklemi elde edilir. (2.4), (3.11) ve (3.12) denklemlerinden

$$\lambda C_1 = -e_1(K) = e_1(k_1)(k_1 - k_2), \tag{3.13}$$

$$\lambda C_2 = -e_2(K) = e_2(k_1)(k_1 - k_2), \tag{3.14}$$

$$\lambda (C_3 + 1) = -h_0 K \tag{3.15}$$

denklemleri bulunur. (3.15) denkleminin e_1 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.13) denklemi kullanılırsa

$$\lambda e_1(C_3 + 1) = -h_0 e_1(K) = \lambda h_0 C_1 \tag{3.16}$$

elde edilir. $\lambda = 0$ ise o zaman $\Box G = 0$ elde edilir ve Teorem1'den dolayı M yüzeyi düz olur. Dolayısıyla M yüzeyi izoparametriktir. $\lambda \neq 0$ ise (3.16) denkleminden

$$e_1(C_3) = h_0 C_1 \tag{3.17}$$

denklemi bulunur. (3.3) ve (3.17) denklemlerinden

$$C_1(h_0 + k_1) = 0 \tag{3.18}$$

bulunur. Aynı şekilde, (3.15) denkleminin e_2 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.14) denklemi kullanılırsa

$$\lambda e_2(C_3 + 1) = -h_0 e_2(K) = \lambda h_0 C_2 \tag{3.19}$$

elde edilir. $\lambda = 0$ ise o zaman $\Box G = 0$ elde edilir ve Teorem1'den dolayı M yüzeyi düz olur. $\lambda \neq 0$ ise (3.19) denkleminden

$$e_2(C_3) = h_0 C_2 \tag{3.20}$$

denklemi elde edilir. (3.6) ve (3.20) denklemlerinden

$$C_2(h_0 + k_2) = 0 \tag{3.21}$$

bulunur. $\mathscr{O} = \{p \in M \mid k_1 \neq 0, k_2 \neq 0\}$ açık kümesi göz önüne alınsın. O zaman $C_1 = C_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda (3.13) ve (3.14) denklemlerinden $K = sabit$ elde edilir ve yine M yüzeyi izoparametrik olur. $\Box$

3.2 Sabit Asal Eğrilikli Yüzeyler

Bu alt bölümde $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki asal eğriliklerden biri sabit olan yüzeyler incelenecek ve bu tür yüzeyler için bir teorem verilecektir.

M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında bir yüzey ve e_1, e_2 asal doğrultular, k_1, k_2 bunlara karşılık gelen asal eğrilikler olsun. k_2 asal eğriliğinin sabit olduğu varsayılsın. Bu durumda, (2.4) Codazzi denklemi

$$e_2(k_1) = \omega_1(k_1 - k_2), \tag{3.22}$$

$$0 = \omega_2(k_1 - k_2) \tag{3.23}$$

şeklini alır. (3.23) denkleminden dolayı $\omega_2 = 0$ olur. Dolayısıyla, (2.9) Gauss denkleminden

$$e_2(\omega_1) = \omega_1^2 + K \tag{3.24}$$

bulunur, [9].

Teorem 5. *[9] M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında sabit eğrilikli bir yüzey olsun. O zaman, M yüzeyinin $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart bir düz yüzey veya kürenin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında k_2 sabit eğriliğine ve $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olsun. Ayrıca $k_2 \neq 0$ durumu incelenecek olsun. Bu durumda (1.1) denklemi $f = \lambda$ sabiti ve C vektörü için sağlanır. Bu nedenle (1.1) ve (2.24) denklemleri kullanılarak

$$-\nabla K - 2HKG = \lambda(G+C) \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) denkleminin, e_1, e_2 vektör alanları ve G Gauss tasviri ile iç çarpımı alınır ve (3.22) denklemi kullanılırsa

$$\lambda C_1 = -k_2 e_1(k_1) \tag{3.26}$$

$$\lambda C_2 = -k_2 \omega_1 (k_1 - k_2) \tag{3.27}$$

$$\lambda(C_3 + 1) = -k_1 k_2 (k_1 + k_2) \tag{3.28}$$

elde edilir.

$\mathscr{U} = \{p \mid k_1(p) \neq 0 \; ve \; k_1(p) \neq k_2\}$ açık kümesi göz önüne alınsın ve $\mathscr{O}$, $\mathscr{U}$ açık kümesinin bağlantılı bir açık kümesi olsun. $\mathscr{U}$ kümesinin boş olduğu gösterilecektir. $\mathscr{O}$ kümesinde (3.23) denklemi $\omega_2 = 0$ için sağlanır. $k_2 \neq 0$ ve $\mathscr{O} \neq \emptyset$ olsun. Eğer açık bir $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{O}$ parçasında $\omega_1 = 0$ olursa $\omega_1 = \omega_2 = 0$ elde edilir ve $\mathscr{O}_2$ düz olur ki bu durum çelişkidir. Bu nedenle, genelliği kaybetmeden yerel olarak $\mathscr{O}$ açık kümesinde $\omega_1 \neq 0$ kabul edilsin. (3.22) ve (3.28) denklemlerinden

$$\lambda e_2 C_3 = -k_2 \omega_1 (k_1 - k_2)(2k_1 + k_2) \tag{3.29}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.27) ve (3.29) denklemleri (3.6) denkleminde kullanılırsa

$$k_2 \omega_1 (k_1 - k_2)(2k_1 + k_2) = -k_2^2 \omega_1 (k_1 - k_2) \tag{3.30}$$

denklemi bulunur. Bu denklemin yeniden düzenlenmesiyle

$$\omega_1 (k_1 - k_2)(k_1 + k_2) = 0 \tag{3.31}$$

bulunur. Eğer $\mathscr{O}$ üzerinde $\omega_1 = 0$ ise $\omega_1 = \omega_2$ olduğundan dolayı $\mathscr{O}$ üzerinde

$$K = R(e_1, e_2, e_1, e_2) = \langle \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_1 = 0 \tag{3.32}$$

olur ve $\mathscr{O}$ düzdür. Aksi takdirde $\mathscr{O}$ kümesinin $\mathscr{O}_3 = \{p \in \mathscr{O} \mid \omega_1(p) \neq 0\}$ alt kümesi üzerinde, (3.31) denkleminden dolayı $k_1 + k_2 = 0$ olur ki, k_2 sabit olduğu için $\mathscr{O}_3$ izoparametrik ve minimaldir. Dolayısıyla $\mathscr{O}_3$ düzlemin açık bir parçasıdır ve düzdür. Fakat bu durum $\mathscr{O}$'nun tanımıyla çelişir. Dolayısıyla $\mathscr{O}_3$ boş kümedir ve $\mathscr{O}$ üzerinde $\omega_1 = 0$ olur. Bu durumda (3.32) denklemi $\mathscr{O}$ üzerinde sağlanır ve bu da $\mathscr{O}$'nun düz olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\mathscr{U}$ kümesi boş küme olmalıdır. Yani M üzerinde $k_1 = k_2$ veya $k_1 = 0$ olur ki bu da M yüzeyinin ya düz olduğunu ya da bir kürenin açık bir parçası olduğunu gösterir. □

3.3 Weingarten Yüzeyleri

Bu alt bölümde yeni bir sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilecektir.

Teorem 6. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayındaki doğrusal bir Weingarten yüzeyinin Cheng-Yau operatörüne göre ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart bu yüzeyin bir düzlemin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki bir M doğrusal Weingarten yüzeyi göz önüne alınsın ve bu yüzeyin asal eğrilikleri k_1, k_2, asal doğrultuları ise e_1, e_2 olsun. Bu durumda

$$k_2 = ak_1 + b \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.33}$$

olur ve M yüzeyinin K Gauss eğriliği ile H ortalama eğriliği

$$K = ak_1^2 + bk_1 \tag{3.34}$$

$$H = \frac{(a+1)k_1}{2} + \frac{b}{2} \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir. (2.24),(3.34) ve (3.35) denklemlerinden

$$\square G = (2ak_1 + b)\left[(e_1(k_1)e_1 + e_2(k_1)e_2) + ((a^2+a)k_1^3 + (2ab+b)k_1^2 + b^2k_1)G\right] \tag{3.36}$$

bulunur. Şimdi M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1 tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda (1.1) denklemi bir $C \neq 0$ vektörü için sağlanır. (1.1) ve (3.36) denkleminden

$$fC_1 = (2ak_1 + b)e_1(k_1), \tag{3.37}$$

$$fC_2 = (2ak_1 + b)e_2(k_1), \tag{3.38}$$

$$f(1 + C_3) = \left[\left((a^2+a)k_1^3 + (2ab+b)k_1^2 + b^2k_1\right)\right] \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39) denkleminin her iki tarafının e_1 vektör alanına göre türevi alınırsa

$$e_1(f)(C_3+1)+fe_1(C_3)=e_1(k_1)\left[3(a^2+a)k_1^2+2(2ab+b)k_1+b^2\right] \tag{3.40}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.39) denklemi kullanılırsa,

$$e_1(f)(C_3+1)=fk_1(C_1)+e_1(k_1)\left[3(a^2+a)k_1^2+2(2ab+b)k_1+b^2\right] \tag{3.41}$$

olur. (3.39) ve (3.41) denklemleri kullanılarak,

$$\frac{e_1(f)}{f}=e_1(k_1)\frac{(3a^2+5a)k_1^2+(4ab+3b)k_1+b^2}{k_1(ak_1+b)\left[(a+1)k_1+b\right]} \tag{3.42}$$

elde edilir. Eğer α_1 fonksiyonu (3.43) denklemindeki f fonksiyonunu sağlayacak şekilde tanımlanırsa (3.42) denkleminden

$$e_1(\alpha_1)=0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$f=\alpha_1k_1(ak_1+b)^2\left((a+1)k_1+b\right)^{2/(a+1)},\quad e_1(\alpha_1)=0 \tag{3.43}$$

olur. Benzer şekilde (3.39) denkleminin bu kez e_2 vektör alanına göre türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$e_2(f)(C_3+1)=fk_2(C_2)+e_1(k_1)\left[3(a^2+a)k_1^2+2(2ab+b)k_1+b^2\right] \tag{3.44}$$

olur. (3.39) ve (3.44) denklemlerinden ise,

$$\frac{e_2(f)}{f}=e_2(k_1)\frac{(5a^2+3a)k_1^2+(7ab+2b)k_1+2b^2}{k_1(ak_1+b)\left[(a+1)k_1+b\right]} \tag{3.45}$$

elde edilir ve f fonksiyonu benzer şekilde

$$f=\alpha_2k_1^2(ak_1+b)\left((a+1)k_1+b\right)^{2a/(a+1)},\quad e_2(\alpha_2)=0 \tag{3.46}$$

olarak bulunur. (3.43) ve(3.46) denklemleri kullanılarak,

$$\alpha_1q_1-\alpha_2q_2=0 \tag{3.47}$$

bulunur. Burada

$$q_1 = \alpha_1k_1(ak_1+b)^2\left((a+1)k_1+b\right)^{2/(a+1)}, \tag{3.48}$$

$$q_2 = \alpha_2k_1^2(ak_1+b)\left((a+1)k_1+b\right)^{2a/(a+1)} \tag{3.49}$$

şeklindedir.

(3.37) ve (3.38) denklemleri, sırasıyla, C_2 ve C_1 ile çarpılır ve elde edilen denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$[e_2(k_1)C_1 - e_1(k_1)C_2]\,(2ak_1 + b) = 0 \tag{3.50}$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer $2ak_1 + b = 0$ ise M yüzeyi sabit asal eğrilikli olacaktır. Bu durumda ise Teorem 5'den dolayı ispat tamamlanır. Dolayısıyla (3.50) denkleminden

$$[e_2(k_1)C_1 - e_1(k_1)C_2] = 0 \tag{3.51}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.37) denkleminin e_2 vektör alanına göre ve (3.38) denkleminin e_1 vektör alanına göre türevi alınır ve elde edilen denklemler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$e_2(f)C_1 - e_1(f)C_2 = 0 \tag{3.52}$$

elde edilir.

(3.51) ve (3.52) denklemleri birleştirilirse

$$\begin{pmatrix} e_2(k_1) & -e_1(k_1) \\ e_2(f) & -e_1(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

elde edilir.

Durum 1. $C_1 = C_2 = 0$. Bu durumda (3.3) ve (3.6) denklemlerinden dolayı $C_3 =$ *sabit* olur. Dolayısıyla $G = \dfrac{1}{C_3}C$ sabit bir vektör olur. Yani M bir düzlemin açık bir parçasıdır. Bu durumda ispat tamamlanır.

Durum 2. $(C_1, C_2) \neq (0,0)$**.** (3.53) denkleminden

$$e_1(k_1)e_2(f) - e_2(k_1)e_1(f) = 0, \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.43) ve (3.46) denklemleri (3.54) denkleminde yerine yazılırsa,

$$0 = e_1(k_1)e_2(k_1)\,[\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2] \tag{3.55}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} p_1 &= (3ak_1^2 + 2bk_1)\,((a+1)k_1) + b)^{2/a+1} + (2a^3k_1^3 + 2abk_1^2)\,((a+1)k_1 + b)^{\frac{1-a}{1+a}}, \\ p_2 &= (3a^2k_1^2 + 4abk_1 + b)\,((a+1)k_1 + b)^{2/a+1} + (2a^2k_1^3 + 4abk_1^2 + 2bk_1)^{\frac{1-a}{a+1}} \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.55) denkleminden,

$$\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2 = 0 \tag{3.56}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.43) ve (3.56) denklemlerinden

$$\begin{aligned} q_1 &= (ak_1 + b), \\ q_2 &= k_1\left((a+1)k_1 + b\right)^{2(a-1)/(a+1)} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 = 0 \tag{3.57}$$

denklemine ulaşılır. (3.56) ve (3.57) denklemlerinin birleştirilmesinden

$$\begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

bulunur. $f \neq 0$ olduğu için (3.58) denkleminden

$$p_2 q_2 - p_1 q_1 = 0$$

elde edilir. Buradaki p_1, p_2, q_1, q_2 fonksiyonları yerine yazılırsa bir τ düzgün fonksiyonu için,

$$\tau(k_1) = 0$$

denklemine ulaşılır ki, bu da k_1'in sabit olduğunu gösterir. M doğrusal bir Weingarten yüzeyi olduğu için k_2 de bir sabittir. Yani, M izoparametrik bir yüzeydir. Açıklama 1'den dolayı ispat tamamlanır.

□

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİ

Bu bölümde Euclid uzayında genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilecektir.

4.1 Minimal Yüzeyler

Bu alt bölümde minimal bir yüzeyin genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması ile ilgili bazı şartlar elde edilmiştir.

Önerme 2. *M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında minimal bir yüzey olsun. M yüzeyinin genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$\omega_1 \langle C, e_1 \rangle + \omega_2 \langle C, e_2 \rangle = 0 \tag{4.1}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat. M genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip minimal bir yüzey olsun. Bu durumda düzgün $f_1, f_2 \neq 0$ fonksiyonları için

$$\square G = -\nabla K - 2HKG = f_1 G + f_2 C \tag{4.2}$$

sağlanır. M minimal bir yüzey olduğundan $H = 0$ ve $k_1 = -k_2$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} K &= -k_1^2, \\ \nabla K &= -2k_1(e_1(k_1)e_1 + e_2(k_2)e_2) \end{aligned}$$

olur. (4.2) denkleminin sırasıyla e_1, e_2 vektör alanları ve G Gauss tasviri ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} 2k_1 e_1(k_1) &= f_2 C_1, \\ 2k_1 e_2(k_2) &= f_2 C_2, \\ -f_1 &= f_2 C_3 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler ve (2.4) denklemi kullanılırsa

$$-4k_1^2 \omega_2 = f_2 C_1, \tag{4.3}$$

$$4k_1^2 \omega_1 = f_2 C_2, \tag{4.4}$$

$$-f_1 = f_2 C_3 \tag{4.5}$$

olur. (4.3) ve (4.4) denklemleri sırasıyla ω_1 ve ω_2 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$f_2(\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2) = 0 \tag{4.6}$$

denklemi elde edilir. $f_2 \neq 0$ olmasından dolayı (4.6) denklemi (4.1) denklemini verir. Yeter şartın ispatı için M yüzeyinin minimal olduğu ve (4.1) denkleminin bir C sabit vektörü için sağlandığı varsayılsın. Eğer $\langle C, e_1 \rangle = \langle C, e_2 \rangle = 0$ ise (4.1) denklemi özdeş olarak sağlandığından ispat tamamlanır. Şimdi $\langle C, e_1 \rangle \neq 0$ varsayılsın. Bu durumda,

$$f_1 = -f_2 \langle C, G \rangle, \quad f_2 = \frac{4k_1^2 \omega_2}{\langle C, e_1 \rangle} \quad (\langle C, e_1 \rangle \neq 0)$$

seçilirse (1.2) denklemi sağlanır. Yani, M yüzeyi genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.

$\square$

Aşağıdaki teoremde minimal bir yüzeyin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için bir gerek şart bulunmuştur.

Önerme 3. *M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında minimal bir yüzey olsun. Eğer M genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip ise*

$$\omega_2^2 e_1(\omega_1) - \omega_1^2 e_2(\omega_2) \quad = \quad \omega_1 \omega_2 (\omega_2^2 + \omega_1^2 - K) \tag{4.7}$$

denklemi sağlanır.

İspat. M genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahip minimal bir yüzey olsun. Bu durumda (4.3) ve (4.4) denklemleri sağlanır. $\tilde{f}_2 = \frac{4k_1^2}{f_2}$ olsun. Bu durumda (4.3) ve (4.4) denklemleri

$$C_1 = -\tilde{f}_2 \omega_2 \tag{4.8}$$

$$C_2 = \tilde{f}_2 \omega_1 \tag{4.9}$$

hâlini alır. (4.8) denkleminin e_1 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.1) denklemi kullanılırsa

$$e_1(C_1) = e_1(\tilde{f}_2 \omega_2) = -e_1(\tilde{f}_2)\omega_2 - \tilde{f}_2 e_1(\omega_2) = \tilde{f}_2 \omega_1^2 + k_1 C_3$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle,

$$e_1(\tilde{f}_2) = -\left[\frac{\tilde{f}_2 \omega_1^2 + k_1 C_3 + \tilde{f}_2 e_1(\omega_2)}{\omega_2}\right] \tag{4.10}$$

bulunur. Aynı şekilde (4.9) denkleminin e_1 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.2) denklemi kullanılırsa

$$e_1(C_2) = e_1(\tilde{f}_2\omega_1) = e_1(\tilde{f}_2)\omega_1 + \tilde{f}_2 e_1(\omega_1) = \tilde{f}_2\omega_1\omega_2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle,

$$e_1(\tilde{f}_2) = \frac{\tilde{f}_2\omega_1\omega_2 - \tilde{f}_2 e_1\omega_1}{\omega_1} \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) denklemlerinden dolayı

$$\tilde{f}_2\omega_1^3 + k_1\omega_1 C_3 + \tilde{f}_2\omega_1 e_1(\omega_2) = \tilde{f}_2\omega_2 e_1(\omega_1) - \tilde{f}_2\omega_1\omega_2^2 \tag{4.12}$$

olur. Diğer taraftan, (4.8) denkleminin e_2 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.4) denklemi kullanılırsa,

$$e_2(C_1) = -e_2(\tilde{f}_2\omega_2) = -e_2(\tilde{f}_2)\omega_2 - \tilde{f}_2 e_2(\omega_2) = \tilde{f}_2\omega_1\omega_2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$e_2(\tilde{f}_2) = -\left[\frac{\tilde{f}_2\omega_1\omega_2 + \tilde{f}_2 e_2(\omega_2)}{\omega_2}\right] \tag{4.13}$$

bulunur. Aynı şekilde (4.9) denkleminin e_2 vektör alanına göre türevi alınır ve (3.5) denklemi kullanılırsa

$$e_2(C_2) = e_2(\tilde{f}_2\omega_1) = e_2(\tilde{f}_2)\omega_1 + \tilde{f}_2 e_2(\omega_1) = \tilde{f}_2\omega_2^2 - k_1 C_3$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$e_2(\tilde{f}_2) = -\left[\frac{\tilde{f}_2 e_2(\omega_1) + k_1 C_3 - \tilde{f}_2\omega_2^2)}{\omega_1}\right] \tag{4.14}$$

bulunur. (4.13) ve (4.14) denklemlerinden dolayı

$$\tilde{f}_2\left(\omega_1^2\omega_2 + \omega_1 e_2(\omega_2)\right) = \tilde{f}_2\omega_2 e_2(\omega_1) + k_1\omega_2 C_3 - \tilde{f}_2\omega_2^2 \tag{4.15}$$

olur. (2.9) , (4.12) ve (4.15) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\tilde{f}_2\left(\omega_1 e_2(\omega_1) - K\omega_1\right) = \tilde{f}_2\omega_2 e_2(\omega_1) - k_1\omega_1 C_3 \tag{4.16}$$

$$\tilde{f}_2\left(\omega_2 e_1(\omega_2) - K\omega_2\right) = -\tilde{f}_2\omega_1 e_2(\omega_2) + k_1\omega_2 C_3 \tag{4.17}$$

denklemleri elde edilir. (4.16) ve (4.17) denklemleri sırasıyla ω_2 ve ω_1 ile çarpılıp taraf tarafa toplanıp düzenlenirse

$$\tilde{f}_2\omega_1\omega_2\left[e_2(\omega_1) - e_1(\omega_2) - 2K\right] = \tilde{f}_2\left[\omega_2^2 e_1(\omega_1) - \omega_1^2 e_2(\omega_2)\right] \tag{4.18}$$

elde edilir. (2.9) ve (4.18) denklemleri birleştirilirse (4.7) denklemine ulaşılır. □

4.2 Helikal Yüzeyler

M, $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayında yer vektörü

$$F(y,t) = (\phi + at, y\cos t, y\sin t) \tag{4.19}$$

ile verilen helikal bir yüzey olsun. Burada a sabit bir sayı ve $\phi = \phi(y)$, $\mathbb{R}$'nin açık aralığında tanımlı ve türevlenebilir bir fonksiyondur.
$a = 0$ ise M profil eğriliğine sahip dönel bir yüzey olur. $a \neq 0$ ise M yüzeyine gerçek bir helikal yüzey denir.
Doğrudan yapılan hesaplamalar ile,

$$\begin{gathered} F_y = (\phi^{'}, \cos t, \sin t),\ F_t = (a, -y\sin t, y\cos t), \\ F_{yy} = (\phi^{''}, 0, 0),\ F_{yt} = (0, -\sin t, \cos t),\ F_{tt} = (0, -y\cos t, -y\sin t) \end{gathered} \tag{4.20}$$

elde edilir. Bu türevler kullanıldığında

$$\begin{gathered} g_{11} = \phi^{'2} + 1,\ g_{12} = a\phi,\ g_{22} = a^2 + y^2 \\ h_{11} = \frac{y\phi^{''}}{(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^{1/2}},\ h_{12} = \frac{-a}{(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^{1/2}}, \\ h_{22} = \frac{y^2\phi^2}{(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^{1/2}} \end{gathered} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada, g ve h ile M yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları gösterilmiştir. Bu denklemler kullanılarak M yüzeyinin ortalama H eğriliği ve Gauss K eğriliği

$$K = K(y) = \frac{y^3\phi^{'}\phi^{''} - a^2}{(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^2}, \tag{4.22}$$

$$H = H(y) = \frac{y\phi^{''}(a^2 + y^2) + 2a^2\phi^{'} + (\phi^{'2} + 1)y^2\phi^{'}}{2(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^{3/2}} \tag{4.23}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca M yüzeyinin Gauss tasviri

$$G(F(y,t)) = \frac{1}{(a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1))^{1/2}}(y, a\sin t - y\phi^{'}\cos t, -a\cos t - y\phi^{'}\sin t) \tag{4.24}$$

olur. (2.10) ve (4.21) kullanılarak

$$\nabla K = \frac{K^{'}}{a^2 + y^2(\phi^{'2} + 1)}\left((a^2 + y^2)\partial_y - a\phi^{'}\partial_t\right) \tag{4.25}$$

elde edilir. Daha sonra (2.24), (2.10), (4.30) ve (4.34) denklemleri kullanılarak

$$\Box G(F(y,t)) = (C(y), A(y)\cos t + B(y)\sin t, A(y)\sin t - B(y)\cos t) \tag{4.26}$$

elde edilir. Burada

$$A(y) = -\frac{\left(a^2+y^2\right)K'}{a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)} + \frac{2yHK\phi'}{\left(a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} \tag{4.27}$$

$$B(y) = -\frac{ay\phi'K'}{a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)} - \frac{2aHK}{\left(a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} \tag{4.28}$$

$$C(y) = -\frac{y^2\phi'K'}{a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)} - \frac{2yHK}{\left(a^2+y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} \tag{4.29}$$

şeklindedir, [10].

İlk olarak $a=0$ durumu, yani M yüzeyinin bir dönel yüzey olduğu durum göz önüne alınacaktır.

$$\begin{gathered} F_y = (\phi', \cos t, \sin t),\ F_t = (0, -y\sin t, y\cos t), \\ F_{yy} = (\phi'' 0, 0),\ F_{yt} = (0, -\sin t, \cos t),\ F_{tt} = (0, -y\cos t, -y\sin t) \end{gathered} \tag{4.30}$$

olmasından dolayı (4.20) denklemi

$$\begin{gathered} g_{11} = \phi'^2 + 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = y^2 \\ h_{11} = \frac{y\phi''}{(y^2(\phi'^2+1))^{1/2}},\ h_{12} = 0,\ h_{22} = \frac{y^2\phi^2}{(y^2(\phi'^2+1))^{1/2}} \end{gathered} \tag{4.31}$$

halini alır. Ayrıca, (4.22) ve (4.23) denklemlerinden

$$K = K(y) = \frac{y^3\phi'\phi''}{(y^2(\phi'^2+1))^2}, \tag{4.32}$$

$$H = H(y) = \frac{y^3\phi'' + (\phi'^2+1)y^2\phi'}{2(y^2(\phi'^2+1))^{3/2}} \tag{4.33}$$

elde edilir. M yüzeyinin Gauss tasviri ise,

$$G(F(y,t)) = \frac{1}{(y^2(\phi'^2+1))^{1/2}}(y, -y\phi'\cos t, -y\phi'\sin t) \tag{4.34}$$

şeklindedir. (4.26) denkleminden ise,

$$\Box G(F(y,t)) = (C(y), A(y)\cos t, A(y)\sin t) \tag{4.35}$$

elde edilir. A ile C fonksiyonları

$$A(y) = -\frac{y^2K'}{y^2(\phi'^2+1)} + \frac{2yHK\phi'}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}}, \tag{4.36}$$

$$C(y) = -\frac{y^2\phi'K'}{y^2(\phi'^2+1)} - \frac{2yHK}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}} \tag{4.37}$$

halini alır. M yüzeyinin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda (1.2) denklemi f_1, f_2 düzgün fonksiyonları ve bir C sabit vektörü için sağlanır. (1.2), (4.34) ve (4.35) denklemlerinden

$$C(y) = \frac{f_1 y}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}} + f_2 C_1, \tag{4.38}$$

$$A(y)\cos t = \frac{-f_1 y \phi' \cos t}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}} + f_2 C_2, \tag{4.39}$$

$$A(y)\sin t = \frac{f_1 y \phi' \sin t}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}} + f_2 C_3 \tag{4.40}$$

elde edilir. Bu denklemlerden dolayı, $C_1 \neq 0$ olmak üzere $C = (C_1, 0, 0)$

$$f_1 = \frac{y^2 K'}{\left(y^2(\phi'^2+1)\right)^{1/2}} - 2HK \quad f_2 = -\frac{K'(\phi'+y)}{C_1(\phi'^2+1)} \tag{4.41}$$

elde edilir. Bu durumda (1.2) denklemi, $C = (C_1, 0, 0)$ olmak üzere (4.41) denklemi ile verilen f_1 ve f_2 fonksiyonları için sağlanır. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

Teorem 7. *[14] $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki her dönel yüzey genelleştirilmiş $\square$ 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir.*

Şimdi $a \neq 0$, yani M yüzeyinin genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda (1.2) denklemi f_1, f_2 düzgün fonksiyonları ve bir C sabit vektörü için sağlanır. (2.24), (4.24) ve (4.26) denklemleri kullanılırsa

$$C(y) = \frac{f_1 y}{\left(a^2 + y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} + f_2 C_1, \tag{4.42}$$

$$A(y)\cos t + B(y)\sin t = \frac{f_1\left(a\sin t - y\phi'\cos t\right)}{\left(a^2 + y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} + f_2 C_2, \tag{4.43}$$

$$A(y)\sin t - B(y)\cos t = -\frac{f_1\left(a\cos t + y\phi'\sin t\right)}{\left(a^2 + y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}} + f_2 C_3 \tag{4.44}$$

elde edilir. $F_1 = \dfrac{f_1}{\left(a^2 + y^2\left(\phi'^2+1\right)\right)^{1/2}}$ olsun. (4.43) ve (4.44) denklemleri sırasıyla $\cos t$ ve $\sin t$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$A(y) = -F_1 y \phi' + f_2(C_2\cos t + C_3\sin t) \tag{4.45}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.43) ve (4.44) denklemleri sırasıyla $\sin t$ ve $-\cos t$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$B(y) = -F_1 a + f_2(C_2 \sin t - C_3 \cos t) \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.45) ve (4.46) denklemleri sırasıyla a ve $y\phi'$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$aA(y) + yB(y)\phi' = f_2\left(a(C_2 \cos t + C_3 \sin t) + y\phi'(C_2 \sin t - C_3 \cos t)\right) \tag{4.47}$$

elde edilir. Bu denklemden

$$f_2 = \frac{aA(y) + yB(y)\phi'}{a(C_2 \cos t + C_3 \sin t) + y\phi'(C_2 \sin t - C_3 \cos t)}$$

bulunur. f_2 değeri (4.45) denkleminde yazılırsa

$$F_1 = \frac{A(y)(C_3 \cos t - C_2 \sin t) + B(y)(C_2 \cos t + C_3 \sin t)}{a(C_2 \cos t + C_3 \sin t) + y\phi'(C_2 \sin t - C_3 \cos t)}$$

bulunur. F_1 ve f_2 değerleri (4.42) denkleminde yazılıp düzenlenirse

$$\gamma_1 + \gamma_2 \cos t + \gamma_3 \sin t = 0 \tag{4.48}$$

elde edilir. Burada,

$$\gamma_1 = C_1(aA + y\phi' B), \tag{4.49}$$

$$\gamma_2 = C_2(yB(y) - aC(y)) + C_3(yA(y) + y\phi' C(y)), \tag{4.50}$$

$$\gamma_3 = C_2(-yA(y) - y\phi' C(y) + C_3(yB(y) - aC(y)) \tag{4.51}$$

şeklindedir. (4.48) denkleminden dolayı $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ olmalıdır. $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ denklemlerinden

$$\begin{pmatrix} yB(y) - aC(y) & yA(y) + y\phi' C(y) \\ -yA(y) - y\phi' C(y) & yB(y) - aC(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

bulunur.

Durum 1. $(C_2, C_3) \neq (0,0)$**.** Bu durumda (4.52) denkleminden,

$$(yB(y) - aC(y))^2 + \left(yA(y) + C(y)\phi'\right)^2 = 0$$

bulunur. Bu denklem

$$\left(yA(y) + C(y)\phi'\right) = 0, \quad (yB(y) - aC(y)) = 0 \tag{4.53}$$

durumlarında sağlanır. (4.28), (4.29) ve (4.53) denklemlerinden doğrudan hesapla $K^{'} = 0$ elde edilir. Bu durumda $K = sabit$ olur.

Durum 2. $C_2 = C_3 = 0$**.** Bu durumda (4.43) ve (4.44) denklemleri $C_2 = C_3 = 0$ için çözülürse

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{-f_1 y\phi^{'}}{\left(a^2 + y^2\left(\phi^{'2}+1\right)\right)^{1/2}}, \\ B(y) &= \frac{f_1 a}{\left(a^2 + y^2\left(\phi^{'2}+1\right)\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemler düzenlenirse,

$$aA(y) + y\phi^{'}B(y) = 0$$

elde edilir. Bu denklem (4.27) ve (4.28) ile birleştirilirse

$$aK^{'}\left(a^2 + y^2(\phi^{'2}+1)\right) = 0$$

bulunur. Bu durumda $a = 0$ veya $K^{'} = 0$ olur. $a = 0$ olması durumunda M yüzeyi dönel bir yüzey olur. $K^{'} = 0$ olması durumunda ise $K = sabit$ olur. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

Teorem 8. $\mathbb{E}^3$ *Euclid uzayındaki bir helikal yüzeyin genelleştirilmiş* $\square$ *1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart o yüzeyin ya bir dönel yüzey olması ya da sabit Gauss eğriliğine sahip olmasıdır.*

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde $\mathbb{E}^3$ Euclid uzayındaki yüzeylerin Gauss tasvirlerinin tiplerine göre sınıflandırılmalarıyla ilgili bazı teoremler çalışılmıştır. Cheng-Yau operatörüne göre noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip sabit ortalama eğrilikli ve sabit esas eğrilikli yüzeyler ile ilgili yakın geçmişte elde edilmiş sonuçlar detaylıca verilmiştir. Ayrıca, Teorem 6 ile doğrusal Weingarten yüzeyleri ile ilgili sınıflandırma elde edilmiştir. Bu sonuç, daha önceki sonuçların bazılarının genişletilmesidir.

Dördüncü bölümde, yakın zamanda verilmiş olan genelleştirilmiş 1-tipinden Gauss tasviri ile ilgili bazı incelemeler yapılmıştır. Yeni birer sonuç olan Önerme 2, Önerme 3 ve Teorem 8'de bu doğrultuda bazı ilerlemeler kaydedilmiştir.

Yakın gelecekte bu teoremlerin Riemann uzay formlarındaki karşılıkları başka geometriciler tarafından da çalışılabilir. Özellikle Weingarten yüzeyleri ile ilgili verilmiş olan Teorem 6'nın hiperyüzeyler için de çalışılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.Y.** (1984). *Total mean curvature and submanifold of finite type*. Academic Press, London.

[2] **Takahashi, T.** (1966). Minimal immersions of Rienmannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, *18*, 380–385.

[3] **Chen, B.Y.**, **Morvan, J.M. ve Nore, T.** (1986). Energy, tension and finite type maps, *Kodai Math. J.*, *9*, 406–418.

[4] **Chen, B.Y. ve Piccini, P.** (1987). Submanifolds with finite type Gauss Map, *Bull. Austral. Math. Soc.*, *35*, 161–186.

[5] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2000). Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map, *J.Geom. Phys.*, *34*, 191–205.

[6] **Cheng, S.Y. ve Yau, S.T.** (2000). Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.*, *225*, 195–204.

[7] **Alias, L.J. ve Gürbüz, N.** (2006). An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, *Geom. Dedicata*, *121*, 113–127.

[8] **Kashani, S.M.B.** (2009). On some L_1-finite type (hyper)surfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$, *Bull. Korean Math. Soc.*, *46*, 35–43.

[9] **Kim, Y.H. ve Turgay, N.C.** (2013). Surfaces in $\mathbb{E}^3$ with L_1-pointwise 1-type Gauss map, *Bull. Korean Math. Soc.*, *50*, 935–949.

[10] **Kim, Y.H. ve Turgay, N.C.** (2013). Classifications of helicioidal surfaces with L_1-pointwise 1-type Gauss map, *Bull. Korean Math.Soc.*, *50*, 1345–1356.

[11] **Choi, M. ve Kim, Y.H.** (2018). Classification Theorems of Ruled Surfaces in Minkowski Three-Space, *Mathematics*, *6*, 1–18.

[12] **Kim, D.S.**, **Lee, J.W. ve Yoon, D.W.** (2018). Hypersurfaces with generalized 1-type Gauss maps, *Mathematics*, *6*, 130–144.

[13] **Fu, X.S.**, **Kim, Y.H.**, **Qian, J.H. ve Tian, X.Q.** (2020). Surfaces of revolution and canal surfaces with generalized Cheng-Yau 1-type Gauss maps, *Mathematics*, *8*, *1728.*

[14] **Kim, Y.H.**, **Qian, J.H. ve Su, M.F.** (2020). Canal surfaces with generalized 1-type Gauss map, *Rev. Un. Mat. Argentina*, *62*, 199–211.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Furkan Kaya

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2022, İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı.