

## AKIŞKAN TAŞIYAN VİSKOELASTİK BORUNUN/ HORTUMUN NON-LİNEER DİNAMİK ANALİZİ

Öğretim Görevlisi, Dr. B. Gültekin SİNİR

C.B.Ü Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Manisa

E-mail: gultekin.sinir@bayar.edu.tr

Tel (iş): 0.236.2412144-258, Fax (iş): 0.236.2412143

### Özet

Bu çalışmada, akışkan taşıyan viskoelastik boru-şeritin kaotik davranışı araştırıldı. Viskoelastik borunun enine titreşimini veren kısmi diferansiyel denklemi, 2 terimli Galerkin kesimi ile basitleştirilerek adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Diğer parametreleri sabit alıp akışkan hızının değişimine göre bifurkasyon diyagramları çizildi. Sayısal sonuçlar, borunun enine titreşimi esnasında periodik, yarı periodik ve kaotik davranışlarının olduğu göstermiştir.

### Abstract

In this paper, bifurcation and chaos of a viscoelastic pipe-string conveying fluid are investigated. The the 2-term Galerkin truncations are respectively employed to simplify the partial-differential equation that governs the transverse motions of the pipe-string into a set of ordinary differential equations. The bifurcation diagrams are presented in the case that the flow speed is respectively varied while other parameters are fixed. Numerical simulations indicate that periodic, quasi-periodic and chaotic motions occur in the transverse vibrations of the axially moving viscoelastic string.

## 1.Giriş

Uygulama alanlarındaki yaygınlıktan dolayı eksenel hareketli sürekli ortam meknaîği bir çok araştırmacı tarafından çalışılan bir konudur. Eksenel hareketli ortam uygulamalarına örnekler olarak: baskı makinelerinin kayışları, teleferik ve içinden akışkan geçen boru, şerit (hortum) uygulamaları sayılabilir. Eksenel hareketli sürekli ortamların dinamik analizi çalışmalarında genellikle enine titreşim analizleri incelenmiştir. Bu konuda araştırmaları özetleyen ve derleyen çok güzel iki tane derleme makalesi vardır [1-2].

Gelişen teknoloji ile birlikte bu tür sistemde yeni malzemeler kullanılmaktadır. Bu yeni kullanılan malzemelerin dinamik davranışını modellerken klasik mekanik yaklaşımı olan elastik malzeme davranışının yanında başka modellere ihtiyaç vardır. Bu ihtiyaç sonucu visko-elastik modeller doğmuştur. Malzeme davranışını modelleyen bir çok viscoelastik model vardır [3].

İster elastik isterse viscoelastik modelle kullanılmış olsun eksenel hareketli ortamların titreşimi analizinde bir çok yöntemler kullanılmıştır. Örneğin Fung ve arkadaşları [4], Galerkin ve sonlu farkları birlikte kullanmışlardır. Benzer bir problemin çözümünde Chen ve arkadaşları [5] çok güzel bir Galerkin uygulaması yapmışlardır. Benzeri problemlerin çözümünde çok zaman ölçekli metod da çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

Biz bu çalışmada literatürde araştırmalarımıza göre ilk defa olacak şekilde, içinden geçen akışkan taşıyan viskoelastik borunun (hortumun) dinamik analizini inceleyeceğiz. Hareket denklemi Kirchhoff formu kullanılarak ve Newtonun konuna göre elde edilmiştir. Çözümler Galerkin metoduyla yapılmıştır. Sonuçlar enine titreşim genliklerinin zamanla değişim eğrileri, bifurkasyon ve hız-deplasman faz grafikleri olarak verilmiştir.

## 2. Hareket denkleminin elde edilmesi ve boyutsuzlaştırma

Hareket denklemini elde ederken enerji metodu kullanılmıştır. Païdoussis [6] ile Thurman ve Mote [1] aşağıdaki non-lineer birim şekil değiştirme ifadesini kullanmışlardır

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \hat{w}'^2 \quad (1)$$

Burada  $\hat{w}$ , enine deplasmanı göstermektedir. Bundan sonra bu çalışmada  $(\quad)'$ , konuma göre türevi;  $(\quad)^{\cdot}$  ise zamana göre türevi göstermek için kullanılacaktır. Sistemin kinetik enerjisini yazarsak

$$T = \frac{1}{2} \rho_f A_f \int_0^L (\dot{\hat{w}} + \hat{w}' \hat{v})^2 d\hat{x} + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{\hat{w}}^2 d\hat{x} \quad (2)$$

Yukardaki denklemden  $\rho_f$ ,  $A_f$  ve  $\hat{v}$  ifadeleri sırasıyla akışkanın yoğunluğunu, alanını ve hızını göstermektedir.  $\rho$ ,  $A$ , terimleri ise akışkan taşıyan sistemin yoğunluğunu ve kesit alanını temsil eder.  $L$  sistemin  $\hat{x}$  eksenini boyunca olan uzunluğunu temsil eder. Sistemin

eğilme momenti taşıyamayan bir sistem olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2} A \int_0^L \sigma' \varepsilon' d\hat{x} + \int_0^L P \varepsilon d\hat{x} \quad (3)$$

Burada  $\sigma$ , akışkan taşıyan sistemin (boru/hortum) gerilme dağılımını, P ise sisteme etkiyen çekme kuvvetini göstermektedir. Sistemin Lagrangian'ı yazıp Hamilton prensibini uygularsak aşağıdaki hareket denklemi elde edilir

$$\rho_f A_f (\ddot{w} + 2\dot{w}\dot{w}' + \dot{w}^2 w'') + \rho A \ddot{w} - P w'' - \frac{\dot{w}''}{L} \int_0^L A \sigma d\hat{x} = 0 \quad (4)$$

Burada viskoelastik malzeme, Kelvin model ile modellenmiştir.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (5)$$

Bu gerilme ifadesini hareket denkleminde yerine yazarsak

$$\rho_f A_f (\ddot{w} + 2\dot{w}\dot{w}' + \dot{w}^2 w'') + \rho A \ddot{w} - P w'' - \frac{AE}{2L} \dot{w}'' \int_0^L \dot{w}'^2 d\hat{x} - \frac{A\eta}{L} \dot{w}'' \int_0^L \dot{w}' \dot{w}' d\hat{x} = 0 \quad (6)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem 3 dereceden non-lineer integro-diferansiyel denklemdir. Denklemde ki eksenel kuvvet P'nin ortalama bir değer etrafında harmonik değişim yapmaktadır. Malzemeden ve boyutlardan bağımsız evrensel sonuçlar elde edebilmek için hareket denklemini boyutsuzlaştırırız. Denklemde bir bağımlı, iki bağımsız değişken vardır. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirebiliriz.

$$x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad w = \frac{\hat{w}}{L} \quad \text{ve} \quad t = \hat{t} \sqrt{\frac{P_0}{\rho_f A_f L^2}} \quad (7)$$

Boyutsuz hareket denklemini aşağıdaki gibi yazarsak

$$N(w) = 0 \quad (8)$$

Burda N diferansiyel operatördür:

$$N(w) = \ddot{w} + \beta \left\{ 2v\dot{w}' + w'' \left( v^2 - 1 - a \cos \Omega t - \frac{1}{2} E_e \int_0^1 w'^2 dx - E_v \int_0^1 w' \dot{w}' dx \right) \right\} \quad (9)$$

Yukardaki denklemde bazı boyutsuz katsayılar vardır. Bunlar

$$v = \dot{w} \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{P_0}}, \quad \beta = \frac{\rho_f A_f}{\rho A + \rho_f A_f}, \quad E_e = \frac{EA}{P_0}, \quad E_v = \frac{A\eta}{L \sqrt{P_0 \rho_f A_f}} \quad \text{ve} \quad a = \frac{P_1}{P_0} \quad (10)$$

Yukardaki birinci terim boyutsuz hızı, ikinci terim ise doluluk oranını gösterir.

### 3. Galerkin Metodu ile Çözüm

Galerkin metodu yarı analitik bir yöntemdir. Galerkin metodunda, konum bağımlılığından sınır şartlarını sağlayan fonksiyonların seri toplamı şeklinde ayrıklaştırarak kurtulunur. Alınan herterim sayısına karşılık bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Sabitlenmiş iki kenar için sınır şartlarını yazarsak

$$w(0,t)=0 \text{ ve } w(1,t)=0 \quad (11)$$

Galerkin çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$w(x,t) \cong \sum_{n=1}^m q_n(t) X_n(x) \quad (12)$$

Sınır şartlarını sağlayan şekil fonksiyonu  $X_n(x)$  aşağıdaki gibi seçilebilir

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (13)$$

Yukarda verilen çözüm kabulünü boyutsuz hareket denklemine yerleştirir ve şekil fonksiyonun ortaganili ile çarparsak artakalın diye isimlendirebileceğimiz ifadeyi elde ederiz:

$$\int_0^1 N \left[ \sum_{n=1}^m \ddot{q}_n(t) \sin(n\pi x) \right] \sin(i\pi x) dx = 0, \text{ ve } i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

Boru problemlerinde 2 terim almanın yeterli olduğu çeşitli çalışmalarla gösterilmiştir [ ]. Bu çalışmada da 2 terim Galerkin metodu kullanılacaktır. Sonuç olarak iki denklemden oluşan non-lineer adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir.

$$\ddot{q}_1 + (1 + a \cos(\Omega t) - v^2) \beta \pi^2 q_1 - \frac{16}{3} v \beta \dot{q}_2 + \beta \pi^4 \frac{1}{4} (E_e (q_1^3 + 4q_1 q_2^2) + E_v (2q_1^2 \dot{q}_1 + 8q_1 q_2 \dot{q}_2)) \quad (15)$$

$$\ddot{q}_2 + (1 + a \cos(\Omega t) - v^2) 4 \beta \pi^2 q_2 + \frac{16}{3} v \beta \dot{q}_1 + \beta \pi^4 (E_e (4q_2^3 + q_2 q_1^2) + E_v (8q_2^2 \dot{q}_2 + 2q_2 q_1 \dot{q}_1)) \quad (16)$$

Bu diferansiyel denklem sistemi üçüncü dereceden non-lineer bir denklemdir. Nümerik analize ihtiyaç vardır. Adi difereansiyel denklemlerin çözümünde çok yaygın olarak kullanılan Runge-Kutta metodu kullanılacaktır. Bu çalışmada sayısal sonuçlar 7-8 mertebeden Runge-Kutta metoduyla elde edilmiştir. Sayısal değerleri elde etmek için Maple programı kullanılmıştır.

#### 4. Sayısal sonuçlar

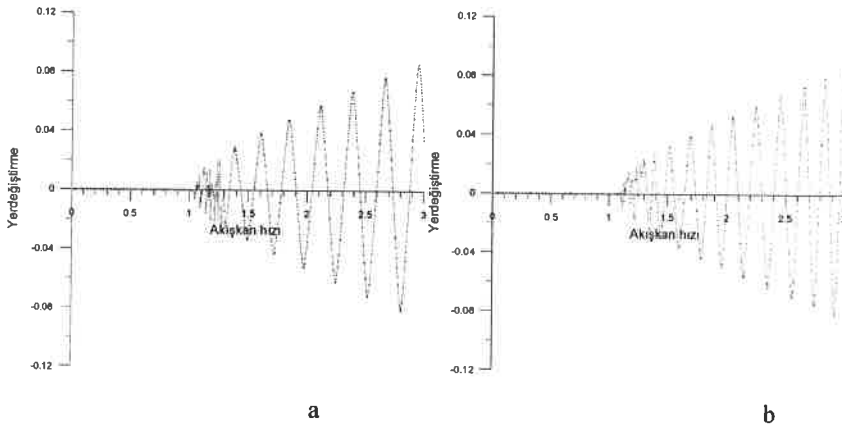
Bu bölümde çeşitli parametrelerin sistemin davranışı üzerindeki etkileri grafiklerle gösterilmiştir. Sistemin kaotik davranışını gösteren bifurkasyon (saçılma) diyagramları  $t=80$  zaman için lede edilmiştir. Yatay ekseninde hız düşey ekseninde borunun deplasmanı vardır. Ayrıca bifurkasyon olan ve olmayan bölgeler için zaman-deplasman grafikleri ile faz portresini veren diyagramlarda elde edilmiştir.

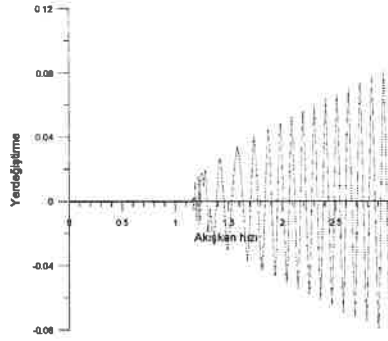
Doluluk oranı  $\beta$ 'nın etkisini izliyeabilmek için üç farklı değer kullanılmıştır: 0.2, 0.5 ve 0.8. Doluluk oranı teorik olarak bir olamaz. Olduğu durum ise eksenal hareketli şerit problemine dönüşür. Yukarıda verilen doluluk oranları için iki farklı durumda grafikler elde edildi. Birinci eksenal zorlamanın sabit olduğu durum, ikincisi ise eksenal zorlamanın sabit bir kuvvet etrafında  $a=0.9$  genlik ve  $\Omega=0.125$  frekansla değiştiği durumdur.

Bütün  $a=0$  için elde edilen grafikler de görüldüğü üzere akışkan hızı belli bir değere ulaşınca sistemde kaos oluşmakta, hız değeri daha da artınca ise düzenli bir harekete geçmektedir. Kaosun sürdüğü akışkan hızı değerleri  $\beta=0.2$  için  $v=1.0-1.3$ ;  $\beta=0.5$ , için  $v=1.1-1.3$ ;  $\beta=0.8$  için  $v=1.2-1.3$  olarak elde edilmiştir. Görüldüğü üzere kaosun başlangıç değeri doluluk oranı arttıkça artmakta ancak bittiği nokta değişmemektedir (Şekil 1)

Şekil 2'de ise kaosun olduğu bölgeler  $\beta=0.2, 0.5, 0.8$  için değişmemekte  $v=0.4-1.7$  hızları arasında oluşmaktadır. Burda değişim olmamasının nedenin zorlamanın baskın bir parametre olması olabilir.

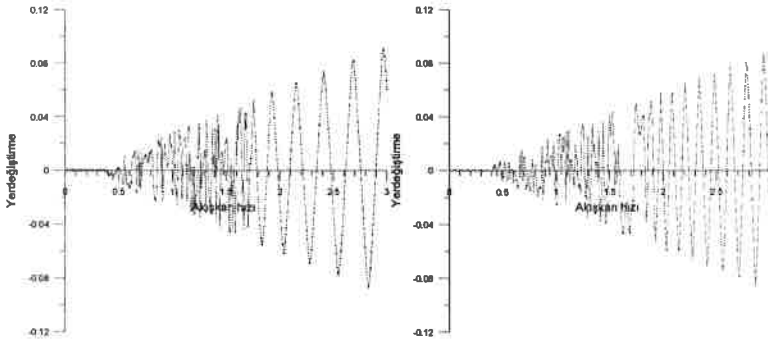
Şekil 3.'te  $\beta=0.5$ ,  $E_e=400$ ,  $E_v=50$  ve  $a=0.9$  değerlerini kullanarak elde edilen zaman-deplasman grafikleri vardır. Bu grafiklerde akışkan hızları 3 farklı bölgeyi temsil edecek şekilde seçilmiştir. Akışkan hızı  $v=1.0$ , kaos oluşmazdan önceki bölgeye karşılık gelir. Kaosun olduğu bölge için  $v=1.2$  seçilmiştir. Kaosun sonraki düzenli bölge için  $v=2.0$  hızı için grafikler elde edilmiştir.





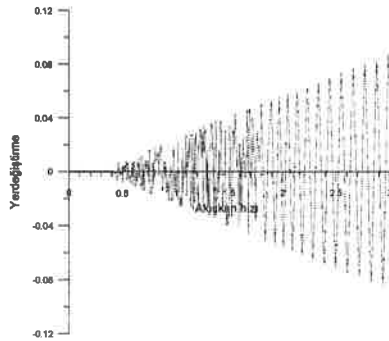
c

Şekil 1. Doluluk oranı  $\beta$ 'nın  $a=0$  olduğu durumda ki değişimi ( $E_e=400$ ,  $E_v=50$ ) a)  $\beta=0.2$  b)  $\beta=0.5$  c)  $\beta=0.8$ .



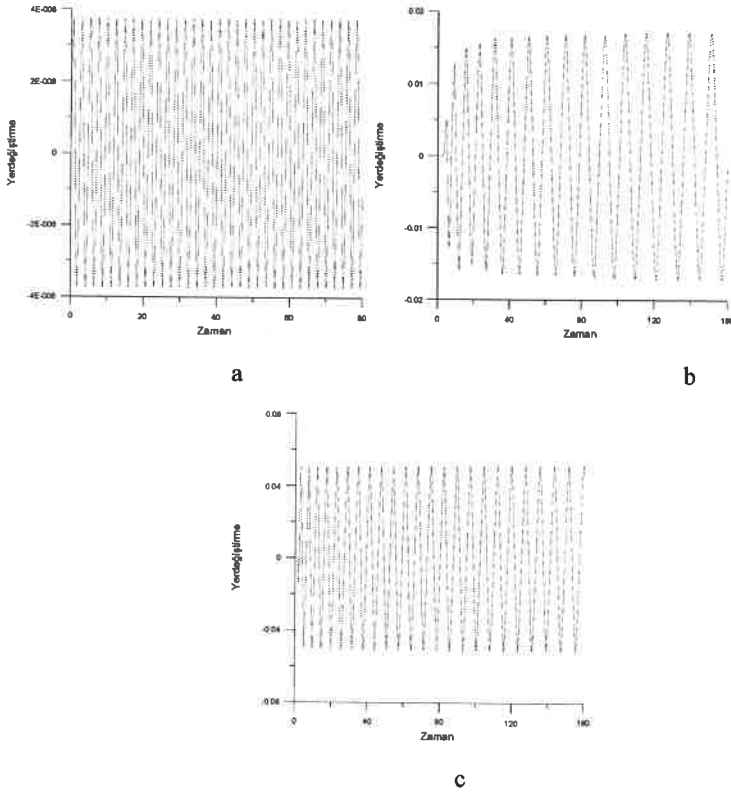
a

b



c

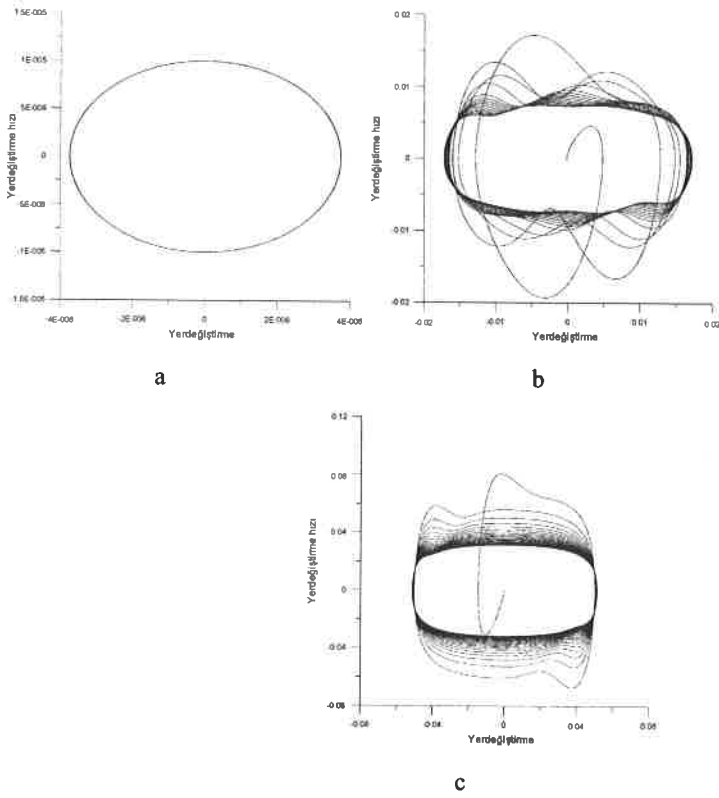
Şekil 2. Doluluk oranı  $\beta$ 'nın  $a=0.9$  ve  $\Omega=0.125$  olduğu durumda ki değişimi ( $E_e=400$ ,  $E_v=50$ ) a)  $\beta=0.2$  b)  $\beta=0.5$  c)  $\beta=0.8$ .



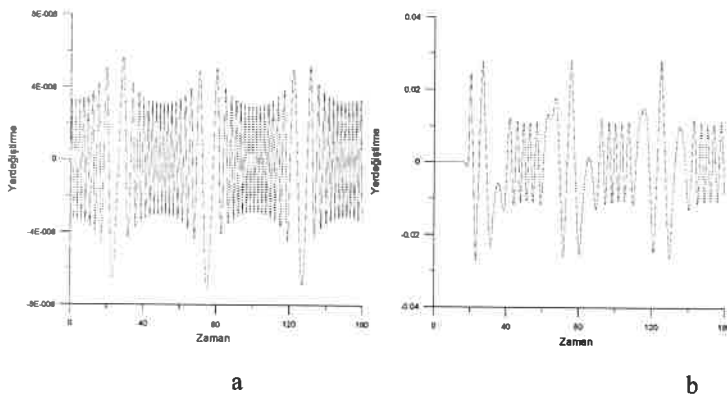
Şekil 3. Üç farklı bölge için zaman-deplasman grafikleri ( $E_e=400$ ,  $E_v=50$ ,  $\beta=0.5$ ) a)  $v=1.0$  b)  $v=1.2$  c)  $v=2.0$ .

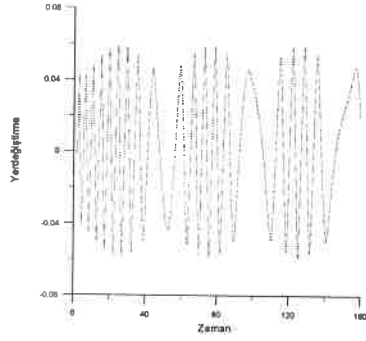
Şekil 4'te, Şekil 3'deki grafiklerin elde edildiği değerler kullanılarak sistemin faz portresi çizilmiştir. Bir başka deyişle 3 farklı bölge için faz portreleri çizilmiştir. Birinci bölge için elde edilen grafik tam beklendiği gibidir. İkinci ve üçüncü bölgeler için elde edilen faz portreleri de beklendiği gibidir.

Şekil 3 ve 4'de elde edilen grafiklere benzer grafikler bu sefer eksenal harmonik zorlamanın olduğu durum için tekrar elde edilmiştir. Burada  $a=0.9$  ve  $\Omega=0.125$  alınmıştır. Üç farklı bölgeyi temsil edecek hızlar ise  $v=0.2$ ,  $1.0$  ve  $2.0$  seçilmiştir. Grafikler bu değerler dikkate alınarak verilmiştir



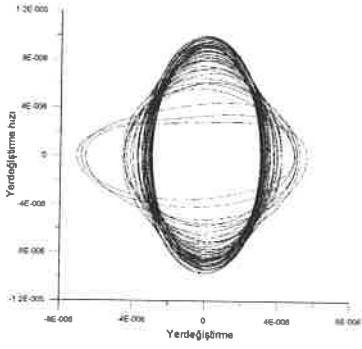
Şekil 4. Üç farklı bölge için faz portreleri ( $E_e=400$ ,  $E_v=50$ ,  $\beta=0.5$ ) a)  $\nu=1.0$  b)  $\nu=1.2$  c)  $\nu=2.0$ .



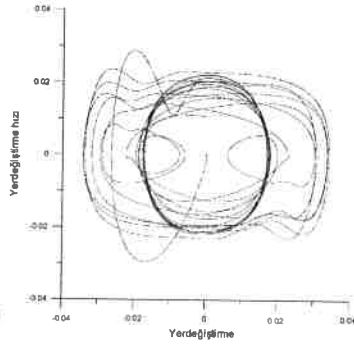


c

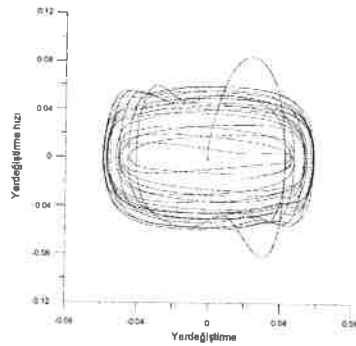
Şekil 5. Üç farklı bölge için zaman-deplasman grafikleri ( $E_e=400$ ,  $E_v=10$ ,  $\beta=0.5$ ,  $a=0.9$ ,  $\Omega=0.125$ ) a)  $v=0.2$ , b)  $v=1.2$ , c)  $v=2.0$ .



a



b



c

Şekil 6. Üç farklı bölge için faz portreleri ( $E_e=400$ ,  $E_v=10$ ,  $\beta=0.5$ ,  $a=0.9$ ,  $\Omega=0.125$ ) a)  $v=0.2$ , b)  $v=1.2$ , c)  $v=2.0$ .

## 5. Sonuç

Bu çalışmada eksenel hareketli sürekli ortam problemi olan içinden akışkan geçen viskoelastik problemi incelenmiştir. Sistem eğilme momenti taşımayan şerittir. Malzeme Kelvin-Voight viskoelastik model ile modellenmiştir. Zamanla harmonik değişen bir eksenel kuvvette maruz kalmıştır. Sistemin hareket denklemi Hamilton prensibi ile elde edilmiştir. Hareket denklemi kübit nonlinear integro diferansiyel denklemdir. Analiz Galerkin metodu ile yapılmıştır.

Sonuçlardan görüldüğü üzere artan hızla birlikte sistemde üç farklı davranış ortaya çıkmaktadır. Birinci bölge stabil bölgedir. Sistemin davranışı bellidir. Hız arttıkça ikinci bölgeye ulaşılır. İkinci bölge sistemin kotik davranış sergilediği bölgedir. Nasıl davranılacağı kestirelemez. Hız artmaya devam ettikçe üçüncü bölgeye ulaşılır. Bu bölge de sistem düzenli davranış içindedir. İkinci ve üçüncü bölgelerde sistemin stabil olup olmadığı literatürde tartışılan ve üzerinde araştırılması gereken bir konudur.

Sistemde sabit bir eksenel kuvvet olduğunda doluluk oranı arttıkça kaotik bölgenin başladığı kritik hız değeri artmakta ancak kaotik bölgenin bitiş noktası değişmemektedir. Bir başka deyişle doluluk oranı arttıkça kaotik bölge küçülmektedir. Sistemde zamanla harmonik değişen bir eksenel kuvvet olması durumunda ise doluluk oranının değişmesi kotik bölgeye etki etmemektedir. Burada eksenel kuvvetteki harmonik değişimin baskın olmasından kaynaklanabilir.

İleriki çalışma konuları olarak farklı viskoelastik modeller kullanılarak çalışma tekrarlanabilir.

## Referanslar

1. Wickert J. A. and Mote Jr C. D., 1988. Current research on the vibration and stability of axially moving materials. Shock and Vibration Digest 20, 3-13.
2. Paidoussis M. P. and Li G. X., 1993. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. Journal of Fluids and Structures 7, 137-204.
3. Jo, C., Fu, J., Naguib, H. E., 2005. Constitutive modeling for mechanical behavior of PMMA microcellular foams. Polymer 46 11896-11903.
4. Fung, R.F., Huang, J.S., Chen, Y.C., 1997. The transient amplitude of the viscoelastic traveling string: an integral constitutive law. Journal of Sound and Vibration 201 (1), 153-167.
5. Chen L.Q., Wu J., Zu, J.W., 2004. The chaotic response of the viscoelastic traveling string: an integral constitutive law. Chaos, Solitons & Fractals, 22 349-357.
6. Paidoussis, M.P., 1998. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, vol. 1. Academic Press, London.