

VİSKOELASTİK ELİPTİK DÜZLEM ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Merve Ermiş¹, Akif Kutlu¹, Nihal Eratlı¹ ve Mehmet H. Omurtag¹

¹İstanbul Teknik Üniversitesi, Maslak-İstanbul

ABSTRACT

The objective of this study is to investigate the dynamic behavior of a linear viscoelastic elliptical beam having different types of boundary conditions and cross-sections subjected to vertical distributed loading by using the mixed finite method based on Timoshenko beam theory. It is assumed that, the linear viscoelastic material exhibits the standard type of distortional behavior while having elastic Poisson's ratio. The finite element analysis is carried out in Laplace space, the material properties are implemented into the formulation through the use of the correspondence principle. The results are transformed back to the time domain numerically by using of the Modified Durbin's transformation algorithm. Two different types of boundary conditions are considered in the problems: fixed-free, fixed-fixed. Different types of cross-sections keeping the net area equal to each other are selected: circular and two different elliptically oriented cross sections. The effect of different types of boundary conditions and cross-sections on the behavior of elastic and viscoelastic elliptical planar beam is investigated in detail and the examples are presented as original examples for the literature.

ÖZET

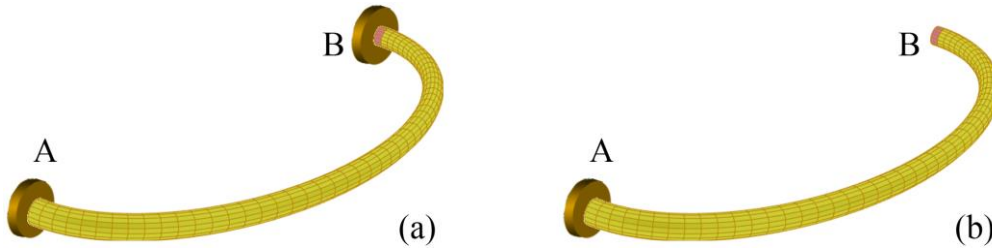
Bu çalışmanın amacı, Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman formülasyonunu kullanarak, farklı sınır koşulları ve çubuk kesitlerine sahip doğrusal viskoelastik eliptik kirişlerin düzgün yayılı yük etkisinde dinamik davranışını incelemektir. Doğrusal viskoelastik malzemenin kayma modülü standart model ile tanımlanmış ve Poisson oranının elastik olduğu kabul edilmiştir. Sonlu eleman çözümleri Laplace uzayında gerçekleştirileceği için, viskoelastik malzeme özellikleri karşılıklı ilkesi kullanılarak belirlenmiş ve Laplace uzayında elde edilen sonlu eleman sonuçları, geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Problemlerde iki farklı sınır koşulu kullanılmıştır: iki ucundan rijit tutulu ve konsol. Net alanları birbirine eşit olan farklı kesitler seçilmiştir: dairesel ve iki farklı oryantasyona sahip eliptik kesit geometrisi. Farklı sınır koşulları ve kesit türlerinin eliptik düzlem kirişin elastik ve viskoelastik davranışına olan etkisi detaylı olarak incelenerek özgün örnek olarak literatüre sunulmuştur.

GİRİŞ

Gerçek malzeme davranışı sönümü içerir. Buradan bakıldığında malzemeler farklı oranlarda elastik ve sürtünmeye dayalı olarak viskoz tavrı içindedir. Literatürde çok sayıda viskoelastik doğrusal çubuk çözümü ile ilgili [1-7], sınırlı sayıda viskoelastik dairesel çubuk çalışması mevcuttur [8-9]. Öte yandan yazarların bilgisi dahilinde literatürde viskoelastik eliptik çubukla ilgili bir çalışma bulunamamıştır. O nedenle sunulan çalışma tamamen özgündür.

Bu çalışmada, Timoshenko çubuk kuramı üstünden eliptik kirişlerin dinamik yükler altındaki viskoelastik davranışı, Laplace uzayında sonlu eleman çözümü üstünden incelenmiştir [10]. Doğrusal viskoelastik malzeme davranışı standart model ile tanımlanmış ve Poisson oranı

sabit alınmıştır. Sonlu eleman çözümü Laplace uzayında gerçekleştirileceği için, malzeme özelliklerinin frekans uzayına aktarımında karşılıklı ilkesinden yararlanılmıştır. Laplace uzayında gerçekleştirilen çözümler zaman uzayına geliştirilmiş Durbin algoritması [11-13] ile taşınmıştır. Bu çalışmada ele alınan problemlerde, iki ucundan rijit tutulu ve konsol olmak üzere iki farklı sınır koşuluna sahip (Şekil 1 a-b); kesit alanları birbirine eşit olan dairesel kesit ile iki farklı oryantasyona sahip eliptik kesit geometrisine (Şekil 2 a-c) sahip eliptik kiriş problemi ele alınmıştır. Problemler elastik ve viskoelastik olmak üzere iki kısımda ele alınmıştır. Elastik problem kısmında, dinamik davranış ilk beş frekans değeri üzerinden incelenirken; statik davranış ise düşeyde düzgün yayılı yük sonucu kirişte oluşacak maksimum yer değiştirme ve dönme ile mesnetlerdeki kuvvet ve moment değerleri üzerinden incelenmiştir. Aynı zamanda, bu çalışma kapsamında karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar ile SAP2000'den elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Viskoelastik problem kısmında ise, düşeyde etkiyen düzgün yayılı adım tipi yükün etkisinde, dairesel ve eliptik çubuk kesite sahip doğrusal viskoelastik kirişin viskoelastik davranışı incelenmiştir. Ele alınan, farklı sınır koşulları ile çubuk kesitleri için elde edilen sonuçlar mesnetlerdeki kuvvet ve momentler ile maksimum yer değiştirme ve dönmeler üzerinden kapsamlı bir şekilde tartışılmıştır. Çözülen örnekler literatür için tamamen özgündür.



Şekil 1. Düzlem eliptik kiriş

LAPLACE UZAYINDA ALAN DENKLEMLERİ ve FONKSİYONEL

Düzlem Geometri: Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı x-y düzleminde bulunan herhangi bir düzlem çubuğa ait konum vektörü ifadesi, x ekseninden itibaren ölçülen φ açısı parametre olarak seçilirse,

$$\mathbf{r}(\varphi) = \{x(\varphi), y(\varphi)\} \quad (1)$$

yazılır. Düzlem çubuğun eğriliği $\chi(\varphi)$ ve yay boyu s nin gradyeni olan $c(\varphi)$ fonksiyonları, (1) deki konum vektörü üstünden tanımlayacak analitik ifadeler

$$\chi(\varphi) = \|\mathbf{r}_{,ss}\|, \quad c(\varphi) = \|\mathbf{r}_{,\varphi}\|, \quad ds = c(\varphi)d\varphi \quad (2)$$

dir. Burada virgülden sonraki alt indis ifadeleri s ve φ sırasıyla yay boyu ve φ parametresine göre türevlerdir [14].

Kartezyen koordinatlardaki eliptik çubuğa (Şekil 1) ait ifadeler,

$$x(\varphi) = R_{\max} \cos \varphi, \quad y(\varphi) = R_{\min} \sin \varphi \quad (3)$$

olmak üzere, $R_{\min}$ ve $R_{\max}$ sırasıyla minimum ve maksimum yarıçaplardır.

Viskoelastik Malzeme Modeli: Malzemede zamana bağlı davranışı ifade etmek için çeşitli viskoelastik malzeme modelleri geliştirilmiştir. Bu mekanik modellerde, toplam gerilme elastik ve viskoz gerilme bileşenleri olmak üzere iki bileşenden oluşmaktadır. Elastik davranış yaylar ile temsil edilirken, viskoz davranış ise sönümleyiciler ile temsil edilmektedir. Karşılıklı ilkesi ile zaman uzayında tanımlı doğrusal viskoelastik problem, frekans uzayında

tanımlı sembolik bir elastik probleme dönüşmektedir [15]. Bu çalışmada kullanılan viskoelastik malzeme modelinde, standart modele ait kayma modülünün sanal karşılığı,

$$\bar{G} = G \left[\frac{1 + \beta^G \tau_r^G z}{1 + \tau_r^G z} \right] ; \beta^G = G_g / G > 1 \quad (4)$$

biçimindedir [16]-[17]. Burada τ_r^G gecikme zamanını, G denge ve G_g ise anlık konumu göstermektedir.

Üç boyutlu uzay çubuğa ait alan denklemleri Timoshenko çubuk kuramı üzerinden tarif edilip, Laplace uzayına taşındıktan sonra aşağıdaki yapıda yazılabilir [10].

$$-\bar{\mathbf{T}}_{,s} - \bar{\mathbf{q}} + \rho A z^2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$-\bar{\mathbf{M}}_{,s} - \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}} - \bar{\mathbf{m}} + \rho \mathbf{I} z^2 \bar{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{,s} + \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{\Omega}} - \bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{\Omega}}_{,s} - \bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$$

(5)'de z Laplace dönüşüm parametresidir. Frenet koordinat sisteminde $\mathbf{t}$ teğet birim vektör, $\mathbf{n}$ normal birim vektör ve $\mathbf{b}$ binormal birim vektörler olup, (5) ve (6) de yer alan Laplace uzayında tanımlı vektörel büyüklükler $\bar{\mathbf{u}} (\bar{u}_t, \bar{u}_n, \bar{u}_b)$ yer değiştirme, $\bar{\mathbf{\Omega}} (\bar{\Omega}_t, \bar{\Omega}_n, \bar{\Omega}_b)$ dönme, $\bar{\mathbf{T}} (\bar{T}_t, \bar{T}_n, \bar{T}_b)$ kuvvet ve $\bar{\mathbf{M}} (\bar{M}_t, \bar{M}_n, \bar{M}_b)$ moment, $\bar{\gamma}$ birim kayma, $\bar{\kappa}$ birim dönme, $\bar{\mathbf{C}}_\gamma$, $\bar{\mathbf{C}}_\kappa$ kompiyans matrisleri, $\bar{\mathbf{q}}$ ve $\bar{\mathbf{m}}$ yayılı yük ve moment vektörleridir. Ayrıca, ρ malzeme yoğunluğu, $\mathbf{I} (I_t, I_n, I_b)$ eylemsizlik moment vektörü ve A kesit alanıdır. (5) ve (6) kullanılarak denklemler operatör formda yazılır ve operatörün potansiyel olduğu ispatlandıktan sonra Laplace uzayındaki üç boyutlu çubuğa ait fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir [10].

$$\bar{\mathbf{I}}(\bar{\mathbf{y}}) = \left. \begin{aligned} & -[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}_{,s}] + [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{T}}] - [\bar{\mathbf{M}}_{,s}, \bar{\mathbf{\Omega}}] - \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{C}}_\kappa \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}] - \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{C}}_\gamma \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}}] + \frac{1}{2} \rho A z^2 [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}] \\ & + \frac{1}{2} \rho z^2 [\bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{\Omega}}] - [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}] - [\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{\Omega}}] + [(\bar{\mathbf{T}} - \hat{\bar{\mathbf{T}}}), \bar{\mathbf{u}}]_\sigma + [(\bar{\mathbf{M}} - \hat{\bar{\mathbf{M}}}), \bar{\mathbf{\Omega}}]_\sigma + [\hat{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\mathbf{T}}]_\epsilon + [\hat{\bar{\mathbf{\Omega}}}, \bar{\mathbf{M}}]_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

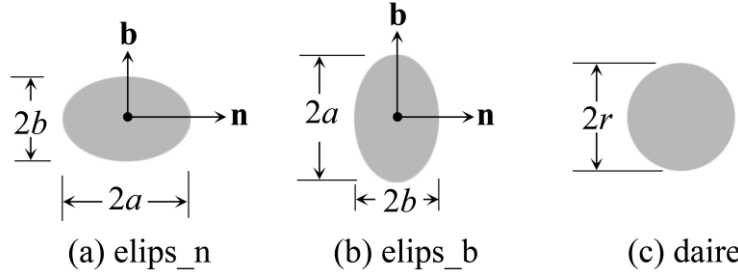
Bu çalışma için önerilen viskoelastik eliptik kiriş geometrisi, kullanılan viskoelastik modele ait malzeme bilgileri [10] da helisel problemler için doğrulaması gerçekleştirilen karışık sonlu eleman algoritmasına eklenmiş ve Laplace uzayında çözüm gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, daha sonra sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerinden biri olan geliştirilmiş Durbin algoritması [11-13] kullanılarak zaman uzayına geri taşınmıştır.

SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

İki düğüm noktalı eğrisel çubuk elemanın düğüm noktaları sırasıyla i ve j olmak üzere, iki düğüm noktası arasındaki merkez açı farkı $\Delta\varphi = (\varphi_j - \varphi_i)$ dir. Buna göre; doğrusal şekil fonksiyonları $\phi_i = (\varphi_j - \varphi) / \Delta\varphi$ ve $\phi_j = (\varphi - \varphi_i) / \Delta\varphi$ dir. 2×12 serbestlik derecesine sahip eğrisel çubuk elemanın her bir düğüm noktasında Frenet koordinat sisteminde tanımlanmış değişkenlere ait vektörler $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{\Omega}}$, $\bar{\mathbf{T}}$, $\bar{\mathbf{M}}$ dir. Düzlemde eliptik çubuk problemi çözülürken Frenet koordinat takımı (t, n, b) doğal koordinat takımı (t, n) ye dönüşür.

SAYISAL SONUÇLAR

Elastik ve viskoelastik analizlerde kullanılacak düzlem eliptik kiriş ve kesitler için ortak geometrik parametreler: eliptik düzlem kiriş geometrisinin en küçük yarıçapının, en büyük yarıçapa oranı $R_{\min} / R_{\max} = 0.5$ ($R_{\max} = 1\text{m}$) dir. İki farklı oryantasyona sahip eliptik kesitin (büyük yarıçapı Frenet birim koordinatları $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ doğrultusunda (Şekil 2a-b)) boyutları $a = 5\text{cm}$ ve $b = 2.5\text{cm}$ ile dairesel kesitin yarıçapı $r = 3.53553\text{cm}$ (Şekil 2c) dir. Eliptik kesite ait burulma eylemsizlik momenti $I_t = (\pi a^3 b^3) / (a^2 + b^2)$ [18] de verilmiştir.



Şekil 2. Kesit geometrileri ($a = 5\text{cm}$, $b = 2.5\text{cm}$, $r = 3.53553\text{cm}$)

1. Elastik Dinamik Analiz:

Malzeme özellikleri, elastisite modülü $E=206\text{GPa}$, Poisson oranı $\nu=0.3$ ve malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ tür. Her iki sınır şartı (iki ucu tutulu ve konsol) için;

Yakınsama Analizi ve SAP2000 ile Karşılaştırma: Daire kesitli eliptik kirişin ilk beş moduna ait frekans değerleri mercek altına alınarak;

- Karışık sonlu eleman formülasyonu ile 50 elemana göre yeteri yakınsaklığın elde edildiği sonuçlar, 20, 30 ve 40 eleman sonuçları ile birlikte Tablo 1’de sunulmuştur.
- SAP2000 programında, iki ucundan tutulu ve konsol sınır şartları için yeteri yakınsaklığın sağlandığı 120 ve 100 eleman sonuçları ile karşılaştırma Tablo 2’de verilmiştir. SAP2000 programından elde edilen sonuçlar, bu çalışmada elde edilen karışık sonlu eleman formülasyonundan elde edilen sonuçlara göre normalize edilerek yüzde farklar Tablo 2’de verilmiştir. Yüzdesel farklar incelendiğinde daha az elemanla karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak elde edilen sonuçların SAP2000 ile uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Tablo 1: Dairesel kesitli eliptik düzlem çubuğun ilk beş frekans (Hz) değerleri için yakınsama analizi (n_e :eleman sayısı).

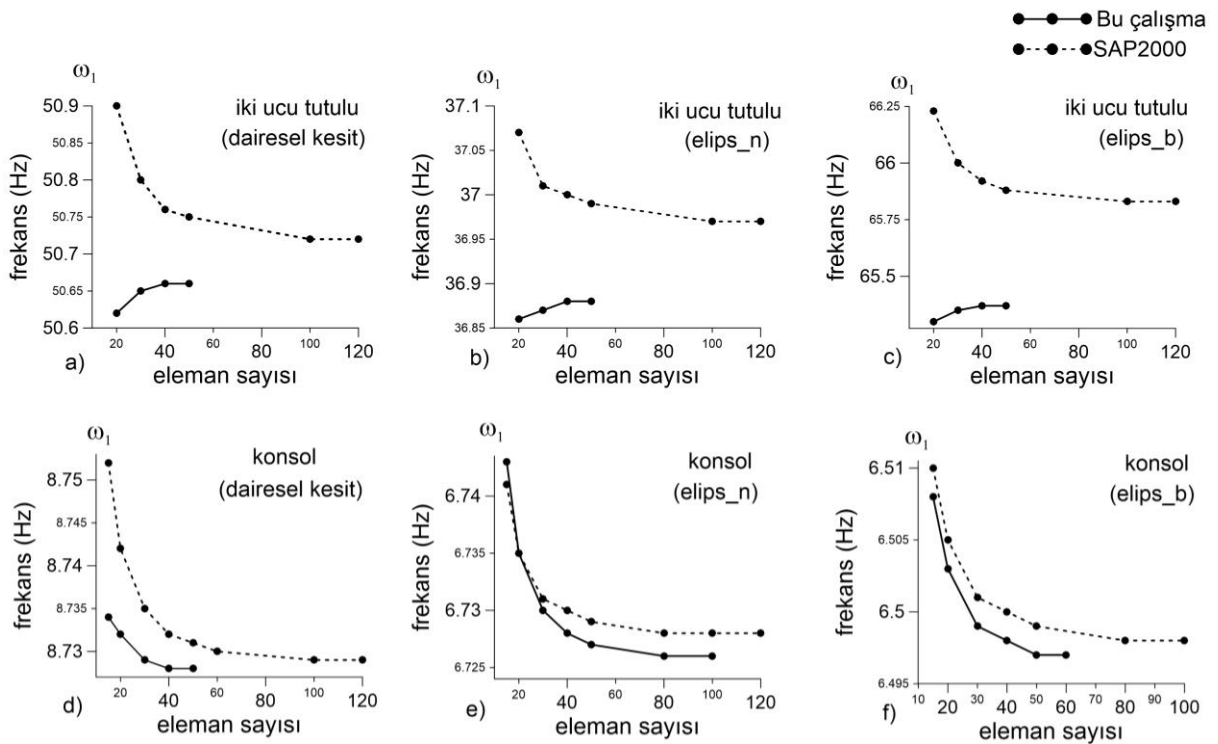
Mod Sayısı	Bu çalışma (karışık sonlu eleman formülasyonu)							
	İki ucu tutulu				konsol			
	$n_e = 20$	$n_e = 30$	$n_e = 40$	$n_e = 50$	$n_e = 20$	$n_e = 30$	$n_e = 40$	$n_e = 50$
1	50.62	50.65	50.65	50.66	8.73	8.73	8.73	8.73
2	129.76	129.96	130.02	130.05	9.19	9.19	9.19	9.19
3	141.1	141.23	141.26	141.28	42.26	42.32	42.34	42.35
4	184.94	185	185.04	185.06	43.65	43.71	43.73	43.74
5	275.22	275.81	275.94	275.98	76.41	76.91	77.08	77.16

Tablo 2: Dairesel kesitli eliptik düzlem çubuğun ilk beş frekans (Hz) değerinin karışık sonlu eleman formülasyonu ve SAP2000 programından elde edilen sonuçlarının karşılaştırılması

Mod Sayısı	İki ucu tutulu			konsol		
	Bu Çalışma	SAP2000	fark%	Bu Çalışma	SAP2000	fark%
	$n_e = 50$	$n_e = 120$		$n_e = 50$	$n_e = 100$	
1	50.66	50.72	-0.12	8.73	8.73	0.00
2	130.05	130.3	-0.19	9.19	9.19	0.00
3	141.28	141.65	-0.26	42.35	42.51	-0.38
4	185.06	185.55	-0.26	43.74	43.79	-0.11
5	275.98	277.68	-0.62	77.16	-	-

$$\text{fark\%} = (\text{Bu çalışma} - \text{SAP2000}) \times 100 / \text{Bu çalışma}$$

Kiriş Kesitindeki Değişimin Dinamik Davranışa Etkisi: Kesitleri daire, elips_n ve elips_b kesitli eliptik kirişler için;



Şekil 3: İki ucu tutulu ve konsol düzlem eliptik kirişe birinci frekans değeri için karışık sonlu eleman formülasyonundan ve SAP2000’den elde edilen sonuçlara göre yakınsama analizi

- Karışık sonlu eleman formülasyonu ve SAP2000 programı kullanılarak elde edilen birinci frekans değerlerine ait yakınsama grafikleri iki ucu tutulu (Şekil 3a-c) ve konsol (Şekil 3d-f) kiriş için sırasıyla verilmiştir.
- Elips_n ve elips_b kesitli eliptik kirişlerin ilk beş moduna ait frekans değerleri, daire kesitli eliptik kirişe ait frekans değerlerine göre normalize edilmiştir. Bu yüzde farklar ilk beş frekans değeri için sırasıyla verilmiştir. İki ucu tutulu elips_n kesitli eliptik kiriş için % 27.22, % 21.49, % -28.52, % -7.12, % 10.70 iken, iki ucu tutulu elips_b kesitli eliptik kesit için ise % -29.04, % 28.84, % 4.45, % -1.94, % -5.35, % 6.87 dir. Konsol elips_n kesitli eliptik kiriş için % 22.93, % -41.24, % 25.24, % -26.68, % 20.22 iken, konsol elips_b kesitli eliptik kesit için ise % 25.56, % -5.11, % 26.80, % -15.64, % 28.54 tür. Yüzde farklardaki artı işaretli değerler frekanslardaki azalmayı, eksi işaretli değerler artmayı göstermektedir.

2. Elastik Statik Analiz

Düşeyde etkiyen düzgün yayılı yükün şiddeti $q_z = 10 \text{ N/m}$ dir. Eliptik kirişlerin statik davranışı, en büyük düşey yer değiştirme u_z , en büyük dönme Ω_y , A noktasındaki kuvvet T_z , moment M_x ve M_y değerleri üzerinden, her iki sınır koşulu (iki ucu tutulu (Şekil 1a) ve konsol (Şekil 1b)) ve üç farklı kesit (daire, elips_n ve elips_b) durumu için incelenmiştir.

Tablo 3: İki ucu tutulu eliptik düzlem çubuğun karışık SE formülasyonu ve SAP2000 programından elde edilen sonuçların kıyaslanması

sınır koşulu	en kesit	eleman sayısı		En büyük		A noktası		
				$u_z \times 10^{-2} \text{ mm}$	$\Omega_y \times 10^{-5} \text{ rad}$	$T_z \text{ (N)}$	$M_x \text{ (Nm)}$	$M_y \text{ (Nm)}$
iki ucu tutulu	daire	$n_e = 60$	Bu çalışma	-0.4159	-0.3954	12.111	4.281	3.008
		$n_e = 100$	SAP2000	-0.4153	-0.3949	12.110	4.273	3.011
			fark%	0.14	0.13	0.01	0.19	-0.10
	elips_n	$n_e = 80$	Bu çalışma	-0.7855	-0.7263	12.111	4.277	3.093
		$n_e = 120$	SAP2000	-0.7822	-0.7259	12.110	4.273	3.094
			fark%	0.42	0.06	0.01	-0.03	-0.03
	elips_b	$n_e = 80$	Bu çalışma	-0.2490	-0.2571	12.111	4.280	2.807
		$n_e = 120$	SAP2000	-0.2462	-0.2568	12.110	4.273	2.811
			fark%	1.12	0.12	0.01	0.16	-0.14

$$\text{fark\%} = (\text{Bu çalışma} - \text{SAP2000}) \times 100 / \text{Bu çalışma}$$

Tablo 4: Konsol eliptik düzlem çubuğun karışık SE formülasyonu ve SAP2000 programından elde edilen sonuçların kıyaslanması

sınır koşulu	en kesit	eleman sayısı		En büyük		A noktası		
				$u_z \times 10^{-2} \text{ mm}$	$\Omega_y \times 10^{-5} \text{ rad}$	$T_z \text{ (N)}$	$M_x \text{ (Nm)}$	$M_y \text{ (Nm)}$
konsol	daire	$n_e = 60$	Bu çalışma	-15.454	9.412	24.221	8.544	-24.234
		$n_e = 100$	SAP2000	-15.456	9.399	24.220	8.545	-24.220
			fark%	-0.01	0.13	0.004	-0.01	0.06
	elips_n	$n_e = 60$	Bu çalışma	-25.501	16.449	24.221	8.544	-24.234
		$n_e = 100$	SAP2000	-25.495	16.434	24.220	8.545	-24.220
			fark%	0.02	0.04	0.004	-0.01	0.06
	elips_b	$n_e = 80$	Bu çalışma	-13.143	7.072	24.221	8.545	-24.228
		$n_e = 120$	SAP2000	-13.132	7.064	24.220	8.545	-24.220
			fark%	0.08	0.11	0.004	0.00	0.03

$$\text{fark\%} = (\text{Bu çalışma} - \text{SAP2000}) \times 100 / \text{Bu çalışma}$$

- Daire, elips_n ve elips_b kesitli eliptik kirişlere ait sonuçlar karışık sonlu eleman yöntemi ve SAP2000 programı kullanılarak yeteri yakınsaklığa sahip eleman sayıları için elde edilmiştir. SAP2000 programından elde edilen bu sonuçlar karışık sonlu

eleman yöntemine göre elde edilen sonuçlara göre normalize edilerek yüzde farklar hesaplanmıştır. Her iki yöntem (karışık SE ve SAP2000) göre hesaplanan değerler ve yüzde farklar, iki ucu tutulu ve konsol sınır koşulları için sırasıyla Tablo 3 ve 4'de verilmiştir.

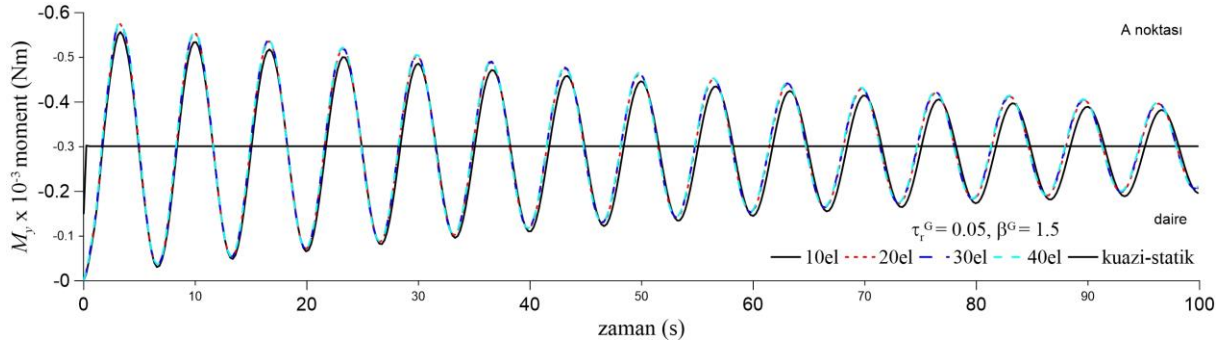
- Elips_n ve elips_b kesitli eliptik kirişlerin en büyük düşey yer değiştirme u_z , en büyük dönme Ω_y değerleri, daire kesitli eliptik kirişe ait değerlere göre normalize edilmiştir. Bu yüzde farklar en büyük düşey yer değiştirme u_z , en büyük dönme Ω_y değerleri için sırasıyla; elips_n kesitli iki ucu tutulu eliptik kiriş için % -88.9, % -83.7 iken, elips_b kesitli iki ucu tutulu eliptik kiriş için ise % 40.1, % 35 dir. elips_n kesitli konsol eliptik kiriş için % -65, % -74.8 iken, elips_b kesitli konsol eliptik kesit için ise % 15, % 25 dir. Her iki sınır koşulu için daire kesite göre normalize edilen yüzde farklar göz önüne alındığında, elips_n kesiti için (u_z , Ω_y) değerleri artarken, elips_b kesiti için azalmaktadır.

3. Viskoelastik Analiz

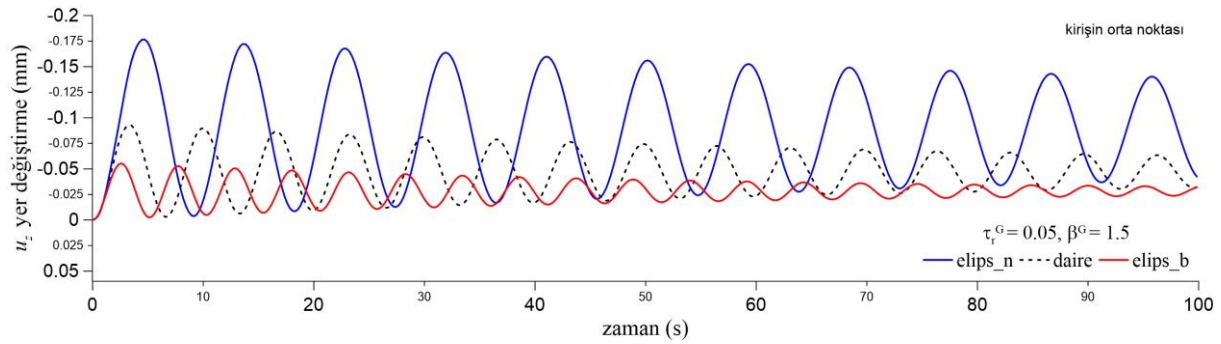
Çözümlerde kullanılan viskoelastik malzemeye ait bilgiler: $G = 7 \times 10^5$ Pa , Poisson oranı $\nu = 0.3$, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\tau_r^G = 0.05 \text{ s}$ ve $\beta^G = 1.5$ dir. τ_r^G ve β^G parametreleri (4) de kullanılarak kayma modülü (G) nin sanal karşılığı olan $\bar{G}$ hesaplanmıştır. Adım tipi düzgün yayılı yükün $q = q_z(t)$ şiddeti $q_0 = 10^{-3} \text{ N/m}$ dir. Düzlem kiriş probleminin çözümü Laplace uzayında gerçekleştirilmiş olup, sonuçların zaman uzayına taşınmasında kullanılan geliştirilmiş Durbin algoritması için kullanılan parametreler $aT = 6$ ve $N = 2^9$ olarak alınmıştır. İki ucundan rijit tutulu düzlem çubuğun orta noktasındaki düşey yer değiştirme (u_z) ile çubuğun tutulu ucundaki (Şekil 1a, A noktası) moment (M_y) ve konsol kirişin ise serbest ucundaki düşey yer değiştirme (u_z) ile çubuğun tutulu ucundaki moment (M_y) zaman içindeki değişimleri $0 \leq t \leq 100 \text{ s}$ aralığında incelenmiştir. Dairesel kesite sahip eliptik düzlem kiriş için yakınsama analizi iki ayrı sınır koşulu (iki ucu rijit ve konsol) kullanılarak yapılmış ve moment (M_y) için grafikler sırasıyla Şekil 3a ve 4a'da sırasıyla verilmiştir. Şekil 3a ve 4a daki ilk ekstremum değerler göz önüne alındığında, 40 sonlu eleman sonucuna göre normalize edilen 30 eleman sonuçları için yüzde farklar iki ucu tutulu ve konsol sınır koşulları için sırasıyla %0.13 ve %-0.1 dir. Çözümlere 40 eleman kullanılarak devam edilmiştir. Farklı sınır koşulları altında, kesit alanları eşit olan farklı türdeki kesitlerin düzlem eliptik kirişin dinamik davranış üzerindeki etkilerinin incelendiği sonlu eleman sonuçları Şekil 3b-c ve 4b-c de verilmiştir. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

- İki ucu tutulu ve konsol sınır koşullarına sahip düzlem eliptik kirişin dinamik davranışına ait genlik ve titreşim periyotları düşey yer değiştirme (u_z) ve moment (M_y) grafikleri üzerinden büyükten küçüğe doğru sıralanacak olursa elips_n, daire ve elips_b dir.
- İki ucu tutulu sınır koşulu kullanıldığında, dinamik davranışa ait titreşimin genliğinin ve periyodun konsol sınır koşuluna göre daha küçük olduğu ve dinamik davranışın daha çabuk sönümlendiği gözlenmiştir.
- Farklı kesit türlerinin dinamik davranış üzerindeki etkisini ortaya koyabilmek için düşey yer değiştirme (u_z) ve momente (M_y) ait grafiklerdeki ilk ekstrem değerler esas

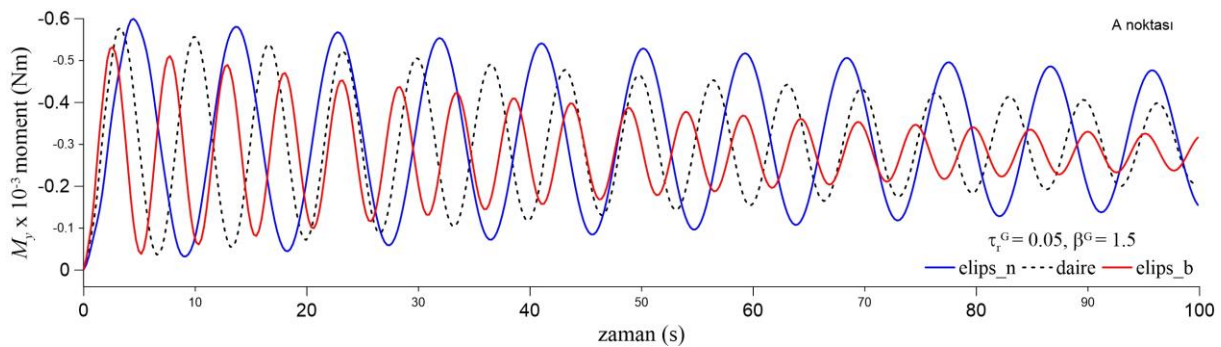
alınmış ve dairesel kesite sahip düzlem eliptik kiriş değerlerine göre normalizasyon yapılarak her iki tip sınır koşulu için farklar yüzde olarak verilmiştir. İki ucu tutulu eliptik kirişin düşey yer değiştirme (u_z) ve moment (M_y) ait yüzde farklar sırasıyla; elips_n kesiti için %-89.9 ve %-3.8 iken, elips_b kesiti için ise %67.8 ve %8.6 dır. Konsol eliptik kirişin düşey yer değiştirme (u_z) ve moment (M_y) ait yüzde farklar sırasıyla; elips_n kesiti için %-65.6 ve %0.3 iken, elips_b kesiti için ise %17.5 ve %0.7 dır. Yüzde farklardaki artı işaretli değerler düşey yer değiştirme (u_z) ve moment (M_y) değerlerindeki azalmayı gösterirken, eksi işaretli değerler artmayı göstermektedir.



(a) dairesel kesite sahip eliptik kiriş ait moment (M_y) için yakınsama analizi

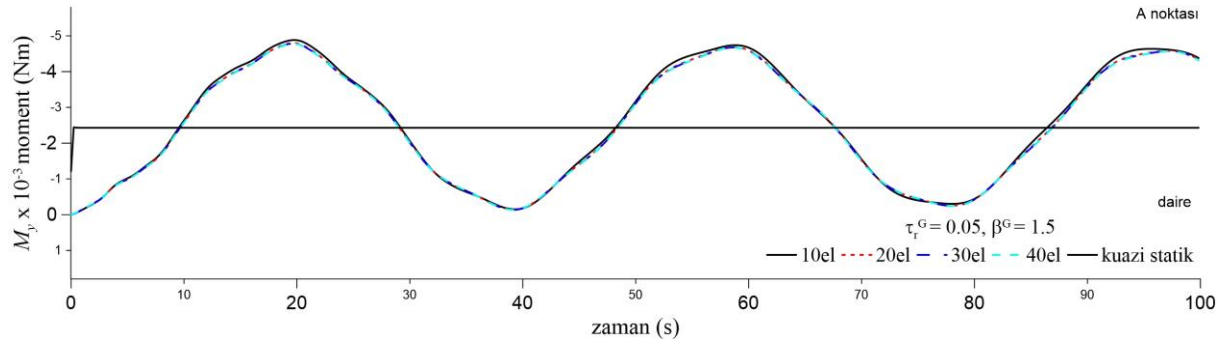
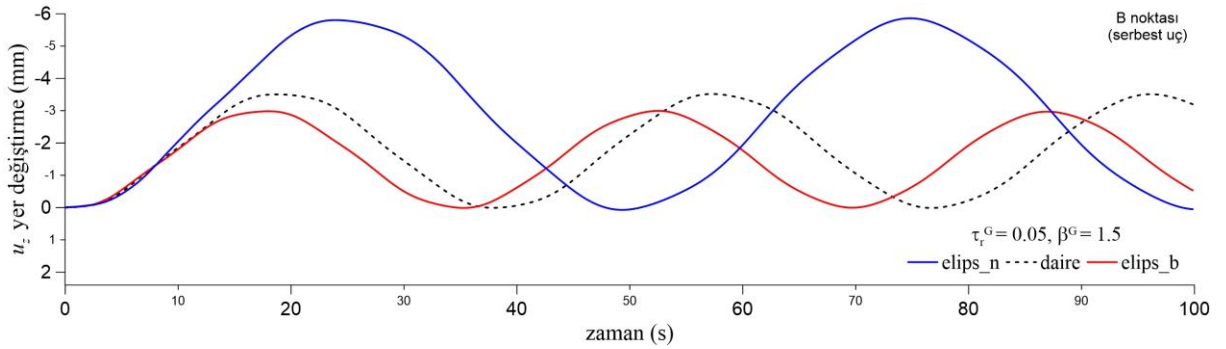
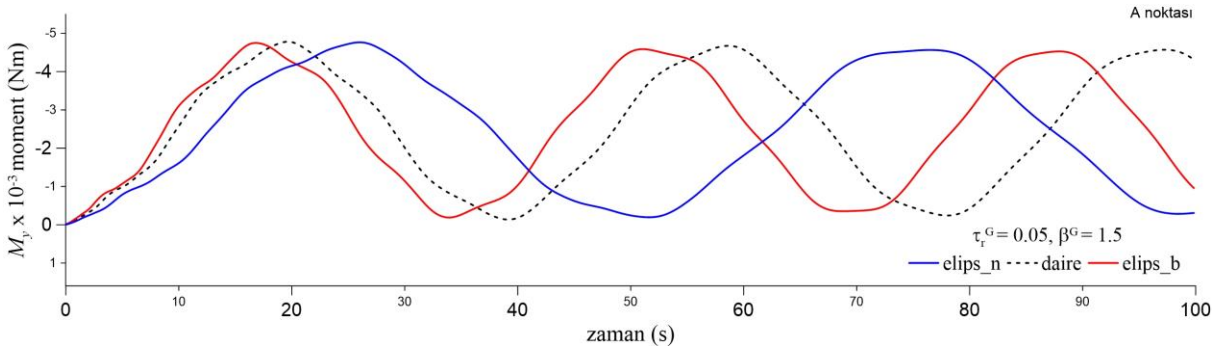


(b) farklı kesit türleri (elips_n, daire ve elips_b) ait u_z düşey yer değiştirme



(c) farklı kesit türlerine (elips_n, daire ve elips_b) ait M_y momenti

Şekil 3 Adım tipi düzgün yayılı yük etkisindeki iki ucu tutulu viskoelastik düzlem eliptik çubuğun farklı kesit türlerine ait dinamik davranışı

(a) dairesel kesite sahip eliptik kiriş ait (M_y) için yakınsama analizi(b) farklı kesit türleri (elips_n, daire ve elips_b) ait u_z düşey yer değiştirme(c) farklı kesit türlerine (elips_n, daire ve elips_b) ait M_y momenti**Şekil 4.** Adım tipi düzgün yayılı yük etkisindeki konsol viskoelastik düzlem eliptik çubuğun farklı kesit türlerine ait dinamik davranışı

SONUÇLAR

Eşit alana sahip farklı kesit türleri ve sınır koşullarının elastik ve viskoelastik düzlem eliptik kirişin serbest titreşim ve statik analizi ile dinamik davranışı üzerindeki etkileri sırasıyla incelenmiştir. Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman formülasyonuna ait elastik analiz sonuçları SAP2000 programından elde edilen sonuçlar üzerinden tartışılmıştır. Viskoelastik davranışı tanımlamada standart model kullanılmış, Poisson oranı sabit alınmış ve karşılıklı ilkesi kullanılarak çözüm algoritmasına eklenmiştir. Karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak Laplace uzayında problem çözülmüş ve sonuçlar geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Elde edilen sonuçlar detaylı olarak incelenmiş ve irdelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Y. Yamada, H. Takabatake, T. Sato, Effect of time-dependent material properties on dynamic response, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 8 (1974) 403–414. doi: 10.1002/nme.1620080216 .
- [2] T.M. Chen, The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1995) 509–522. doi: 10.1002/nme.1620380310.
- [3] C.M. Wang, T.Q. Yang, K.Y. Lam, Viscoelastic Timoshenko beam solutions from Euler-Bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*. 123 (1997) 746–748. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:7(746).
- [4] T. Kocatürk, M. Şimşek, Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load, *Computers and Structures*. 84 (2006) 2113–2127. doi: 10.1016/j.compstruc.2006.08.062.
- [5] T. Kocatürk, M. Şimşek, Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force, *Journal of Sound and Vibration*. 291 (2006) 302–322. doi: 10.1016/j.jsv.2005.06.024.
- [6] A. Keramat, K.H. Shirazi, Finite element based dynamic analysis of viscoelastic solids using the approximation of Volterra integrals, *Finite Elements in Analysis and Design*. 86 (2014) 89-100. doi:10.1016/j.finel.2014.03.010.
- [7] O. Martin, A modified variational iteration method for the analysis of viscoelastic beams, *Applied Mathematical Modelling*. 40 (2016) 7988–7995. doi: 10.1016/j.apm.2016.04.011.
- [8] I. Granstam, Contact between a curved viscoelastic beam and a rigid plane, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 8 (1973) 58–64. doi:10.1243/03093247V081058.
- [9] K. Nagaya, Y. Hirano, In-Plane Vibration of Viscoelastic Circular Rod with Consideration of Shearing Deformation and Rotatory Inertia, *Bulletin of JSME*. 20 (1977) 539-547. doi:10.1299/jsme1958.20.539.
- [10] N. Eratlı, H. Argeso, F.F. Çalım, B. Temel, M.H. Omurtag, Dynamic analysis of linear viscoelastic cylindrical and conical helicoidal rods using the mixed FEM, *Journal of Sound and Vibration*. 333 (2014) 3671–3690.
- [11] H. Dubner, J. Abate, Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform, *Journal of the ACM*. 15 (1968), 115–123. doi: 10.1145/321439.321446
- [12] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: An efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Computer Journal*. 17 (1974), 371–376. doi: 10.1093/comjnl/17.4.371
- [13] G. Narayanan, *Numerical Operational Methods in Structural Dynamics*, Doktora Tezi, University of Minnesota, 1980.
- [14] M. Ermiş, M.H. Omurtag, Static and Dynamic Analysis of Conical Helices Based on Exact Geometry via Mixed FEM, *International Journal of Mechanical Sciences*, 131-132 (2017) 296-304. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010
- [15] I.R. Shames, F.A. Cozarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, CRC Press Inc., 1997.
- [16] Y. Mengi, H. Argeso, A unified approach for the formulation of interaction problems by the boundary element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 66 (2006), 816-842. doi: 10.1002/nme.1585
- [17] B. Baranoglu, Y. Mengi, The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2006), 379-392. doi: 10.1016/j.cma.2006.07.003
- [18] S. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.