

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DAİRE EKSENLİ
KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Cihan İYİDOĞAN

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

**ÇAPARAZ TABAKALI KOMPOZİT DAİRE EKSENLİ
KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Cihan İYİDOĞAN
(501061023)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih: 11 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)
Doç. Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans öğrenimim süresince benden değerli bilgilerini esirgemedi bana her konu da yardımcı olan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU' na saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili annem Beyhan İYİDOĞAN, babam Dursun İYİDOĞAN' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2008

İnş. Müh. Cihan İYİDOĞAN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı	2
1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar	3
2. ÇUBUK KAVRAMI	7
2.1. Yapılan Varsayımlar	7
2.1.1. Tanım	7
2.2. Elastik Çubukların Genel Denklemleri	8
2.2.1. Denge Denklemleri	10
2.2.2. Kinematik Denklemler	11
2.2.3. Bünye Bağlantıları	13
2.3. Elastik Sabitlerin Hesabı	15
2.4. Genel Ortotropik Çubuklar İçin Elastik Sabitlerin Hesabı Ve Bünye Denklemlerinin Çıkarılışı	20
2.5 Genel Çubuk Denklemleri Ve Alan Denklemleri	23
3. FONKSİYONEL ANALİZ	26
3.1. Diferansiyel Denklemden Fonksiyonele Geçiş	26
3.1.1. Potansiyellik Koşulu	26
3.1.2. Yönsel Toplam	27
3.1.3. Gâteaux Türevi (Yönsel Türev)	27

3.2. Fonksiyonelin Elde Edilmesi	30
4. KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	31
4.1. Yaklaşım Fonksiyonu	31
5.DİNAMİK ANALİZ	35
6.SAYISAL ÖRNEKLER	37
6.1. Geçerlilik	37
6.2. h/b Oranın Frekansa Etkisi	39
6.3. Simetrik Olmayan Tabakalı Kirişlerde Sınır Koşullarının Frekansa Etkisi	40
6.4. Kompozit Özelliklerin Frekansa Etkileri	39
7. SONUÇLAR	42
KAYNAKLAR	44
EKLER	48
ÖZGEÇMİŞ	51

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 Kullanılan denklemler arasındaki ilişki.....	9
Tablo 2.2 Gerilme ve şekil değiştirme notasyonları.....	16
Tablo 6.1 Kullanılan malzemeler için malzeme özellikleri	37
Tablo 6.2 Birimsizleştirme katsayısı $\omega R^2 \sqrt{\rho A/EI}$ olan ankastre-ankastre kiriş için değerler.....	38
Tablo 6.3 İki ucu ankastre Timoshenko kirişinin en küçük 3 adet doğal titreşim periyodu.....	39
Tablo 6.4 Düzlem içi dairesel tabakalı her iki ucu ankastre ($0^0/90^0/90^0/0^0$) kiriş için birimsiz doğal titreşim periyodu	40
Tablo 6.5 Simetrik olmayan ($0^0/90^0/0^0/90^0$) tabakalı kiriş için en küçük 3 adet doğal frekans	40
Tablo 6.6 Farklı malzemeli simetrik ($0^0/90^0/90^0/0^0$) tabakalı kiriş için en küçük 3 adet doğal frekans	41

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 :Çubuk eksenini için $\vec{t}, \vec{b}, \vec{n}$ eksenlerinin gösterimi.....	8
Şekil 2.2 : Δs uzunluğundaki çubuk eleman.....	10
Şekil 2.3 :Elemanın yer değiştirmiş hali.....	12
Şekil 2.4 :Malzeme eksenleri $(1', 2', 3')$ için pozitif dönüş yönleri.....	22
Şekil 2.5 :Dairesel tabakalı kompozit kiriş.....	25

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{t}$	:	Teget birim vektör
$\vec{n}$	:	Esas birim vektör
$\vec{b}$	:	Binormal birim vektör
$\vec{r}$	:	Yer vektörü
s	:	Yay parçasının uzunluğu
ε_{ij}	:	Şekil değiştirme tansörünün elemanları
C_{ij}	:	Malzeme özellikleri
$\tilde{C}$	:	Malzeme matrisi
$\tilde{S}$	:	Malzeme matrisinin tersi
$\tilde{S}^{-1}, \tilde{C}^{-1}$	:	Esneklik matrisi
S_{ij}	:	Malzeme esneklik katsayısı
E_i	:	Young (elastisite) modülü
ν_{ij}	:	Poisson oranı
G_{ij}	:	Kayma modülü
$\vec{T}$	:	Kesme kuvveti
$\mathbf{T}_t, \mathbf{T}_n$	:	$\vec{t}, \vec{n}$ eksenlerindeki kesme kuvvetleri
$\vec{M}$	:	Moment
M_b	:	$\vec{b}$ eksenindeki moment
$\vec{\Omega}$	:	Dönme
Ω_b	:	$\vec{b}$ eksen etrafındaki dönme
$\vec{u}$	:	Yer değiştirme
$\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_t$	:	$\vec{n}, \vec{t}$ eksenleri doğrultusundaki yer değiştirme
$\bar{\omega}$	:	Dairesel frekans
k'	:	Kesme katsayısı faktörü
ρ	:	Malzeme yoğunluğu
A	:	Deformasyona uğramamış kesit alanı
$\bar{Q}$	:	Lamine için azaltılmış rijitlik dönüşüm matrisi.
L	:	Türev operatörü
$\mathbf{f}$	:	Dış yükler
R	:	Yarıçap

L_e	:	Kiriş sonlu eleman boyu
Ψ_i, Ψ_j	:	Şekil fonksiyonları
I_{tt}	:	$\vec{t}$ doğrultusundaki atalet momenti
I_{nn}	:	$\vec{n}$ doğrultusundaki atalet momenti
I_{bb}	:	$\vec{b}$ doğrultusundaki atalet momenti
$\mathbf{M}$	:	Kütle matrisi
α	:	Açılış açısı

ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak dairesel kompozit lamine kirişlerin dinamik analizi yapılmıştır. Bunun için karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Geliştirilen formülasyonun geçerliliğini sağlamak amacı ile literatürde daha önceden çalışılmış ve çözülmüş olan problemler bu çalışmada geliştirilmiş formülasyon ile tekrar çözülüp sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durularak, daha önce konuyla ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, çubuk kavramı tanıtılarak, yapılan varsayımlar anlatılmıştır. Daha sonra elastik çubukların genel denklemleri açıklanmış ve denge denklemleri, kinematik denklemler ve bünye bağıntıları hakkında bilgiler verilmiştir. Bünye bağıntılarının çıkarılması için elastik sabitlerin hesabı konu başlığı altında malzeme matrisleri anlatılmıştır. Daha sonra genel çubuk denklemleri ve bu çalışma için kullanılacak alan denklemleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise fonksiyonel analiz ve potansiyellik koşulu anlatılmıştır. Geliştirilmiş olan karışık sonlu eleman formülasyonunda kullanılan Gâteaux (yönel) türev tekniği hakkında genel bilgi verilip uygulaması anlatılmıştır. Son olarak yönel türev kullanılarak fonksiyonelin elde edilmesi anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, karışık sonlu eleman formülasyonunda kullanılan yaklaşım fonksiyonunun seçiminden bahsedilmiştir. Fonksiyon seçildikten sonra, tüm bilinmeyenler interpolasyon fonksiyonu cinsinden yazılmıştır. Daha sonra üçüncü bölümde elde edilen fonksiyonelin minimum ve maksimum noktalarını yani fonksiyonun çözümü için nodal bilinmeyenlere göre türev alınmıştır. Türevler sonucu çıkan denklemler eleman matrisini oluşturmuşlardır.

Beşinci bölümde, dinamik analiz anlatılmıştır. Tek ve çok serbestlik dereceli sistemlere ait serbest titreşim formülasyonları üzerinde kısaca durulmuştur. Karışık sonlu eleman için kullanılan dinamik analizin çıkarılışı ve uygulaması açıklanmıştır.

Altıncı bölümde, geçerlilik, h/b oranı, simetrik olmayan tabakalı kirişlerde sınır koşullarının, kompozit özelliklerin frekansa etkileri sayısal örnekler yardımı ile açıklanmıştır. Çeşitli malzeme özellikleri, sınır koşulları baz alınarak daha önceden literatürde çözülmüş problemler, bu çalışmada geliştirilen formülasyonla tekrardan çözülüp sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Yedinci bölümde, yapılan çalışma ile elde edilen sonuçlar ve geliştirilen formülasyonun avantajları anlatılmıştır.

DYNAMIC ANALYSIS OF CROSS-PLY LAMINATED COMPOSITE CURVED BEAMS

SUMMARY

Dynamic analysis of Timoshenko beam was studied in this theses. Mixed finite element formulation was used for free vibration to prove the formulation is variable some problems which solved before in literature are taken and solved again then both of them are dissused.

This study consists of seven chapters

The aim of this study and the contents is described and the problem which we deal with introduced in the first chapter. Also the studies about the subject which had been done in the past are given.

In the second chapter; stick concept and the assumptions are given firstly. Then general equations of elastic beams, equilibrium equations, kinematic equations and constitutive relations are given and explained briefly. In order to obtain the constitutive relations which was used in this thesis, elastic constants and material matrices are given. After that general beam equations and the field equation which was used are obtained.

In the third chapter, brief information about functional analyses and potentiality has been taken place. Gâteaux differential method which was using for developed in this study by using mixed finite element formulation is explained. Brief information of how to obtain the functional by using the Gateaux differential is also take place.

Definition and derivation of mixed finite element method is present in the fourth chapter for different geometrics, shear forces and moment of inertia for different areas have been taken place. Interpolation formulation was choosen. After that formulas are used in functional which was obtained in the third chapter. Then to obtain the extreme points of functional derivations are taken for all the unknowns. After the derivation there are twelve functions. These twelve functions are made the element matrices.

Dynamic analysis was given and explained deeply in the fifth chapter.

In the sixth chapter validation, effect of h/b ratio , effect of boundary conditions for non-symmetric laminates, effect of composite properties are disused by using numerical examples formulation which was developed in this study are disgust with the problems was studied before in the literature for different material properties and different boundary condition.

The conclusion and the advantages of the formulation which developed in this study are explained briefly in the seventh chapter.

1. GİRİŞ

Mühendislik malzemeleri metaller, polimerler, seramikler ve kompozitler olmak üzere dört ana gruba ayrılabilirler. Kompozit malzemeler, yukarıda sayılan diğer üç malzemenin iki veya daha fazlasının makroskobik açıdan birleşmesinden oluşan malzemeler olarak tanımlanabilir. Kompozit malzemeler cam, boron ve grafit gibi yüksek dayanımlı ince liflerin epoksi reçine gibi bağlayıcı bir matris malzeme içine yerleştirilmesi ile değişik üretim yöntemleri kullanılarak elde edilirler. Matris içinde lifler kısa-uzun, sürekli-sürekli ya da çok yönlü yerleşmiş olabilir. İzotropik malzemelere kıyasla kompozit malzemeler:

- Hafiftir.
- Yüksek dayanımlıdır.
- Yorulma mukavemeti ve korozyon dirençleri de daha iyidir.

Liflerin çekme dayanımlarının yüksek olmasına rağmen birkaç dezavantajı da vardır. Basınç yüklerini taşıyamazlar ve eksene dik yöndeki mekanik özellikleri kendi eksenleri doğrultusundaki özellikleri gibi iyi değildir. Bu nedenden dolayı lifler bir araya getirilip bir matris malzeme ile desteklenmelidirler. Düşey yönde dayanım artışı zorlanma durumuna göre liflerin uygun biçimde yönlendirilmesi ile elde edilir.

Günümüzde çok gelişmiş olan kompozit malzemeler; havacılık ve uzay sanayinde nükleer, petro-kimya endüstrilerinde, kara ve deniz taşımacılığında, elektronikte, yüksek atlama sıırıklarında, bisiklet, tenis ve sörf gibi çeşitli spor malzemelerinde, tıp ve biyomekanik dalanında, robot teknolojisi gibi birçok alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen uygulama alanlarındaki kompozit malzemeler, genellikle kiriş, plak ve kabuk elemanlar olarak kullanılırlar. Kompozit yapıların farklı zorlama koşullarında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenliği ön planda tutan mühendislik tasarımları açısından oldukça önemlidir.

1.1 Çalışmanın Amacı Ve Kapsamı

Günümüze kadar olan mevcut çalışmalara bakıldığında genel olarak önceden bahsedilen basitleştirici varsayımlar yapılmış ve yaklaşık çözümler ortaya konulmuştur. Bu çalışmalar temel alınıp hızla gelişen analiz yöntemleri kullanılarak yeni çözümler ortaya çıkarmak kaçınılmazdır. Ayrıca analiz yöntemleri ile yapılan teorik hesaplamalardan elde edilen verilerin gerçek durum ile kıyaslanabilmesi için deneysel verilerle de karşılaştırılması gerçeği ortadadır.

Bu çalışmada tabakalı (lamine) kompozit daire eksenli kirişlerin dinamik analizini incelemek için ilk önce çubuk kavramı ile ilgili genel denklemler üzerinde durulmuştur. Denge denklemleri, kinematik denklemler ve bünye bağıntıları çıkartılmıştır. Düzlem içi yüklü dairesel çubuk için alan denklemleri bulunmuştur. Ardından, kirişlerin titreşim frekansının teorik olarak hesaplanabilmesi için elde edilen denklemlerin potansiyellik koşullu sağlatılmıştır. Potansiyellik koşulunu sağlayan alan denklemlerine Gâteaux türevi uygulanarak fonksiyonel bulunmuştur. Daha sonra kısmi türev uygulanıp sonlu eleman formülasyonuna geçilip eleman matrisi elde edilmiştir. Fortran program dili kullanılarak eleman formülasyonu elde edilip bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

Bu çalışmada kullanılan karışık sonlu eleman yöntemi ile daire eksenli kompozit katmanlı kirişlerin değişken en kesitlere sahip olması durumu da dikkate alınarak modellenmiştir. Modellemede Fortran bilgisayar dili kullanılarak bir program yazılmış ve çözümleme sırasında en kesit şekli verilerek çözüme ulaşılması sağlanmıştır.

Bu çalışmalara bağlı olarak, elde edilen teorik verilerin gerçek durum ile karşılaştırılması amacı ile literatürde incelenen örneklerin verileri alınıp bu çalışmada yeniden çözülmüştür. Ayrıca deneysel örnek sonuçlar ile de karşılaştırılmıştır. Kullanılan sayısal örnekler değişik sınır şartları, malzeme özellikleri ve farklı tabaka açıları için ayrı ayrı çözümler yapılmıştır. Mevcut örneklerle sonuçları karşılaştırmanın amacı, yapılan bu çalışmanın geçerli olduğunu göstermenin dışında, h en kesit yüksekliği ve b en kesit genişliği olmak üzere h/b oranı, simetrik olmayan

katmalı kirişlerde sınır koşullarının etkisi ve kompozit özelliklerin etkilerinin dinamik analiz üzerinde yarattığı sonuçları göstermektedir.

Literatürdeki mevcut çalışmalar içerisinde karşılaştırmalı veri yorumlama özelliğine sahip bu çalışmanın daha da geliştirilmesi mümkündür. Bu çalışma düzlem dışı, dairesel ve ya her hangi bir eğrilige sahip kirişler üzerinde yapılacak çalışmalar için de bir kaynak olabilecektir.

1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar

Kompozit malzemeler inşaat mühendisliği, uzay-uçak mühendisliği, otomobil sektörü, nükleer sanayi, deniz kimyasalları endüstrisi ve biyomedikal mühendisliği gibi birçok farklı alanlarda kullanılmaktadırlar. Kompozitlerin kullanıma nedenlerinden başlıcaları, yüksek ağırlık dayanıklılık katsayısı, farklı yönde farklı dayanım sağlama özelliği ve farklı malzemeler kullanılarak istenen dayanım ve sertliğin elde edinebilme özelliğidir.

Sanayi tipi kullanımlarda kabuk ve plak kirişleri güçlendirmek için çok yaygın bir şekilde kullanılırlar. Kompozit tabaka bileşenlere sahip yapısal sistemler analitik ve nümerik metotlar ile çözülebilirler. Literatürde kompozit mekaniği üzerindeki çalışmalara Jones [1] ve Reddy [2] tarafından yapılan çalışmalar örnek verilebilir. Çalışmalarında kompozit malzemeler hakkında genel bilgi, teori ve analizler mevcuttur.

Son yıllarda kompozit doğrusal tabakalı kirişler hakkında yapılmış literatürde mevcut olan yayınlardan başlıcaları aşağıda sıralanmıştır.

Shi ve Lam [3] çalışmalarında üçüncü dereceden kiriş teorisini kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimlerini ve dinamik analizlerini klasik sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemişlerdir.

Yıldırım ve arkadaşları [4] tarafından simetrik çapraz tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini taşıma matris metodu yöntemi ile incelenmiştir. Çalışmaların da çeşitli sınır koşulları altında nümerik örnekler mevcuttur.

Ramtekhar ve Desai [5], anizotropik kompozit tabakalı kirişlere ait denklem üzerinde çalışmışlardır. Bu denklemleri elde ederken Hamilton enerji prensibini ve karışık sonlu elaman yöntemini kullanmışlardır.

Chen ve arkadaşları [6], iki boyutlu elastisite teorisini temel alarak belirli bir zaman aralığında doğrusal tabakalı kirişlerin serbest titreşimleri üzerine çalışmışlardır. Aynı çalışma grubu tarafından [7], referans [6] da kullanılan denklemler genel tabakalı kirişlerin serbest titreşim analizleri için genelleştirilmiştir.

Aydoğdu [8], çapraz tabakalı kirişlerin farklı sınır koşulları altındaki titreşim analizi üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmasında üçüncü dereceden serbestliğe sahip kesme deformasyonlu kiriş teorisi ve Ritz metodu kullanılmıştır.

Talookolaei ve Ahmadian [9], Pasternak zeminine oturan çapraz tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizi üzerine çalışmıştır. Serbest titreşimler hesaplanırken klasik sonlu eleman metodu ve Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Ayrıca çalışmalarında dönme atalet etkisi dikkate alınmıştır.

Marur ve Kant [10], doğrusal tabakalı kirişlerin titreşimleri üzerine çalışmıştır. Çalışmalarında gerilme tansörünü düzgün elde edebilmek için yüksek mertebe teorisini ve isoparametrik lineer sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Çeşitli sınır koşulları altında geliştirdikleri formülasyon kullanılmıştır.

Kompozit yapıların doğal titreşim periyodunu da içeren serbest titreşim özelliklerini dinamik analiz bakımından göz önde bulundurmak oldukça önemlidir. Dönüştürülmüş kesme modülü yüksek ise dönüştürülmüş kesme deformasyonu dinamik analiz yaparken mutlak surette göz önüne alınmalıdır. Literatürde düzlem içi tabakalı kompozit dairesel kirişler ile ilgili sınırlı sayıda yayın yapılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda sıralanmışlardır.

Subramanian [11], tarafından düzlem içi tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizleri kesme deformasyon teorisi ve sonlu eleman metodu kullanılarak incelenmiştir.

Kim [12], sınır koşullarına oldukça duyarlı bir kompozit tabakalı hibrit dairesel kiriş eleman üzerinde çalışmıştır. Bu elemanın elde edilmesinde Hellinger-Reissner varyasyon prensibi ve birinci dereceden kesme deformasyon teorisi kullanılmıştır.

Lin ve Hsieh [13], düzlem içi tabakalı dairesel kirişlerin statik hesabı için kapalı genel bir çözüm üzerine çalışmıştır. Bu çalışmalarında normal kuvvet, kesme kuvveti, radyal yer değiştirme gibi değerleri tanjant eğrisinin yaptığı açı cinsinden ifade edilmiştir.

Dairesel kompozit tabakalı kirişlerin dinamik analizleri ile ilgili literatürde sınırlı sayıda yayın mevcuttur.

Matsunaga [14] tarafından, normal kuvvet ve zorlanmış titreşim etkisindeki tabakalı kompozit daireselel kemerlerin eğilme gerilmesi ve doğal frekansları üzerine çalışılmıştır. Çalışmasında kesme, normal kuvvet ve dönme ataletinin farklı değerlerinin etkileri araştırılmıştır.

Tseng ve arkadaşları [15], Timoshenko eğrisel kiriş teorisini baz alarak düzlem içi daireselel tabakalı kompozit kirişlerin dinamik analizleri üzerine çalışmıştır. Çalışmalarında kesme deformasyonu ve dönme ataletlerini göz önünde bulundurulmuştur.

Yıldırım [16] ise çalışmasında düzlem içi simetrik çapraz tabakalı kemerlerin, dönme ataleti, normal ve kesme kuvvetleri altındaki etkilerini incelemiştir. Diğer çalışmasında [17] ise boyutsuz düzlem içi serbest titreşim karakterini daireselel kemerler ve tüm doğal frekansları için çalışmıştır.

Qatu [18], polinomial trial fonksiyon kullanarak bir dizi düzlem içi denklem elde etmiştir. Bu denklemler ve çözümleri, basit mesnetli sınır koşullarına sahip tabakalı kemerler için geçerlidir. Bu çalışmasında normal ve kesme deformasyonlarını ve dönme atalet momentlerini ihmal etmiştir.

Qatu ve Elsharkawy [19], asimetrik tabakalı kemerlerin düzlem içi serbest titreşimini büyük kıvrımlı ve değişik sınır koşulları için incelemişlerdir.

Qatu [20], düzlem içi orta kalınlıklı daireselel tabakalı kirişlerin serbest titreşimi üzerine çalışmıştır.

Kapania ve Raciti [21], kompozit tabakalı kirişlerin non-liner titreşim analizi üzerine bir çalışma yapmışlardır.

Miller ve Adams [22], bir ucu serbest bir ucu sabit simetrik, ortotrop kirişlerin titreşim özelliği üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında klasik tabakalı teorisini kullanırken kesme deformasyonunu da göz önüne almışlardır.

Chen ve Yang [23] ve Chandrashekara ve arkadaşları [24], simetrik tabakalı kirişlerin titreşim analizini birinci mertebeli kesme deformasyon teorisini kullanarak çalışmışlardır.

Chandrashekhara ve Banger [25], tabakalı kompozit kirişlerin karakteristiğinde yüksek mertebe plak teorisini kullanarak incelemişlerdir.

Khdeir ve Reddy [26], çalışmalarında çapraz tabakalı kiriş için serbest titreşim davranışı belirli zaman aralığı için analitik olarak incelemişlerdir.

Bu çalışmada, dairesel kompozit tabakalı kirişlerin kendi düzlemleri içerisindeki serbest titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Alan denklemlerinden fonksiyonel elde edilebilmesi için Gâteaux türevi yaklaşımı ve değişim yöntemi kullanılmıştır. Kullanılan karışık sonlu eleman formülasyonu dairesel tabakalı kompozit kiriş için, iki nodlu ve her nodunda 6 adet bilinmeyen içeren eleman modeli kullanılmıştır.

Gâteaux türev yaklaşımı literatürde Aköz ve Kadioğlu [27-29] tarafından elastik ve viskoelastik kirişlerin analizi için başarı ile uygulanmıştır.

Bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak, Gâteaux türev metodu dairesel tabakalı kompozit kirişler için genişletilmiştir. Literatür incelendiğinde tabakalı kompozit kirişlerin doğal frekansını bulmak için Gâteaux türevi metodunun kullanıldığı bir yayına rastlanamamıştır.

2. ÇUBUK KAVRAMI

2.1 Yapılan Varsayımlar

Bu çalışmanın kapsamında, yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu birinci mertebe kuramı içinde kalınmıştır. Gerilme hesaplarını kolaylaştırmak amacı ile çubuk adını verdiğimiz cismin, enine olan iki boyutunun da çubuk boyu ile eğrilikler yanında çok küçük olduğu varsayılarak hesaplamalar yapılmıştır. Kiriş lineer elastik, homojen ve orthotropik bir malzemeden meydana gelmiş olup üniform veya değişken bir en kesit alanına sahiptir. Dönme eylemsizlik momenti ihmal edilmiştir. Kuvvet ve şekil değiştirmeler arasında lineer bir ilişki mevcut olarak alınmıştır.

2.1.1 Tanım

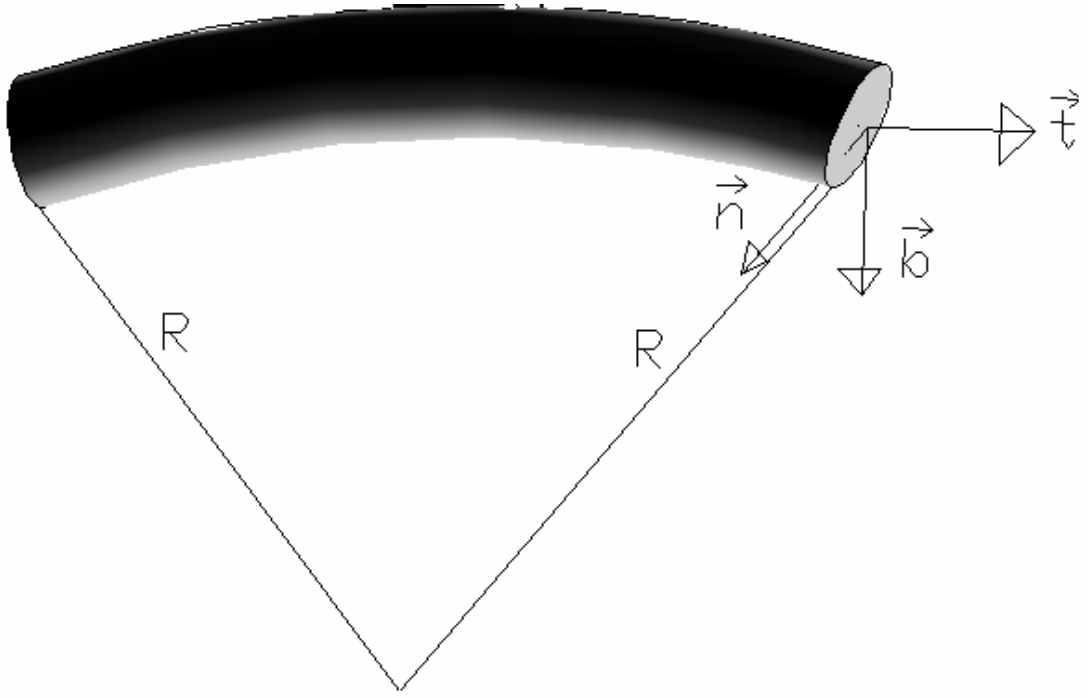
Bir çubuk eksen ve dik kesit adı verilen iki parçadan meydana gelir. Çubuk eksenini her hangi bir uzayda kendini teşkil edebilir. Bu eğriyi:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (2.1)$$

şeklinde bir yer vektörü ile tanımlayalım. Bu uzay eğrisi üzerindeki herhangi iki nokta arası mesafeyi yay parçasının uzunluğu s olarak kabul edelim. Eğri boyunca tanımlanacak olursa;

$$s = \int_c |d\zeta| \quad (2.2)$$

burada $d\zeta$ ile gösterilen, eğri boyunca olan diferansiyel yer değiştirme vektörüdür. Eksene bağımlı üç birim vektör tarif edilirse; her üç birim vektör ile (2.1) ifadesiyle tanımlanan yer vektörü arasında diferansiyel geometrik bağlar söz konusudur. Şekil 2.1 de gösterildiği gibi doğrultuları itibariyle; teğet birim vektör ($\vec{t}$), binormal birim vektör ($\vec{b}$), normal birim vektör ($\vec{n}$) olarak isimlendirilirler.



Şekil 2.1 Çubuk eksenini için $\vec{t}, \vec{b}, \vec{n}$ eksenlerinin gösterimi

2.2. Elastik Çubukların Genel Denklemleri

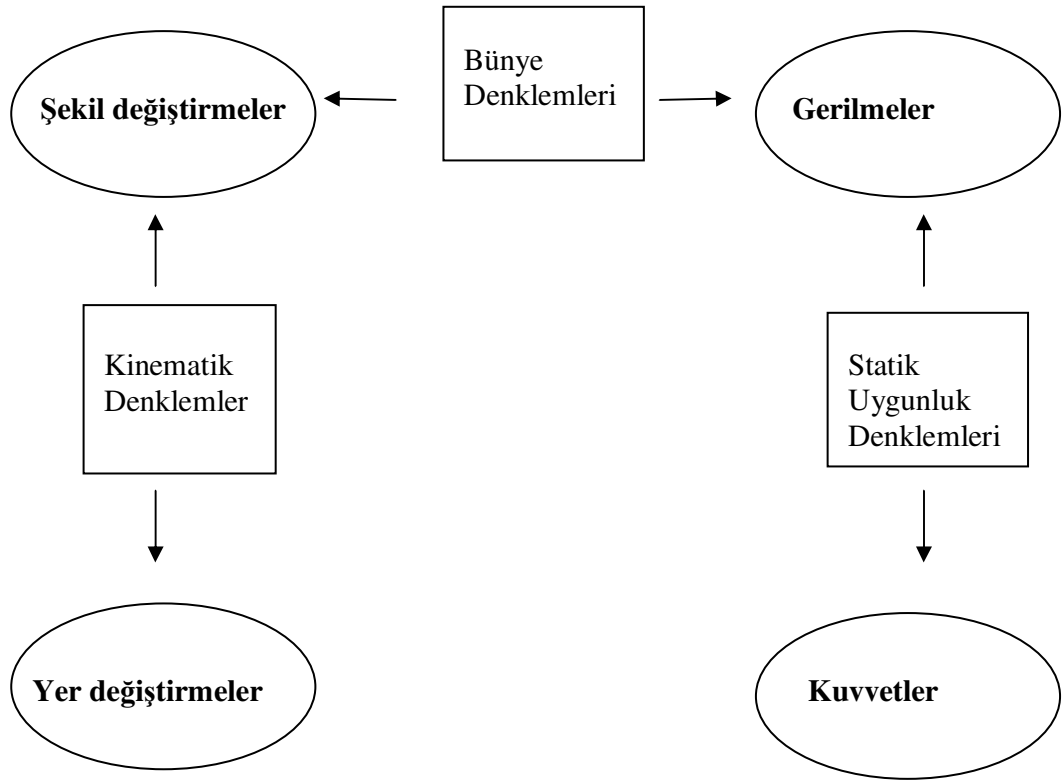
Bir cisim en genel hali ile iki tür kuvvet etkisinde olabilir; iç ve dış kuvvetler. İç kuvvetler bir cisim herhangi bir matematik düzlemle ikiye ayrıldığında, moleküller arasındaki çekimden meydana gelen ve ayrım yüzeyi boyunca etki eden kuvvetlerdir. Dış kuvvetler ise kütle kuvvetleri ve yüzey kuvvetlerinden oluşur. Kütle kuvvetleri yer çekimi gibi bir cisim içerisindeki bir alana ya da bir hacime etki eden kuvvetlerdir. Yüzey kuvvetleri ise cismi çevreleyen yüzeye başka bir cisim aracılığı ile doğrudan ya da dolaylı olarak etki eden kuvvetlerdir.

Cisme dış kuvvetler etkidiğinde, cisimde bir şekil değişimi ile birlikte cismi oluşturan parçacıklar arasında bu parçacıkları bir arada tutacak iç kuvvetler ortaya çıkar.

Yapı elemanlarının analizinde aşağıda verilen hususların düşünülmesi gerekir:

- 1- Statik denge: Yapı elemanının bütününde veya elemandan alınan herhangi bir parçada kuvvet denge denklemleri sağlanmalıdır.
- 2- Şekil değiştirmeler: Yapı elemanını oluşturan malzemenin davranışı gerilme-birim şekil değiştirme (σ - ϵ) bağıntısına uygun olmalıdır.
- 3- Geometri: Yapı elemanında şekil değiştirmeden sonra herhangi bir kopma kırılma ve kütle kaybı olmamalı, yapı elemanı bütünlüğünü korumalıdır.

Tablo 2.1 Kullanılan denklemler arasındaki ilişki

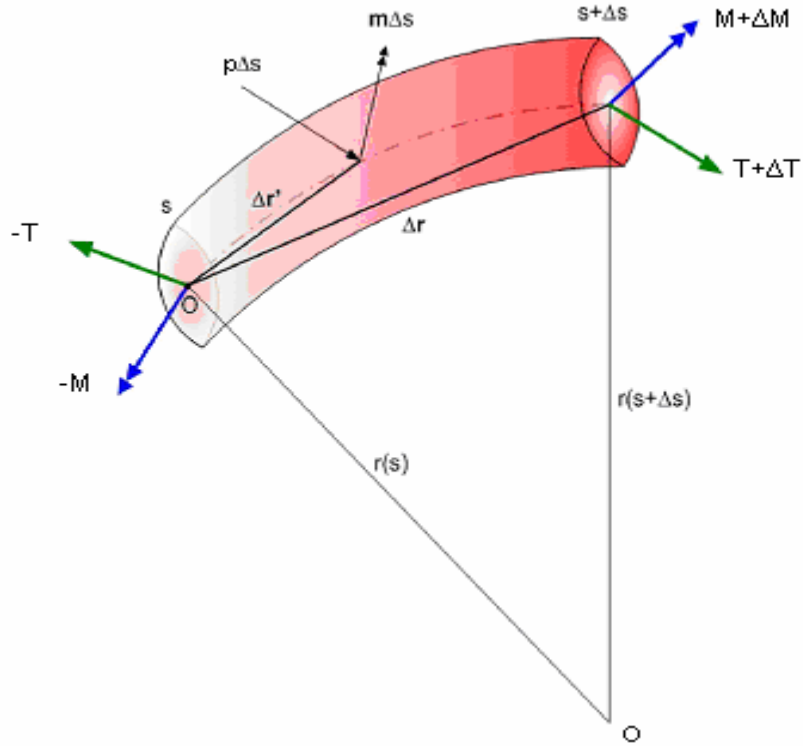


Yukarıda verilen ilkelerin uygulanmasıyla bulunan gerilme ve birim şekil değiştirmelerin elemanın sınır koşullarına uygun olması gerekir. Bu durum, sınır koşullarının sağlanması olarak ifade edilir.

Analizde her zaman yukarıdaki adımların verilen sırayla uygulanması gerekmeyebilir. Gerilme ve şekil değiştirme analizinde, şekil değiştirme enerjisi kavramından hareketle geliştirilen enerji yöntemleri, denge yöntemi yerine kullanılabilir. Her iki yöntem, yükleme ve eleman şeklinin düzenli olması durumunda yeterli hassaslıkta sonuç verirken, karmaşık problemlerin çözümünde de sayısal yöntemlerin uygulanabileceği temeli oluştururlar.

2.2.1. Denge Denklemleri

Kesite tesir eden iç kuvvetlerin toplamı $\vec{T}$ ile bunların ağırlık merkezine taşınması durumunda katılması gereken kuvvet çifti $\vec{M}$ ile gösterilir. Bu fonksiyonların çubuk eksenini boyunca değişimi keyfi olmayıp dış kuvvetlere bağlıdır. Bunu elde etmek için Δs uzunluğunda bir çubuk elemanının üzerine tesir eden kuvvetlerle dengede olduğu düşünülür; (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Δs uzunluğundaki çubuk eleman

$\vec{p}$, s boyunca yayılı dış kuvvetleri, $\vec{m}$ ise yayılı dış kuvvet çiftini göstermek üzere, denge denklemi ile O noktasına göre yazılan moment eşitliği kullanılırsa,

$$-\vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + \vec{p}\Delta s = 0 \quad (2.3)$$

$$-\vec{M} + \vec{M} + \Delta\vec{M} + m\Delta\vec{s} + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde kısaltmalar yapıp limite geçilerek ve (2.3), (2.4) ifadeleri kullanılarak elastik çubuğun hareket denklemleri,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} - \rho A \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Burada A çubuk kesit alanı, ρ özgül ağırlık, $\vec{u}$ dik kesitin ağırlık merkezine ötelenme, $\vec{\Omega}$ ağırlık merkezi etrafındaki dönme vektörüdür ve açık halde gösterimi,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_t \vec{t} + u_n \vec{n} + u_b \vec{b} \\ \vec{\Omega} &= \Omega_t \vec{t} + \Omega_n \vec{n} + \Omega_b \vec{b} \\ \vec{T} &= T_t \vec{t} + T_n \vec{n} + T_b \vec{b} \\ \vec{M} &= M_t \vec{t} + M_n \vec{n} + M_b \vec{b} \end{aligned} \quad (2.7)$$

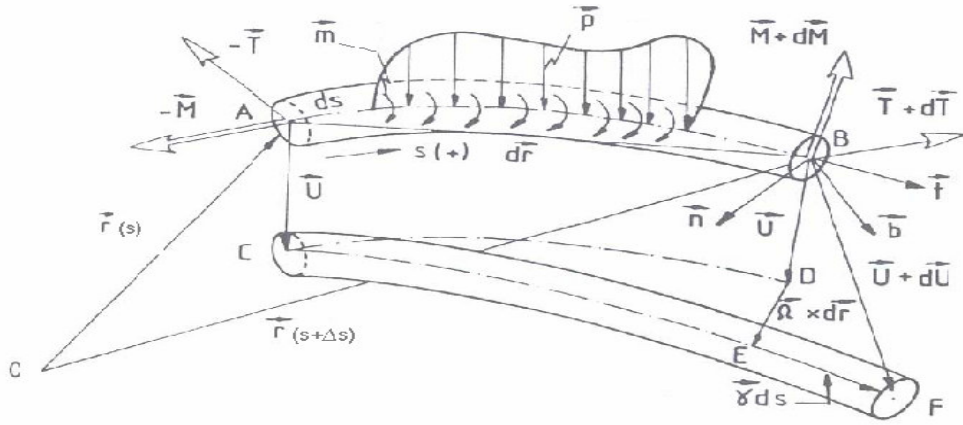
şeklindedir.

2.2.2 Kinematik Denklemler

Kinematik denklemler yer ve şekil değiştirme için tarif edilen $\vec{u}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{\omega}$ ve $\vec{\gamma}$ gibi dört vektör fonksiyonu arasındaki bağıntıları ihtiva eder. $\vec{\gamma}$ rölatif birim kayma açısı vektörü ile $\vec{u}$ ötelenme vektörü arasındaki ilişki:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{ds} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Çubuktaki yer değiştirme olayını, çubuk eksenindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi ile tarif edebiliriz. Bu da demektir ki yer değiştirme çubuk eksenine bağlı bir fonksiyondur. Yer değiştirmeyi $\vec{u}$ ile gösterirsek bu fonksiyon da $\vec{u}(s)$ ile ifade edilir. Detaylı bilgi ve açıklama referans [30] ve [31] de mevcuttur.



Şekil 2.3 Elemanın yer değiştirmiş hali

Çubuk eksenini üzerinde şekil 2.3 deki gibi birbirine çok yakın iki nokta ele alınsın . A noktasının yer değiştirdikten sonra C noktasına geldiğini düşünelim. A noktasının konumu, $\vec{r}(s)$ iken, ötelenmiş ve $\vec{u}$ vektörü ile gösterilen yer değiştirmeyi yapmıştır. Yer değiştirdikten sonraki konumu şekilden anlaşılacağı üzere $\vec{r}(s) + \vec{u}$ vektörü olur. Öyleyse yer değişiminden sonraki konumu belirleyebilmek için $\vec{u}$ yer değiştirme vektörünün bilinmesi yeterlidir.

Şekil 2.3 de gösterilen çok küçük olan çubuk elemanını göz önüne alarak, diyebiliriz ki B noktası A noktasına göre $\Delta \vec{u}$ kadarlık farklı yer değiştirme yapmıştır. Bu $\Delta \vec{u}$ yer değiştirmesi iki sebepten oluşmuştur:

- Birincisi, B noktası A noktasına göre $\vec{\gamma} \cdot \Delta s$ kadar farklı hareket eder.
- İkincisi, A'dan geçen kesit $\vec{\Omega}$ dönmesini yaparsa B'den geçen kesit de $\vec{\Omega} \times \Delta \vec{r}$ ötelenmesini yapar.

Dolayısıyla rölatif yer değiştirme

$$\Delta \vec{U} = \vec{\gamma} \cdot \Delta s + \vec{\Omega} \times \Delta \vec{r} \quad (2.9)$$

bağıntısı olacaktır. Elde edilen denklemde taraflar Δs e bölünüp limitleri alınır ve

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (2.10)$$

olmak üzere;

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \vec{\gamma} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} + \vec{\Omega} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (2.11)$$

şeklinde olacaktır.

Bu bağıntı $\vec{u}$ ile $\vec{\Omega}$ arasındaki ilişkiyi göstermektedir ve uygunluk şartı olarak adlandırılır. Bu ifadelerin çıkartılması sonucunda;

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{ds} - \vec{\gamma} + \vec{t} \times \vec{\Omega} &= 0 \\ \frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

denklemleri elde edilir.

2.2.3 Bünye Denklemleri

Bünye bağıntılarında; bir taraftan $\vec{T}$ ve $\vec{M}$ kesit tesirleriyle, diğer taraftan $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ şekil değiştirmeyi tarif eden vektörler arasındaki ilişki kurulmaktadır. Bu bağıntılar kurulurken çubuk deformasyonu sonucu meydana gelen yer, şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu, kesit ağırlık ve kayma merkezinin çakıştığı ayrıca çubuk malzemesinin ortotrop olduğu kabul edilmiştir.

Elastik bir cisimde, cismin kesitlerindeki iç kuvvetler ile şekil değiştirmeler arasında doğrusal bir bağıntı vardır. Bu bağıntı cisimlerin fiziksel özelliklerine bağlıdır ve her cisim için farklı farklıdır.

Kesitlerde oluşan kuvvet vektörleri ile kayma birim vektörleri ve kuvvet çifti vektörleri ile dönme birim vektörleri arasında böyle bir doğrusal bağıntının olacağı söylenebilir. Herhangi bir eksen takımı için bu vektörlerin koordinatları birbirine doğrusal olarak bağlıdır. Bu doğrusal bağıntı Hooke Kanunu esaslarına dayanır.

Herhangi bir eksen takımı için $\vec{T}$ vektörünün bileşenleri T_n, T_b, T_t ve $\vec{M}$ vektörünün bileşenleri de M_n, M_b, M_t ise,

$$\begin{aligned}
T_n &= C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 & , & & M_n &= D_{11}\omega_1 + D_{12}\omega_2 + D_{13}\omega_3 \\
T_b &= C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 & , & & M_b &= D_{21}\omega_1 + D_{22}\omega_2 + D_{23}\omega_3 \\
T_t &= C_{31}\gamma_1 + C_{32}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 & , & & M_t &= D_{31}\omega_1 + D_{32}\omega_2 + D_{33}\omega_3
\end{aligned} \tag{2.13}$$

bağıntısı olarak gösterilir. (2.13) bağıntısının kısa gösterimi olarak $\vec{T}_i = C_{ik}\vec{\gamma}_k$ ve $\vec{M}_i = D_{ik}\vec{\omega}_k$ ilişkileri vardır. Buradaki C_{ik} ve D_{ik} katsayıları sadece cismin malzemesine ve kesitin geometrisine bağlı değerlerdir. $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ değerlerinden bağımsızdırlar. Malzeme homojen, izotrop ise ve kesit ve kesitin konumu da değişmiyor ise bu katsayılar s değişkeninden de bağımsız olurlar. Bu katsayıları cismin kaymaya ve dönmeye karşı rijitlikleri denir. Kesitteki gerilmeler ile şekil değiştirmeleri tansör notasyonu ile de gösterebiliriz:

$$\vec{T} = \underline{C} \cdot \vec{\gamma} \quad \text{ve} \quad \vec{M} = \underline{D} \cdot \vec{\omega} \tag{2.14}$$

şeklinde gösterebiliriz. $\underline{C}$ ve $\underline{D}$ tansörlerinin ikisi de simetriktir. Yani, $C_{ik} = C_{ki}$ ve $D_{ik} = D_{ki}$ dir. Öyleyse 9 adet olan katsayıların 6 adedinin bilinmesi yeterlidir. 6 adet bilinmeyen matris halde gösterimi;

$$\begin{bmatrix} T_n \\ T_b \\ T_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_b \\ \gamma_t \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} M_n \\ M_b \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_b \\ \omega_t \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

şeklinde dir. $\underline{C}$ ve $\underline{D}$ matrislerinin determinantları sıfırdan farklı olduğu için bu matrislerin tersleri de vardır. Bu matrislerin ters matrislerini tarif edebiliyorsak şunu yazabiliriz:

$$\vec{\gamma} = \underline{C}^{-1} \cdot \vec{T} \quad \text{ve} \quad \vec{\omega} = \underline{D}^{-1} \cdot \vec{M} \tag{2.16}$$

Yani, açık hali

$$\begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_b \\ \gamma_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_n \\ T_b \\ T_t \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_b \\ \omega_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_n \\ M_b \\ M_t \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

şeklinde olup burada $\underline{C}^{-1}$, $\underline{D}^{-1}$ tansörlerine esneklik tansörü denir.

Malzeme asal eksen ile kesit asal eksen üst üste düşecek şekilde eksen takımı seçilir ise $\tilde{C}$ ve $\tilde{D}$ matrisleri diyagonal (köşegen) olurlar. Bu çalışmada kullanılacak olan $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ matrisleri

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

bu şekilde gösterebiliriz. Bünye bağıntıları ile ilgili kapsamlı çalışma İnan [30] da mevcuttur.

2.3 Elastik Sabitlerin Hesabı

Bir malzemenin her yerindeki malzeme özellikleri aynı ise malzeme homojen olarak adlandırılır. Özellikleri yerel olarak değişiklikler gösteriyorsa bu tip malzemelere heterojen malzeme denir. Bunlara ek olarak eğer yapının belirli bir noktasında malzeme özellikleri doğrultuya göre farklı değerler alabiliyorsa, anizotropik malzeme adı alır. İzotropik malzeme ise malzeme özelliklerinin aynı doğrultu üzerinde aynı kalan malzemelerdir.

Kompozit malzemeler mikroskobik bakış açısından kaçınılmaz bir şekilde heterojen yapıya sahiptirler. Buna rağmen makroskobik bakış açısı ele alındığında kompozit malzemeler homojen olarak adlandırılabilir.

Bu çalışmada yönetici tabaka denklemin oluşturulmasında iki kabul yapılmıştır:

1. Her tabaka içindeki liflerin değişiklik göstermeden aynı doğrultuda olduğu
2. Tabakanın lineer elastik bir malzeme gibi davrandığıdır.

Birinci varsayım macromekanik davranış için ikincisi ise Hooke yasası için önem arz etmektedir.

Genelleştirilmiş Hooke kanunu anizotropik malzeme ve izotermal koşullar için

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (2.19)$$

şeklinde verilen bağıntı ile ifade edilebilir. σ_i gerilme bileşenlerini, ϵ_j şekil değiştirme elemanlarını, C_{ij} ise malzeme rijitlik matrisini ifade etmektedir. Hepsisi

ortogonal kartezyen koordinat takımında ifade edilmektedir. Tablo 2.2 de toplu bir biçimde görülmektedir.

Tablo 2.2 Gerilme ve şekil değiştirme notasyonları

Gerilme		Şekil değiştirme	
Tansör notasyonu	Kısaltılmış notasyon	Tansör notasyonu	Kısaltılmış notasyon
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
σ_{23}	σ_4	$2\epsilon_{23}$	ϵ_4
σ_{13}	σ_5	$2\epsilon_{13}$	ϵ_5
σ_{12}	σ_6	$2\epsilon_{12}$	ϵ_6

Genel olarak 36 adet C_{ij} bağımsız malzeme sabiti mevcuttur. Yalnız malzemeyi hiperelastik olarak kabul edersek bu sayı 21 e düşer. Bu durumda ortaya potansiyel fonksiyon devreye girer. Ortaya çıkan fonksiyonu W olarak kabul edersek; bu

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer malzeme bir düzlem boyunca bir simetriye sahipse ki buna mono klinik malzeme denir, ana denklemdeki katsayıları x_1x_2 düzlemi değişmediği sürece sabit kalır. Bu koşullar altında malzeme matrisi [C] deki bağımsız katsayılar 13 adet olur. ($C_{ij}=C_{ji}$). Açık hali;

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

şeklindedir.

Yapı içerisinde liflerle hizalanmış üç adet, karşılıklı olarak birbirine dik simetri düzlemi mevcut ise bu tip malzemeler ortotroik malzeme adını alır. Eğer koordinat düzlemi üç karşılıklı düzleme de paralel seçilirse gerilme-şekil değiştirme ilişkisi,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

şeklinde Hooke yasası, S_{ij} esneklik matrisi cinsinden

$$\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.23)$$

ifadesi elde edilebilir. Burada $S_{ij} = [C_{ij}]^{-1}$ dir. Bu koşullar altında (2.23) denklemi matris formunda yazılmak istenirse

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

şeklinde karşımıza çıkar. Burada S_{ij} esneklik matrisinin simetrisinden dolayı

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \quad (2.25)$$

bağıntısı yazılabilir.

Burada E elastisite modülünü ve ν_{ij} Possion oranını ifade etmektedir.

Buna göre esneklik matrisinin sıfırdan farklı olan elemanları

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} & S_{33} &= \frac{1}{E_{33}} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklindeir. (2.26) bağıntısına bakılarak esneklik matrisi cinsinden denklem (2.24) yeniden düzenlenirse,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

halini alır. Malzeme rijitlik matrisi ve esneklik matrisi karşılıklı olarak birbirinin tersi olduğuna göre ortotropik malzeme için,

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \quad (2.28)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} \\
C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \\
C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \\
C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\
C_{33} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} \\
C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} \\
C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

bağıntıları yazılabilir. (2.27) de verilen matristen yararlanarak denklemler tekrardan düzenlenirse

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_1 \cdot \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} \\
C_{12} &= E_1 \cdot \frac{\nu_{12} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} \\
C_{13} &= E_1 \cdot \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} \\
C_{22} &= E_2 \cdot \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} \\
C_{23} &= E_2 \cdot \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} \\
C_{33} &= E_3 \cdot \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta\Delta} \\
\Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklinde elde edilir.

2.4 Genel Ortotropik Çubuklar İçin Elastik Sabitler Ve bünye Denklemlerin Çıkarılışı

Klasik çubuk teorisinden $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$ yazılabilir ve buna göre gerilme bileşenleri için

$$\epsilon_{\beta} = S_{\beta j} \alpha_{jk} \sigma_k \quad (j, k = 1, 5, 6 \quad \beta = 2, 3, 4) \quad (2.33)$$

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$$

$$d = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & S_{16} \\ 0 & S_{55} & 0 \\ S_{16} & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

bağıntısı elde edilir. Burada α_{ij} determinat d olduğundan,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{S_{55}S_{66} - S_{56}^2}{d} & \alpha_{15} &= \frac{S_{16}S_{56} - S_{15}S_{66}}{d} \\ \alpha_{55} &= \frac{S_{11}S_{66} - S_{16}^2}{d} & \alpha_{16} &= \frac{S_{15}S_{56} - S_{16}S_{55}}{d} \\ \alpha_{66} &= \frac{S_{11}S_{55} - S_{15}^2}{d} & \alpha_{56} &= \frac{S_{16}S_{56} - S_{11}S_{56}}{d} \end{aligned} \quad (2.35)$$

bağıntıları yazılabilir. Buradan ortotropik çubuk için Hooke kanunu ile verilen hale indirgenmiş olur.

$$\sigma_i = Q_{ij} \epsilon_j \quad (i, j = 1, 5, 6) \quad (2.36)$$

Q_{ij} indirgenmiş rijitlik matrisi olup açık formu

$$Q_{ij} = C_{ij} + C_{i\beta} S_{\beta k} \alpha_{kj} \quad (i, j, k = 1, 5, 6 ; \beta = 2, 3, 4) \quad (2.37)$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_1 &= \sigma_1 & \bar{\sigma}_2 &= \sigma_6 & \bar{\sigma}_3 &= \sigma_5 \\
\bar{\epsilon}_1 &= \epsilon_1 & \bar{\epsilon}_2 &= \epsilon_6 & \bar{\epsilon}_3 &= \epsilon_5 \\
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} & \bar{Q}_{12} &= Q_{16} & \bar{Q}_{13} &= Q_{15} \\
\bar{Q}_{21} &= Q_{61} & \bar{Q}_{23} &= Q_{65} & \bar{Q}_{22} &= Q_{66} \\
\bar{Q}_{31} &= Q_{51} & \bar{Q}_{33} &= Q_{55} & \bar{Q}_{32} &= Q_{56}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

verilen kısaltmalar yapıp yerine yazılırsa çubuk için gerilme–şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur. Bu bağıntı

$$\bar{\sigma}_i = \bar{Q}_{ij} \bar{\epsilon}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.39}$$

şeklindedir. Daha önceden elde edilen dönüştürülmüş rijitlik matrisinin hesaba katılmasıyla (2.38) denklemini dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisi cinsinden

$$\bar{\sigma}_i = \bar{Q}'_{ij} \bar{\epsilon}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.40}$$

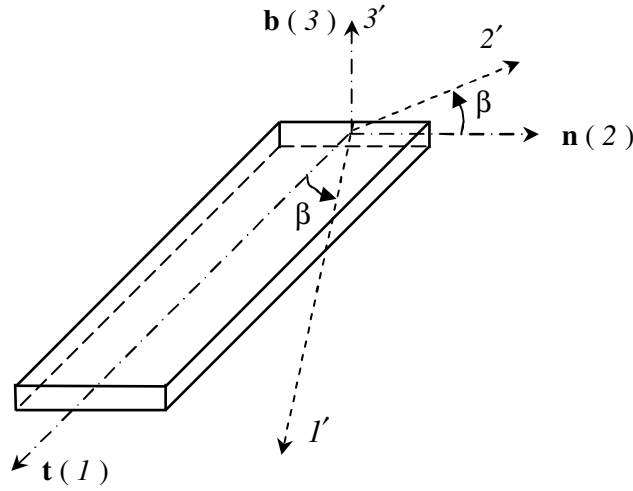
şekildeki gibi yazılabilir. Ortotropik çapraz tabakalı çubuklar için indirgenmiş rijitlik matrisinin sıfırdan farklı olan elemanları ve bu elemanların C' ve S' ne bağlı olan ifadeleri

$$\begin{aligned}
\bar{Q}'_{11} &= C'_{11} + (C'_{12} S'_{21} + C'_{13} S'_{31}) / S'_{11} \\
\bar{Q}'_{22} &= C'_{66} \\
\bar{Q}'_{33} &= C'_{55}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

şekildeki gibidir. Bu ifadelerde $\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{56} = 0$ ve $d = S_{11} S_{55} S_{66}$ olup bunlar $\beta=0$ ve $\beta=90$ derece içindir. C'_{ij} ve S'_{ij} değerlerinin açık halde ifadeleri,

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= m^4 C_{11} + 2(m^2 - m^4)C_{12} + C_{22}(1 - 2m^2 + m^4) + 4(m^2 - m^4)C_{66} \\
C'_{12} &= (m^2 - m^4)C_{11} + (m^2 - m^4)C_{22} + C_{12}(1 - 2m^2 + 2m^4) - 4(m^2 - m^4)C_{66} \\
C'_{13} &= m^2 C_{13} + (1 - m^2)C_{23} \\
C'_{22} &= (1 - 2m^2 + 2m^4)C_{11} + 2(m^2 - m^4)C_{12} + m^4 C_{22} + 4(m^2 - m^4)C_{66} \\
C'_{23} &= m^2 C_{23} + (1 - m^2)C_{13} \\
C'_{66} &= (m^2 - m^4)C_{11} - 2(m^2 - m^4)C_{12} + C_{66}(1 - 4m^2 + 4m^4) + (m^2 - m^4)C_{22} \\
S'_{11} &= m^4 S_{11} + 2(m^2 - m^4)S_{12} + S_{22}(1 - 2m^2 + 2m^4) + (m^2 - m^4)S_{66} \\
S'_{12} &= (m^2 - m^4)S_{11} + (m^2 - m^4)S_{22} + S_{12}(1 - 2m^2 + 2m^4) - (m^2 - m^4)S_{66} \\
S'_{13} &= m^2 S_{13} + (1 - m^2)S_{23}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

şekildeki gibidir. Burada $m = \cos \beta$ olup, β kiriş eksenini ile malzeme eksenleri arasındaki açıdır. (Şekil 2.4)



Şekil 2.4 Malzeme eksenleri (1', 2', 3') için pozitif dönüş yönleri

Kompozit tabakalı çubuğun kesitine ve malzeme özelliklerinde simetri olacağından dolayı A ve D matrislerinin sıfırdan farklı olan elemanları, indirgenmiş rijitlik matrisi cinsinden ifadeleri ek 1 de verilmiştir. Ayrıca bünye bağıntılarının çıkarılmasıyla ilgili kapsamlı ve detaylı çalışma referans [32] de mevcuttur.

2.5 Genel Çubuk Denklemleri Ve Alan Denklemi

Bölüm 2.1 de tanımlanan çubuk eksenı eğir bir düzlem içinde yer alıyorsa böyle çubuklarla düzlemsel çubuklar denir. Frenet formülleri,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \chi \cdot \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \chi \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{R} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}\tag{2.43}$$

şeklindedir. Burada χ eğriliği, τ ise eğriliğin tabi torsiyonunu ifade etmektedir. τ değeri uzay eğrilerinde sıfırdan farklı olduğu halde bütün düzlem eğriler için sıfırdır.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} - m\vec{u} = 0\tag{2.44}$$

Denge denkleminde $ds=Rd\theta$ olarak alınsın. (2.44) bağıntısında verilen vektörel denge denklemi $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ eksen takımında skaler olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{dT_t}{d\theta} - T_n + Rm\ddot{u}_t &= 0 \\ \frac{dT_n}{d\theta} - T_t + Rm\ddot{u}_n &= 0 \\ \frac{dT_b}{d\theta} + Rm\ddot{u}_b &= 0\end{aligned}\tag{2.45}$$

bağıntıları elde edilir. Vektörel moment denklemleri

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} = 0\tag{2.46}$$

şeklindedir. Buradan $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ eksen takımında skaler olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{dM_t}{d\theta} - M_n &= 0 \\
\frac{dM_n}{d\theta} + M_t - RT_b &= 0 \\
\frac{dM_b}{d\theta} + RT_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

şeklinde 6 adet skaler denklem elde edilir. Uygunluk denklemleri

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \tag{2.48}$$

şeklinde olup $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ eksen takımındaki denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{d\theta} + \Omega_n - R\vec{\omega}_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - R\vec{\omega}_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{d\theta} - R\vec{\omega}_b &= 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

şeklindedir. Vektörel şekil değiştirme denklemi

$$\frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} = 0 \tag{2.50}$$

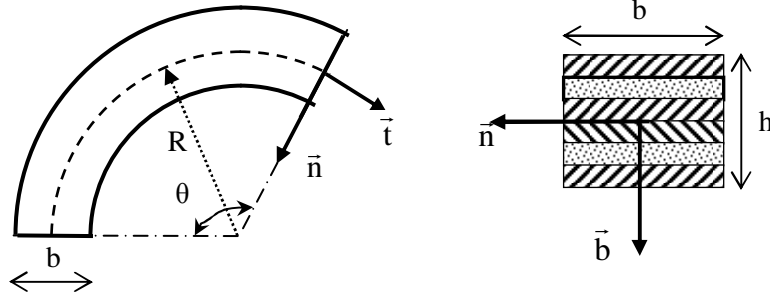
şekildeki gibi olup $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ eksen takımındaki denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{du_t}{d\theta} + u_n - R\gamma_t &= 0 \\
\frac{du_n}{d\theta} + u_t - R\Omega_n - R\gamma_n &= 0 \\
\frac{dU_b}{d\theta} + R\Omega_n - R\gamma_b &= 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

gibi yazılır. Burada ;

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma} &= \vec{\zeta}^{-1} \cdot \vec{T} \\
\vec{\omega} &= \vec{\zeta}^{-1} \cdot \vec{M}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

şeklinde. Bu denklemler çubuğun düzlem içi dinamik davranışını tanımlar. Bu çalışmada düzlem içi serbest titreşim analizi yapılacağından kesit tesirleri T_t , T_n , M_b , Ω_b , u_n , u_t olacaktır. Diğer bileşenler düzlemine dik doğrultudaki analizlerde kullanılmaktadır. (Şekil 2.5)



Şekil 2.5 Dairesel tabakalı kompozit kiriş

Kesit tesirleri düzlem içi yüklü olan çubuklarda bulunan tesirlerle aynıdır. Bu çalışmada kullanılan alan denklemleri elde edilerek referans [17] dekine benzer olarak son haliyle

$$\begin{aligned}
 \frac{du_t}{d\theta} &= u_n + RA'_{11}T_t \\
 \frac{du_n}{d\theta} &= -u_t + R\Omega_b + Rk'A'_{22}T_n \\
 \frac{d\Omega_b}{d\theta} &= RD'_{33}M_b \\
 \frac{dT_t}{d\theta} &= T_n - R\bar{A}\bar{\omega}^2 u_t \\
 \frac{dT_n}{d\theta} &= -T_t - R\bar{A}\bar{\omega}^2 u_n \\
 \frac{dM_b}{d\theta} &= -RT_n
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

şekilde verilmiştir. Alan denklemlerin çıkarılması ile ilgili kapsamlı benzer çalışma ve açıklama referans [16,17, 32] da mevcuttur.

k' kesme katsayısı faktörü, $\bar{\omega}$ (rad/s) dairesel frekans ve $ds (=Rd\theta)$ son derece küçük olan kiriş boyunu ifade etmektedir. Denklemlerdeki diğer terimler;

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)} \tag{2.54}$$

Burada N tabaka sayısını, ρ malzeme yoğunluğunu ve A ise deformasyona uğramamış kesit alanını ifade etmektedir.

3. FONKSİYONEL ANALİZ

Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeni ile diferansiyel denklemi çözmek her zaman mümkün olmaz. Çözümde güçlüklerle karşılaşıldığı takdirde yaklaşık çözümlere başvurulur. Bu çalışmada yaklaşık çözümlerden karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır.

3.1 Diferansiyel Denklemlerden Fonksiyonele Geçiş

3.1.1 Potansiyellik Koşullu

Alan denklemleri $\mathbf{Q}=\mathbf{L}\mathbf{y}-\mathbf{f}$ şeklinde operatör yapıda gösterimi olmak üzere $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{y}$ değişkenleri, $\mathbf{f}$ ise dış yükleri temsil eder. $\mathbf{Q}=\mathbf{L}\mathbf{y}-\mathbf{f}$ operatörünün potansiyel bir fonksiyon olabilmesi için; bu fonksiyonlardan, yönden ve yoldan bağımsız olarak türetilen tüm diğer fonksiyonları toplamının yine bu fonksiyonu vermesi gerekir. Dolayısı ile potansiyel fonksiyon bir baz noktası olarak düşünülebilir. Potansiyellik koşullunun matematiksel olarak ifade edilebilmesi için $\mathbf{Q}$ operatörünün bir yöne göre türevinin diğer yöndeki toplamı, bu işlem tersine eşitlenmelidir ve matematiksel gösterimi,

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (3.1)$$

şeklindedir. $\mathbf{Q}$ operatörünün $\bar{\mathbf{y}}$ yönüne göre türevinin $\mathbf{y}^*$ yönündeki toplamı, aynı fonksiyonun $\mathbf{y}^*$ yönüne göre türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ toplamına eşittir şeklinde ifade edilir. Bu denklemin yazılabilmesi için yönsel türev (Gâteaux türevi) ve yönsel toplam tanımlaması gerekmektedir.

3.1.2 Yönsel Toplam (İç Çarpım)

Yönsel toplam, bir fonksiyonla bir değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integralidir ve

$$\left[f(x), y^* \right] = \int_b^a f(x) y^* dx \quad (3.2)$$

olarak hesaplanır.

3.1.3 Gâteaux Türevi (Yönsel Türev)

Yönsel türev tekniği herhangi bir sabit fonksiyon daha evvelden bilinmezken, herhangi bir alan denklemine kolayca uygulanabilir. Potansiyeli dikkate almaksızın denklemlerin operatör formu test edilir. Tüm formülasyon bu operatör yardımı ile ve sınır koşulları (dinamik ve geometrik) varyasyonel tekniklerle elde edilir.

Yönsel türevin matematiksel ifadesi η bir skaler olmak üzere

$$dQ(y, \bar{y}) = \left. \frac{\partial Q(y + \eta \bar{y})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. İç çarpım aşağıdaki denklemler arasında gerçekleşmiştir.

$$\begin{aligned} -\frac{dT_t}{d\theta} + T_n - R\bar{A}\bar{\omega}^2 u_t &= 0 & \Leftrightarrow & u_t \\ -\frac{dT_n}{d\theta} - T_t - R\bar{A}\bar{\omega}^2 u_n &= 0 & \Leftrightarrow & u_n \\ -\frac{dM_b}{d\theta} - RT_n &= 0 & \Leftrightarrow & \Omega_b \\ \frac{d\Omega_b}{d\theta} - RD'_{33} M_b &= 0 & \Leftrightarrow & M_b \\ \frac{du_n}{d\theta} - u_t + R\Omega_b + Rk'A'_{22} T_n &= 0 & \Leftrightarrow & T_n \\ \frac{du_t}{d\theta} - u_n - RA'_{11} T_t &= 0 & \Leftrightarrow & T_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

Buna göre alan denklemlerinin değişkenlere göre (T_t , T_n , M_b , Ω_b , U_n , U_t) “—” yönündeki Gâteaux (yönsel) türevi “*” yönünde toplanacak şekilde iç çarpımı yazılırsa;

$$\begin{aligned}
[d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] = & - \left[\bar{\mathbf{T}}'_t, \mathbf{U}_t^* \right] + \left[\bar{\mathbf{T}}_n, \mathbf{U}_t^* \right] - \bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \left[\bar{\mathbf{U}}_t, \mathbf{U}_t^* \right] - \left[\bar{\mathbf{T}}'_t, \mathbf{U}_n^* \right] - \left[\bar{\mathbf{T}}_t, \mathbf{U}_n^* \right] \\
& - \bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \left[\bar{\mathbf{U}}_n, \mathbf{U}_n^* \right] - \left[\bar{\mathbf{M}}'_b, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b^* \right] - \mathbf{R} \left[\bar{\mathbf{T}}_n, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b^* \right] + \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}'_b, \bar{\mathbf{M}}_b^* \right] \\
& - \mathbf{R} \mathbf{D}_{33} \left[\bar{\mathbf{M}}_b, \bar{\mathbf{M}}_b^* \right] + \left[\bar{\mathbf{U}}'_n, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] + \left[\bar{\mathbf{U}}_t, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] - \mathbf{R} \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}_b, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] \\
& - \mathbf{k}' \mathbf{A}'_{22} \left[\bar{\mathbf{T}}_n, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] + \left[\bar{\mathbf{U}}'_t, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right] - \left[\bar{\mathbf{U}}_n, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right] - \mathbf{A}'_{11} \mathbf{R} \left[\bar{\mathbf{T}}_t, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde “*” yönündeki yönsel türevi “—” yönünde toplanacak şekilde iç çarpımı yazılırsa;

$$\begin{aligned}
[d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] = & - \left[\mathbf{T}'_t, \bar{\mathbf{U}}_t^* \right] + \left[\mathbf{T}_n, \bar{\mathbf{U}}_t^* \right] - \bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \left[\mathbf{U}_t, \bar{\mathbf{U}}_t^* \right] - \left[\mathbf{T}'_t, \bar{\mathbf{U}}_n^* \right] - \left[\mathbf{T}_t, \bar{\mathbf{U}}_n^* \right] \\
& - \bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{R} \left[\mathbf{U}_n, \bar{\mathbf{U}}_n^* \right] - \left[\mathbf{M}'_b, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b^* \right] - \mathbf{R} \left[\mathbf{T}_n, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_b^* \right] + \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}'_b, \bar{\mathbf{M}}_b^* \right] \\
& - \mathbf{R} \mathbf{D}_{33} \left[\mathbf{M}_b, \bar{\mathbf{M}}_b^* \right] + \left[\mathbf{U}'_n, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] + \left[\mathbf{U}_t, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] - \mathbf{R} \left[\bar{\boldsymbol{\Omega}}_b, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] \\
& - \mathbf{k}' \mathbf{A}'_{22} \left[\mathbf{T}_n, \bar{\mathbf{T}}_n^* \right] + \left[\mathbf{U}'_t, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right] - \left[\mathbf{U}_n, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right] - \mathbf{A}'_{11} \mathbf{R} \left[\mathbf{T}_t, \bar{\mathbf{T}}_t^* \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) denkleminde kısmi türev uygulanıp tekrardan düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
[dQ(y, \bar{y}), y^*] = & - \left[T_t^*, \bar{U}_t \right] + \left[T_n^*, \bar{U}_t \right] - \bar{A} \bar{\omega}^2 R \left[U_t^*, \bar{U}_t \right] - \left[T_t^*, \bar{U}_n \right] - \left[T_t^*, \bar{U}_n \right] \\
& - \bar{A} \bar{\omega}^2 R \left[U_n^*, \bar{U}_n \right] - \left[M_b^*, \bar{\Omega}_b \right] - R \left[T_n^*, \bar{\Omega}_b \right] + \left[\Omega_b^*, \bar{M}_b \right] \\
& - R D_{33} \left[M_b^*, \bar{M}_b \right] + \left[U_n^*, \bar{T}_n \right] + \left[U_t^*, \bar{T}_n \right] - R \left[\Omega_b^*, \bar{T}_n \right] \\
& - k' A'_{22} \left[T_n^*, \bar{T}_n \right] + \left[U_t^*, \bar{T}_t \right] - \left[U_n^*, \bar{T}_t \right] - A'_{11} R \left[T_t^*, \bar{T}_t \right] \\
& - \left[\bar{T}_t^*, U_t^* \right]_0 - \left[\bar{T}_n^*, U_t^* \right]_0 - \left[\bar{M}_b^*, \Omega_b^* \right]_0 + \left[\bar{\Omega}_b^*, M_b^* \right]_0 \\
& + \left[\bar{U}_n^*, T_t^* \right]_0 + \left[\bar{U}_t^*, T_t^* \right]_0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Denklem (3.7) deki son 6 terim dışında $[dQ(y, y^*), \bar{y}]$ ifadesine yani (3.6) denkleminde eşittir. Bu durumda (3.7) ile (3.6) denklemleri arasında;

$$\begin{aligned}
[dQ(y, \bar{y}), y^*] = & [dQ(y, y^*), \bar{y}] - \left[\bar{T}_t^*, U_t^* \right]_0 - \left[\bar{T}_n^*, U_t^* \right]_0 \\
& - \left[\bar{M}_b^*, \Omega_b^* \right]_0 + \left[\bar{\Omega}_b^*, M_b^* \right]_0 + \left[\bar{U}_n^*, T_t^* \right]_0 + \left[\bar{U}_t^*, T_t^* \right]_0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

gibi bir bağıntı mevcuttur. $\sigma + \varepsilon = 0$ ifadesi sınır koşulları ifadesi olduğu bilindiğinden denklem (3.8) da yerleştirilir ise;

$$\begin{aligned}
[dQ(y, \bar{y}), y^*] = & [dQ(y, y^*), \bar{y}] - \left[\bar{T}_t^*, U_t^* \right]_{\sigma} - \left[\bar{T}_t^*, U_t^* \right]_{\varepsilon} - \left[\bar{T}_n^*, U_t^* \right]_{\sigma} \\
& - \left[\bar{T}_n^*, U_t^* \right]_{\varepsilon} - \left[\bar{M}_b^*, \Omega_b^* \right]_{\sigma} - \left[\bar{M}_b^*, \Omega_b^* \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{\Omega}_b^*, M_b^* \right]_{\sigma} \\
& + \left[\bar{\Omega}_b^*, M_b^* \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{U}_n^*, T_t^* \right]_{\sigma} + \left[\bar{U}_n^*, T_t^* \right]_{\varepsilon} + \left[\bar{U}_t^*, T_t^* \right]_{\sigma} + \left[\bar{U}_t^*, T_t^* \right]_{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Denklem (3.9) de σ ve ε alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını tanımlamaktadır.

3.2 Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Bölüm 3.1.1 de potansiyellik koşulu sağlatılan operatör daha önce elde edilmişti. Bu operatörüne ait fonksiyonel;

$$I(y) = \int_0^1 \langle Q(sy), y \rangle ds \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir. Burada s skaler bir büyüklüktür. Fonksiyonelin elde edilişi hakkında genel bilgi Oden ve Reddy [33] tarafından verilmiştir. Elde edilen (2.52) alan denkleminde (3.10) bağıntısı terim terim uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında dairesel tabakalı kompozit kirişler için geçerli fonksiyonel

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(y) = & -\frac{\bar{\omega}^2 \bar{A} R}{2} [u_n, u_n] - \frac{\bar{\omega}^2 \bar{A} R}{2} [u_t, u_t] - R [T_n, \Omega_b] + [u_t, T_n] \\ & - [u_n, T_t] - [T_n', u_n] - [T_t', u_t] - [M_b', \Omega_b] - \frac{RD'_{33}}{2} [M_b, M_b] \\ & - \frac{RA'_{22}}{2} [T_n, T_n] - \frac{Rk'A'_{22}}{2} [T_t, T_t] + [\hat{u}_n, T_n]_{\epsilon} + [\hat{u}_t, T_t]_{\epsilon} + [\hat{\Omega}_b, M_b]_{\epsilon} \\ & + [(T_n - \hat{T}_n), u_n]_{\sigma} + [(T_t - \hat{T}_t), u_t]_{\sigma} + [(M_b - \hat{M}_b), \Omega_b]_{\sigma} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak elde edilmiş olunur.

4. KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Bir fiziksel olayı tanımlayan fonksiyon bulunmak istendiğinde, ya diferansiyel denklemler ve sınır koşulları yardımıyla ya da sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasında fonksiyonelin değişimini sıfır yapan fonksiyon aranır. Fonksiyonel, içerisinde aranan fonksiyon ve bu fonksiyonun türevleri bulunan integral ifadesine denir. Şekil değiştiren cisimler için potansiyel enerji ve tamamlayıcı enerji ilkeleri kullanılarak fonksiyonel doğrudan elde edilebilir. Fonksiyonelin değişimini sıfır yapan ifadenin aranması ‘Değişim Yöntemi’ olarak adlandırılır.

4.1 Yaklaşım Fonksiyonu

Karışık sonlu eleman formülasyonunu elde etmek için ilk yapılması gereken şekil fonksiyonunun seçilmesidir. Lineer yaklaşım fonksiyonu uygunluk ve tamlık koşullarını sağlamak zorundadır [33-34]. Bu çalışmada

$$\Psi_i = \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \quad \Psi_j = \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \quad L_e = R(\theta_j - \theta_i) \quad (4.1)$$

şeklinde doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Burada L_e kiriş sonlu eleman boyunu, $\Delta\theta = \theta_j - \theta_i$ elemanın düzlemde yaptığı merkez açığı ifade etmektedir. Tüm bilinmeyenler interpolasyon formunda yazılırsa çubuk içinde herhangi bir noktadaki değişkenler,

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{ni} \Psi_i + u_{nj} \Psi_j \\
u_t &= u_{ti} \Psi_i + u_{tj} \Psi_j \\
\Omega_b &= \Omega_{bi} \Psi_i + \Omega_{bj} \Psi_j \\
M_b &= M_{bi} \Psi_i + M_{bj} \Psi_j \\
T_n &= T_{ni} \Psi_i + T_{nj} \Psi_j \\
T_t &= T_{ti} \Psi_i + T_{tj} \Psi_j
\end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılmaktadır. Denklem (4.2) bölüm (3.2) de elde edilen (3.11) fonksiyoneline terim terim uygulanırsa bir eleman üzerinde

$$\begin{aligned}
I^e &= \int_{\theta_j}^{\theta_i} \{ -(T_{ti} \Psi_i' + T_{tj} \Psi_j')(U_{ti} \Psi_i + U_{tj} \Psi_j) + (T_{ni} \Psi_i + T_{nj} \Psi_j)(U_{ti} \Psi_i + U_{tj} \Psi_j) \\
&\quad - \frac{1}{2} \bar{A} \omega^2 R (U_{ti} \Psi_i + U_{tj} \Psi_j)^2 - (T_{ni} \Psi_i' + T_{nj} \Psi_j')(U_{ni} \Psi_i + U_{nj} \Psi_j) \\
&\quad - (T_{ti} \Psi_i + T_{tj} \Psi_j)(U_{ni} \Psi_i + U_{nj} \Psi_j) - \frac{1}{2} \bar{A} \omega^2 R (U_{ni} \Psi_i + U_{nj} \Psi_j)^2 \\
&\quad - (M_{bi} \Psi_i' + M_{bj} \Psi_j')(\Omega_{bi} \Psi_i + \Omega_{bj} \Psi_j) - R(T_{ni} \Psi_i + T_{nj} \Psi_j)(\Omega_{bi} \Psi_i + \Omega_{bj} \Psi_j) \\
&\quad - \frac{1}{2} R D_{33}' (M_{bi} \Psi_i + M_{bj} \Psi_j)^2 - \frac{1}{2} k' A_{22}' R (T_{ni} \Psi_i + T_{nj} \Psi_j)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} A_{11}' R (T_{ti} \Psi_i + T_{tj} \Psi_j)^2 \} d\theta
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Eleman matrisinin elde edilebilmesi için fonksiyonelin değişimini sıfır yapan nod değerlerinin bulunması gerekmektedir. Nodal değerlere göre fonksiyonelin değişimini sıfır yapmak için

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_j} = 0 \quad j=1,2 \tag{4.4}$$

koşulu sağlanmalıdır. Dolayısıyla ϕ_j nodal bilinmeyenler olan u_{ti} , u_{tj} , u_{ni} , u_{nj} , Ω_{bi} , Ω_{bj} , M_{bi} , M_{bj} , T_{ti} , T_{tj} , T_{ni} , T_{nj} ye göre birinci türevlerinin sıfır olması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial u_{ti}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial U_{ni}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{bi}} = 0 \\
\frac{\partial I^e}{\partial u_{tj}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial U_{nj}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{bj}} = 0
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial M_{bi}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{ti}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{ni}} = 0 \\
\frac{\partial I^e}{\partial M_{bj}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{tj}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I^e}{\partial T_{nj}} = 0
\end{aligned}$$

(4.5) denkleminde elde edilecek 12 adet denklem sonlu eleman için eleman matrisinin oluşturulmasında kullanılacaktır. 12 adet denklem içerisindeki matematiksel işlemlerin yapılabilmesi için (4.1) de verilen yaklaşım fonksiyonları kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
\Psi_i &= \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} & \Psi_i' &= -\frac{R}{L_e} \\
\Psi_j &= \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} & \Psi_j' &= \frac{R}{L_e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_i' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(-\frac{R}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = \frac{R}{L_e} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i' \Psi_j' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(-\frac{R}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = -\frac{R}{L_e} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j' \Psi_j' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \Psi_i \Big|_{\Psi_j} = \frac{R}{L_e} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i \Psi_i' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = -\frac{1}{2} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i \Psi_j' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{1}{2} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j \Psi_j' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * \frac{R}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e} \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta_i \theta \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{1}{2} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j \Psi_i' d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * -\frac{R}{L_e} \right) d\theta = -\frac{R^2}{L_e} \left(\theta_j \theta - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i \Psi_i d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \left(\theta_j^2 \theta - \frac{2\theta^2 \theta_j}{2} + \frac{\theta^3}{3} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{L_e}{3R} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_i \Psi_j d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} * \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \right) d\theta = \frac{R^2}{L_e^2} \left(\frac{\theta_j \theta^2}{2} - \theta_j \theta_i \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^2 \theta_i}{2} \right) \Big|_{\Psi_j}^{\Psi_i} = \frac{L_e}{6R} \\
\int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \Psi_j \Psi_j d\theta &= \int_{\Psi_j}^{\Psi_i} \left(\frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} * \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \right) d\theta = \frac{L_e}{3R}
\end{aligned}$$

(4.6) denklemindeki integral açılımları (4.3) de yerlerine yazıldığı zaman eleman rijitlik matrisi elde edilmiş olur. $L=L_e$, sonlu elemanın yay boyunu ifade etmektedir. Elde edilen 12 adet denklemin açık hali ek 2 de verilmiştir.

5. DİNAMİK ANALİZ

Tek serbestlik dereceli sönümsüz bir sistemde serbest titreşime ait genel hareket denklemi,

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (5.1)$$

şeklindedir. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ serbest titreşim frekansı olmak üzere, harmonik titreşimlere ait çözüm,

$$x = a \sin(\omega t) \quad (5.2)$$

dir. (5.2) denklemi (5.1) de yerleştirilirse,

$$(k - \omega^2 m)x = 0 \quad (5.3)$$

elde edilir. Çok serbestlik dereceli sistemlerde (5.3) bir denklem takımı olarak,

$$([K] - \omega^2 [M])\{w\} = \{0\} \quad (5.4)$$

biçiminde karşımıza çıkar ve bir özdeğer problemine dönüşür. Denklem takımının bir çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Aksi durumda trivial çözüm ile karşılaşılır. Burada ω çubuğun dairesel titreşim frekansı, $w(u)$ de yer değiştirme tipinde bir kolon vektörüdür. Karışık sonlu elemanlar yönteminde (5.4) ün açık yazımı;

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} [F] \\ [w] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

biçimindedir. (5.5) de $[F]$ gerilmeler sonucu oluşan iç kuvvetlere ait kolon vektör olup indirgenme yöntemi kullanılarak, problemin sınır koşullarına göre indirgenmiş denklem takımı:

$$([K^*] - \omega^2 [M])\{w\} = \{0\} \quad (5.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $[K^*] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]$ olup $[K^*]$ a indirgenmiş sistem matrisi denir. (5.6) denklemini bir özdeğer probleminin çözümüyle hesaplanır. Problemin çözümünde özdeğer serbest titreşim frekansları, özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin normleştirilmiş halleri ise bu frekansa karşı gelen yer değiştirme değerlerini verir.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde geliştirilen karışık sonlu elman formülasyonu ile ilgili örnekler ele alınarak çözülmüştür. Sayısal örneklerde kullanılan çapraz tabakalı dairesel kirişte dikdörtgen en kesit kullanılmıştır. Kesme düzeltme faktörü 6/5 olarak alınmıştır. Bütün sonuçlarda normal ve kesme deformasyon etkisi göz önüne alınmıştır. Bu çalışmadaki genel amaç, geliştirilen formülasyon kullanılarak düzlem içi tabakalı kompozit dairesel kirişler için doğal titreşim periyodunu bulmaktır. Kompozit dairesel kirişler için malzeme özellikler tablo 6.1 de verilmiştir.

Tablo 6.1 çalışmada kullanılan malzeme özellikleri

	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ρ (kgm ⁻³)
Graphite-Epoxy (T300/5208)	181	10.3	7.17	3.433	0.28	1600
Kevlar-Epoxy	76	5.56	2.30	1.618	0.34	1460

6.1 Geçerlilik

Titreşim frekansları ve teoriyi geçerli ve doğru kılmak için dairesel 0⁰ doğrultulu izotrop malzemeden oluşan tek tabakalı bir kiriş kullanılmıştır. Frekanslar için değerler Chidamparam ve Leissa [35] ile Tseng ve arkadaşlarından [36] alınmıştır. Dairesel kiriş için kullanılan malzeme ve en kesit alanı değerleri $E = 181$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 1600$ kgm⁻³, $\alpha = 100^0$, en (b) = kalınlık (h) = 0.5 m, yarıçap (R) = 5 m şeklindedir.

Tablo 6.2 ankastre- ankastre uçlu 0⁰ yönünde lifleri uzayan dairesel kiriş için 6 adet boyutsuz doğal titreşim frekansı görülmektedir.

Boyutsuzlaştırma katsayısı $\omega R^2 \sqrt{\rho A/EI}$ olarak yapılmıştır. Tablo 6.2 den de görüleceği gibi kaynak [35,36] de verilen sonuçlar ile bu çalışmada bulunan değerler birbirlerine çok yakın değerlerdir.

Tablo 6.2 ankastre-ankastre kiriş için frekans değerleri

Metod	Mode-1	Mode-2	Mode-3	Mode-4	Mode-5	Mode-6
C&L [35]	17.9249	34.6752	62.8782	92.8664	/	/
Tseng [36]	17.9154	34.6427	62.7886	92.6767	133.613	175.602
Bu çalışma	17.8192	34.6194	63.3102	92.8944	134.027	175.934

“/” indisi ile gösterilen değerler mevcut değildir.

İkinci örnek olarak ise değişik kalınlıklara sahip izotrop malzemeli, tek katmanlı dairesel kiriş ele alınmıştır. Bu örnekteki değerler referans [37] den alınmıştır. Bu değerler, $R=1\text{m}$, $\alpha=120^\circ$, $\nu=0.3$, $\rho=1 \text{ kgm}^{-3}$, $E=1 \text{ Pa}$ olup kesit alanı boyutları ise $b=0.25 \text{ m}$, $h=0.01 \text{ m}$ dir. Tablo 6.3 de görülebileceği gibi verilen özellikler, her iki ucu ankastre uç olan kirişinin en küçük 3 adet doğal titreşim periyodunu göstermektedir. Bunlar değişik 5 kalınlık oranı için hazırlanmıştır. Sonuçlar karşılaştırıldığında b/R oranının değişmesine rağmen değerler literatürdeki değerler ile uyum içerisinde kalmıştır.

Tablo 6.3 İki ucu ankastre olan Timeshenko kirişinin en küçük 3 adet doğal titreşim frekansı

Thickness ratio b/R	Metod	Doğal Frekans (rads ⁻¹)		
		ω_1	ω_2	ω_3
0.250	Ref. [37]	0.6898	0.8225	1.491
	Bu çalışmada	0.7115	0.8309	1.5189
0.100	Ref. [37]	0.3284	0.5878	0.9811
	Bu çalışmada	0.3356	0.5942	0.9849
0.050	Ref. [37]	0.1692	0.3295	0.6022
	Bu çalışmada	0.1718	0.3320	0.6082
0.025	Ref. [37]	0.08528	0.1690	0.3076
	Bu çalışmada	0.08644	0.1701	0.3098
0.010	Ref. [37]	0.03419	0.06808	0.1238
	Bu çalışmada	0.03290	0.06797	0.1242

6.2 h/b Oranı Frekansa Etkisi

Yapılan çözüm yönteminin geçerliliğini sağlamak amacı ile Referans [17] de verilen sonuçlar ile bu çalışmada elde edilen simetrik dairesel tabakalı kiriş değerleri karşılaştırılmıştır. Kesit alan özellikleri dairesel kiriş için $h=b=0.2$ m ve çap $R=5.7735$ m dir. Kullanılan boyutsuz frekans tanımı ise $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$ şeklindedir. Ele alınan tabakalı dairesel kiriş Kevlar 49-Epoxy den meydana gelmiş olup lifler arsasındaki açı ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) şeklindedir. Tablo 6.4 den de görüleceği gibi referans olarak alınan değerler ile bu çalışma sonucu elde edilen değerler arasında ihmal edilebilecek kadar az bir fark çıkmıştır ki bu da programın geçerliliğinin iyi olduğunu göstermektedir. Ayrıca bu değerlerin uyumluluğu yapılan formülasyonun kayma kilitlenmesinden bağımsız olduğunu da göstermektedir.

Tablo 6.4 Düzlem içi dairesel tabakalı her iki ucu ankastre ($0^0/90^0/90^0/0^0$) kiriş için boyutsuz doğal titreşim frekansı

$\alpha (^0)$	Metod	h/b=10	h/b=0.1
90	Ref. [17]	0.45592	45.59570
	Bu çalışmada	0.46154	46.17685
180	Ref. [17]	0.09149	9.15578
	Bu çalışmada	0.09450	9.47588

6.3 Simetrik Olmayan Tabakalı Kirişlerde Sınır Koşullarının Frekansa Etkisi

Tablo 6.5 de simetrik olmayan tabakalı kirişler için ($0^0/90^0/0^0/90^0$) boyutsuz frekansları, çeşitli sınır şartları altında verilmiştir. Frekanslar bulunurken kullanılan malzeme Kevlar 49- Epoxy dir. Dairesel kiriş için kesit alan özellikleri; en (b) = kalınlık (h) =0.5 m, yarıçap (R) = 5 m , açılış açısı (α)=180⁰ dır. Tablo 6.5 de görülebileceği gibi bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan kiriş diğer sınır şartları ile kıyaslandığında en düşük frekansa sahiptir. Her iki ucu ankastre mesnetli kiriş ise en yüksek doğal titreşim frekansına sahiptir. Bu da titreşim frekansları üzerinde sınır şartlarının ciddi bir etkisi olduğuna işaretir.

Tablo 6.5 Simetrik olmayan ($0^0/90^0/0^0/90^0$) tabakalı kiriş için ilk 3 doğal titreşim frekansı

Frekanslar(Hz)	Ankastre-Ankastre	Ankastre-Sabit	Ankastre-Serbest
ω_1	19.90208	15.27067	2.16214
ω_2	40.19024	35.96481	6.577602
ω_3	70.70477	65.45068	21.65663

6.4 Her Bir Katmandaki Malzeme Özelliklerin Frekansa Etkileri

Her katmandaki farklı kompozit özelliklerin doğal titreşim periyodu üzerindeki etkilerini görebilmek için üç farklı kiriş karşılaştırılacaktır. Kullanılacak her üç kiriş için lif doğrultuları ($0^0/90^0/90^0/0^0$) dır ve malzeme her üç kiriş içinde Kevlar 49 ve Grafit epoxy dir. Birinci kirişin katmanındaki malzemeler (0^0 Kevlar/ 90^0 Kevlar/ 90^0 Kevlar/ 90^0 Kevlar), ikinci kirişin malzemeleri (0^0 Kevlar/ 90^0 Grafit/ 90^0 Grafit/ 90^0 Kelvar), üçüncü kirişin malzemeleri ise (0^0 Grafit/ 90^0 Kevlar/ 90^0 Kevlar/ 90^0 Grafit) şeklinde tabakalı bir yapıya sahiptir. Her iki dairesel kiriş için kesit alan özellikleri aynı olup değerler; e_n = kalınlık = 0.5 m, yarıçap = 5 m açılış açısı (α)= 180^0 . Tablo 6.6 da düzlem içi frekans değerleri Hertz (Hz) olarak ankastre- ankastre sınır şartları altında farklı katmanlar için verilmiştir. Görüleceği gibi Grafit-epoxy en yüksek, Kevlar-epoxy ise en düşük frekansa sahiptir.

Tablo 6.6 Farklı malzemeli simetrik ($0^0/90^0/90^0/0^0$) tabakalı kiriş için en düşük 3 doğal titreşim frekansları

Frekanslar (Hz)	Kev/Kev/Kev/Kev	Kev/Grap/Grap/Kev	Grap/Kev/Kev/Gra
ω_1	19.89248	20.97185	29.31549
ω_2	40.20074	43.19941	58.56046
ω_3	70.68472	77.76001	102.52200

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada Gâteaux türev (yönsel) tekniği kullanılarak çapraz tabakalı dairesel kompozit kiriş için bir fonksiyonel elde edilmiştir. Düzlem içi serbest titreşimi analiz edebilmek için karışık sonlu eleman formülasyonu yardımıyla Fortran bilgisayar programı kullanılmıştır. Sonlu eleman modeli her nod da 6 adet bilinmeyene sahiptir. Bunlar iki adet yer değiştirme (u_n, u_t), bir adet dönme (Ω_b), iki adet kesme kuvveti (T_n, T_t) ve bir adet eğilme momenti (M_b) dir. Kullanılan yöntem ile tabakalı dairesel kiriş için çeşitli sınır şartları altında dinamik analiz yapılmıştır. Dairesel kirişlerin doğal titreşim frekansları karışık sonlu eleman metoduyla hesaplanmıştır. Bu kirişler için kesme deformasyonu içeren Timoshenko kiriş teorisi dikkate alınmıştır. Geliştirilen formülasyon kayma kilitlenmesi etkisinden bağımsızdır.

Bu çalışmada bu geliştirilen yöntemle çözülen doğal açısal frekanslar, dairesel tabakalı kompozit kirişler için literatürde daha önceden çözülen problemlerle karşılaştırılıp sonuçları değerlendirilmiştir. Bu karşılaştırılma hazırlanan program ve formülasyonun geçerliğini ve doğruluğunu gösterebilmek amacıyla yapılmıştır. Karşılaştırma sonucu bulunan değerler ile literatürdeki değerlerle çok yakın değerler çıkmıştır. Hazırlanan programın ve formülasyonun geçerli ve güvenilir olduğu anlaşılmaktadır.

Karışık sonlu eleman formülasyonun kullanımı ile sadece yer değiştirmeleri değişken olarak alan klasik sonlu eleman formülasyonun kullanımında ortaya çıkan türev ve yuvarlama hataları minimize edilmektedir. Buda kesme kuvveti, moment değerlerinin daha doğru ve deneysel verilere daha iyi yakınsamasını sağlamaktadır. Çünkü karışık sonlu eleman yönteminde kuvvet ve moment direk bilinmeyen olarak kullanılmaktadır. Çalışmada Gâteaux (yönsel) türev metodunun kullanılması eleman matrisin hem daha kolay hem daha hızlı bulunmasını sağlamaktadır.

Simetrik olmayan tabakalı kirişlerde sınır koşulların frekansa etkisi başlığı altında çalışılan örnekte ise sınır koşullarının değişiminin katmanlı dairesel kirişin serbest titreşim frekansı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu inceleme için üç farklı sınır koşulu karşılaştırılmıştır. Bunlar ankastre-ankastre, ankastre-sabit ve ankastre-serbest sınır koşullarıdır. Bu üç sınır koşulundan en yüksek serbest titreşim frekansına sahip sınır koşulu ankastre-ankastre olup, ankastre-serbest koşulu ise en düşük frekansa sahiptir.

Katmandaki malzeme özelliklerin frekansa etkisini incelemek için çalışılan örnekte ise üç farklı kiriş eleman ele alınmıştır. Bu üç kirişte sınır koşulları ve lif doğrultuları ($0^0/90^0/90^0/0^0$) aynıdır. Katmandaki malzemelerin doğrultuları aynı olmasına karşın katmandaki malzemeler farklıdır. Bu üç kirişin serbest titreşim frekansları elde edilip değerler karşılaştırıldığında ise Grafit epoksinin ilk ve son katmanda olan kirişin en yüksek frekansa sahip olduğu görülmektedir. Grafit epoksinin ortadaki katmanlara konulduğunda ise titreşim frekansının ilk ve orta katmanlarda olduğu duruma göre azaldığı görülmektedir. Grafit epoksinin hiç kullanılmadığı kirişte ise diğer kirişlere göre serbest titreşim frekansının en düşük olduğu görülmektedir. Bu örnekte gösteriyor ki katmanlardaki malzemelerin değişmesi sınır koşulların aynı kalmasına rağmen serbest titreşim frekansı etkilenmektedir.

Sonuç olarak, sayısal örnekler de gösteriyor ki Gâteaux (yönsel) türev yaklaşımı kullanılarak elde edilen fonksiyonelle karışık sonlu eleman metoduna geçilirse elde edilecek olan değerler hem literatürdeki deneysel sonuçlar ile yeter yakınsaklıkta hem de hızlı ve kolay olmaktadır. Literatürdeki mevcut çalışmalar içerisinde karşılaştırmalı veri yorumlama özelliğine sahip bu çalışmanın daha da geliştirilmesi mümkündür. Bu çalışma düzlem dışı, dairesel ve ya her hangi bir eğriliğe sahip kirişler üzerinde yapılacak çalışmalar için de bir kaynak olabilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] **M.R. Jones**, 1999 Mechanics of Composite Materials, Taylor & Francis.
- [2] **J.N. Reddy**, 2004 Mechanics of Laminated composite plates and shells: theory and analysis, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [3] **G. Shi, K.Y. Lam**, 1999 Finite element vibration analysis of composite beams based on higher- order beam theory, *Journal of Sound and Vibration* **219(4)** 707-721.
- [4] **V. Yıldırım, E. Sancaktar, E. Kırıl**, 1999 Free Vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach, *Communications in Numerical Methods in Engineering* **15** 651-660.
- [5] **G.S. Ramtekkar, Y.M. Desai**, 2002 Natural vibrations of laminated composite beams by using mixed finite element modeling, *Journal of Sound and Vibration* **257(4)** 635-651.
- [6] **W.Q. Chen, C.F. Lv, Z.G. Bian**, 2003 Elasticity solution for free vibration of laminated beams, *Composite Structures* **62** 75-82.
- [7] **W.Q. Chen, C.F. Lv, Z.G. Bian**, 2004 Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature, *Composite Structures* **63** 417-425.
- [8] **M. Aydoğdu**, 2005 Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *Int.J.of Mechanical Sciences* **47** 1740-1755.
- [9] **R.A. Jafari-Talookolaei, M.T. Ahmadian**, 2007 Free vibration analysis of a cross-ply laminated composite beam on Pasternak foundation, *Journal of Computer Science* **3(1)** 51-56.

- [10] **S.R. Marur, T. Kant**, 2007 on the angle ply higher order beam vibrations, *Comput. Mech.* **40** 25-33.
- [11] **P. Subramanian**, 2006 Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements, *Composite Structures* **73** 342-353.
- [12] **J.G. Kim**, 2006 An effective composite laminated curved beam element, *Communications in numerical methods in engineering* **22** 453-466.
- [13] **K.C. Lin, C.M. Hsieh**, 2007 The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures, *Composite Structure* **79** 606-618.
- [14] **H. Matsunaga**, 2004 Free vibration and stability of laminated composite circular arches subjected to initial axial stress, *Journal of Sound and Vibration* **271** 651-670.
- [15] **Y.P. Tseng, C.S. Huang, M.S. Kao**, 2000 In-plane vibration of laminated curved beams with variable curvature by dynamic stiffness analysis, *Composite Structure* **50** 103-114.
- [16] **V. Yildirim**, 1999 Rotary inertia, axial and shear deformation effects on the in-plane natural frequencies of symmetric cross-ply laminated circular arches, *Journal of Sound and Vibration* **224(4)** 575-589.
- [17] **V. Yildirim**, 1999 In-plane free vibration of symmetric cross-ply laminated circular bars, *Journal of engineering mechanics* **125(6)** 630-636.
- [18] **M.S. Qatu**, 1992 In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams, *Journal of Sound and Vibration* **159** 327-338.
- [19] **M.S. Qatu, A.A. Elsharkawy**, 1993 Vibration of laminate composite arches with deep curvature and arbitrary boundaries, *Computers and Structures* **47** 305-311.
- [20] **M.S. Qatu**, 1993 Theories and analyses of thin and moderately thick laminated composite beams, *International Journal of Solids and Structures* **30** 2743-2756.
- [21] **R.K. Kapania, S. Raciti**, 1989 Non-linear vibrations of unsymmetrically laminated beams, *AIAA J.* **27(2)** 201-210.

- [22] **A. K. Miller, D. F. Adams**, 1975 An analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams, *Journal of Sound Vibration* **41** 433-449.
- [23] **A.T. Chen, T.Y. Yang**, 1985 Static and dynamic formulation of symmetrically laminated beam finite element for microcomputer, *J.Compos. Mater.* **19** 459-475.
- [24] **K. Chandrashekara, K. Krishnamurty, S. Roy**, 1990 Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation, *Composite Structure* **14** 269-279.
- [25] **K. Chandrasekhara, K. M. Bangera**, 1992 Free vibration of composite beams using refined shear flexible beam element. *Computers and Structures* **43(4)** 719-727.
- [26] **A. A. Khdeir, J. N. Reddy**, 1994 Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *Int. J. Eng. Sci.* **32(12)** 1971-1980.
- [27] **A.Y. Aköz, F. Kadioğlu**, 1996 The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Computers and Structures* **60(4)** 643-651.
- [28] **A.Y. Aköz, F. Kadioğlu**, 1999 The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **44(12)** 1909-1932.
- [29] **F. Kadioğlu, A.Y. Aköz**, 2003 The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *An International Journal, Structural Engineering and Mechanics* **15(6)** 735-752.
- [30] **M. İnan**, 1988 Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Yayınları 6. Baskı
- [31] **T. Sarioğlu, S. Şengel**, 2005 Osman Gazi Üniversitesi Ders Notları, Eskişehir.
- [32] **N. İnce**, 2000 Düzlemsel Eğri Eksenli Ve Değişken Kesitli Tabakalı Kompozit Çubukların Düzlem İçi Ve Düzlemine Dik Serbest Titreşiminin Sayısal Analizi, *Doktora Tezi* , Adana
- [33] **J.D. Oden, J.N. Reddy**, 1976 Variational Method in Theoretical Mechanics, Springer, Berlin.
- [34] **N. Heubner**, 1975 The finite element method for engineers, Wiley, New York.

- [35] **P. Chidamparam, A.W. Leissa**, 1995 Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches, *Journal of Sound and Vibration* **183** 779-795.
- [36] **Y.P. Tseng, C.S. Huang, C.J. Lin**, 1997 Dynamic stiffness analysis for in-plane vibrations of arches with variable curvature, *Journal of Sound and Vibration* **207(1)** 15-31.
- [37] **J.S. Wu, L.K. Chiang**, 2004 A new approach for free vibration analysis of arches with effects of shear deformation and rotary inertia considered, *Journal of Sound and Vibration* **277** 49-71.
- [40] **O. Olgun**, 2004 Helisel Çubuklarda Statik Ve Dinamik Problemlerin Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi İle İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi* , İstanbul

Ekler

Ek 1:

A ve D Matrislerinin Sıfırdan Farklı Terimleri

Ek 2:

Eleman Matrisi

EK 1: A ve D Matrislerinin Sıfırdan Farklı Terimleri

$$A_{11} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} A^{(k)}$$

$$A_{22} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{22}^{(k)} A^{(k)}$$

$$D_{33} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} I_3^{(k)}$$

Yukarıda verilen ifadeleri tekrardan düzenlenir ise:

$$A_{11}' = \frac{1}{A_{11}}$$

$$A_{22}' = \frac{1}{A_{22}}$$

$$D_{33}' = \frac{1}{D_{33}}$$

$$\begin{bmatrix}
-\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{3} & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
-\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{6} & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{3} & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{3R} & -\frac{L}{6R} \\
0 & 0 & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{6} & -\frac{\bar{A}\bar{\omega}^2 L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6R} & -\frac{L}{3R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{3} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{D'_{33}L}{3} & -\frac{D'_{33}L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{D'_{33}L}{6} & -\frac{D'_{33}L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{3} & -\frac{L}{6} & 0 & 0 & -\frac{k'A'_{22}L}{3} & -\frac{k'A'_{22}L}{6} & 0 & 0 \\
\frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6} & -\frac{L}{3} & 0 & 0 & -\frac{k'A'_{22}L}{6} & -\frac{k'A'_{22}L}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{3R} & -\frac{L}{6R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A'_{11}L}{3} & -\frac{A'_{11}L}{6} \\
-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{6R} & -\frac{L}{3R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A'_{11}L}{6} & -\frac{A'_{11}L}{3}
\end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_{ti} \\ u_{tj} \\ u_{ni} \\ u_{nj} \\ \Omega_{bi} \\ \Omega_{bj} \\ M_{bi} \\ M_{bj} \\ T_{ni} \\ T_{nj} \\ T_{ti} \\ T_{tj} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Ek 2 : Eleman Matrisi

ÖZGEÇMİŞ

Cihan İYİDOĞAN 1984 yılında Ankara doğmuştur. İlk ve orta eğitimini T.E.D Ankara Kolejinde tamamlamıştır. 2002 yılında Celal Bayar Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümüne başlayıp, 2006 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi Yapı Ana Bilim dalında Yüksek Lisans eğitimine başlamıştır.