

39185

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENEL ŞEKİLLİ PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN
SONLU ELEMANLAR KULLANILARAK HESABI**

39185

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Erkan ŞAMHAL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Haziran 1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Temmuz 1993

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Zekai CELEP

Doç. Dr. Metin AYDOĞAN

TEMMUZ 1993

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında büyük yardım ve desteklerini gördüğüm tez danışmanı çok değerli sayın hocam Prof.Dr. Nahit KUMBASAR Bey'e, uyarı ve yapıcı eleştirilerinden dolayı çalışmalarımı hızlandırmamı sağlayan örnek insan Yard.Doç.Dr. A.Necmettin GÜNDÜZ'e, bana göstermiş oldukları iyiniyet ve yaptıkları katkılar için Araş.Gör.Canan GİRGİN, Araş.Gör.Engin ORAKDÖĞEN, Araş.Gör.Konuralp GİRGİN, Araş.Gör.Ercan YÜKSEL, Araş.Gör.Abdullah GEDİKLİ ve diğer çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunmayı zevkli bir görev bilirim.

Erkan ŞAMHAL

Mayıs 1993

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. PROBLEMİN TANITIMI	2
BÖLÜM 3. DİKDÖRTGEN PLAKLARIN TEORİSİ	3
3.1. İnce ve Çökmeleri Küçük Plakların Teorisi	3
3.1.1. Plaktaki İç Kuvvetler	3
3.1.2. Plaktaki Gerilmeler	6
3.1.3. Moment ve Kesme Kuvvetleri	7
3.1.4. Kalınlık Doğrultusundaki Gerilmeler	9
3.2. Gerilmelerin Plak İçinde Değişimi ve Plak Denklemi	10
BÖLÜM 4. SONLU ELEMAN DENKLEMLERİ, VARSAYIMLAR VE HESAP METODU	14
4.1. Üç Boyutlu Elastisite Teorisi	14
4.1.1. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları ve Hooke Kanunu	14
4.1.2. Şekil Değiştirme-Yer Değiştirme Denklemleri	16
4.2. Eleman Matrisi	18
4.2.1. Şekil Değiştirme Enerjisi Denklemi	18
4.2.2. İş Terimleri	20
4.2.3. Eleman Matrisinin Elde Edilmesi	21
4.3. Gerilme Bileşenleri	22
4.4. İki Boyutlu Elastisite	23
4.4.1. Giriş	23
4.4.2. Plak İçin Gerilme Durumu	24

4.4.3. Eleman Rijitlik Matrisi	25
4.5. Dikdörtgen Sonlu Eleman	26
4.6. Eleman Rijitlik Matrisinin Sayısal İntegrasyonla Elde Edilmesi	28
4.6.1. Rijitlik Matrisi	28
4.6.2. Gauss Sayısal İntegrasyonu	29
4.7. Bilineer Dörtgen Elemanın Biçim Fonksiyonları	32
4.8. Dönüştürme Matrisinin (Jacobian Matrisi) Elde Edilmesi	36
BÖLÜM 5. DİKDÖRTGEN PLAKLARIN TİTREŞİMİ	40
5.1. Titreşim Durumunda Plak Denklemi	40
5.2. Plakların Dinamik Hesabında Sonlu Eleman Metodu	42
5.2.1. Hareketin Matris Denklemi	42
5.2.2. Uyuşumlu Kütle Matrisi	44
5.2.3. Serbest Titreşim	45
BÖLÜM 6. SONUÇLAR	51
6.1. Elde Edilen Biçim Fonksiyonları	51
6.2. Oluşturulan Bilgisayar Programı	52
6.2.1. Program Akış Şeması	53
6.3. Sayısal Çözümler	55
6.3.1. Dört Kenarı Basit Mesnetli Dikdörtgen Plak	55
6.3.2. Konsol Plak	58
6.3.3. Paralelkenar Konsol Plak	60
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	65

ÖZET

Bu çalışmada ince dörtgen plakların serbest titreşimleri sayısal bir çözüm yöntemi olan Sonlu Elemanlar kullanılarak incelenmiştir.

Plak denklemleri, iki boyutlu elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş olup klasik plak teorisi adı altında literatürde mevcuttur. Plağın ince ve kalınlık doğrultusunda ortaya çıkan çökmelerin küçük olduğu varsayılmıştır.

Burada; cebrik denklem takımının; düğüm noktalarının bilinmeyen yerdeğiştirmeleri cinsinden ifade edildiği matris deplasman yaklaşımı ile beraber sonlu eleman metodu kullanılmıştır. Plak sistemi, sonlu sayıda dörtgen elemana ayrıldıktan sonra her düğüm noktasında iki adet dönme ve bir adet çökme serbestliğinin bulunduğu kabul edilmiştir. Plak eleman için çökme fonksiyonu, dördüncü dereceden bir polinom olarak elde edilmiş, iki boyutta ξ ve η tabi koordinatları kullanılarak her bir serbestliğe karşı gelen biçim fonksiyonları oluşturulmuştur. Her bir eleman için eleman rijitlik matrisi ve ardından sistem rijitlik matrisi elde edildikten sonra sistemin sınır şartları son elde edilen rijitlik matrisine uygulanmıştır. Plağın serbest titreşimleri inceleneceğinden yük vektörünün sıfır olacağı bilinmektedir.

Plağın sadece düşük birkaç modunun hesaplarla elde edilmesinin davranışın açıklanması bakımından yeterli olacağı görülmüş ve plak kütlelerinin sonlu elemanların düğüm noktasında toplandığı kabul edilmiştir. Böylece kütle matrisi köşegen olarak elde edilmiştir.

Hesapların yapılarak açısal frekans ve mod şekillerinin bulunması için özdeğer ve bunlara karşı gelen özvektörlerin çözülebildiği klasik-standart özdeğer yöntemi kullanılmıştır.

Sözkonusu hesapların hassas biçimde ve kısa sürede yapılması, çeşitli tip ve mesnet şartlarındaki plaklara uygulanabilmesi için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

SUMMARY

FREE VIBRATIONS OF THIN ARBITRARY SHAPED PLATES USING FINITE ELEMENT METHOD

In this study, free vibration of thin general shaped isotropic plates is investigated by using finite elements method a well-known.

A plate is a solid body, bounded by two parallel flat surfaces, whose lateral dimensions (the width and the length of a rectangular plate) are large compared to the distance (the thickness of the plate) between the flat surfaces. The theory of elastic plates is an approximation of three - dimensional elasticity theory to two - dimensions, and it can be used to determine the state of stress and deformation in plates. The approximations are simplifications that allow us only to consider deformation of the mid-plane of the plate. The plate thickness is measured in a direction normal to the mid-plane. The flexural properties of a plate depend greatly upon its thickness which is small in comparison with its other dimensions.

Behaviour of plates may be classified into three groups: Thin plates with small deflections, thin plates with large deflections and thick plates. According to the criterion often applied to define a thin plate (for purposes of technical calculations); the ratio of the thickness to the smaller span length should be less than $1/20$. Here, only small deflections of thin plates are considered. Such a simplification, consistent with the magnitude of deformation, has been commonly found in plate structures.

It is assumed that plate is homogeneous and isotropic. A homogeneous material displays identical properties throughout. When the properties are the same in all directions, the material is called isotropic. Such a solution is concerned with establishing the relations of the strain, stress, displacements and finally plate equation.

The small-deflection theory of bending of thin plates is known as the classical plate theory and is based on

assumptions similar to those used in the Euler-Bernoulli theory (or the classical beam theory). The fundamental assumptions of the Kirchhoff-Love or classical plate theory are :

- 1) The displacements of the mid-surface are small compared with the thickness of the plate and, therefore, the slope of the deflected surface is very small and the square of the slope is negligible compared to unity.
- 2) The mid-plane of the plate remains unstrained, that is, the mid-plane of the plate is neutral plane after the bending.
- 3) Plane sections initially normal to the mid-surface remain plane and normal to the mid-surface after bending. Analogous to beams, this assumptions implies that the transverse shear strains e_{xz} and e_{yz} are negligible. The deflection of the plate is thus associated principally with bending strains. Consequently, the transverse normal strain e_z resulting from transverse loading can be neglected.
- 4) The transverse normal stress σ_z is small compared with the other stress components of the plate and, therefore, can be neglected.

The finite element method can be regarded as an extension of the displacements method two and three - dimensional continuum problems, such as plates. In this method, the actual continuum is replaced by an equivalent idealized structure composed of discrete elements, referred to as finite elements, connected together a number of nodes.

By assuming displacement fields or stress patterns within an element, it is possible, by the use of energy theorems, to derive as stiffness matrix relating the nodal forces to the nodal displacements of an element. The stiffness matrix of the assemblage of element is then generated. If the conditions of equilibrium are applied at every node of the idealized structure, a set of simultaneous algebraic equations can be formed, the solution of which gives all the nodal displacements, which in turn are used to determine all the internal stresses.

The finite-element method may be also considered as a variational procedure in which the approximating functions are systematically derived by representing the given domain as a collection of simple subdomains. The

method differs in two ways from the traditional variational methods in generating the algebraic equations of the problem. First, the approximating functions are often algebraic polynomials that are developed using ideas from the interpolation theory; second, the approximating functions for subdomains into which a given domain is divided. Since the approximating functions are algebraic polynomials, the computation of coefficient matrices of the algebraic equations can be automatized on the computer.

Here, after being discretized plate system into parts, it is assumed that there are three nodal displacements on every node. First, displacement term in lateral direction and the others, δ_x and δ_y rotations, about y and x directions, respectively. Displacement function for rectangular plate is chosen fourth order polynomial as follows.

$$W_e = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (1)$$

The nodal displacements $\{ \delta \}_e$ are related to the displacement within the element by means of a displacement function $\{ W \}_e$. The latter is expressed in the following general form $\{ W \}_e = [N] \{ \delta \}_e$ where the braces indicate a column matrix and the matrix $[N]$ is a function of position. This matrix is referred to as shape function. It is, of course, desirable that a displacement function be chosen such that the true displacement field be as closely represented as possible.

When coefficients a_1 through a_{12} in the displacement function are known, the equation having been written for W_e will provide the displacement at all locations in the plate. The nodal displacement can be written as follows :

$$\{ \delta \}_e = [C] \{ a \} \quad (3)$$

From the foregoing, the solution for the unknown constants is

$$\{ a \} = [C]^{-1} \{ \delta \}_e \quad (4)$$

Matrix $[C]$ is dependent upon the coordinate dimensions of the nodal points. The displacements function may now

be written in the form following

$$\{ W \}_e = [N] \{ \delta \}_e = [L] [C]^{-1} \{ \delta \}_e \quad (5)$$

where

$$[L] = \begin{bmatrix} 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Strain-nodal displacement matrix [B] can be written as follows

$$[B] = \{ \delta \}_e \{ \epsilon \}_e^{-1} \quad (7)$$

After matrix [B] is established, stiffness matrix of an element is obtained in the form

$$[k^e] = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (8)$$

Stiffness matrices obtained for each quadrilateral plate element are assembled for whole plate system. Then, the boundary conditions associated with supporting of plate system are applied on the system stiffness matrix.

For the case of a free vibrating plate, the external force is zero, and the differential equation of the undamped motion becomes

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

For the purpose of practical analysis, a vibrating plate often must be represented by an equivalent discrete system. In devising such a lumped-parameter substitute system which approximates the dynamic response of the real structure with satisfactory accuracy, the concepts of framework and finite element representations of elastic continua can be extended by adding the appropriate inertia terms.

The convential procedure in construction of a mass matrix [$\bar{M}$] consists of simple lumping of the masses, associated with the tributary areas of the nodal points. This results in a diagonal matrix in the form

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{m}_{nn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

To solve free vibration of a plate using a numerical method, the expression which contains stiffness matrix $[K]$, angular frequency ω_i , nodal amplitudes, Φ_i , and mass matrix $[\bar{M}]$ should be arranged by the form following

$$(K - \omega_i^2 \bar{M}) \Phi_i = 0 \quad (11)$$

Equation (11) has the form of the algebraic eigenvalue problem. From the theory of homogeneous equation, nontrivial solutions exists only if the determinant of the coefficient matrix is equal to zero. Thus,

$$| K - \omega_i^2 \bar{M} | = 0 \quad (12)$$

Expansion of this determinant yields a polynomial of order n called the characteristic equation. The n roots ω_i^2 of this polynomial are the characteristic values, or eigenvalues. Substitution of these roots (one at a time) into the homogeneous equations [Eq(11)] produces the characteristic vectors, or eigenvectors Φ_i , within arbitrary constants.

A computer program is developed so that the solutions can be obtained at a short time and precisely; and used for each plate having various supporting conditions.

BÖLÜM-I

GİRİŞ

İçinde bulunduğumuz yıllarda sayısal hesaplayıcıların hem sayılarının hem de kapasitelerinin artması, bilimsel problemlerin çözümüne yeni bir boyut ve hızlılık getirmiştir. Bu yüzyılın başlarında çözülmesi çok zor yada imkansız gibi görülen problemler, bugün artık kısa sürelerde ve inanılmayacak hassasiyetle çözümlenebilmektedir.

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri ve belki de en kullanışlı olan sonlu elemanlar yöntemi 20. yüzyılın ikinci yarısından sonra gelişmiştir. Gelişmesinde hiç şüphe yok ki en büyük etken sayısal hesaplayıcı makinaların yaygın biçimde kullanılabilmesidir. Bu sayede birçok yapı problemi sözkonusu yöntem kullanılarak çözülebilmüş ve bir o kadarının da çok daha kısa sürede ve yüksek hassasiyetle çözülebileceği anlaşılmıştır.

Tüm titreşim problemlerinde olduğu gibi plak elemanların serbest titreşimlerinin analitik metodlar kullanarak incelenmesi: Elde edilecek olan denklem takımlarının çözülebilmesi ve bunların değerlendirilmesi bakımından oldukça zordur.

Bu çeşit bir problemi çözmek için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bir bilgisayar programının hazırlanması ve sonuçlarının değerlendirilmesi günümüzde oldukça uygun ve sık rastlanan bir olay haline gelmektedir.

BÖLÜM-II

PROBLEMİN TANITIMI

Bu çalışmada genel şekilli izotrop plakların serbest titreşimleri incelenmiştir. Plakın ince olduğu düşünülmüş ve klasik plak teorisi esas alınmıştır. Plak üzerinde dış yük yoktur.

Plak sistemi sonlu sayıda elemanlara bölündükten sonra her bir plak elemanı için doğal koordinatlar cinsinden biçim fonksiyonları oluşturulmuştur. Sonlu Eleman Yöntemi kullanılarak çözülen bu problemde bilinmeyenler düğüm noktaları yerdeğiştirmeleridir.

Titreşim hesabı sonucunda elde edilmesi gereken serbest titreşim periyotları ve bu periyotlara karşılık gelen mod şekilleridir. Titreşimi oluşturan, plakta ortaya çıkan atalet kuvvetleri kütle matrisiyle hesaba katılır.

Açısal frekansların ve mod şekillerinin sayısal olarak bulunabilmesi için klasik özdeğer ve özvektör çözüm yöntemi kullanılmıştır.

BÖLÜM-III

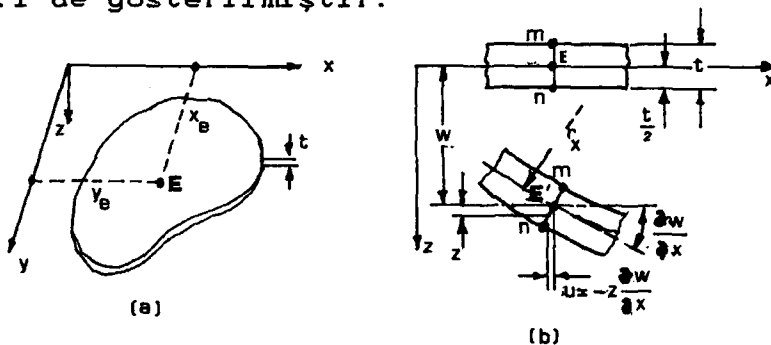
DİKDÖRTGEN PLAKLARIN TEORİSİ

3.1 İnce ve Çökmeleri Küçük Plakların Teorisi

3.1.1 Plaktaki İç Kuvvetler

Plak kalınlığı, uzunluk ve genişliğe nazaran küçük olduğu takdirde, orta düzleme dik bir doğru üzerinde bulunan noktaların şekildeğiştirmeden sonra da, şekil değiştirmiş orta düzleme dik doğru üzerinde kaldığı kabul edilebilir. Bundan başka plağın çökmeleri, kalınlığı yanında küçük ise, ortalama yüzeyde meydana gelen boy ve açı değişimleri ihmal edilebileceği için hesap, orta düzlemde alınan bir elemanın şekildeğiştirme yapmadığı esasına göre çözümlenecektir [1].

Plağın noktaları, xy düzlemi deforme olmamış plak orta düzlemine karşı gelen, bir x, y, z dikgen koordinat sistemine göre ölçülmektedir. Burada z eksenin pozitif yönü aşağı doğrudur. Böyle bir plağın şekildeğiştirmeden evvel ve sonra, $y=\text{sabit}$ düzlemi ile teşkil ettiği kesit Şekil-3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Plak Elemanı

Orta düzleme ait bir $(x,y,0)$ noktası z doğrultusunda bir w yerdeğiştirmesine maruz kalır ve bu anda, bu noktadan geçen ve orta düzleme dik olan normal, bir miktar eğilir. Bu eğilme $\partial w/\partial x$ ve $\partial w/\partial y$ açıları yardımıyla belirtilebilir. Orta düzlemden z mesafesinde bulunan bir (x,y,z) noktası ise plağın şekil değiştirmesi esnasında u,v ve w yer değiştirmelerine maruz kalacaktır. Burada plak kalınlığının küçük olduğu varsayıldığından z yönündeki yer değiştirme w alınabilir. x,y ve z doğrultularındaki şekil değiştirmeler aşağıda gösterilmiştir [2].

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ($i,j = x,y,z$). Bu ifadeler, kinematik bağıntılar olarak da isimlendirilmektedir. Çünkü şekil değiştirmenin geometrisinden türetilmişlerdir. Yukarıdaki bağıntılar plak çökmesinin, plağın kalınlığı boyunca değişmediğini gösterdiğinden

$$w = w(x,y)$$

ifadesi yazılabilir. u ve v yerdeğiştirmeleri şekil (3.1) den de görülebileceği gibi, x ekseninin negatif yönünde olup bunun için şekilden aşağıdaki ilk bağıntılar bulunabilir.

$$\begin{aligned}
 u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

İkinci bağıntı ise bu sefer, plağın x =sabit kesitindeki şekil değişiminin incelenmesinden elde

edilir. Orta düzlemde z mesafesinde bulunan ve oradakine paralel olan bir alan elemanının şekil değiştirme bileşenleri, (3.1) kinematik bağıntıları kullanılarak u, v ve w yer değiştirme bileşenleri yardımıyla ifade edilebilir. (3.2) yi kullanarak

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

bağıntıları elde edilir.

Orta düzleme dik olarak ve $+z$ doğrultusunda tesir eden yük, sürekli olarak dağılsın ve plağın $z=-t/2$ yüzüne tatbik edilsin. Bunun birim alana isabet eden şiddeti $p(x,y)$ fonksiyonu olup bu genel olarak x ve y koordinatlarına bağlıdır. Plağın alt ve üst yüzleri için aşağıdaki sınır şartları geçerlidir.

$$\begin{aligned}z = -t/2 : \sigma_z &= -p(x,y) & \tau_{zx} &= 0 & \tau_{zy} &= 0 \\ z = +t/2 : \sigma_z &= 0 & \tau_{zx} &= 0 & \tau_{zy} &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Plak içerisinde σ_z ; $-p(x,y)$ ile sıfır arasında değişen değerler alır. Genel olarak σ_z in $z = -t/2$ yüzünde ortaya çıkan mutlak değeri, σ_x ve σ_y nin sınır değerlerine nazaran küçük olduğundan σ_z gerilme bileşeni ihmal edilebilir. Üç boyutlu gerilme durumu düşünüldüğünde genelleştirilmiş Hooke kanunu kullanılarak elde edilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıda gösterilmiştir. Malzeme homojen ve izotropdur.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

burada $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (3.6)

3.1.2 Plaktaki Gerilmeler [2]

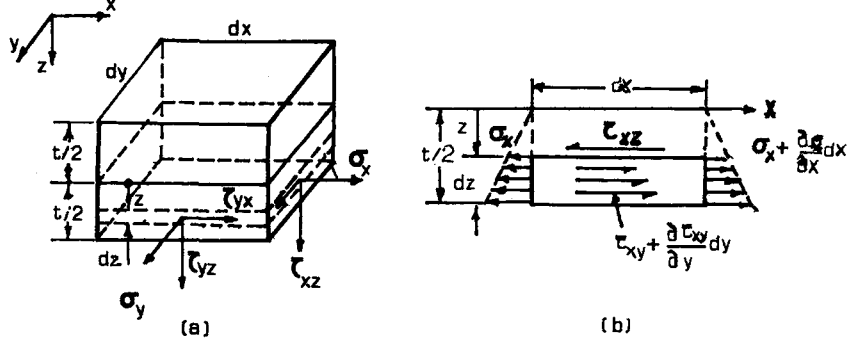
(3.1) bağıntıları hatırlanacak olursa, σ_z in de ihmal edilebileceğini gözönünde bulundurarak, gerilmeleri veren ifadeleri aşağıdaki biçimde elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y \right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x \right) \\
\tau_{xy} &= G \gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Yukarıdaki ifadeleri, ε_x ve ε_y nin (3.3) deki karşılıkları kullanılarak çökmeler cinsinden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
\sigma_y &= - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
\tau_{xy} &= - \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Bulunan gerilmelerin plak elemandaki dağılımları ve yönleri şekil-3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Plak Elemandaki Gerilme Dağılımları

Bu gerilme bileşenleri, orta düzlemden olan z mesafesiyle orantılı olup plak kalınlığı boyunca doğrusal olarak değişirler. Hesaba alınan bu gerilme bileşenlerinden başka τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri de meydana gelir. Çünkü aksi takdirde $p \, dx \, dy$ ile yüklenmiş olan hacim elemanını dengede tutmak mümkün olamaz. Bu kayma gerilmelerinin dağılımı, σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin dağılımına bağlıdır. Burada normal gerilmeler plak kalınlığı boyunca doğrusal olarak dağıldığından, kayma gerilmelerinin de doğru eksenli ve dikdörtgen kesitli çubuklarda olduğu gibi yine kalınlık boyunca parabolik olarak dağılması icabeder. (3.4) sınır şartlarına uygun olarak τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri de $z = \pm t/2$ kenarlarında sıfır olmalıdır.

3.1.3 Moment ve Kesme Kuvvetleri

Plak teorisinde gerilme bileşenleri yerine hesapta, kesitin birim boyuna isabet eden kesit momentleri ve kesit kuvvetlerini kullanmak adet olmuştur. Gerilme bileşenleri ile kesit büyüklükleri arasında aşağıdaki bağıntılar kullanılabilir.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (3.9)$$

burada $M_{xy} = M_{yx}$ ve

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.10)$$

M_x ve M_y ye eğilme momentleri denilir. Bunların indisleri, momentin etrafında döndüğü eksene göre değil, bunların meydana getirdiği normal gerilmelere göre verilir. M_{xy} burulma momenti, Q_x ve Q_y ise kesme kuvvetleri adını alır.

(3.9) ifadesinde gerilme bileşenlerinin yerine (3.8) deki değerleri konularak integrasyonlar yapılacak olursa

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ifadeleri bulunur.

Burada
$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

değerine plağın eğilme rijitliği veya kısaca plak rijitliği denilir.

3.1.4 Kalınlık Doğrultusundaki Gerilmeler

σ_z , τ_{xz} ve τ_{yz} gerilme bileşenlerinin bulunmasında izlenebilecek en iyi yol, genel bir gerilme durumu altındaki plak elemanı için diferansiyel denge denklemlerinin yazılmasıdır. Bu denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

(3.12)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Yukarıdaki ilk iki ifade ve (3.8) denklemleri kullanılarak τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri integrasyon sonucunda

$$\tau_{xz} = \int_z^{t/2} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz$$

$$= - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{t^2}{4} - z^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

(3.13)

$$\tau_{yz} = \int_z^{t/2} \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right] dz$$

$$= - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{t^2}{4} - z^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

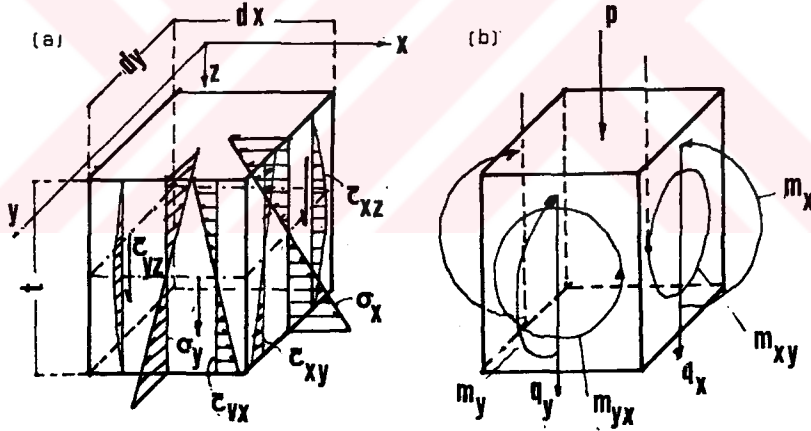
şeklini alır.

(3.12) denklemlerinin sonuncusu ile τ_{xz} ve τ_{yz} için bulunan yukarıdaki bağıntılar kullanılarak elde edilen σ_z normal gerilmesi aşağıda gösterilmiştir.

$$\sigma_z = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{t^3}{12} - \frac{t^3 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right] \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

σ_z normal gerilmesi dağılımı ,plak kalınlığı üzerinde bir kübik parabol şeklinde değişim gösterir.

Plak için bulunan tüm gerilmelerin plak üzerinde dağılımları ve karşı gelen moment yönleri Şekil-3.3 de gösterilmiştir.

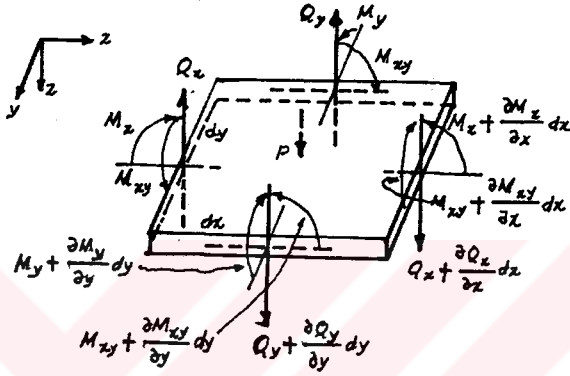


Şekil 3.3. Gerilme Dağılımları ve Momentler

3.2 Gerilmelerin Plak İçinde Değişimi ve Plak Denklemi

Yüklenmiş bir plakta gerilme bileşenleri genellikle noktadan noktaya değişim göstermektedir. Bu değişimler statik denge şartlarıyla karşılanır. Bu şartların yerine getirilmesi için denge denklemleri olarak bilinen belirli ifadelerin kurulması gerekmektedir.

Birim alana etki eden düzgün yayılı yüke maruz plağın $dx dy$ elemanını düşünelim (Şekil-3.4). Plak ağırlığının p yüküne nazaran çok az olmasından dolayı ağırlığı ihmal edelim ve elemanın çok küçük olduğunu farzedelim. Böylece kuvvet ve moment bileşenlerinin, her bir yüzde düzgün olarak dağılmış olduğu düşünülebilir. Şekil-3.4 de plak elemanı üzerinde kuvvet ve momentlerin yönleri ve değişimleri açık olarak görülmektedir.



Şekil 3.4. Kesme Kuvveti ve Moment Değişimleri

M_x ve M_y ; x ve y nin fonksiyonu olduğundan kısmi türevler kullanılmıştır. Şekil-3.4 de görülen plak elemanı için z doğrultusunda izdüşüm şartı yazılacak olursa

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0$$

ve buradan da $dx dy$ ile kısaltıldığında

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3.15)$$

bulunur. x eksenini etrafında moment dengesi yazılırsa

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0$$

ve düzenlenirse

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Aynı biçimde y ekseninde moment dengesi

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (3.17)$$

verir. Q_x ve Q_y nin (3.16) ve (3.17) denklemlerindeki ifadeleri (3.15) denkleminde yerine konacak olursa, ince plakların eğilme terimlerini içeren diferansiyel denge denklemi olan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (3.18)$$

Q_x ve Q_y düşey kesme kuvvetleri w (çökme) cinsinden (3.16), (3.17) ve (3.11) denklemleri yardımıyla bulunur.

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad (3.19)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w)$$

Burada

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.20)$$

Laplace operatörüdür.

Son olarak (3.15) ve (3.19) ifadeleri aynı anda kullanılacak olursa çökmeler cinsinden plak denklemi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (3.21)$$

biçimiyle elde edilir. ∇ operatörünü kullanmak suretiyle bu denklem aşağıdaki biçimi alır.

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (3.21a)$$

Lineer, kısmi, dördüncü mertebeden ve homojen olmayan bu denklem, plağın $w(x,y)$ elastik yüzeyini karakterize eder ve plak denklemi adını alır. Bu denklemin, belirli yüklemeye maruz bir plak için yükleme ve mesnetlemeden meydana gelen bütün sınır şartları dikkate alınarak integrasyonu yapılabilirdiği takdirde problemin kesin çözümü elde edilmiş olur.

Plak üzerine etki eden herhangi bir dış yük yoksa (yani titreşiyorsa) denklem :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.22)$$

şeklını almaktadır [2].

BÖLÜM-IV

SONLU ELEMEN DENKLEMLERİ, VARSAYIMLAR ve HESAP METODLARI

4.1 Üç Boyutlu Elastisite Teorisi

4.1.1 Gerilme-Şekil Değiştirme ve Hooke Kanunu

Bir noktadaki gerilme durumu, dış yüklerden ve/veya sıcaklık değişiminden ortaya çıkan iç kuvvetlerin oluşturduğu altı adet gerilme bileşeniyle tanımlanmaktadır. Bu altı adet bileşen bir kolon vektörde gösterilmiştir.

$$\left\{ \sigma \right\}^T = \left[\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} \right] \quad (4.1)$$

Yüklerin bir katı cisme etki etmesi cismin şekil değiştirmesine sebep olur. Bu durumda cisim üzerindeki her bir noktanın yeri değişir. Bileşke yerdeğiştirmenin, x, y ve z eksenlerine paralel u, v ve w ile gösterilen üç adet bileşeni mevcuttur. Aynı zamanda şekil değiştirmeyi de incelemek için altı adet şekil değiştirme bileşeni tanımlanmıştır. Cismin şekil değiştirmesi, mademki dış yüklerden ve/veya sıcaklık değişiminden ortaya çıkmaktadır, o halde şekil değiştirme bileşenleri de elastik şekil değiştirme (ϵ) ve sıcaklık değişiminden dolayı meydana gelen şekil değiştirme (ϵ_T) olarak iki kısma ayrılmalıdır. Toplam şekil değiştirme (e), elastik şekil değiştirme (ϵ) ve termal şekil değiştirme (ϵ_T) aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \left\{ e \right\}^T &= \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yy} & e_{zz} & e_{xy} & e_{xz} & e_{yz} \end{bmatrix} \\ \left\{ \varepsilon \right\}^T &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \\ \left\{ \varepsilon_T \right\}^T &= \begin{bmatrix} \alpha \delta T & \alpha \delta T & \alpha \delta T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada α : sıcaklık genleşme katsayısı, δT : sıcaklık değişimidir. Toplam şekil değiştirme

$$\left\{ e \right\} = \left\{ \varepsilon \right\} + \left\{ \varepsilon_T \right\} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır.

Gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri, Hooke kanunu olarak bilinen katsayılar takımıyla ilgilidir.

Genelleştirilmiş Hooke kanunu aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left[D' \right] \left\{ \sigma \right\} , \quad \left\{ \sigma \right\} = \left[D \right] \left\{ \varepsilon \right\} \quad (4.4)$$

D^{-1} matrisi

$$\left[D \right]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ve D matrisi

$$[D] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu)/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-2\nu) & (1-\nu)/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & (1-\nu)/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

şeklinde düzenlenmiştir. E: Elastisite modülü, ν : Poisson oranıdır.

$$[D][D]^{-1} = [I] \quad \text{ve } \nu < 1/2 \text{ olması gerektiği}$$

hatırlanmalıdır.

4.1.2 Şekil Değiştirme Yer Değiştirme Bağıntıları

Herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme bileşenlerinin tümü, x, y, z koordinatlarının fonksiyonudur.

$$u_n = f(x, y, z) \quad v_n = g(x, y, z) \quad w_n = h(x, y, z) \quad (4.7)$$

n : eleman düğüm noktası sayısıdır.

Her analitik yöntemin ve sonlu eleman analizinin amacı $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ fonksiyonlarını elde etmektir. Söz konusu fonksiyonlar, her bir eleman üzerinde yazılan sürekli fonksiyonlardır. Bu eleman denklemleri, problemi çözmek için kullanılan eleman tipine bağlıdır. Elastisite problemleri çözüleceği zaman çözüm için kullanılacak eleman tipini seçebileceğimizden, yerdeğiştirme denklemlerini aşağıdaki gibi genel biçimde yazabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{u^e\} \quad (4.8)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \text{ kısaca } \{w\}_e \text{ ve } \{u^e\} \text{ kısaca } \{\delta\}_e \text{ ile}$$

gösterilecektir.

Burada $\{\delta\}_e$, elemanın düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerini içeren kolon vektörüdür. $[N]$ matrisi ise eleman şekil değiştirme fonksiyonlarından oluşmuştur.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları,

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.9)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

biçiminde yazılabilir.

Bu bağıntılarla, düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmeler arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir.

$$\{e\} = [B] \{\delta\}_e \quad (4.10)$$

Yukarıda gösterilen B matrisi, altı adet satıra ve düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme sayısı kadar kolona sahiptir. B'nin ilk satırı u yerdeğiştirme bileşeninin x'e göre türetilmesiyle elde edilir. İkinci satır $\partial v / \partial y$ türevlerinden oluşur. Bu şekilde diğer satırlar

tamamlanır. Hatırlanması gereken şey, elemanın düğüm noktası sayısı kadar u, v ve w parametrelerinin elde edilmesi gerektiğidir.

4.2 Eleman Matrisi

Potansiyel enerji minimize edildiğinde ortaya çıkan denklemler sistemine, elemanın tipiyle ilgili eleman rijitlik matrisi ve yüklemeden ortaya çıkan eleman yük vektörü de katkıda bulunur. Potansiyel enerji ifadesi: şekil değiştirme enerjisi ve sisteme etki eden yüklerden meydana gelen iş terimlerinden oluşur.

4.2.1 Şekil Değiştirme Enerjisi Denklemi [3]

Üç boyutlu elastik cisim için şekil değiştirme enerjisi ifadesi genel biçimde aşağıdaki gibi yazılır.

$$A^e = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} \right] dV \quad (4.11)$$

Bu ifade kısaca

$$A^e = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma \right\}^T \left\{ \epsilon \right\} dV \quad (4.12)$$

şeklinde gösterilebilir. Gerilme bileşenleri için daha önce bulunan (4.4) bağıntısı kullanılırsa yukarıdaki ifade D matrisi simetrik olduğu için

$$A^e = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \epsilon \right\}^T [D] \left\{ \epsilon \right\} dV \quad (4.13)$$

şeklini alır.

Şekil değiştirme enerjisi Λ^* , yer değiştirmeler cinsinden yazılmalıdır. Bununla beraber düğüm noktası yerdeğiştirmelerinin elastik şekil değiştirme bileşenleriyle değil, toplam şekil değiştirme bileşenleriyle ilgili olduğu belirtilmişti. $\{\epsilon\}$ için (4.3)'ü çözersek

$$\{\epsilon\} = \{e\} - \{\epsilon_T\} \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu ifadeyi (4.13)'de yerine yazdığımızda

$$\Lambda^* = \frac{1}{2} \int_V \left[\{e\} - \{\epsilon_T\} \right]^T [D] \left[\{e\} - \{\epsilon_T\} \right] dV \quad (4.15)$$

bulunur.

Bunu açık olarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \frac{1}{2} \int_V \{e\}^T [D] \{e\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{e\}^T [D] \{\epsilon_T\} dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_T\}^T [D] \{e\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_T\}^T [D] \{\epsilon_T\} dV \end{aligned} \quad (4.16)$$

$[D] \{\epsilon_T\}$ çarpımı bir kolon vektördür. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \{e\}^T [D] \{\epsilon_T\} &= \left[[D] \{\epsilon_T\} \right]^T \{e\} \\ &= \{\epsilon_T\}^T [D]^T \{e\} = \{\epsilon_T\}^T [D] \{e\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılabilir. Böylelikle ikinci ve üçüncü integraller benzer olacaktır. Bu özelliği kullanarak ve son integral

ifadesinin deplasmanlardan bağımsız olduğu görülerek Λ^e

$$\Lambda^e = \frac{1}{2} \int_V \{ e \}^T [D] \{ e \} dV - \int_V \{ e \}^T [D] \{ \epsilon_T \} dV \quad (4.18)$$

şeklini alır. Son adım $\{e\}$ için (4.10) denklemini yerleştirmektir. Neticede düğüm noktası yerdeğiştirmeleri cinsinden yazılan şekil değiştirme enerjisi denklemi aşağıda gösterilmiştir.

$$\Lambda^e = \frac{1}{2} \int_V \{ \delta \}^T [B]^T [D] [B] \{ \delta \} dV - \int_V \{ \delta \}^T [B]^T [D] \{ \epsilon_T \} dV \quad (4.19)$$

4.2.2 İş Terimleri

Uygulanan yüklerin yaptığı iş üç kısma ayrılabilir. Bunlar:

- 1) Dış yüklere ait olan
- 2) Dış yüzeye etki eden gerilme bileşenlerinden ortaya çıkan (W_p)
- 3) Cisim kuvvetlerinin oluşturduğu (W_{bf})

kısımlardır. Dış kuvvetlerin yaptığı iş:

$$\{ \delta \}^T [N]$$

şeklinde bir çarpımdır. Hacim kuvvetlerince (X,Y,Z) yapılan iş;

$$W_{bf}^e = \int_V [u X + v Y + w Z] dV \quad (4.20)$$

biçiminde verilmektedir. Burada u, v ve w ; eleman için yerdeğiştirmelerin x, y ve z yönünde bileşenleridir.

Sözkonusu iş; düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve şekil fonksiyonları cinsinden (4.8) ve (4.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_{bf}^e = \int_v \left\{ \delta \right\}_e^T \left[N \right]^T \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\} dv \quad (4.21)$$

Yüzeye etki eden yayılı yüklerin yaptığı iş

$$W_p^e = \int_{\Gamma} \left(u p_x + v p_y + w p_z \right) d\Gamma \quad (4.22)$$

ifadesiyle verilmektedir. Burada u, v ve w yerdeğiştirme bileşenleri ve p_x , p_y ve p_z ; x, y ve z koordinat doğrultularına paralel gerilme bileşenleridir. Bu kuvvetlerin yaptığı iş, hacim kuvvetlerince yapılan işe benzer biçimde aşağıda olduğu gibi ifade edilebilir.

$$W_p^e = \int_{\Gamma} \left\{ \delta \right\}_e^T \left[N \right]^T \left\{ \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \right\} d\Gamma \quad (4.23)$$

4.2.3 Eleman Matrisinin Elde Edilmesi

Sürekli bir üç boyutlu elastik sistemde toplam potansiyel enerji ifadesi

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \Pi^e - \left\{ \delta \right\}^T \left\{ N \right\} \quad (4.24)$$

olarak tanımlanmaktadır.

$$\Pi^e = \Lambda^e - W_{bf}^e - W_p^e \quad (4.25)$$

şeklindedir. Yukarıdaki üç terim için daha önce bulunan

ifadeler kullanılırsa aşağıdaki genel denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \left\{ \delta \right\}_e^T \left(\int_V \left[B \right]^T \left[D \right] \left[B \right] dV \right) \left\{ \delta \right\}_e \\ & - \left\{ \delta \right\}_e^T \left(\int_V \left[B \right]^T \left[D \right] \left[\epsilon_T \right] dV + \int_V \left[N \right]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dV + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \left[N \right]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Elde edilen genel denklemde eleman rijitlik matrisi:

$$\left[k^e \right] = \int_V \left[B \right]^T \left[D \right] \left[B \right] dV \quad (4.27)$$

ve eleman yük vektörü:

$$\begin{aligned} \left\{ f^e \right\} = & \int_V \left[B \right]^T \left[D \right] \left[\epsilon_T \right] dV + \int_V \left[N \right]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dV + \\ & + \int_{\Gamma} \left[N \right]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.28)$$

biçimiyle verilmektedir.

4.3 Gerilme Bileşenleri

Yapı mühendisliği problemlerinin çözümünde, maksimum yerdeğiştirmelerin veya gerilme bileşenleri değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Sonlu eleman denklem sistemi

çözüldüğünde düğüm noktası yerdeğiştirmeleri elde edilir. Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri bilindiğinde ise gerilme bileşenleri hesaplanabilir.

Gerilme bileşenlerinin hesaplanmasında kullanılan genel denklem

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \} \quad (4.29)$$

şeklinde daha önce ifade edilmişti. Elastik şekil değiştirme bileşenleri genel biçimde kullanılırsa yukarıdaki ifade

$$\{ \sigma \} = [D] \left[\{ \epsilon \} - \{ \epsilon_T \} \right] \quad (4.30)$$

biçimini alır. Elde edilen son ifade, denklem (4.10) kullanılarak düğüm noktası yerdeğiştirmeleri cinsinden yazılabilir. Ortaya çıkan çözüm; eleman düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve termal şekil değiştirme vektörünün bir fonksiyonu olarak gerilme bileşenlerini vermektedir.

$$\{ \sigma^e \} = [D] \left[[B] \{ \delta \}_e - \{ \epsilon_T \} \right] \quad (4.31)$$

4.4 İki Boyutlu Elastisite

4.4.1 Giriş

Bir önceki kısımda türetilen ifadeler elastik bir cisimde üç boyutlu gerilme durumu düşünülerek elde edilmişti. Bu kısımda iki boyutlu problemlerde kullanılmak üzere iki boyutlu elastisite ile ilgili ifadeler, üç boyutlu elastisitede elde edilenlerin basitleştirilmişi olarak elde edilecektir.

4.4.2 Plak Elemanı İçin Gerilme Durumu

Plak kalınlığı ince olduğu için kalınlık doğrultusunda gerilme bileşenleri daha önceki üçüncü bölümde tarif edildiği üzere ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Mevcut gerilme bileşenleri σ_{xx} , σ_{yy} ve σ_{xy} dir. Bu hal için gerilme vektörü aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\left\{ \sigma \right\}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Sıfır olan gerilme bileşenlerinin, Hooke kanunundan bildiğimiz

$$\left\{ \epsilon \right\} = \left[D \right]^{-1} \left\{ \sigma \right\} \quad (4.33)$$

ifadesinde yerine yazılmasıyla kalınlık doğrultusunda şekil değiştirme bileşenleri

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right) \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \quad (4.34)$$

biçimiyle elde edilir. ϵ_{zz} şekil değiştirme bileşeni sıfır değildir. Fakat σ_{xx} ve σ_{yy} bileşenlerinin bilinmesi şartıyla hesaplanabilir. Elastik şekil değiştirme, toplam şekil değiştirme ve sıcaklık değişimlerinden oluşan şekil değiştirme vektörlerinin plak eleman için bulunan karşılıkları aşağıda gösterilmiştir.

$$\left\{ e \right\}^T = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yy} & e_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \epsilon \right\}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\left\{ \epsilon_T \right\}^T = \begin{bmatrix} \alpha \delta T & \alpha \delta T & 0 \end{bmatrix}$$

σ ve ϵ bileşenleri arasında ilişkiyi kuran elastisite matrisi, (4.6) ifadesinin 3., 5. ve 6. satır ve kolonları yok edilerek

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

şeklinde bulunur.

4.4.3 Eleman Rijitlik Matrisi

Eleman rijitlik matrisi (4.27) ifadesi ile

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

şeklinde verilmişti. Bu integral, $[B]$ ve $[D]$ değerleri tamamen sabit terimlerden oluştuğundan kolayca hesaplanabilir. Sonuçta eleman rijitlik matrisi:

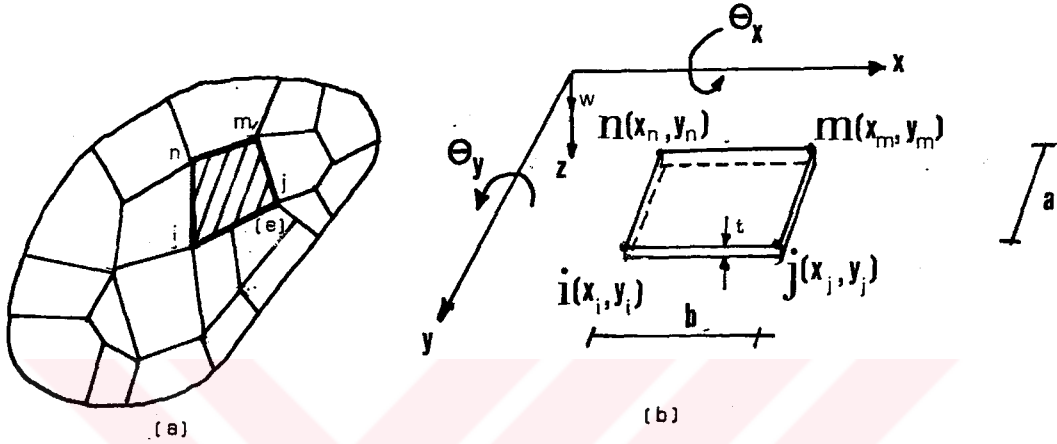
$$[k^e] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \quad (4.37)$$

şeklini alır. Burada t : eleman kalınlığı ve A : eleman alanıdır [3],[4],[5],[6],[7]..

$[B]^T [D] [B]$ matris çarpımının denklem biçiminde yazıldıktan sonra eleman rijitlik matrisinin elemanlarının tek tek hesaplanması oldukça karışık ve zahmetlidir. En kolay çözüm: B ve D matrislerinin elde edilmesinden sonra hesapların bilgisayar yardımıyla yapılmasıdır.

4.5 Dikdörtgen Sonlu Eleman [2]

Yer değiştirme fonksiyonu: Eleman düğüm noktası yer değiştirmeleri, şekil-4.1'de gösterildiği gibi her düğüm noktası için üç adet seçilebilir. Dörtgen plak için toplam oniki adet yer değiştirme bileşeni seçilmiştir.



Şekil 4.1. Dikdörtgen Sonlu Eleman

Eleman düğüm noktası yer değiştirmeleri vektörü aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$$\left\{ \delta \right\}_e^T = \left\{ w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, w_m, \theta_{xm}, \theta_{ym}, w_n, \theta_{xn}, \theta_{yn} \right\} \quad (4.38)$$

ijmn elemanı yerdeğiştirmeleri için polinom biçiminde olan fonksiyon

$$W_e = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir. Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ile plak elemanın herhangi bir noktasındaki yerdeğiştirmeleri veren yerdeğiştirme fonksiyonu W_e arasındaki bağıntı

aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\{ w \}_e = [N] \{ \delta \}_e \quad (4.40)$$

Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri aynı zamanda

$$\{ \delta \}_e = [C] \{ a \} \quad (4.41)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada **C** matrisi düğüm noktası koordinatlarını içeren 12x12 lik koordinat matrisi ve **a** ise yerdeğiştirme fonksiyonundaki bilinmeyen sabitlerden oluşan matristir. **a** sabitler vektörü

$$\{ a \} = [C]^{-1} \{ \delta \}_e \quad (4.42)$$

biçiminde düzenlenebilir. Böylelikle yerdeğiştirme fonksiyonu koordinatlar cinsinden elde edilmiş olur.

$$\{ w \}_e = [N] \{ \delta \}_e = [L] [C]^{-1} \{ \delta \}_e \quad (4.43)$$

Burada

$$[L] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \quad (4.44)$$

şeklindedir. Genelleştirilmiş şekil değiştirme - yerdeğiştirme vektörünü

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\}_e = \left\{ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4.45)$$

veya

$$\{ \epsilon \}_e = [B] \{ \delta \}_e \quad (4.46)$$

biçiminde yazıp (4.41) bağıntısını (4.45)'e eklersek

$$\left\{ \varepsilon \right\}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 - 6y^2 \end{bmatrix} \left[a_i \right]^T \quad (4.47)$$

veya kısaca

$$\left\{ \varepsilon \right\}_e = [H] \left\{ a \right\} \quad (4.48)$$

ifadesini elde ederiz. (4.42) bağıntısını (4.48)'e yerleştirip elde edilen ifadeyi (4.46)'ya eşitletsek

$$\left\{ \varepsilon \right\}_e = [H] [C]^{-1} \left\{ \delta \right\}_e \quad (4.49)$$

ve

$$[B] = [H] [C]^{-1} \quad (4.50)$$

bağıntılarını elde ederiz. **B** ; eleman rijitlik matrisini elde ederken kullanacağımız 3x12 boyutunda bir matristir.

4.6 Eleman Rijitlik matrisinin Sayısal İntegrasyonla Elde Edilmesi [4], [5], [6], [7].

4.6.1 Rijitlik Matrisi

Genel koordinatlar cinsinden eleman rijitlik matrisi

$$[k^e] = t \int_A [B(x,y)]^T [D] [B(x,y)] dx dy \quad (4.51)$$

biçiminde elde edilmişti. Bu formülün tabii koordinatlar cinsinden yazılmış hali

$$[k^e] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (4.52)$$

şeklindedir. Söz konusu problemin sayısal çözümünün yapılabilmesi için sayısal integral alma metodlarından birinin kullanılması gerekmektedir. Burada Gauss sayısal integrasyonu kullanılacaktır.

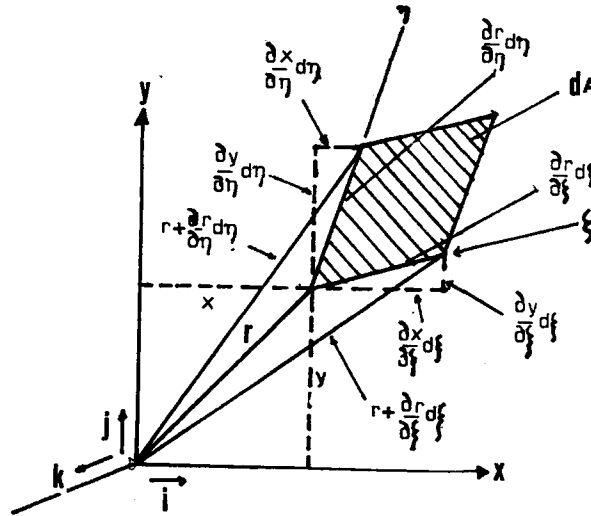
4.6.2 Gauss Sayısal Integrasyonu

Dikdörtgen bir plak eleman için kartezyen koordinatlar kullanılarak

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx dy \quad (4.53)$$

biçiminde bir integrasyon hesabı ile ilgilenilecektir.

Dörtgen eleman için bu ifade tabii koordinatlar cinsinden yazılırsa, integral daha kolay çözülebilir hale gelmektedir. Bunu yapmak için f fonksiyonunu ξ ve η cinsinden ifade edip, herbir integral sınırını da -1 ile $+1$ aralığında dönüştürmek yeterli olur. Buna ilaveten küçük bir dA alanı için $d\xi$ ve $d\eta$ cinsinden yazılan yaklaşık bir ifade kullanılmalıdır. Bu amaçla, sonsuz küçük bir dA alanı ξ ve η tabii koordinatlarında şekil-4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Tabii Koordinatlarda Alan

Burada $\mathbf{r}$ vektörü, x ve y kartezyen koordinatlarında yer vektörünü göstermektedir ve aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \quad (4.54)$$

ξ ye göre $\mathbf{r}$ nin değişimi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{j} \quad (4.55)$$

ve η 'ya göre $\mathbf{r}$ nin değişimi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j} \quad (4.56)$$

sonucunu vermektedir. (4.55) ifadesini $d\xi$ ile (4.56) ifadesini ise $d\eta$ ile çarparak dA paralelkenar alanını ortaya çıkartan iki komşu kenarını bulabiliriz. dA alanı aşağıdaki vektör çarpımıyla elde edilir.

$$d\vec{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} d\xi \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta \right] \vec{k} \quad (4.57)$$

(4.55) ve (4.56) ifadeleri (4.57) de yerine yazılarak

$$dA = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.58) denkleminde parantez içindeki ifade 2×2 lik matris biçiminde yazılabilir.

$$dA = \begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = |J| d\xi d\eta \quad (4.59)$$

Burada J Jacobian matrisi ve $|J|$ Jacobian'ın determinantıdır. Böylece (4.53) denklemi aşağıdaki yeni biçimini alır.

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (4.60)$$

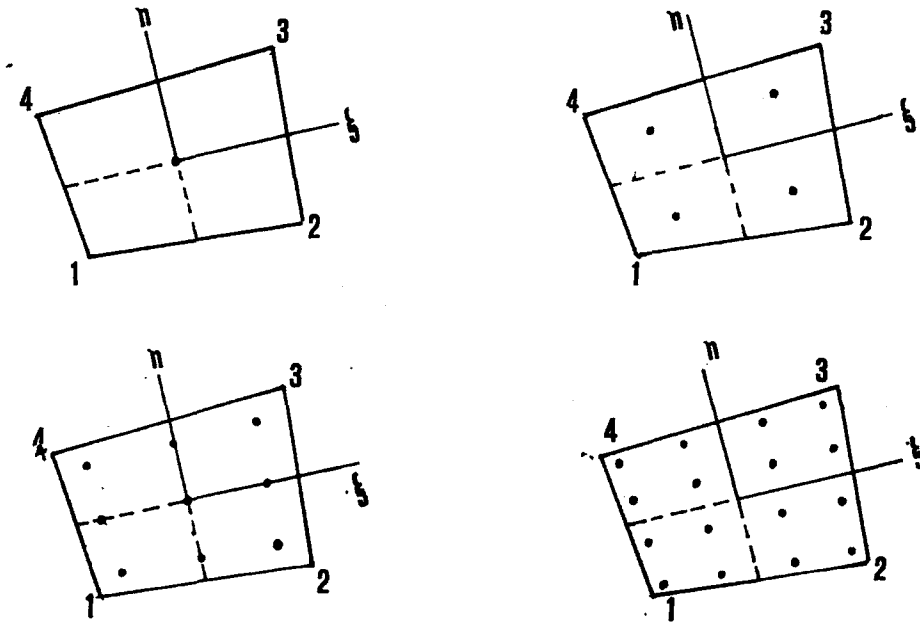
Gauss integrasyonunun yukarıdaki integrale iki kez uygulanmasıyla sayısal integral alma işlemi tamamlanmış olur.

$$I = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n W_j W_k f(\xi_j, \eta_k) |J(\xi_j, \eta_k)| \quad (4.61)$$

Burada W_j ve W_k ; (ξ_j, η_k) noktasında elde edilen fonksiyonun sayısal değerinin çarpılacağı ağırlık değerleridir. Dörtgen eleman üzerinde herbir yönde $n=1,2,3$ ve 4 için integrasyon noktaları şekil-4.3'de verilmektedir.

Böylece sayısal integral alma işlemine tabi tutulan eleman rijitlik matrisinin aldığı son biçim elde edilir.

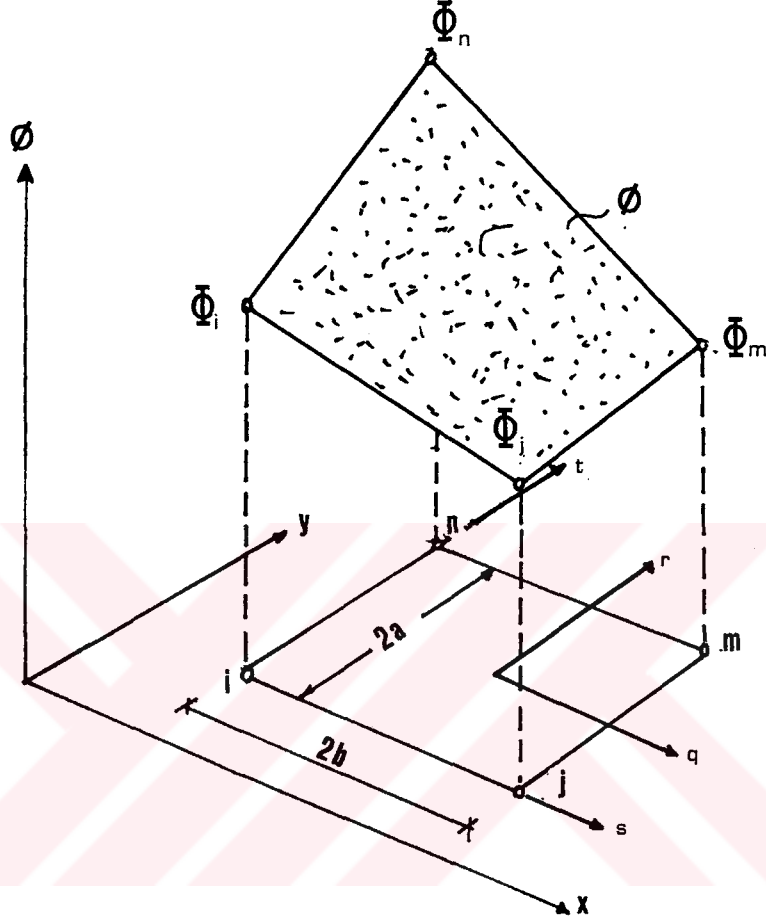
$$[k^e] = t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n W_j W_k B_{j,k}^T D B_{j,k} |J_{j,k}| \quad (4.62)$$



Şekil 4.3. Integrasyon Noktaları

4.7 Dörtgen Elemanın İki Yönde Doğrusal Değişen Biçim Fonksiyonları [3]

$$\phi = C_1 + C_2 s + C_3 t + C_4 st \quad (4.63)$$



Şekil 4.4. Doğrusal Biçim Fonksiyonu

$\phi(s,t)$ fonksiyonu s =sabit doğruları boyunca t 'ye göre, t =sabit doğruları boyunca s 'ye göre lineer olduğundan (4.63) nolu ifade kullanılabilir. Bu özelliklerinden dolayı genellikle bu elemanın bilineer olduğu söylenir. (4.63) ifadesi yerel koordinatlara göre yazılmıştır ve koordinat sisteminin başlangıcı i noktasıdır. Çünkü bu eksen çiftini kullanarak şekil fonksiyonları daha kolay elde edilebilmektedir. Çok kullanılan diğer bir koordinat sistemi, başlangıcı elemanın merkezinde bulunan q, r koordinat çiftidir.

(4.63)'teki C_1, C_2, C_3 ve C_4 katsayıları ; düğüm noktası koordinatları ve ϕ fonksiyonunun düğüm

noktalarında aldığı değerler kullanılarak elde edilebilir. Fonksiyonun düğüm noktalarındaki değerleri

$$\Phi_i = C_1$$

$$\Phi_j = C_1 + (2b)C_2$$

(4.64)

$$\Phi_m = C_1 + (2b)C_2 + (2a)C_3 + (4ab)C_4$$

$$\Phi_n = C_1 + (2a)C_3$$

ve katsayılar

$$C_1 = \Phi_i$$

$$C_2 = (\Phi_j - \Phi_i)/(2b)$$

(4.65)

$$C_3 = (\Phi_n - \Phi_i)/(2a)$$

$$C_4 = (\Phi_i - \Phi_j + \Phi_m - \Phi_n)/(4ab)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_m \Phi_m + N_n \Phi_n$$

$$= C_1 + C_2 s + C_3 t + C_4 st$$

(4.66)

olduğundan C_i lerin yukarıda elde edilen değerleri yerleştirilirse

$$\phi = \Phi_i + s (\Phi_j - \Phi_i)/(2b) + t (\Phi_n - \Phi_i)/(2a) +$$

$$+ st (\Phi_i - \Phi_j + \Phi_m - \Phi_n)/(4ab)$$

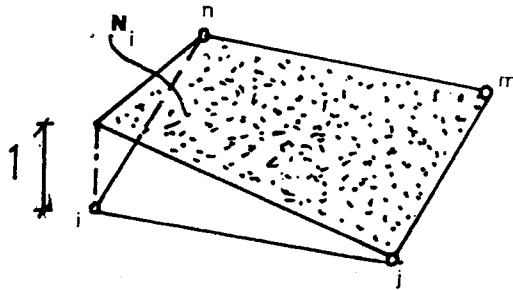
(4.67)

ve Φ_i lere göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 \phi = & \Phi_i \left[\left(1 - \frac{s}{2b} \right) \left(1 - \frac{t}{2a} \right) \right] + \\
 & + \Phi_j \left[\frac{s}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a} \right) \right] + \\
 & + \Phi_m \left[\frac{st}{4ab} \right] + \\
 & + \Phi_n \left[\frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir.

Herbir şekil fonksiyonu, ait olduğu düğüm noktası ile komşu düğüm noktaları arasındaki kenarlar boyunca doğrusal olarak değişir; aksine kendine komşu olmayan düğüm noktalarında fonksiyonun değeri sıfırdır. Mesela: N_i , ij ve in kenarları boyunca lineer olarak değişmesine rağmen i düğüm noktasına komşu olmayan m noktasında ve jm ile nm kenarları boyunca N_i fonksiyonunun değeri sıfır olmaktadır.



Şekil 4.5. Biçim Fonksiyonu Değişimi

(q,r) ve (s,t) koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm denklemleri $s = b + q$ ve $t = a + r$ olduğundan, N_i fonksiyonu q ve r yerel koordinatları cinsinden aşağıdaki gibi bulunur.

$$N_i = \left(\frac{2b-s}{2b} \right) \left(\frac{2a-t}{2a} \right) = \left(\frac{b-q}{2b} \right) \left(\frac{a-r}{2a} \right) \quad (4.69)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b} \right) \left(1 - \frac{r}{a} \right) \quad (4.70)$$

Benzer biçimde diğer şekil fonksiyonları için işlemler tekrarlanırsa, tümü toplu olarak

$$N_i = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b} \right) \left(1 - \frac{r}{a} \right)$$

$$N_j = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b} \right) \left(1 - \frac{r}{a} \right)$$

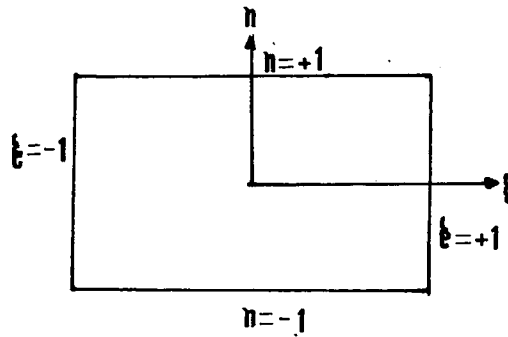
(4.71)

$$N_m = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b} \right) \left(1 + \frac{r}{a} \right)$$

$$N_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b} \right) \left(1 + \frac{r}{a} \right)$$

şeklini alır.

Yukarıdaki şekil fonksiyonları çok kullanışlıdır. Çünkü doğal koordinat sistemi ile ifade edilmeleri mümkündür. Dikdörtgen eleman için yazılan bu fonksiyonlar bu biçimi ile genel dörtgen eleman için kullanılabilir.



Şekil 4.6. Tabii Koordinatlar

Dikdörtgen eleman için tabii koordinat sistemi aşağıda gösterilmiştir. Başlangıç; elemanın merkezinde olup koordinatları boyutsuzlaştırılmıştır.

$\xi = q/b$, $\eta = r/a$, ξ ve η doğal koordinatlardır.

Şekil fonksiyonları (geometrik interpolasyon fonksiyonları) kolaylıkla doğal koordinat sistemine dönüştürülebilir. Bu durumda fonksiyonlar

$$N_i = (1-\xi)(1-\eta)/4 \quad N_j = (1+\xi)(1-\eta)/4 \quad (4.72)$$

$$N_m = (1+\xi)(1+\eta)/4 \quad N_n = (1-\xi)(1+\eta)/4$$

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad \text{ve} \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

şeklinde elde edilir.

4.8 Dönüştürme Matrisinin (Jacobian matrisi) Elde Edilmesi [4]

Hem ξ hem de η doğrultularında bu interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak, dörtgen üzerinde herhangi bir noktanın bulunduğu koordinatları veren formüller kısaca

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad Y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (4.73)$$

biçiminde yazılır. Bu fonksiyonlar doğal koordinatlar cinsinden quadrilateral eleman üzerindeki herhangi bir noktanın genel koordinatlarını verirler. Bununla beraber (4.73) ifadeleri bilineer (hiperbolik) olduğundan; ξ ve η yerel koordinatları, X ve Y genel koordinatlar cinsinden hemen basit biçimde ifade edilemezler.

Yukarıdaki paragrafta belirtilen işlemi yapabilmek için 4 adet şekil fonksiyonunun türevlerine ihtiyacımız olacaktır. X ve Y ye göre $N(\xi, \eta)$ fonksiyonunun parça olarak türevi için zincir kuralı uygulanırsa, fonksiyon genel koordinatlar cinsinden türetilmiş olur. Bu durumda türevler;

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial X} &= \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \\ \frac{\partial N}{\partial Y} &= \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \end{aligned} \quad (4.74)$$

veya matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada $N_{,x}$; X 'e göre ve $N_{,y}$ ise Y 'ye göre fonksiyonun parça türevlerini ifade etmektedir.

(4.75) bağıntısında katsayılar matrisinin terimleri ξ ve η nın X ve Y ye göre türevlerinden ibarettir. Fakat bu türevleri açık olarak ifade etmek mümkün olmadığından elde edilen katsayılar matrisi kullanışlı değildir. Eğer şekil fonksiyonlarının ξ ve η cinsinden diferansiyelleri yazılırsa istenen sonucun elde edilmesi mümkün olacaktır. Zincir kuralını kullanırsak türevler;

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.76)$$

veya

$$\begin{bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{,\xi} & Y_{,\xi} \\ X_{,\eta} & Y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

biçiminde yazılmış olur.

Bu düzenleme biçiminde katsayılar matrisinin terimleri (4.73) denkleminin türevleri ile kolaylıkla elde edilebilir. Bu matris; Jacobian matris olarak adlandırılır ve elemanları, genel koordinatların yerel koordinatlara göre türevlerini içerir. Böylece ;

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{,\xi} & Y_{,\xi} \\ X_{,\eta} & Y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

biçiminde 2x2 lik bir matris elde edilmiş olur. Bu matrisin terimleri açık biçimde

$$\begin{aligned} J_{11} = X_{,\xi} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} x_i & J_{12} = Y_{,\xi} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} y_i \\ J_{21} = X_{,\eta} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} x_i & J_{22} = Y_{,\eta} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} y_i \end{aligned} \quad (4.79)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifadeler matris biçiminde ;

$$J = D_L C_N \quad (4.80)$$

olarak elde edilir. Bu denklemdeki D_L ; yerel koordinatlara göre türevleri, C_N ; düğüm noktası koordinatlarını içeren matrislerdir. Bu matrisler aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_L &= \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

(4.75) ve (4.77) denklemleri karşılaştırıldığında birinci ifadedeki katsayılar matrisinin, Jacobian matrisin tersi olduğu görülür. Matris tersi ifadesi kullanılarak $\mathbf{J}$ matrisinden $\mathbf{J}^{-1}$ bulunmuştur.

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} Y_{,\eta} & -Y_{,\xi} \\ -X_{,\eta} & X_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Determinant (4.78) denkleminde kolayca hesaplanabilmektedir.

$$|\mathbf{J}| = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} = X_{,\xi} Y_{,\eta} - X_{,\eta} Y_{,\xi} \quad (4.84)$$

BÖLÜM V.

DİKDÖRTGEN PLAKLARIN TİTREŞİMİ

5.1 Titreşim Durumunda Plak Denklemi [8], [9]

Bu bölümde sürekli elastik sistem olan plakların hareketinin bünye denklemleri matematiksel biçimde elde edilmektedir. İnce plaklarda değeri küçük olduğundan, dönme ataleti etkisini ihmal ederek serbestlik derecesi sayısını azaltabiliriz. Bundan dolayı sadece, plağın sözkonusu doğrultuda ötelenmesi ile ilişkili olan eylemsizlik kuvvetleriyle çalışılacaktır. Pratik maksatlar için bu çeşit kabuller ile plakların titreşimleri tanımlanabilirse de, deneylerde gözlenen belirli fiziksel olayların bu basitleştirilmiş teoriyle ifade edilemeyeceği hatırlanmalıdır. Kesme kuvvetinin etkilerinin de ihmal edilmesi diğer bir basitleştirmedir. Sönüm olayı da benzer bir durumdur. Sönüm etkileri ya iç sürtünmeyle ya da etrafı çevreleyen ortam sebebiyle oluşur. Tüm plak titreşimlerinde sönüm teorik olarak ortaya çıkıyorsa da genellikle azdır veya tabi frekanslara ve kararlı genliklere etkisi ihmal edilebilir. Netice itibarıyla elde edilecek olan denklemlerde sönüm etkisinin ihmal edilmesi emniyetsizlik yaratmayacaktır.

Hareketin diferansiyel denkleminin yazılımında mümkün olan iki yaklaşım mevcuttur. Ya d'Alembert dinamik denge ilkesi uygulanabilir yada enerjinin korunumu üzerine kurulan iş formülasyonu kullanılabilir.

Aşağıda, diğerine nazaran daha basit olduğu için hareketin diferansiyel bünye denklemlerinin yazılımında

plak elemanın dinamik dengesi kullanılacaktır.

Plağın kalınlık doğrultusunda ötelenmesiyle ortaya çıkan atalet kuvveti aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$P_z = -\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\bar{m} \ddot{w} \quad (5.1)$$

Burada $\bar{m}$ plağın alanının kütlesini ifade etmektedir.

Plağın dinamik incelenmesinde düşey yükler ve ortaya çıkan yerdeğiştirmeler (çökmeler) zamanın bir fonksiyonudur.

$$w = w(x, y, t) \quad (5.2)$$

Statik denge denklemini, atalet kuvveti ve yükleme terimlerini ekleyerek genişletirsek plakların sönümsüz hareket denklemi

$$D\nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) = P_z(x, y, t) - \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

halini alır.

Burada x ve y plağın orta yüzey düzlemindeki kartezyen koordinatlarıdır.

Plağın serbest titreşim durumu için P_z dış kuvveti sıfırdır ve sönümsüz hareket için diferansiyel denklem

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4)$$

şeklini alır.

Harmonik bir titreşim farzederek

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (5.5)$$

yazılabilir.

Burada $W(x,y)$ titreşim modlarını tanımlayan şekil fonksiyonu ve ω plağın açısal frekansıdır. (5.5) bağıntısı (5.4)'de kullanılırsa

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x,y) - \frac{\bar{m} \omega^2}{D} W(x,y) = 0 \quad (5.6)$$

veya

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x,y) - \lambda^* W(x,y) = 0 \quad (5.7)$$

elde edilir.

$$\lambda^* = \frac{\bar{m} \omega^2}{D} \quad (5.8)$$

olduğu görülmektedir.

5.2 Plakların Dinamik Hesabında Sonlu Eleman Metodu

5.2.1 Hareketin Matris Denklemi

Titreşen bir plak, pratik hesaplar amacıyla çoğu zaman eşdeğer bir ayırık sistem olarak düşünölmek zorundadır. Plak kütlelerinin sonlu eleman düğüm noktalarında toplanmış olduğu kabulü ile yapılan hesaplar sonucunda bulunan değeerler, plağın asıl dinamik davranışının yeterince doğru olarak temsil edilebildiğini göstermektedir.

Hareketin matris denklemi: ya matris-yerdeğıştirme denklemlerine atalet kuvvetlerinin de eklenmesiyle yada herbir düğüm noktası için d'Alembert dinamik denge ilkesinin uygulanmasıyla elde edilebilir. Sözkonusu ilk yaklaşımın uygulanmasıyla

$$\{\delta(t)\} + [K]^{-1} [M] \{\ddot{\delta}(t)\} = [K]^{-1} \{P(t)\} \quad (5.9)$$

ifadesi oluşturulabilir.

Dinamik denge ilkesi kullanılarak elde edilen bağıntı ise aşağıda gösterilmiştir.

$$[\bar{M}]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{P(t)\} \quad (5.10)$$

Bu denklemlerde $\{\delta(t)\}$; zamana bağlı yerdeğiştirmeleri içeren kolon vektörü, $[\bar{M}]$; kütle matrisini ifade etmektedir. Noktalar ise zaman değişkenine göre türevleri gösterir. Sönüm etkisi ihmal edilmektedir.

Kütle metrisinin $[\bar{M}]$ kurulmasında izlenen yol: düğüm noktalarını çevreleyen plak alanıyla ilişkili olan plak kütlelerinin bulunup sözkonusu düğüm noktasına yoğun tek bir kütle olarak etki ettirilmesi şeklindedir. Kütle matrisi neticede diagonal bir matris olarak ortaya çıkar.

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & 0 & 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & \bar{m}_{22} & 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_{33} & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \bar{m}_{kk} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \bar{m}_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Simetrik olan $[K]$ rijitlik matrisinin tersiyle (5.11) ifadesini çarptığımızda

$$[D] = [K]^{-1} [\bar{M}] \quad (5.12)$$

elde ederiz. Bu matris genellikle dinamik matris olarak adlandırılır. Bu toplanmış kütlelerin kullanılması dolaşısıyla oluşacak dinamik matris de simetrik olacaktır.

Kütlelerin düğüm noktalarında toplandığı yaklaşımı, plak için iyi bir sonlu eleman ayırımı kullanılması şartıyla, sadece düşük birkaç mod için kabul edilebilir

sonuçlar vermektedir. Dinamik matrisin esas köşegeni üzerinde arzu edilmeyen sıfırları önlemek için: Elemanın toplu dönme ataleti; dörtgen ince plak elemanların kütle atalet momentlerinin de katkısıyla hesaba katılabilir.

5.2.2 Uyuşumlu (Consistent) Kütle Matrisi [4], [10].

Plakların serbest titreşimlerinin matris-yerdeğiştirme denklemlerinde, özellikle yüksek modların hassas hesabı için uyumlu kütle matrisinin kullanılması arzu edilir.

Sabit kalınlıklı dikdörtgen plaklar için uyumlu kütle matrisinin katsayıları kinetik enerji ifadesi kullanılarak elde edilebilir. $\phi(x,y)$; plak düğüm noktalarının birim deplasmanlarıyla ilişkili olan şekil fonksiyonları olmak üzere kütle matrisi,

$$M_{j,k} = \bar{M} \int_0^a \int_0^b \phi_j(x,y) \phi_k(x,y) dx dy \quad (5.13)$$

biçiminde elde edilir.

Genel bir dörtgen plak eleman için uyumlu kütle matrisi, γ : plağın imal edildiği malzemenin birim hacim ağırlığı olmak üzere,

$$M_{j,k} = \gamma t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T(\xi,\eta) N(\xi,\eta) |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \quad (5.14)$$

şeklindedir.

Bu denkleme Gauss sayısal integrasyonu uygulanırsa neticede denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_{j,k} = \gamma t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n W_j W_k N_{j,k}^T N_{j,k} |J_{j,k}| \quad (5.15)$$

5.2.3 Serbest Titreşim [11], [12], [13]

Plak üzerine etki eden hiç bir dış yük yoksa yukarıda elde edilen (5.1) denklemi sönümsüz serbest titreşim denklemi haline gelir.

$$[\bar{M}] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = 0 \quad (5.16)$$

Denklem (5.16)'nın aşağıda ifade edildiği gibi bilinen bir çözümü vardır.

$$\delta_i = \bar{\Phi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i, 1, 2, \dots, n) \quad (5.17)$$

Burada n ; serbestlik derecesi sayısıdır. Bu harmonik ifadede $\bar{\Phi}_i$, i inci titreşim modu için düğüm noktası genliklerini, ω_i aynı moda ait açısal frekansı, α_i ise faz açısını göstermektedir. (5.17) ifadesini zamana göre iki kez türeterek

$$\ddot{\delta}_i = -\omega_i^2 \bar{\Phi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.17) ve (5.18) ifadesini (5.16)'da kullanırsak, $(\omega_i t + \alpha_i)$ terimleri yok edildiğinden, kalan ifade

$$(K - \omega_i^2 M) \bar{\Phi}_i = 0 \quad (5.19)$$

şeklını alır.

Elde edilen (5.19) ifadesi özdeğer problemi şeklindedir. Homojen denklemler teorisi hatırlanırsa; bu denklemin triviyal olmayan çözümlerinin mevcut olması için ancak, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerektiği sonucu görülür. Böylece ifade aşağıdaki biçimi alır.

$$|K - \omega_i^2 M| = 0 \quad (5.20)$$

Bu determinantın açılımı karakteristik denklem olarak

isimlendirilen n inci dereceden bir polinom verir. Bu polinomun n adet ω_i^2 kökü karakteristik değerlerdir. Genel ismi ile özdeğerlerdir. Bulunan bu köklerden her seferinde yalnızca biri (5.19) ifadesinde yerine yazılarak karakteristik vektörler, veya genel olarak kullanılan ismiyle özvektörler, (Φ_i) elde edilir. Her bir özvektör, (5.9) ifadesinden elde edilen karakteristik matrisin (H_i) adjointinin (H_i^a) bir kolonu olarak bulunabilir ve aşağıdaki şekilde yazılır.

$$H_i \Phi_i = 0 \quad (5.21)$$

Burada;

$$H_i = K - \omega_i^2 M \quad (5.22)$$

dir.

Serbestlik sayısı az olan problemlerin (5.20), (5.21) ve (5.22) ifadelerini kullanarak basit hesaplayıcılarla çözülebilmeleri mümkündür. Buna karşın serbestlik derecesi sayıları çok olan yapı problemlerinin, bilgisayar programları yapılarak çözümlenmesi gerekmektedir. Böyle bir program özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması için altprogramlar içermelidir. Plak titreşimi için (tüm yapı sistemlerinde olduğu gibi) en kullanışlı altprogram tipi; aşağıdaki gibi bilinen ve simetrik biçimde olan özdeğer problemini kullanmalıdır.

$$(A - \lambda_i I) X_i = 0 \quad (5.23)$$

Burada A ; simetrik bir matris ve I ; birim matrisidir. λ_i sembolü i inci özdeğerleri ve X_i ise yazılan n adet homojen denklem sisteminin özdeğere karşı gelen özvektörlerini göstermektedir. (5.19) ifadesini (5.23) biçiminde ifade edebiliriz. Bunun için K matrisi kullanılabilir. U ; üst üçgen matris olmak üzere

$$K = U^T U \quad (5.24)$$

yazılabilmektedir. (5.24) ifadesi (5.19)'da yerleştirilirse

$$(U^T U - \omega_i^2 M) \Phi_i = 0$$

ve daha sonra denklemin her iki tarafı U^{-T} ile çarpılıp M matrisinden sonra I yerine $U^{-1}U$ yazılarak

$$U^{-T}(U^T U - \omega_i^2 M U^{-1}U) \Phi_i = 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade, başka bir biçimde yazılırsa

$$(M_u - \lambda_i I) \Phi_{ui} = 0 \quad (5.25)$$

şeklini alır.

Plak sistemin eşit sonlu elemanlara bölünmesi durumunda (5.20) ifadesi verildiği biçimde kullanılabilir.

Burada

$$M_u = U^{-T} M U^{-1}, \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}, \quad \Phi_{ui} = U \Phi_i \quad (5.26)$$

dönüştürmeleri kullanılmıştır.

(5.25) ifadesi, (5.23) ile verilen standart ve simetrik bir özdeğer problemi şekline getirilmiştir. A matrisini simetrik olduğu garanti edilen M_u matrisi temsil etmektedir. Buna ilaveten özdeğerin (λ_i) , açısal frekansın karesinin tersine eşit olduğu görülmektedir. K matrisi yerine $U^T U$ şeklinin yazılmasıyla yapılan dönüştürmeler sonucunda, en düşük frekansa karşı gelen en yüksek özdeğerin hesabı büyük bir hassasiyetle yapılabilir. (5.25) ifadesindeki Φ_{ui} özvektörü (5.26) ifadelerinin sonuncusu ile verilmiştir. Özdeğer ve özvektörler (5.25) ifadesi kullanılarak bulunduktan sonra

açısal frekanslar ve asıl koordinatlarda mod şekilleri

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad \Phi_i = U^{-1} \Phi_{ui} \quad (5.27)$$

olarak hesaplanmaktadır.

Yeni koordinatlarda M_u matrisi simetrik olduğu için, özvektörlerin tamamı lineer olarak bağımsızdır. İlave olarak birbirinden farklı λ_i ve λ_j özdeğerlerine karşı gelen Φ_{ui} ve Φ_{uj} özvektörleri birbirlerine göre ortogonaldır. Böylece

$$\Phi_{ui}^T \Phi_{uj} = 0 \quad (i \neq j) \quad (5.28)$$

yazılabilir.

Bununla beraber, (5.27) ifadesinin ikinci bağıntısı olarak verilen geri dönüştürmede, özvektörler arasında ortogonalite şartının sağlanması gerekli değildir. Bunun yerine, asıl koordinatlarda Φ_i ve Φ_j özvektörleri K matrisine göre ortogonal olmaktadır.

$$\Phi_i^T K \Phi_j = \Phi_{ui}^T U^{-T} K U^{-1} \Phi_{uj} = \Phi_{ui}^T \Phi_{uj} = 0 \quad (5.29)$$

Özvektör M matrisine göre de ortogonaldır.

Yapıların titreşim hesabından, karakteristik denklemin kökleri olarak aynı frekansların bulunması ihtimali mevcuttur. Eğer bir özdeğer m kez tekrarlanıyorsa, tekrarlı özdeğere karşı gelen m adet lineer bağımsız özvektör bulunabilir fakat, bu çeşit vektörler birim değildir. Yeni bir özvektörler grubu, her zaman asıl grubun lineer bir kombinasyonu olarak oluşturulabilir ve bu yeni biçim özdeğer problemi sağlar. Yani,

$$M_u \sum_{i=1}^m C_i \Phi_{ui} = \lambda_m \sum_{i=1}^m C_i \Phi_{ui} \quad (5.30)$$

olarak yazılabilir. Burada C_i , i inci modal vektörün

çarpıldığı bir skaler ve λ_m ise tekrarlı özdeğerdir. Sözkonusu biçim kullanılarak oluşturulan yeni özvektörler grubunun birbirlerine göre ortogonal olması daima arzu edilen bir avantajdır. Bu özvektörlerin farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörlerle ortogonal olması otomatik olarak sağlanmıştır. Fakat yinede tekrarlı bir özdeğere karşı gelen birim olmayan ortogonal vektörlerin seçimi için sonsuz sayıda seçenek mevcuttur. Gram-Schmidt ortogonalizasyon metodu; lineer bağımsız bir gruptan ortogonal bir vektörler grubu oluşturmak için çoğunlukla kullanılan matematiksel bir yaklaşımdır ve iyi sonuç verdiği bilinmektedir.

Eğer rijitlik matrisi yarı definit ise, (5.24) ifadesinde tanımlandığı gibi ayrılamaz. Çünkü, en azından bir rijit cisim modu ($\omega_i = 0$ ile) mevcuttur. Bu durumda rijitlik matrisi yerine kütle matrisini benzer biçimde ayırmak uygun olmaktadır.

Eğer kütle matrisi, toplu kütleli sistemdeki gibi, köşegen ise ayırım basit biçimde aşağıdaki gibi olur.

$$\bar{M} = \bar{M}^{1/2} \bar{M}^{1/2} \quad (5.31)$$

Burada $\bar{M}^{1/2}$; $\bar{M}$ deki terimlerin kareköklerine eşit olan köşegen terimleri içerir. Bu durumda bilinen bağıntı

$$(K_M - \lambda_i I) \bar{\Phi}_M = 0 \quad (5.32)$$

şeklini alır. Dönüştürmeler;

$$K_M = \bar{M}^{-1/2} K \bar{M}^{-1/2}, \lambda_i = \omega_i^2, \bar{\Phi}_M = \bar{M}^{1/2} \bar{\Phi}_i \quad (5.33)$$

biçiminde yapılmıştır. (5.33) ifadelerinin ilk bağıntısındaki $\bar{M}^{-1/2}$ matrisi, $\bar{M}^{1/2}$ matrisindeki diagonal terimlerin terslerini içermektedir. İfade (5.32) kullanılarak özdeğer ve özvektörler bulunduktan sonra açısal frekanslar ve mod şekilleri

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \Phi_i = \bar{M}^{-1/2} \Phi_{M_i} \quad (5.34)$$

ifadeleri kullanılarak elde edilir.

Özdeğer ve özvektörlerin tamamı bulunacaksa en iyi yol Householder dönüştürmesini kullanmak ve A matrisini tridiagonal hale getirmektir. Daha sonra λ_i ve X_i ; değerleri QR algoritması kullanılan iterasyonla hesaplanabilir. Eğer sadece birkaç modun bulunması isteniyorsa, invers iterasyon motodu en kullanışlı olanıdır.

BÖLÜM VI

6.1. Elde Edilen Biçim Fonksiyonları

Biçim fonksiyonu N, Bölüm 4'de 4.43 bağıntısı ile $[N] = [L][C]^{-1}$ şeklinde verilmişti. $[L]$ için 4.44 nolu ifade aynen kullanılmış olup, $[C]^{-1}$ matrisi aşağıda verilmiştir.

$$[C]^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & -1 & 1 & 4 & -1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(6.1)

Elde edilen 12 adet biçim fonksiyonu sırasıyla aşağıda gösterilmiştir.

$$N_1 = \frac{1}{8} \left(2 - 3\xi - 3\xi + 4\xi\eta + \xi^3 + \eta^3 - \xi^3\eta - \xi\eta^3 \right)$$

$$N_2 = \frac{1}{8} \left(1 - \xi - \eta + \xi\eta - \eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3 \right)$$

$$N_3 = \frac{1}{8} \left(1 - \xi - \eta - \xi^2 + \xi\eta + \xi^3 + \xi^2\eta + \xi^3\eta \right)$$

$$\begin{aligned}
N_4 &= \frac{1}{8} \left[2 - 3\xi - 3\eta - 4\xi\eta - \xi^3 + \eta^3 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 \right] \\
N_5 &= \frac{1}{8} \left[1 + \xi - \eta - \xi\eta - \eta^2 - \xi\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^3 \right] \\
N_6 &= \frac{1}{8} \left[-1 - \xi + \eta + \xi^2 + \xi\eta + \xi^3 - \xi^2\eta - \xi^3\eta \right] \\
N_7 &= \frac{1}{8} \left[2 + 3\xi + 3\eta + 4\xi\eta - \xi^3 - \eta^3 - \xi^3\eta - \xi\eta^3 \right] \\
N_8 &= \frac{1}{8} \left[-1 - \xi - \eta - \xi\eta + \eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^3 \right] \\
N_9 &= \frac{1}{8} \left[-1 - \xi - \eta + \xi^2 - \xi\eta + \xi^3 - \xi^2\eta - \xi^3\eta \right] \\
N_{10} &= \frac{1}{8} \left[2 - 3\xi + 3\eta - 4\xi\eta + \xi^3 - \eta^3 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 \right] \\
N_{11} &= \frac{1}{8} \left[-1 + \xi - \eta + \xi\eta + \eta^2 - \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3 \right] \\
N_{12} &= \frac{1}{8} \left[1 - \xi + \eta - \xi^2 - \xi\eta + \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta \right]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Böylece yer değiştirme fonksiyonu; biçim fonksiyonları cinsinden

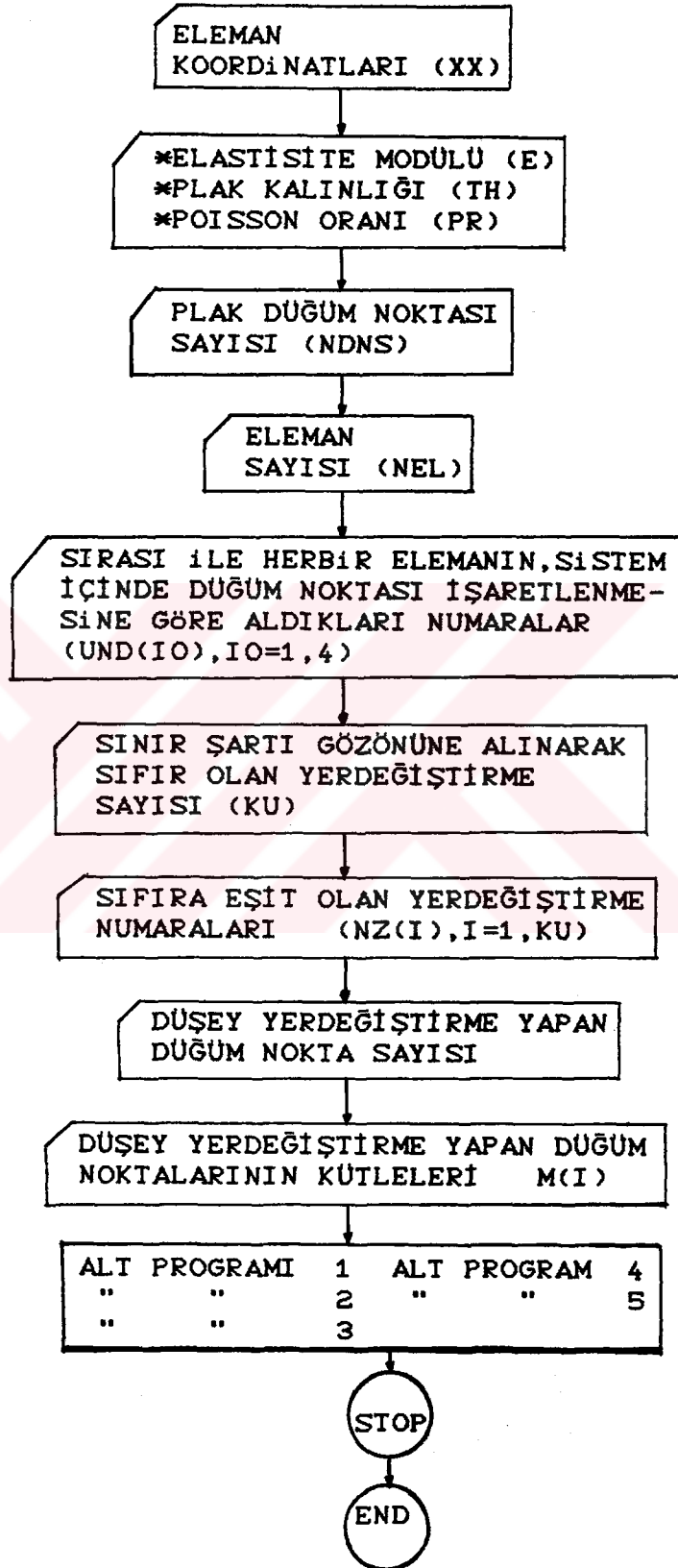
$$\begin{aligned}
W &= N_1 w_i + N_2 \theta_{xi} + N_3 \theta_{yi} + N_4 w_j + N_5 \theta_{xj} + N_6 \theta_{yj} \\
&+ N_7 w_m + N_8 \theta_{xm} + N_9 \theta_{ym} + N_{10} w_n + N_{11} \theta_{xn} + N_{12} \theta_{yn}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

şeklinde yazılabilir.

6.2. Oluşturulan Bilgisayar Programı

Sözkonusu problemin çözümü için, bir ana program ve 5 adet alt program içeren yaklaşık 500 satır uzunluğunda FORTRAN programlama dili ile yazılmış bir program oluşturulmuştur.

6.2.1. Program Akış Şeması



* ALT PROGRAM 1. (SUBROUTINE PRMAT)

SUBROUTINE PRMAT; Elastisite Matrisi [D] ve Jacobian [J] ile onun tersinin sayısal değerlerini hesaplayıp ardından eleman matrisi [B]'yi elde eder. Elde edilen bu değerleri kullanarak sayısal integrasyon sonucu eleman rijitlik matrisini oluşturur.

* ALT PROGRAM 2. (SUBROUTINE PSRMAT)

Eleman rijitlik matrislerini birleştirerek sisteme ait olan rijitlik matrisini elde eder. Sınır şartlarını kullanarak sıfır olan yerdeğiştirmelere karşı gelen satır ve sütunları sıfırlar.

* ALT OROGRAM 3. (SUBROUTINE INDIR)

Sınır şartları uygulanmış sistem rijitlik matrisinin düşey yerdeğiştirmelere karşı gelen satırları tutularak sistem rijitlik matrisi indirgenir.

* ALT PROGRAM 4. (SUBROUTINE KOMPAK)

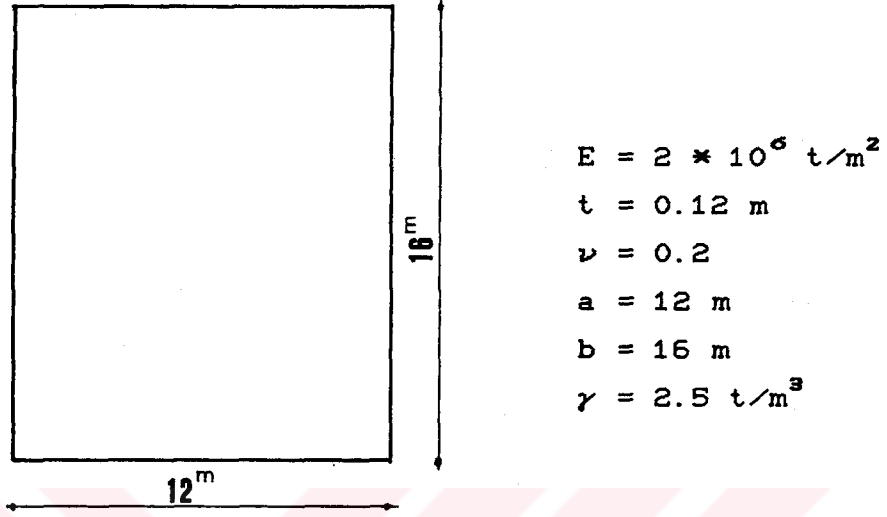
İndirgenen rijitlik matrisinin düşey yerdeğiştirme yapan noktalara karşı gelen numaralı satır ve kolonları bir matris halinde toplanır.

* ALT PROGRAM 5. (SUBROUTINE ÖZJAC)

Kompak hale gelmiş olan matrisin, Jacobi Yöntemi kullanılarak özdeğerleri ve özvektörleri bulunur. Elde edilen özdeğerler (λ_i) $\omega_i^2 \bar{M}$ 'e karşı gelmektedirler. Özvektörler ise titreşim mod şekillerini vermektedir.

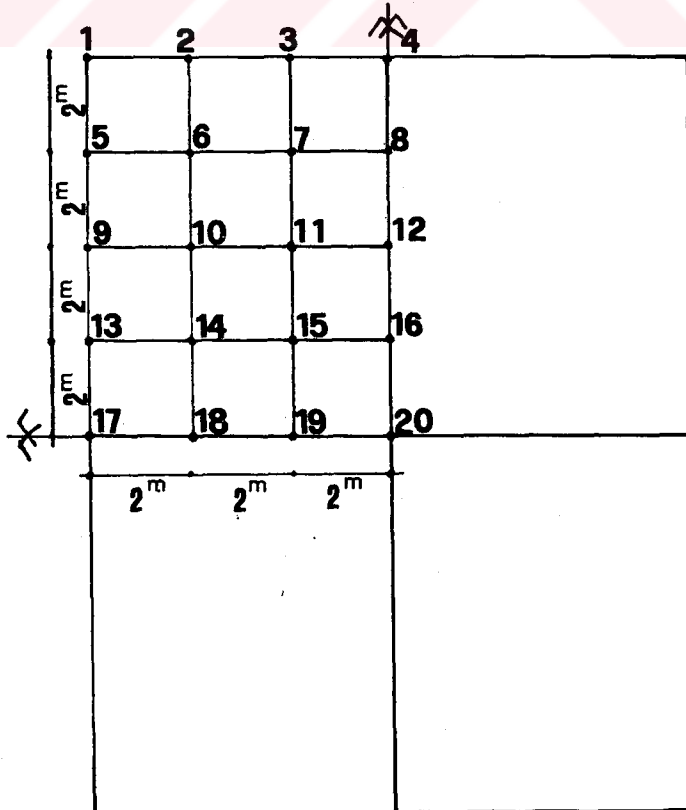
6.3. Sayısal Çözümler

6.3.1. Dört Kenarı Basit Mesnetli Dikdörtgen Plak



Şekil 6.1. Dikdörtgen Plak

Yukarıdaki şekilde verilen plağın serbest titreşim frekanslarının bulunması için plak, 6x8 adet sonlu elemana bölünmüş ve sistem simetrik olduğundan dörtte bir parça ile çalışılmıştır (Şekil 6.2).



Şekil 6.2. Sonlu Eleman Ağı

Dörtte bir parça için; $W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = W_6 = W_7 = W_8 = W_9 = W_{10} = W_{11} = W_{12} = W_{13} = W_{14} = W_{15} = W_{16} = W_{17} = W_{18} = W_{19} = W_{20}$ yerdeğiştirmeleri ise sıfırdan farklı değerler almaktadır. Çözümde elde edilen 1.mod'a ait frekans analitik metodlarla bulunan gerçek çözüm olan

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \left[\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right] \text{ ile karşılaştırılacaktır.}$$

Tablo 6.1. KOMPAKT MATRİS

KOMPAK MATRİS		
0.17316851E+04	-0.75674451E+03	0.19066600E+03
-0.71585071E+03	-0.80492317E+02	0.62046623E+02
0.19943610E+03	0.66546791E+02	0.53135836E+00
-0.37814049E+02	-0.20573067E+02	-0.16495470E+01
-0.75674463E+03	0.21216667E+04	-0.76023676E+03
-0.80784485E+02	-0.59512653E+03	-0.79995827E+02
0.66814415E+02	0.20102968E+03	0.66660889E+02
-0.20644470E+02	-0.41220314E+02	-0.20616560E+02
0.19066600E+03	-0.76023682E+03	0.96629968E+03
0.62279484E+02	-0.80115448E+02	-0.32873596E+03
0.43506888E+00	0.66691666E+02	0.10028986E+03
-0.16346755E+01	-0.20621960E+02	-0.19790094E+02
-0.71585071E+03	-0.80784485E+02	0.62279476E+02
0.19392882E+04	-0.69378101E+03	0.19177635E+03
-0.79507843E+03	-0.12122855E+03	0.58861832E+02
0.20003780E+03	0.66657768E+02	0.45779154E+00
-0.80492325E+02	-0.59512659E+03	-0.80115448E+02
-0.69378101E+03	0.23250654E+04	-0.69395447E+03
-0.12136671E+03	-0.67771222E+03	-0.12133295E+03
0.66698090E+02	0.20102623E+03	0.66691933E+02
0.62046616E+02	-0.79995827E+02	-0.32873596E+03
0.19177635E+03	-0.69395447E+03	0.10666488E+04
0.58890606E+02	-0.12133491E+03	-0.36829694E+03
0.45477784E+00	0.66692085E+02	0.10028433E+03
0.19943608E+03	0.66814415E+02	0.43506876E+00
-0.79507843E+03	-0.12136674E+03	0.58890598E+02
0.21415703E+04	-0.62727753E+03	0.19223579E+03
-0.75753235E+03	-0.10070721E+03	0.60528233E+02
0.66546799E+02	0.20102966E+03	0.66691666E+02
-0.12122856E+03	-0.67771222E+03	-0.12133491E+03
-0.62727753E+03	0.25261003E+04	-0.62725677E+03
-0.10070985E+03	-0.63648712E+03	-0.10071363E+03
0.53135943E+00	0.66660881E+02	0.10028985E+03
0.58861828E+02	-0.12133294E+03	-0.36829691E+03
0.19223579E+03	-0.62725677E+03	0.11669370E+04
0.60527790E+02	-0.10071389E+03	-0.34850870E+03
-0.37814045E+02	-0.20644468E+02	-0.16346754E+01
0.20003780E+03	0.66698082E+02	0.45477822E+00
-0.75753235E+03	-0.10070985E+03	0.60527790E+02
0.97076263E+03	-0.34697632E+03	0.95887993E+02
-0.20573067E+02	-0.41220314E+02	-0.20621958E+02
0.66657768E+02	0.20102623E+03	0.66692093E+02
-0.10070721E+03	-0.63648712E+03	-0.10071390E+03
-0.34697632E+03	0.11625405E+04	-0.34697507E+03
-0.16495472E+01	-0.20616558E+02	-0.19790094E+02
0.45779136E+00	0.66691933E+02	0.10028433E+03
0.60528233E+02	-0.10071363E+03	-0.34850873E+03
0.95887993E+02	-0.34697507E+03	0.53332666E+03

Tablo 6.1.a.ÖZDEĞERLER ve MOD BİCİMLERİ

6 SÜPÜRME SONUNDA ÖZ DEĞERLER											
13.4906	196.9251	492.6116	907.2254	1153.4780	2022.3690	2789.7024	3060.5754				
3127.7061	3569.5542	3746.3494	4505.0723								
MOD BİCİMLERİ											
0.1105	0.1913	0.2209	0.2041	0.3536	0.4082	0.2667	0.4619				
0.5334	0.2887	0.5000	0.5773								
0.2670	0.4620	0.5333	0.2040	0.3535	0.4082	-0.1105	-0.1914				
-0.2209	-0.2887	-0.4999	-0.5773								
-0.2216	0.0002	0.2213	-0.4084	0.0000	0.4084	-0.5332	0.0000				
0.5332	-0.5770	0.0000	0.5770								
0.5350	-0.0001	-0.5327	0.4067	-0.0007	-0.4078	-0.2216	-0.0002				
0.2212	-0.5766	0.0008	0.5780								
0.2668	0.4617	0.5337	-0.2056	-0.3536	-0.4072	-0.1102	-0.1912				
-0.2211	0.2901	0.5000	0.5758								
0.5338	-0.0027	-0.5309	-0.4097	0.0000	0.4099	-0.2194	0.0008				
0.2205	0.5765	-0.0010	-0.5784								
-0.1110	0.1931	-0.2234	-0.2045	0.3542	-0.4089	-0.2667	0.4614				
-0.5323	-0.2875	0.4989	-0.5767								
-0.2667	0.4627	-0.5364	-0.2015	0.3521	-0.4046	0.1087	-0.1945				
0.2229	0.2920	-0.4983	0.5769								
-0.1097	-0.1922	-0.2199	0.2054	0.3519	0.4096	-0.2682	-0.4614				
-0.5330	0.2890	0.5021	0.5737								
0.2221	-0.0052	-0.2149	-0.4107	0.0066	0.4018	0.5326	0.0007				
-0.5363	-0.5739	-0.0058	0.5865								
0.2615	-0.4609	0.5355	-0.1997	0.3562	-0.4159	-0.1160	0.1896				
-0.2138	0.2953	-0.4998	0.5718								
-0.1087	0.1901	-0.2200	0.2031	-0.3533	0.4083	-0.2664	0.4625				
-0.5343	0.2886	-0.5009	0.5786								

Ara düğüm noktası için kütle $m = (2 \times 2 \times 2.5 \times 0.12) / 9.81 = 0.1223242$. 1.mod'a ait $\lambda_1 = 13.4906$ olduğundan bu moda ait frekans aşağıdaki gibi bulunur.

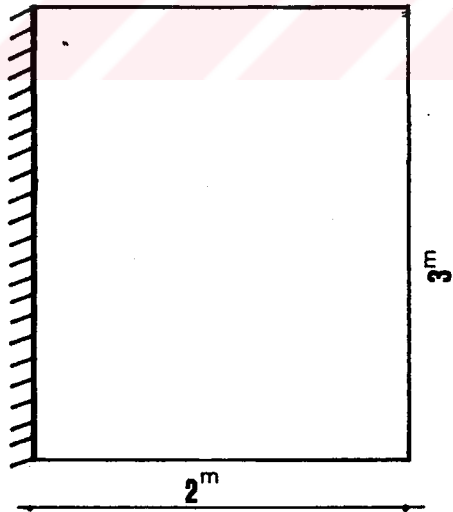
$$\omega = \sqrt{\frac{13.4906}{0.1223242}} = 10.50169 \text{ sn}^{-1}$$

Gerçek çözümden $\sqrt{\frac{D}{m}} = 99.45$ olmak üzere

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} \left(\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{\pi^2}{16^2} \right)} = 10.606 \text{ sn}^{-1}$$

değeri elde edilir.

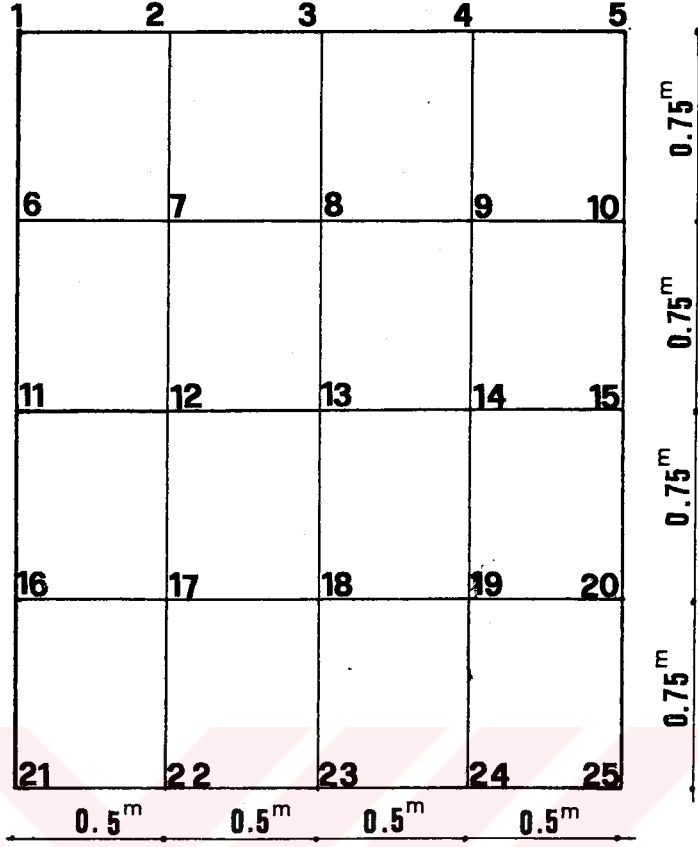
6.3.2. Konsol Plak



$$\begin{aligned} E &= 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2 \\ t &= 0.12 \text{ m} \\ \nu &= 0.2 \\ a &= 2 \text{ m} \\ b &= 3 \text{ m} \\ \gamma &= 2.5 \text{ t/m}^3 \end{aligned}$$

Şekil 6.3. Konsol Plak

Konsol plak, 4×4 şeklinde 16 elemana bölünerek incelenmiştir.



Şekil 6.4. Konsol Plak İçin Sonlu Eleman Ağı

Konsol plakta sadece ankastre kenara ait düğüm noktalarında düşey yerdeğiştirmeler ve her iki eksen etrafında dönmeler sıfıra eşittir. Herhangi bir orta düğüm noktasına ait kütle $m = 0.5 \times 0.75 \times 2.5 \times 0.12 / 9.81 = 0.011467889$ bulunmuştur. 1.mod'a ait $\lambda_1 = 81.5259$ ve aynı mod'a ait frekans

$$\omega = \sqrt{\frac{81.5259}{0.011467889}} = 84.3152 \text{ sn}^{-1}$$

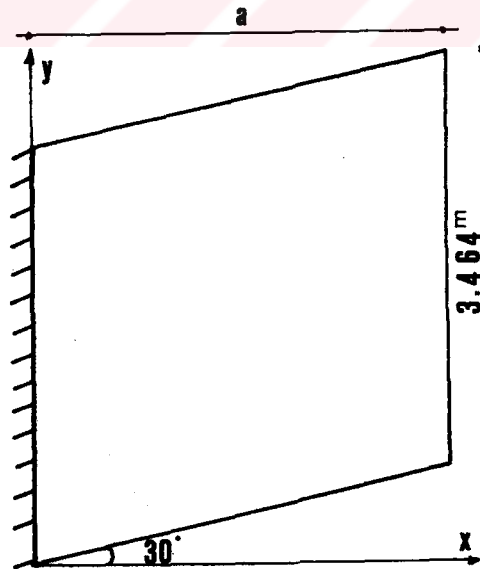
Tüm λ değerleri ve mod şekillerinin sayısal değerleri aşağıda liste halinde verilmiştir.

Tablo 6.2. 1 NÖLU ELEMAN MATRİSİ

-0.10928203E+02	0.00000000E+00
0.00000000E+00	0.11547005E+01
0.30940107E+00	-0.29282033E+01
-0.48569794E+01	-0.28729341E+01
-0.76980042E+00	0.00000000E+00
0.00000000E+00	0.48569794E+01
0.53333335E+01	-0.76980036E+00
0.76980036E+00	-0.11547005E+01
0.11547005E+01	-0.53333335E+01

0.43094010E+01	0.10928203E+02
0.29282033E+01	0.00000000E+00
0.00000000E+00	0.11547005E+01
0.00000000E+00	-0.13014238E+01
0.13014238E+01	-0.20626740E+00
-0.76980042E+00	0.00000000E+00
0.11547005E+01	-0.53333335E+01
0.53333335E+01	-0.76980036E+00
0.76980036E+00	-0.11547005E+01

6.3.3. Paralelkenar Konsol Plak [14]



$$E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$t = 0.10 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3$$

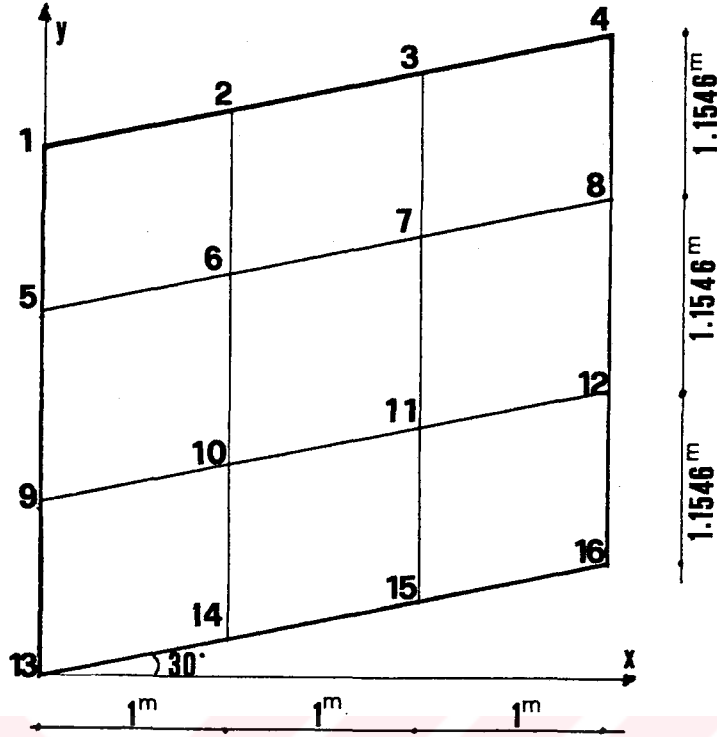
$$a = 3.00 \text{ m}$$

$$\gamma = 2.5 \text{ 7t/m}^3$$

Şekil 6.5. Paralel Kenar Konsol Plak

TABLO 6.2a.ELEMAN RIJITLIK MATRISI

0.10222220E+05	0.65333325E+03	-0.18799999E+04
-0.80888877E+04	0.14666669E+03	-0.17999999E+04
-0.27111108E+04	0.26666666E+03	-0.89999988E+03
0.57777759E+03	0.53333331E+03	-0.81999994E+03
0.65333331E+03	0.29333331E+03	-0.59999996E+02
0.14666669E+03	0.10666668E+03	0.42915344E-05
-0.26666666E+03	0.93333328E+02	-0.47683716E-06
-0.53333331E+03	0.10666667E+03	-0.14305115E-05
-0.18799999E+04	-0.59999989E+02	0.65999994E+03
0.17999998E+04	-0.95367432E-06	0.23999997E+03
0.89999994E+03	0.38146973E-05	0.20999998E+03
-0.81999988E+03	-0.38146973E-05	0.23999997E+03
-0.80888872E+04	0.14666670E+03	0.17999999E+04
0.10222221E+05	0.65333325E+03	0.18799998E+04
0.57777765E+03	0.53333331E+03	0.81999994E+03
-0.27111108E+04	0.26666669E+03	0.89999994E+03
0.14666669E+03	0.10666668E+03	-0.28610229E-05
0.65333331E+03	0.29333331E+03	0.60000000E+02
-0.53333337E+03	0.10666668E+03	-0.50067902E-05
-0.26666666E+03	0.93333336E+02	0.00000000E+00
-0.17999996E+04	0.23841858E-05	0.23999997E+03
0.18799998E+04	0.59999992E+02	0.65999994E+03
0.81999988E+03	-0.30994415E-05	0.23999998E+03
-0.89999994E+03	0.19073486E-05	0.20999998E+03
-0.27111108E+04	-0.26666666E+03	0.89999988E+03
0.57777753E+03	-0.53333331E+03	0.81999994E+03
0.10222221E+05	-0.65333325E+03	0.18799998E+04
-0.80888872E+04	-0.14666672E+03	0.17999996E+04
0.26666666E+03	0.93333328E+02	0.38146973E-05
0.53333337E+03	0.10666668E+03	-0.11920929E-05
-0.65333331E+03	0.29333331E+03	-0.60000000E+02
-0.14666666E+03	0.10666668E+03	-0.59604645E-05
-0.89999988E+03	0.95367432E-06	0.20999998E+03
0.81999988E+03	-0.21457672E-05	0.23999998E+03
0.18799998E+04	-0.59999989E+02	0.65999994E+03
-0.17999998E+04	-0.59604645E-05	0.23999998E+03
0.57777753E+03	-0.53333325E+03	-0.81999994E+03
-0.27111108E+04	-0.26666666E+03	-0.89999988E+03
-0.80888872E+04	-0.14666667E+03	-0.17999999E+04
0.10222221E+05	-0.65333325E+03	-0.18799996E+04
0.53333337E+03	0.10666667E+03	-0.47683716E-05
0.26666669E+03	0.93333336E+02	0.19073486E-05
-0.14666672E+03	0.10666668E+03	-0.69141388E-05
-0.65333325E+03	0.29333331E+03	0.60000008E+02
-0.81999988E+03	-0.47683716E-06	0.23999997E+03
0.89999994E+03	0.19073486E-05	0.20999998E+03
0.17999996E+04	-0.50067902E-05	0.23999998E+03
-0.18799996E+04	0.60000008E+02	0.65999994E+03



Şekil 6.6. Paralelkenar Konsol Plak Sonlu Eleman Ağı

Elde edilen λ değerleri ve mod biçimleri aşağıda gösterilmiştir. 1.mod'a ait frekans

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{1043.0055 \times 9.81}{1 \times 11546 \times 2.5 \times 0.1}} = 188.27 \text{ sn}^{-1}$$

olarak elde edilmiştir.

TABLO 6.3. ÖZDEĞERLER ve MOD BİÇİMLERİ

5 SÜPÜRME SONUNDA ÖZ DEĞERLER			
1043.0050	3357.4836	7008.5503	11183.3164
MOD BİÇİMLERİ			
0.4669	0.5310	0.5311	0.4669
0.6513	0.2752	-0.2753	0.6514
-0.2754	-0.6512	0.6514	0.2752
0.5310	-0.4671	-0.4667	0.5310

KAYNAKLAR

- [1] GIRKMAN, K., Flachentragwerke, Springer Verlag, (1959).
- [2] UGURAL, A.C., Stresses in Plates and Shells, Mc.Graw Hill, (1981).
- [3] SEGERLIND, L.J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, (1984).
- [4] WEAVER, W., JOHNSTON, P.R., Structural Dynamics by Finite Elements, Prentice-Hall, (1987).
- [5] SZILARD, R., Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall Inc, (1974).
- [6] REDDY, J.N., An Introduction to the Finite Element Method, Mc. Graw Hill, (1985).
- [7] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, Mc.Graw Hill, (1979).
- [8] GHALI, A., NEVILLE, A.M., Structural Analysis, Mc. Graw Hill, (1983).
- [9] REDDY, J.N., Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & SONS ltd. (1984).
- [10] BATHE, K.J., Procedures in Finite Element Engineering Analysis, Prentice Hall, (1982).
- [11] J.N., REDDY, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, Mc.Graw Hill, (1986).
- [12] PREZEMIENTECKI, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, Mc.Graw Hill, (1968).
- [13] PETYT, Maurice, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, (1980).
- [14] LEISSA, A.W., Vibration of Plates, NASA, (1969).

ÖZGEÇMİŞ

Erkan ŞAMHAL 1966 yılında Üsküdar'da doğdu. İlk ve Ortaokulu Üsküdar'da, Ümraniye Yamanevler İlkokulu ve Ahmet Cevdet Paşa Ortaokulu'nda tamamladı. Lise Öğrenimini ise Balıkesir Edremit Lisesi'nde bitirdi. 1983 yılında yüksek öğrenimine başladığı İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi'nden temmuz 1989'da mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açmış olduğu sınavı kazanarak Yüksek Lisans eğitimine başladı. Kasım 1989'da İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Yapı Anabilim Dalı Betonarme Çalışma Grubu'na Araştırma Görevlisi olarak atandı.

Halen aynı birimde görevini sürdürmektedir.