

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ « FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TİTREŞİM VE DİNAMİK DAVRANIŞLAR DIKKATE ALINARAK
VAGON DİNAMİK PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. Ömer KAYA**

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : KONSTRÜKSİYON

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ « FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TİTREŞİM VE DİNAMİK DAVRANIŞLAR DIKKATE ALINARAK
VAGON DİNAMİK PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak.Müh. Ömer KAYA
(503051210)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ata MUGAN
Diğer Jüri Üyeleri Yrd.Doç. Vedat DOĞAN
Yrd.Doç. Vedat TEMİZ**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Geçmişten beri yolcu taşımak amacıyla geliştirilen araçlar mühendisler açısından çok önemli bir araştırma konusu olmuştur. Günümüzde tasarımcılar titreşim, gürültü, emniyet ve estetik gibi alanlarda daha iyiye ulaşmak için çalışmalarına devam etmektedirler.

Tasarım, prototip üretimi, test ve iyileştirme çalışmaları mekanik bir yapının ortaya çıkarılmasında ana adımları oluşturur. Modelleme ve analiz gibi mühendislik çalışmalarının bilgisayar yardımıyla yapılması projeye üretime geçmeden önce çok detaylı ve etkin bir çalışma sunmakta ve sonradan yaşanabilecek sorunların etkisini önemli ölçüde azaltmaktadır. Bu çalışmada proje tasarım aşamasında bir katarı oluşturan vagonların dinamik davranışlarını etkileyen sistem parametrelerinin etkilerini önceden tahmin etmek amaçlanmıştır.

Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen ve beni her konuda en etkin şekilde yönlendiren hocam Prof.Dr. Ata MUGAN'a, çalışmalarımda yakın ilgisini gördüğüm ve değişik konularda kendilerinden faydalandığım çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Mayıs 2008

Ömer KAYA

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ VE KONUNUN TANITIMI	1
1.1. Giriş	1
1.2. Bir Yolcu Vagonunun Tanıtılması	3
2. KONUYLA İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR	5
3. GENEL FORMÜLASYON VE ÇÖZÜM MODELLERİ	10
3.1. Sistemin Modellenmesi	10
4. TİTREŞİM GENEL BİLGİLER	13
4.1. Titreşimlerin Geometri ve Fiziği	13
4.1.1. Giriş	13
4.1.2. Titreşimlerin sebepleri	14
4.1.3. Titreşimlerin sonuçları	14
4.2. Titreşimle İlgili Terimler	15
4.2.1. Titreşim tanımı	15
4.2.2. Titreşim sisteminin elemanları	18
4.2.3. Serbestlik derecesi	20
4.2.4. Genelleştirilmiş koordinatlar	21
4.3. Titreşimlerin Sınıflandırılması	21
4.3.1. Serbest titreşimler	21
4.3.2. Zorlanmış titreşimler	21
4.4. Titreşim Analizi	22
4.4.1. Mühendislik sistemlerinin fiziki modeli	22
4.4.2. Tek serbestlik dereceli sistemlerin serbest titreşimi	27

4.4.3. Zorlanmış (harmonik ikazlı) sistemler	36
4.5. Normal Mod Analize Bakış	43
5. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ	48
5.1. Tanım	48
5.2. Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Hareket Denklemleri	50
6. TEK VAGON İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN HESABI	53
6.1. Vagonun Doğal Frekanslarının Hesabı	53
6.2. Tek Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı	69
6.3. Tek Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi	74
7. ÇİFT VAGON İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN HESABI	77
7.1. Vagonun Doğal Frekanslarının Hesabı	77
6.2. Çift Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı	92
6.3. Çift Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi	96
8. ÜÇ VAGON İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN HESABI	98
8.1. Vagonun Doğal Frekanslarının Hesabı	98
8.2. Üç Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı	112
8.3. Üç Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi	118
9. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALAR	119
KAYNAKLAR	120
ÖZGEÇMİŞ	123

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1 : Sistem matrisini oluşturan notasyonlar ve açıklamaları	58
Tablo 6.2 : Sistem matrisini oluşturan durum değişkenleri ve türevleri.....	58
Tablo 6.3 : Çalışmada kullanılan vagonun sayısal değerleri.....	61
Tablo 6.4 : Tek vagon için modal sonuçların karşılaştırması.....	68
Tablo 6.5 : Çalışmada kullanılan vagonun sayısal değerleri.....	72
Tablo 6.6 : Tek vagonda ilk doğal frekansı etkileyen parametreler.....	76
Tablo 7.1 : İki vagon için sistem matrisini oluşturan notasyonlar ve açıklamalar	83
Tablo 7.2 : Sistem matrisini oluşturan durum değişkenlerinin birinci ve ikinci türevleri.....	84
Tablo 7.3 : Çalışmada kullanılan vagonun sayısal değerleri.....	85
Tablo 7.4 : İki vagon için modal sonuçların karşılaştırılması.....	91
Tablo 7.5 : Çift vagon sisteminde ikaz cevabı için gerekli değerler	95
Tablo 7.6 : Çift vagonda ilk doğal frekansı etkileyen parametreler	96
Tablo 7.7 : Çift vagonda son doğal frekansı etkileyen parametreler.....	97
Tablo 8.1 : Çalışmada kullanılan vagonun sayısal değerleri	111
Tablo 8.2 : Üç vagon için modal sonuçların karşılaştırması	112
Tablo 8.3 : Üç vagon sisteminde ikaz cevabı için gerekli değerler.....	117

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : Trevitchickt tarafından 1804 yılında denenen ilk ray üzerinde hareket eden demiryolu taşıtı.....	2
Şekil 1.2 : Ortak bir bojiye sahip üç bojili metro aracı.....	3
Şekil 1.3 : Çift boji üzerine oturtulmuş yolcu vagonu.....	3
Şekil 1.4 : Bir boji üzerinde, birbirilerine paralel çalışacak şekilde konumlandırılmış yay elemanları (üstten görünüş).....	4
Şekil 1.5 : Boji ve üzerindeki elemanları.....	4
Şekil 2.1 : G.R.M. Mastinu, M.Gobbi ve G.D.Pace'nin kullandıkları model	6
Şekil 2.2 : N.Ouelaa'nın 2 adet vagonu incelediği model.....	6
Şekil 2.3 : Sewall'ın çalışmasında kullandığı vagonun düşey modeli.....	7
Şekil 2.4 : Dhanasekar tarafından oluşturulan vagon sistemi ve demiryolu dinamik modeli.....	8
Şekil 3.1 : Toplu kütleli vagon modeli.....	11
Şekil 4.1 : Peryodik hareket grafiği	15
Şekil 4.2 : Harmonik hareket grafiği	16
Şekil 4.3 : Yerdeğiştirme, hız ve ivme vektörleri arasındaki ilişki.....	17
Şekil 4.4 : Aralarında bir faz farkı bulunan iki harmonik hareket.....	17
Şekil 4.5 : Titreşim sisteminin temel büyüklükleri	18
Şekil 4.6 : Öteleme durumunda titreşim sisteminin elemanları	19
Şekil 4.7 : Dönme durumunda titreşim sisteminin elemanları	20
Şekil 4.8 : Serbest titreşim	22
Şekil 4.9 : Sönümlü zorlanmış titreşim	22
Şekil 4.10 : Titreşimi incelenen bir vagon modeli	23
Şekil 4.11 : Zaman domeninde bir titreşim profili	25
Şekil 4.12 : Zaman domeninde ayrık (harmonik) ve toplam (harmonik olmayan) titreşimler.....	26
Şekil 4.13 : Frekans domeninde titreşim profili.....	27
Şekil 4.14 : Frekans-Zaman domeni ilişkisi	27
Şekil 4.15 : Sönümsüz tek serbestlik dereceli sistem.....	28
Şekil 4.16 : Sönümlü tek serbestlik dereceli sistem.....	31
Şekil 4.17 : Sönümlü zorlanmış titreşim modeli.....	37
Şekil 4.18 : Sönümlü zorlanmış titreşim sisteminde özel ve homojen çözüm yapıları.....	38
Şekil 4.19 : Durum 1 için kuvvet ve yerdeğiştirmesi.....	40
Şekil 4.20 : Durum 2 için kuvvet ve yerdeğiştirmesi.....	41
Şekil 4.21 : Durum 3 için yerdeğiştirmesi.....	42
Şekil 5.1 : Y.Q Sun ve M. Dhanasekar tarafından kullanılan model.....	48
Şekil 5.2 : Sisteme bir örnek, NASA tarafından kullanılan vagon modeli.....	49
Şekil 5.3 : İki serbestlik dereceli sistemin serbest cisim diyagramı	51
Şekil 6.1 : Analizde kullanılan vagon serbestileri	53
Şekil 6.2 : Serbestlik dereceli toplu kütleli vagon modeli	55
Şekil 6.3 : Tek vagon kütle matrisi.....	56
Şekil 6.4 : Tek vagon rijitlik matrisi	57

SEMBOLLER LİSTESİ

Mc	: Vagon gövdesi kütlesi
Jc	: Vagon gövdesi kütle atalet momenti
Mb	: Boji gövdesi kütlesi
Jb	: Boji gövdesi kütle atalet momenti
Yc	: Vagon gövdesi düşey yerdeğiştirmesi
Θc	: Vagon gövdesi dönme açısı
Y1	: Boji gövdesi düşey yerdeğiştirmesi
Θ1	: Boji gövdesi dönme açısı
Y2	: Boji gövdesi düşey yerdeğiştirmesi
Θ2	: Boji gövdesi dönme açısı
K1	: Birincil süspansiyon yay katsayısı
K_{pr}	: Birincil süspansiyon yay yatsayısı
K2	: İkincil süspansiyon yay katsayısı
K_{sc}	: İkincil süspansiyon yay katsayısı
Kv	: Ara süspansiyon yay katsayısı
C1	: Birincil süspansiyon sönüm katsayısı
C2	: İkincil süspansiyon sönüm katsayısı
Cv	: Ara süspansiyon sönüm katsayısı
Lb1	: Akslar arası mesafe
Lb2	: Akslar arası mesafe
L1	: Bojiler arası mesafe
L2	: Bojiler arası mesafe
Ωn	: Doğal frekans
Ωdr	: İkaz frekansı
[M]	: Kütle matrisi
Mmat	: Kütle matrisi
[C]	: Sönüm matrisi
Cmat	: Sönüm matrisi
[K]	: Rijitlik matrisi
Bmat	: Rijitlik matrisi
Amat	: Sistem matrisi
V	: Vagon hızı
L_R	: Harmonik ikaz dalga boyu
A	: Harmonik ikaz genliğı
g	: Yerçekimi ivmesi

TİTREŞİM VE DİNAMİK DAVRANIŞLAR DİKKATE ALINARAK VAGON DİNAMİK PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, raylı bir taşıtın imalatına başlanmadan önce seçilecek olan sistem değişkenlerinin aracın daha sonradan çalışır durumdaki hareket karakteristiği üzerinde nasıl bir etkisi olduğu gözlenmeye çalışılmıştır.

Üzerinde durulan esas konu bir vagonun ve tren katarının düşey titreşimlerinin analiz edilmesi olmuştur. Öncelikle aracın düşey titreşimlerini inceleyebilmek için sistemin özelliklerini en iyi şekilde yansıtabilecek bir dinamik eşdeğer sistem modeli geliştirilmiştir. Vagonun ana elemanları olan gövde ve bojiler toplu kütleler olarak kabul edilmiş, bunlar arasında yay ve sönüm elemanları ile dinamik ilişki kurulmuştur. İlk olarak modal analiz yapabilmek amacıyla tek vagon için hareket denklemleri hesaplanmış, bu denklemler matris formunda ifade edilmiştir. Matlab programında yazılan modal analiz hesaplayıcısıyla vagonun özdeğerleri ve özvektörleri hesaplanmıştır. Bu hesapların doğruluğunu kontrol edebilmek amacıyla aynı dinamik sistem Msc.Adams programında da hazırlanmış, buradan bulunan sonuçlar ile Matlab'dan alınan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra tek vagon sistemine akslardan harmonik ikaz uygulanmış bu durumda sistemin davranışı incelenmiştir. Bu durumda sistemin diferansiyel eşitlikleri çıkarılmış, Matlab programı yardımıyla oluşturulan sistem matrisleri çözülmüştür ve araç elemanlarının yerdeğiştirme miktarları hesaplanmıştır. Ayrıca vagon için kritik hız hesabı da yapılmıştır. Analizde kullanılan parametre girdilerinin de sistemin dinamiğini nasıl etkilediğini anlayabilmek için duyarlılık analizi yapılmıştır. Vagonu oluşturan tüm büyüklükler sırasıyla yüzde beş oranında arttırılarak modal çözüm yapılmış, sistemde baskın olan parametreler ortaya çıkarılmıştır.

Ayrıca tek bir vagonun yanısıra, bu araca yeni vagonlar bağlanmış ve böylece tek araç haricinde bir tren katarının dinamik davranışları çıkarılmıştır. Bu dinamik ilişkiler Matlab programı yardımıyla hesaplanmış ve bu sonuçlar aynı zamanda Msc.Adams üzerindeki modellemelerle doğrulanmıştır.

THE OBSERVATION OF WAGON DYNAMIC PARAMETERS CONSIDERING VIBRATION AND DYNAMIC ACTIONS

SUMMARY

In this study, vehicle system variables which are decided before production of the rail vehicle are observed that how these system parameters affect the operation motion characteristic of the rail vehicle.

The base subject deliberated on actually is modal analysis for the vertical vibration of a wagon and train series. Firstly, a dynamic system model equivalent to real vehicle system is developed to study on vertical vibrations of the rail vehicle. Body and bogies, are the main elements of a wagon, are modelled as lumped mass. A dynamic contact is formed between body and bogies by using spring and damping elements. At first step, the differential equations of motion for only one wagon are calculated for modal analysis and these equations are explained in matrix form. The eigenvalues and eigenvectors of the wagon are calculated by using modal solver that prepared as a Matlab code. The same dynamic system is modelled in Adams program to control Matlab results accuracy and the modal results received Adams solver are compared to Matlab results. At one wagon model, a harmonic excitation is applied to axes from rails and observed dynamic behavior of the wagon system. As external excitation type is used sinusoidal harmonic. For an external excitation situation, the differential equations of motion is rewritten, formed in matrix form at Matlab program and calculated vertical displacements of the main wagon elements. Moreover, the critical speed calculation is performed at this analysis. At last step, a sensitivity analysis is performed to find which wagon parameter is more dominant on full system dynamic behaviour. By increasing the values of wagon parameters like five percent, modal analysis is resolved and calculated degree of influence on first natural and last natural frequency of the wagon.

In addition to one wagon model, new wagons are connected to this and natural frequencies of rail vehicle till five wagons are calculated by using Matlab code.

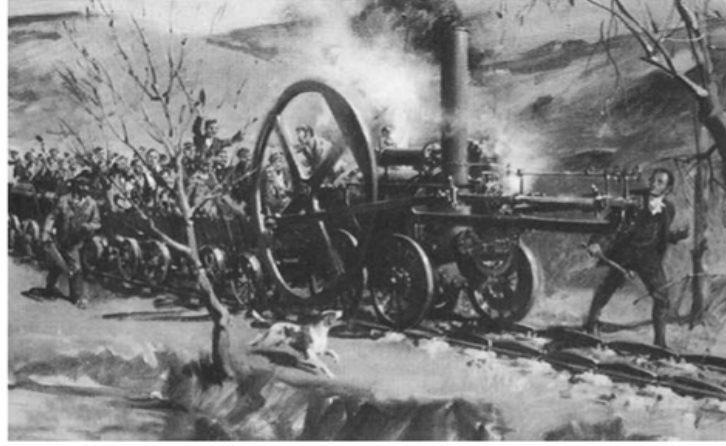
1. GİRİŞ VE KONUNUN TANITILMASI

1.1 Giriş

Mekanik sistemlerin tasarımı, hesaplamaları ve üretim süreci oldukça uzun zaman alan ve üzerinde hassasiyetle durulan konulardır. Mekanik yapıların tasarımı oldukça zor bir işlem olarak görülebilir ve tam optimize bir sonuç alınması pek nadirdir. Günümüzde yolcu taşımada kullanılan araçlar ile ilgili ulusal çevre mevzuatları, titreşim konforu, bununla ilişkili olarak ses konforu, güvenlik ve görsel tasarım gibi konular tasarım mühendisleri için her zaman daha da geliştirilebilecek problemleri ortaya koymuştur.

Mekanik bir yapının kullanıma sunulmasına kadar geçen süreç, tasarım, prototip üretimi, testler ve iyileştirilme gibi aşamaları içerir. Günümüz yapı tasarımlarının her aşamasında artık bilgisayarın kullanıldığını rahatlıkla görmekteyiz. Tasarım ve analiz gibi mühendislik çalışmalarının bilgisayar desteğinde yapılması ise, projeye üretim öncesinde hassas bir ön çalışma sunmakta ve daha sonra karşılaşılabilecek problemleri önceden hesaplayarak hem süreç hem de güvenlik anlamında kolaylıklar sağlamaktadır.

Bilgisayar üzerinde araç benzetimlerinin taşıt sektöründe kullanılmasıyla, raylı taşıt sektöründe de bu tür ihtiyaçlar oluşmuştur. Bu gereksinimleri karşılamak amacıyla özellikle raylı taşıt problemlerini analiz etmek için kullanılan Adams/Rail, Vampire, FastSim, Nucars, Omnisim, Gensys vb. multibody dinamik simülasyon programları hazırlanmıştır. Bu tür programların kullanılması, tasarım mühendisine gerçek çalışma şartlarında aracın dinamik davranışını inceleme imkanı verir. Bu tez içeriğinde de bir yolcu vagonunun seyir esnasında karşılaştığı dinamik halleri incelenmiş ve vagon hareketleri üzerinde belirleyici parametrelerin etkileri gözlenmiştir.



Şekil 1.1: Trevitchickt Tarafından 1804 Yılında Denenen İlk Ray Üzerinde Hareket Eden Demiryolu Taşıtı

Raylı taşıtın sürüş karakteristiği; araç üzerindeki mekanik yapılara ek olarak demiryolu ray yapısı ve yol altı inşaat malzemelerinden de etkilenmektedir. Günümüzde ülkemizde genellikle yeni demiryolu inşaatları yerine ıslah çalışmaları yapılmaktadır. Özellikle yaşlanmış verimsiz hatların azaltılmasıyla daha yüksek hız ve aks yüklerine sahip demiryolu rehabilitasyon çalışmaları yapılmaktadır. Demiryolu aracının tek başına modern sistemlere sahip olması sürüş güvenliği ve konforun sağlanmasına yetmemektedir. Son aylarda yaşanan demiryolu kazalarında bu faktörleri rahatlıkla gözlemleyebilmekteyiz. Demiryolu ağı kavramı ilk olarak 1835 yılında Belçika'da Brüksel-Malinas hattının açılmasıyla ortaya çıktı. Ülke kısa zamanda 560km yol döşeyerek hem ulusal birliği güçlendirdi hem de devlet ekonomisinin gelişimini sağladı. Avrupa'da 1840 yılından itibaren ulusal demiryolu ağları oluşturulmaya başlandı. Amerika'da 1869 yıllarında Atlas Okyanusu ile Pasifik Okyanusu arası demiryolu ile birleştirilmiştir. Asya'da 9000km den daha uzun Transsibirya 1916'da kullanıma açılmıştır. Anadolu'da ise ilk olarak Osmanlı döneminde 1856 yılında demiryolu döşenmeye başlanmıştır. Türkiye'nin sanayi devrimleri ile de devam eden raylı taşımacılıkta günümüzde 8700km demiryolu aktif olarak kullanılmaktadır.

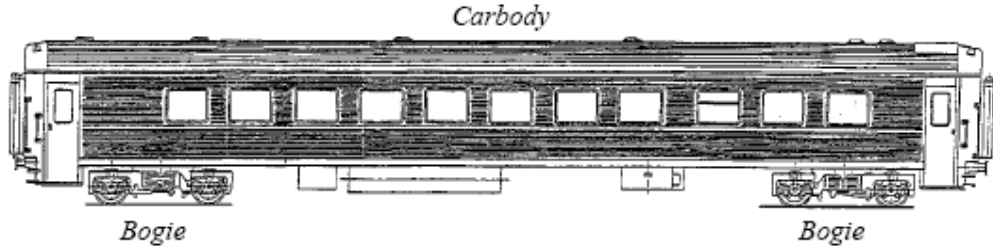
1.2 Bir Yolcu Vagonunun Tanıtılması

Yolcu vagonu temel olarak iki ana gruba ayrılarak incelenebilir. Bu kısımlar yolcuların bulunduğu vagon gövdesi ve gövdeyi taşıyan bojilerdir. Şekil 1.3'te gösterildiği gibi klasik yolcu vagonlarında gövde 4 adet elastik mesnet vasıtasıyla 2 adet boji üzerine oturtulur. Metro gibi hızlı tren setlerinde 2 vagon baş kısmı ortada üçüncü bir boji üzerine oturtulur (Şekil 1.2). Bu tür hızlı araçlarda vagonlar arası bağlantılar klasik vagonlara göre daha rijit bir bağlantıya sahiptir.



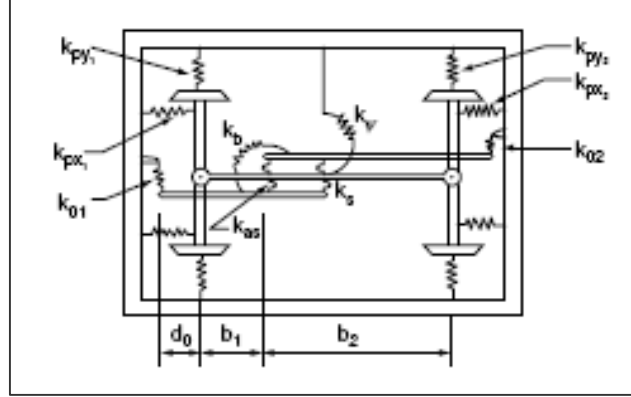
Şekil 1.2: Ortak Bir Bojiye Sahip Üç Bojili Metro Aracı

Vagon taşıyıcı ve yönlendirici sistemi olan bojiler, raylardan kaynaklanan titreşimlerin azaltılarak vagon gövdesine geçmesini sağlayarak yolcuların veya yükün istenen titreşim aralıklarında bırakılmasını sağlar. Şekil 1.5'te tipik bir yolcu vagon bojisi gösterilmektedir. Ayrıca vagonun virajlara girdiğinde rahatlıkla yön bulmasını ve güvenli dönüş yapmasını da ayarlar.

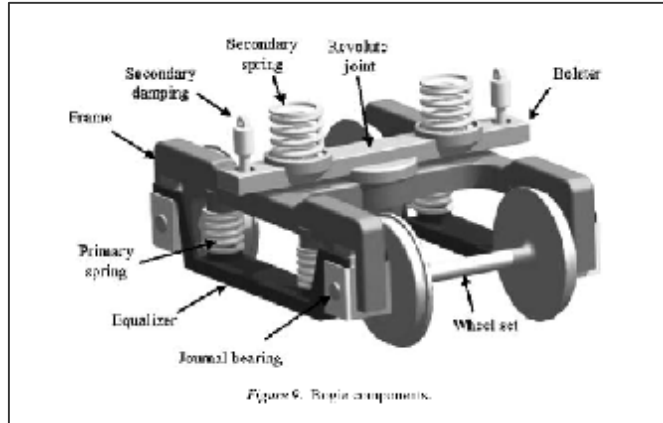


Şekil 1.3: Çift Boji Üzerine Oturtulmuş Yolcu Vagonu

Boji şasisi akslar üzerine ve vagon gövdesi de boji şasisi üzerine helis yaylar ve amortisörler yardımıyla oturtulur. Bu dinamik sistem içinde bulunan yaylar ve amortisörler gibi sönümleme elemanları birbirlerine paralel çalışabilecek şekilde konumlandırılırlar (Şekil 1.4). Özellikle tramvay ve metro vagonlarında boji ile vagon gövdesi arasında hava yastığı kullanılmaktadır.



Şekil 1.4: Bir Boji Üzerinde Birbirlerine Paralel Çalışacak Şekilde Konumlandırılmış Yay Elemanları (Üstten Görünüş)



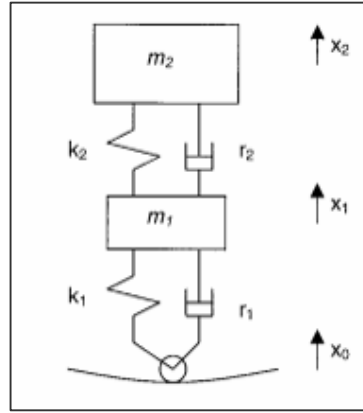
Şekil 1.5: Boji ve Üzerindeki Elemanları

2. KONUYLA İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR

Günümüzde raylı ulaşım araçları, çok yüksek hızlarda seyahat yapabilme imkanına kavuşmuşlardır. Bu uygulamalarla birlikte hızlı araçlarda güvenlik ve konfor daha üst düzeyde bir öneme sahip olmuştur. Yapılan çalışmalarda genellikle araç mekanizmasında değişiklikler ve demiryolu altyapısındaki iyileştirmeler üzerinde durulmuştur. Altyapı değişimleri ya da iyileştirmeleri her zaman optimum teşhisi koyamayabilir. Örneğin, demiryollarındaki dar virajların genişletilmesi raylı taşıtın daha hızlı yolculuk etmesini sağlayabilir, fakat maliyeti açısından çok pahalı işlemlerdir. Dahası şehir merkezlerindeki demiryollarında bu tür altyapı revizyonlarını yapmak çoğu zaman yer darlığından imkansızdır. Bu kısımdaki iyileştirmeler haricinde birde araç yeteneklerinin iyileştirilmesi üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Genel olarak aracın güvenlik ve konfordaki katkısı diğer etkenlere göre daha yüksektir. Bunun sonucu olarak araştırmacılar vagonun ve bojilerin dinamik davranışlarını ortaya koyan birçok çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Yapılan araştırmalara gözetildiğinde vagonun düşey titreşimleri, yanal titreşimleri, dönemeçlerde vagon davranışları, ray-tekerlek teması ve aerodinamik kuvvetler etkisinde vagonun dinamik davranışı üzerine çalışmalar görmekteyiz.

Garg ve Dukkipati [1], raylı araçların tek serbestlik dereceliden başlayıp çok serbestlik dereceli sistemlere kadar dinamik çözümlerini gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca ray-tekerlek kontak problemleri üzerinde de çalışmışlardır.

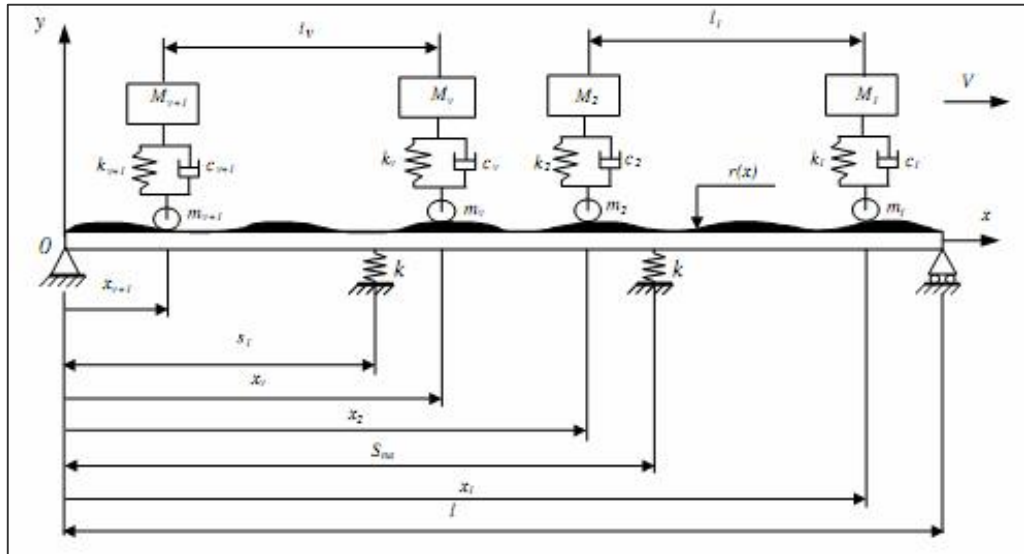
G.R.M. Mastinu, M.Gobbi and G.D.Pace [2], serbestlik derecesini iki aldıkları vagon modellerinin random titreşimler altındaki dinamik davranışını incelemişlerdir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: G.R.M. Mastinu, M.Gobbi ve G.D.Pace'nin Kullandıkları Model

R.M.Goodall, X.Zheng, A.C.Zolotas [3], bir vagonun dikey titreşimlerini gövde elastikliğini de hesaba katarak incelemişler ve aktif süspansiyon kontrolü tasarlamışlardır.

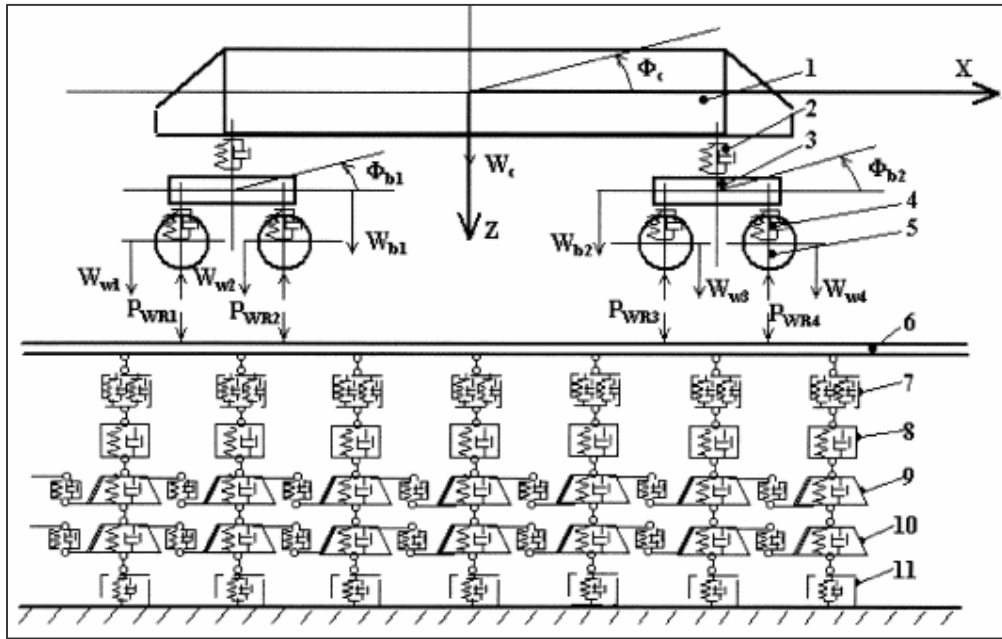
Meirovitch [4], tek ve çoklu serbestlik dereceli sistemlerin analitik ifadelerinin kurulmasını ve frekans cevaplarının elde edilmesi üzerine ayrıntılı bilgiler sunmuştur.



Şekil 2.2: N.Ouelaa'nın 2 Adet Vagonu İncelediği Model

E. Aba [13] tezinde bir yolcu vagonun gövdesini sonlu elemanlar kullanarak, boji ve diğer kısımları ise yay-kütle eşitlikleri ile modelleyerek frekans cevaplarını incelemiştir. Bunun sonucunda da araç için bir konfor katsayısı elde etmiştir. Ayrıca kurduğu vagon sistemini toplu kütleli sistem olarak kabul ederek te çözüm yapmış ve bunu sürekli sistem çözümü ile karşılaştırmıştır.

[14], [15] ve [16] nolu kaynaklarda raylı taşıtın dinamik modellenmesi yapılırken ray altındaki toprak altı yapı da modellenmiştir ve sisteme olan etkisi incelenmiştir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4: Dhanasekar Tarafından Oluşturulan Vagon Sistemi ve Demiryolu Dinamik Modeli [16]

John L. Sewall ve ekibi tarafından Nasa'da yapılan çalışmada [17], vagon gövdesi elastik beam şeklinde modellenerek, titreşime gövdenin elastik modları da katılmıştır. Raydan araca etkiyen harmonik sinüsoidal ve random inputlar ile aracın modları hesap edilmiş, kritik sönüm katsayıları bulunmuştur (Şekil 2.3).

Çalışmamızın Amacı;

Burada açıklanacak çalışmada, raylı bir taşıtın imalatına başlanmadan önce seçilecek olan sistem değişkenlerinin aracın daha sonradan çalışır durumdaki hareket karakteristiği üzerinde nasıl bir etkisi olduğu gözlenmeye çalışılmıştır.

Üzerinde durulacak ana konu bir vagonun ve tren katarının düşey titreşimlerinin analiz edilmesi olacaktır. Öncelikle aracın düşey titreşimlerini inceleyebilmek için sistemin özelliklerini en iyi şekilde yansıtabilecek bir dinamik eşdeğer sistem modeli geliştirilmiştir. Vagon ana elemanları olan gövde ve bojiler toplu kütleler olarak kabul edilmiş bunlar arasında yay ve sönüm elemanları ile dinamik ilişki kurulmuştur. İlk olarak modal analiz yapabilmek amacıyla tek vagon için hareket denklemleri hesaplanmış, bu denklemler matris formunda ifade edilmiştir. Matlab programında yazılan modal analiz hesaplayıcısıyla vagonun özdeğerleri ve özvektörleri hesaplanmıştır. Bu hesapların doğruluğunu kontrol edebilmek amacıyla aynı dinamik sistem Msc.Adams programında da hazırlanmış, buradan bulunan sonuçlar ile Matlab'dan alınan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra tek vagon sistemine akslardan harmonik ikaz uygulanarak aracın davranışı incelenmiştir. Bu durum için sistemin diferansiyel eşitlikleri çıkarılmış, Matlab programı yardımıyla oluşturulan sistem matrisleri çözülmüştür ve araç elemanlarının yerdeğiştirme miktarları hesaplanmıştır. Ayrıca vagon için kritik hız hesabı da yapılmıştır. Analizde kullanılan parametre girdilerinin de sistemin dinamiğini nasıl etkilediğini anlayabilmek için duyarlılık analizi yapılmıştır. Vagonu oluşturan tüm büyüklükler sırasıyla değiştirilerek modal çözüm yapılmış, sistemde baskın olan parametreler ortaya çıkarılmıştır.

Ayrıca tek bir vagonun yanısıra, bu araca yeni vagonlar bağlanmış ve böylece tek araç haricinde bir tren katarının dinamik davranışları çıkarılmıştır. Bu dinamik ilişkiler Matlab programı yardımıyla hesaplanmış ve bu sonuçlar aynı zamanda Msc.Adams üzerindeki modellemelerle doğrulanmıştır.

3. GENEL FORMÜLASYON VE ÇÖZÜM MODELLERİ

3.1 Sistemin Modellenmesi

Daha önceki sayfalarda bahsedilen bu konu ile ilgili çalışmalara baktığımızda raylı taşıtlarda temel olarak şu problemler üzerinde durulmuştur;

- Vagon gövdesinin titreşimleri,
- Tekerlek-Ray kontak problemleri ve araca etkisi,
- Aracın kritik hız hesabı ve deray oluşumu
- Raylı taşıtın köprü üzerindeki davranışları,
- Rüzgar yükü altında aracın dinamik davranışı,

Araştırmacıların ilgilendiği bu konularda, ortak olarak aracın komple gövde titreşim karakteristikleriyle birlikte boji titreşim karakteristikleri ayrıca süspansiyonun dinamik yapısıyla ilgili detaylı bilgiler verilmiştir. Bu konulara bakıldığında yeni çalışmalar yapılamayacak gibi görünse de demiryolu araçlarındaki sürüş hızının her geçen gün artması ile mühendislere bu konular üzerine yeniden hesaplar yapma zorunluluğu doğurmaktadır. Ayrıca uluslararası standartların getirdiği sınırlandırmalar da tasarımcılara çalıştıkları konularda daha da detaylara inmelerini gerekli kılmaktadır.

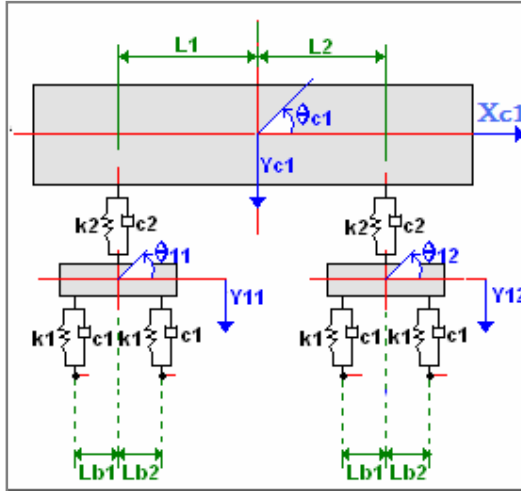
Vagonun dinamik problemleri incelendiğinde ana sorunun düşey titreşimlerle ilgili olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu titreşimler ray düzgünsüzlükleri sebebiyle hatta ray altı yapı etkisiyle de ortaya çıkmakta, kontakta oldukları vagon tekerlekleri ile etkilerini araca geçirmekte ve çeşitli süspansiyon yapılarından süzülerek yolculara kadar gitmektedirler. Bu titreşim hareketi belli bir konfor katsayısı üzerine çıktığında yolcuları rahatsız etmekte, daha da şiddetli titreşimlerde özellikle vagonun rezonansa girdiği zamanlarda tekerlekle ray teması ortadan kalkarak deray dediğimiz tehlikeli durum oluşmaktadır. Burada bahsedilen durumlar vagonun verimliliği açısından en

önemli olaylardır ve genelde vagon düşey titreşim karakteristikleri ile kontrol edilebilirler.

Bu sebepten dolayı vagonda düşey titreşimi incelemek ve karakteristiklerini anlamak çok önemlidir. Bu çalışmada da vagon gövdesinin düşey titreşimlerini analiz edebilmek ve süspansiyon elemanlarının etkilerini hesaplayabilmek için bir dinamik eşdeğer sistem modeli kurulmuştur. Literatürde raylı araçların dinamiği incelenirken üç ayrı tipte çözüm modeli kullanıldığını görmekteyiz.

- Toplu kütleli modeller, idealize edilmiş rijit kütlelerin oluşturduğu modeller,
- Sürekli modeller, sınır şartları ve dalga eşitliklerinin kullanılmasıyla ifade edilen modeller,
- Sonlu eleman modelleri, sürekli elemanların detaylı parametre tanımı kullanarak ifade edilen modeller.

Buradaki çalışmamızda vagon sistemi toplu kütleli model olarak ele alınıp çözümlenecektir.



Şekil 3.1: Toplu Kütleli Vagon Modeli

Bu modellemede sistemin dinamik davranışı toplu kütlelerin ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre modellenmiştir. Kullanılan eksen takımı Şekil 3.1’de

gösterilmiştir. Vagon gövdesi ve bojiler eğilme hareketi yapmayan rijit cisimler olarak ele alınmıştır. Misal olarak, vagon gövdesinin (x,y) düzlemindeki hareketleri incelenmiş, serbestlik derecesi olarak (y_{c1}) eksenini doğrultusundaki yerdeğişimi ve gövdenin merkezinden geçen (z) eksenini etrafındaki dönme hareketi (q_{c1}) gözönüne alınmıştır. Şekil'deki (y) koordinatı düşey yerdeğiştirmeyi, (q) koordinatı (z) eksenini etrafında dönme hareketlerini ifade etmektedir.

4 . TİTREŞİM GENEL BİLGİLER

4.1 Titreşimlerin Geometri ve Fiziki

4.1.1 Giriş

Titreşim analizi açısından otomobil, vagon, metro araçları veya herhangi bir iskelete sahip yapılar titreşim sistemi olarak bilinir. Sanayi devrimleri öncesi genelde, sistemler oldukça büyük kütlelere sahip ahşap ve taş malzemeden oluşmaktaydı. Sistemlerin bu rijit özelliklerinin yanı sıra titreşim doğurucu dış kuvvetler yok denecek kadar az idi. Özellikle ahşap malzemedeki yüksek sönümlenme kabiliyeti sistemlerde titreşimlerin oluşumuna engel oluyordu.

Son iki asır boyunca teknolojik gelişmelere paralel olarak demir ve alüminyum gibi oldukça mukavemetli ve elastik malzemelerin makina ve dinamik sistem sanayiinde kullanılması daha hafif ve daha hızlı çalışan makinelerin gelişmesine imkan verdi. Hafiflik, sistemin daha küçük kesitli olması, dolayısıyla elastik, yani kuvvet ve moment etkisi altında daha fazla deforme olabilmesi, yani titreşen sistem demektir. İşte dinamik sistemlerin bu yüksek hız ve elastiklik özelliğinden kaynaklanan titreşim potansiyeli tasarım aşamasında incelenip gerekli tedbir alınmadığı takdirde çalışma esnasında sistem elemanlarının erken yorulmasına ve kırılmasına sebep olur.

Genelde bir makinanın titreşimlerini incelemek ve gerekli dizayn değişikliğini yaparak koruyucu tedbir almak, titreşim açısından kötü bir sistemin iyileştirilmesinden daha kolaydır. Dolayısıyla, sistemler henüz dizayn safhasında genel bir titreşim analizine tabi tutulur ve titreşimleri kabul edilebilir ölçüler içinde olabilecek şekilde tasarım yapılır. Öte yandan, imal edilmiş sistemlerin de sağlıklı bir titreşim analizi ile titreşim izolasyon ve kontrolünü yapmak mümkündür [22].

Özetlemek gerekirse, günümüzde imal edilen makineler yüksek hız ve elastik yapıları itibarıyla oldukça fazla titreşime zorlayıcı kuvvetlere maruzdurlar. Bu kuvvetlerin frekans spektrumu, özellikle rezonans titreşimleri açısından bilinmeye değer bir husustur. Zira, zorlayıcı kuvvetlerden bir veya birkaçının frekansının sistemin doğal frekanslarıyla çakışması halinde titreşim genliği açısından tahrip edici

özelliğe sahip rezonans titreşimleri meydana gelir. Dolayısıyla, rezonans titreşimleri ve istenmeyen dinamik durumla karşılaşmamak için dizayn safhasında titreşim analizi yapılmalıdır.

4.1.2 Titreşimlerin sebepleri

Dinamik yapılardaki titreşimler, kütle atalet kuvvetleri veya dış kuvvetler ve sistemin bu dış kuvvetlere cevap verme özelliğinden kaynaklanır. Dolayısıyla çok basit bir bakışla, dış kuvvetler ve sistemin bu dış kuvvetlere cevap verme özelliği değiştirilerek sistemin titreşim özelliği değiştirilmiş olur. Uyarıcı kuvvetler, ya sistemin bağlı olduğu temelden gelen bir kuvvet veya bir dış kuvvet, dönen sistemlerde dengelenmemiş kütle, motorlarda gidip gelen kütleler, darbe, deprem vs. Titreştirici özellikteki kuvvetler olabilir. Raylı taşıtlar incelendiğinde, toprak altı inşaat malzemelerinden kaynaklanan, rayın elastikliğinden oluşan, vagonun gövde yapısından ve malzemesinden kaynaklanan titreşimler inceleme alanına girmiştir [22].

4.1.3 Titreşimlerin sonuçları

Titreşimler, vibratör, elek vb. bazı sistemlerde, faydalı olmasına rağmen, çoğunlukla istenmeyen sistem özelliği olarak bilinir. Çünkü, bir makinada titreşim, dinamik yorulma dolayısıyla dinamik gerilme ve makina ekipmanlarının daha erken hasara uğraması demektir. Titreşimlerin makinalara olan zararlarının yanısıra makinayı kullanan veya makinayla beraber çalışan insanlarda da yorulma, dikkat dağılması gibi çeşitli hastalıklar, psikolojik rahatsızlıklar, sakatlıklar ve iş kazalarına yol açmaktadır. Raylı taşıtlarda bu tür titreşimler sonucunda, aracın deray olması ile yoldan çıkıp kazalara sebep olması, tekerlek ve ray gibi ekipmanların aşınmasıyla oluşan tehlikeler ve aşırı titreşim altında yolculuk eden insanlarda oluşan rahatsızlıklar vb. İstenmeyen haller oluşmaktadır.

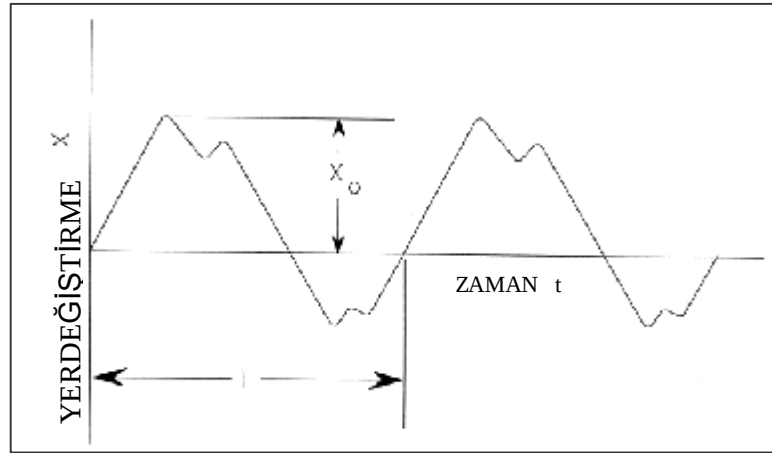
Sistemlerin Titreşim Analizi yapılırken;

Sistemlerin doğal frekanslarını ve titreşim cevaplarını kontrol etmek oldukça önemlidir. Çünkü, makinanın çalışma hızının kritik hızla çakıştığı rezonans durumunda genlikler sonsuza gider, gürültü ve gerilmeler artar, sistem tahrip olmaya başlar. Bu bakımdan sistemlerin doğal frekans – kritik hız analizi yapılır ve sistem dizaynı rezonans oluşturmayacak şekilde tasarlanır.

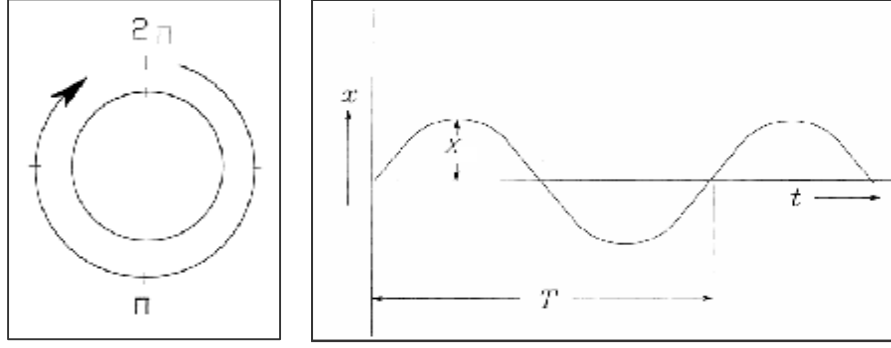
4.2 Titreşimle İlgili Terimler

4.2.1 Titreşim tanımı

Titreşim bir tür periyodik harekettir ya da başka bir deyimle kendini belli bir zaman aralıklarıyla tekrarlayan harekete verilen addır. Burada bahsedilen zaman aralığına titreşimin periyodu denir. Şekil 4.1'deki çizim, periyodu T olan, X_0 maksimum yerdeğiştirme (genlik) değerine sahip bir titreşimin profilini göstermektedir. Peryodun tersine $1/T$ titreşimin frekansı adı verilir. Genellikle f ile sembolize edilir ve harmonik hareketin saniyedeki çevrim adedi birimi olan Hertz (Hz) ile ifade edilmektedir.



Şekil 4.1: Peryodik Hareket Grafiği



Şekil 4.2: Harmonik Hareket Grafiği

Şekil 4.2’ de gösterilen harmonik fonksiyon, peryodik hareketin en basit örneğidir.

Bu tür hareketler şöyle bir eşitlikle tanımlanabilir;

$$X = X_0 \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

bu ifadeyi oluşturan değişkenler;

X : titreşimin anlık yerdeğiştirme değeri (mm)

X_0 : titreşim maksimum yerdeğiştirme değeri, genliği (mm)

ω : hareketin tekrar sıklığı, frekansı (rad/sn)

t : zaman (sn)

Titreşimin diğer bir büyüklüğü olan açısal frekans, ω birimi radyan/saniyedir. Şekil 4.2 den titreşimin bir tam çevrimi (ωt) 360 derece ya da diğer bir deyişle 2π radyan süpürmesiyle oluşacağı gözükmemektedir. Tam bu noktadan sonra titreşim yeni bir çevrime başlar.

$$\omega = 2\pi f \quad (4.2)$$

Harmonik harekette yer değiştirme eşitliği;

$$X = X_0 \sin(\omega t) \quad (4.3)$$

Bu ifadenin zamana göre birinci türevi bize hız eşitliğini vermektedir;

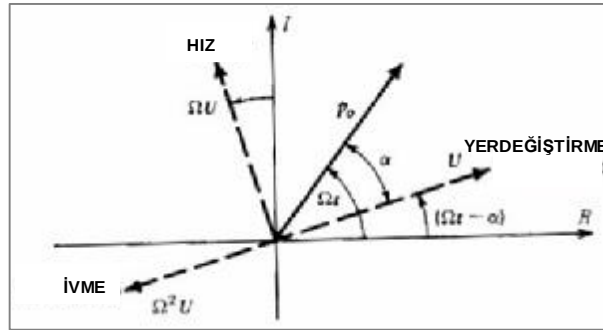
$$v = \frac{dX}{dt} = \dot{X} = w X_0 \cos(wt) \quad (4.4)$$

Bu eşitlikten aynı zamanda yer değiştirme harmonik ise hızın da harmonik formda olduğunu görebilmekteyiz. Bunun yanında hızın maksimum değeri veya genliği $w X_0$ değerine eşittir.

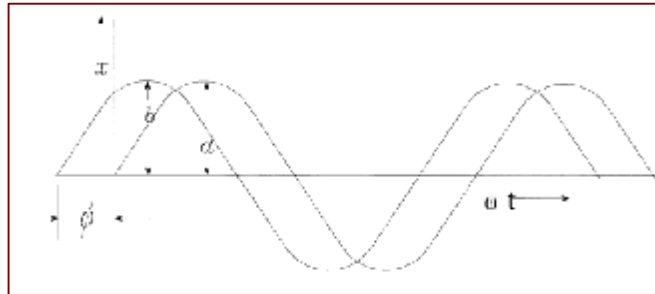
Bulunan hız eşitliğinin zamana göre birinci türevi ya da yer değiştirme eşitliğinin zamana göre ikinci türevinden harmonik hareketin ivme ifadesini elde ederiz;

$$a = \frac{d^2v}{dt^2} = \ddot{X} = -w^2 X_0 \sin(wt) \quad (4.5)$$

Bu fonksiyon da $w^2 X_0$ genliğine sahip harmonik bir eşitliktir.



Şekil 4.3: Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri Arasındaki İlişki



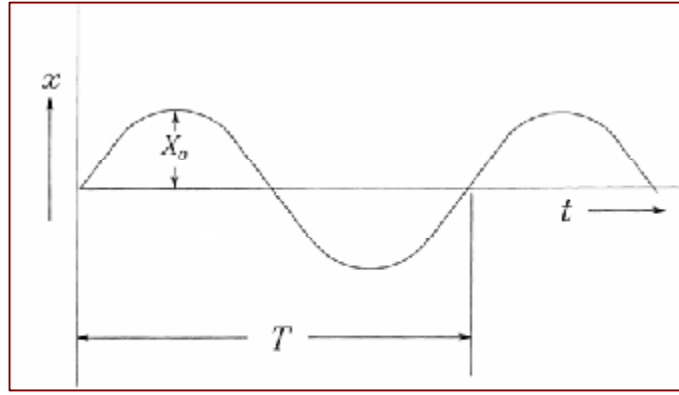
Şekil 4.4: Aralarında Bir Faz Farkı Bulunan İki Harmonik Hareket

Belli zaman aralıklarıyla tekrarlanan her hareket titreşim veya salının olarak adlandırılır. Diğer bir tanımla titreşim, bir sistemin denge konumu etrafında yapmış olduğu hareketlerdir.

Her titreşim, bir genlik ve frekans değeri ile gösterilir. Genlik, titreşen cismin denge konumundan olan maksimum yerdeğiştirmesidir. Bir elemanın zaman bağlı hareketi $x = X(t)$ ile gösterilirse burada x zamana bağlı titreşimin genliğidir. Eğer bu genlik, belirli zaman aralıklarında hep eşit aralıklarla tekrarlanıyor ise;

$$x = X(t + nT) \quad n = 1,2,3, \dots \quad (4.6)$$

olmak üzere T periyodu gösterir. Periyodun tersi olan $f = 1/T$ ifadesi ise titreşimin frekansı olarak tanımlanır.



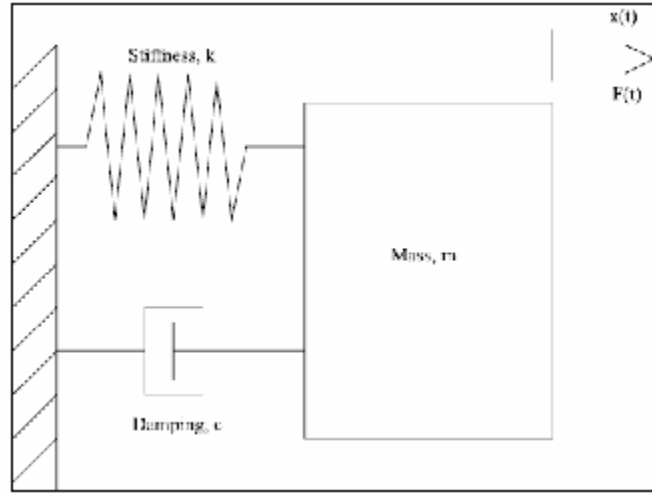
Şekil 4.5: Titreşim Sisteminin Temel Büyüklükleri

4.2.2 Titreşim sistemlerinin elemanları

Bir titreşim sistemi genellikle, potansiyel enerji depolayan elemanlar (yay, kauçuk ve elastik elemanlar $[k]$), kinetik enerji depolayan elemanlar (kütle $[m]$, kütle atalet momenti $[J]$) ve yavaş yavaş enerji yutan elemanlar (damper, amortisör, daspot, sönümleyici elemanlar $[c]$) dan oluşur.

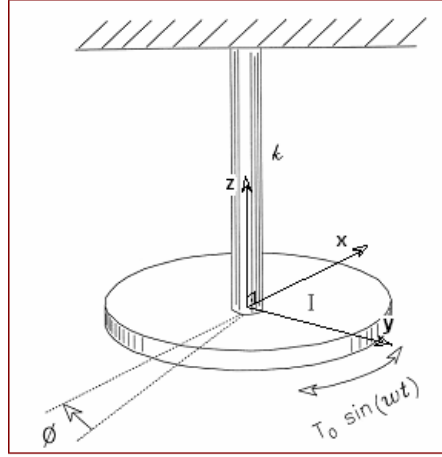
Bir sistemin titreşimi, bu sistemin potansiyel enerjisinin kinetik enerjiye, kinetik enerjisinin de potansiyel enerjiye dönüşümü ile oluşur. Eğer bu sistemde bir sönüm elemanı varsa titreşimin her periyodunda bir miktar enerji kaybı olacak ve bir müddet sonra sistemdeki titreşim sönümlenecektir.

Ötelenen bir sistemde m kütlesi, herhangi bir x konumundayken $F_y = k.x$ yay kuvvetinin, $F_s = c\dot{x} = c \frac{dx}{dt}$ sönüm kuvvetinin ve $M = m\ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2}$ atalet kuvvetinin etkisinde olup bu kuvvetler hareketin tersi yönündedir. Eğer zorlanmış titreşimler söz konusu ise kütleye bir de zorlayıcı kuvvet etki eder. Burulma titreşimi yapan sistemlerde burulma yay elemanı K_b , sönüm elemanı C_b , kütle atalet momenti J ve zorlayıcı moment $M_b(t)$ olarak temsil edilmektedir.



Şekil 4.6: Öteleme Durumunda Titreşim Sisteminin Elemanları

Benzer şekilde m kütleli ve J kütle atalet momentli disk, K_b burulma yay sabitli bir çubuk ile bağlı olduğu farzedilsin. Bu durumda, disk q kadar açısal sapma yaparsa sisteme $K_b q$ kadarlık yay momenti, $J\ddot{q} = J \frac{d^2q}{dt^2}$ atalet momenti ve eğer sistemde sönüm elemanı var ise $c_b \dot{q} = c_b \frac{dq}{dt}$ sönüm momenti etkileyecektir. Yine bu momentler, hareketin tersi yönünde olacaktır. Eğer sistem zorlanmış titreşim yapıyorsa zorlayıcı bir $M_b(t)$ momenti de sisteme etkiyecektir.



Şekil 4.7: Dönme Durumunda Titreşim Sisteminin Elemanları

4.2.3 Serbestlik Derecesi

Hareket halindeki bir sistemi ve sistem elemanlarının durum ve konumlarını belirleyen parametrelere koordinat denir. Bir sistemin serbestlik derecesi, herhangi bir zamanda bu sistemin bütün parçalarının konumlarının tamamen belirli olması için gerekli birbirinden bağımsız minimum koordinat sayısıdır.

Şekil 4.6 ve 4.7' deki modeller tek serbestlik dereceli sistemlere örnektir. Disk örneğini incelersek, bu diskin hareketi ya q açısı ile ya da kartezyen koordinatlarda x-y koordinatlarının verilmesi ile tanımlanabilir. Eğer bu sistemin hareketi x-y koordinatları ile tanımlanıyorsa bu iki koordinatın birbirinden bağımsız olmadığına dikkat edilmelidir. x ve y arasında,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad 4.7$$

bağıntısı vardır. Bu sebeple diskin hareketi, x ve y den herhangi biri ile tanımlanabilir. Bir sistemin hareketini tanımlamak için gerekli olan koordinat (eksen) takımına genelleştirilmiş koordinatlar denir.

4.2.4 Genelleştirilmiş koordinatlar

Bir önceki başlık altında serbestlik derecesi açıklanırken, sistemin konumunu tanımlamak için verilmesi gerekli birbirinden bağımsız değişkenlerin sayısı ifadesi kullanılmıştı. Bahsedilen bu değişkenlere aynı zamanda “genelleştirilmiş koordinatlar” adı verilmektedir. Bir sistemin genelleştirilmiş koordinat sayısı o sistemin serbestlik derecesine eşittir. Genelleştirilmiş koordinatların kartezyen koordinat olması şart değildir, silindirik koordinatlarda bir açı da olabilmektedir.

4.3 Titreşimlerin Sınıflandırılması

4.3.1 Serbest titreşimler

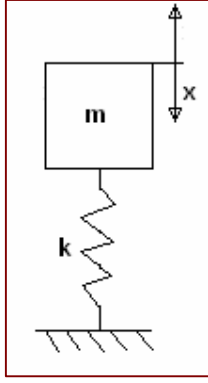
Eğer bir sistem dışarıdan sürekli bir zorlayıcı etki olmaksızın başlangıçtaki denge konumunun bozulması ile kendi kendine titreşim yapıyorsa bu hareket, serbest titreşim olarak adlandırılır. Şekil 4.7’de basit bir düşey titreşim modeli gösterilmektedir. Serbest titreşim durumunda sistemin titreşim frekansı, sistemin doğal frekansına eşittir.

Sistemlerin doğal frekansları, elastiklik ve kütle özelliklerine bağlı olup dışarıdan etkilerle değişmez. Zorlayıcı kuvvetin herhangi bir etkisi yoktur. Ancak sönüm elemanının çok az bir etkisi olabilmektedir. Raylı taşıtlarda, vagon gövdesi ile boji arasındaki titreşim bu gruba girebilir.

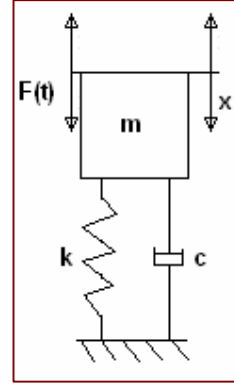
$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.8)$$

4.3.2 Zorlanmış titreşimler

Eğer bir sistem dışarıdan ikaz eden zorlayıcı bir etki (kuvvet veya moment) altında titreşiyorsa bu titreşim hareketi, zorlanmış titreşim olarak adlandırılır. Şekil 4.8’de basit bir model gösterilmiştir. Raylı taşıtlara baktığımızda, araç sürüş anında raylar ile aks arasındaki titreşim buna örnek verilebilir.



Şekil 4.8: Serbest Titreşim



Şekil 4.9: Sönümlü Zorlanmış Titreşim

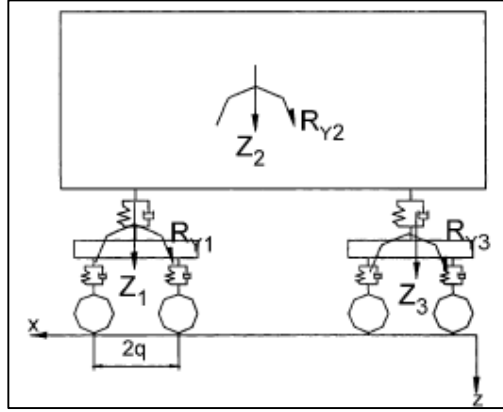
4.4 Titreşim Analizi

Genel olarak mühendislik sistemlerini, oldukça karmaşık yapılarıyla aynen olduğu gibi incelemeye tabi tutmak oldukça zordur. Bir sistemin bütün elemanlarını özellikleriyle incelemek imkansız denebilecek kadar kolay olmayan bir iş olduğundan çoğu zaman sistemlerin bizim için gerekli ve önemli olan hayati parametrelerini hesaplar ve boyutlandırırız. Mühendislik açısından önemli olan da, bir sistemin titreşimlerini tamamen yok etmek değil, sistemi tehlikesiz ve zararsız hale getirmektir. İşte bu nedenle, mühendisler herhangi bir sistemi incelerken mutlaka belirli ölçülerde o sistemi idealize ederler. Yani sistemin bir modelini çıkarıp o model üzerinde çalışırlar. Genelde mühendislik sistemlerinin titreşim analizi yapılırken o sistemin ilk önce bir fiziki modeli çıkarılır. Daha sonra bu fiziki modelden matematik bir model elde edilir. Çözümler de, bu matematik modele göre yapılır.

4.4.1 Mühendislik sistemlerinin fiziki modeli

Bir sistemin titreşim analizi yapılırken o sistemin hangi elemanlarının, hangi özelliklerinin ne maksatla incelenip çözüleceği bilinmelidir. Yine inceleme ve analizde hangi metodların ne kadar hassasiyetle uygulanacağı kararlaştırılmış olmalıdır. Örneğin, bir demiryolu vagonunun ne tür bir yolda, hangi hızda seyahat edeceği, taşıyacağı yükün cins ve ağırlığı bilinmelidir. Yine vagonun ne ölçüde titreşimlerine müsaade edilecektir. Vagon insan mı yoksa yük mü taşıyacaktır.

Vagonun dolu ve boş iken ağırlığı ne kadardır. Yine vagonun ön boji, arka boji, dingil teker ve süspansiyon sistemlerinin titreşim özellik ve kabiliyetleri bilinmelidir. Sistemin kritik hız dağılımı nasıldır. Vagon seyahat esnasında bu kritik hızlardan hangisinden geçer veya işletme şartlarındaki hız durumları kritik hızlarla ne ölçüde çakışmaktadır. Bütün hesaplanması amaçlanan bu sorular, vagon sisteminin güvenli bir sürüşe sahip olabilmesi için sürüşü etkileyen parametrelerin en optimum değerleri almasıyla sonuçlandırılmaya çalışılır.



Şekil 4.10: Titreşimi İncelenen Bir Vagon Modeli

İşte bütün bu özellikler bilindiğinde bizim için vagon değil, her türlü fiziki özellikleri bilinen bir sistem vardır. Unutulmamalıdır ki, bu fiziki model vagonla tamamen aynı olan bir sistem değildir. Sadece titreşimlerin incelenmesi ve tarifi açısından işe yarayan hayali bir modeldir (Şekil 4.9). Bu model titreşim analizi dışındaki amaçlara uygun olmayabilir. Eğer vagonun titreşim analizi üç kritik hıza göre düşünülmüşse, bu model yüksek dereceden kritik hızların analizine uygun olmayabilir ve doğru sonuç vermeyebilir. Her yönüyle mükemmel bir fiziki model çıkarmanın kesin bir metodu yoktur. Ancak maksada en uygun, tecrübe ve bilgiye bağlı olarak geliştirilmiş çeşitli metodlar vardır. Bir sistem için tatbik edilen model çıkarma metodu başka bir sistem için iyi netice vermeyebilir.

Matematik Modelleme;

Birçok sistem, benzeyen veya farklı özelliklere sahip elemanlardan oluşan kompleks hareketlerinden ve deformasyonlarından dolayı bir takım kuvvetlere maruzdur. Gerek dış kuvvetler ve gerekse elemanlar arası etkileşimden doğan iç kuvvetler sistem ve sistemi oluşturan elemanların titreşimini meydana getirir. Şu halde denilebilir ki eğer bir sisteme etki eden kuvvetler statik ve dinamik olarak dengede ise sistemde dengede olup titreşim doğurmaz.

Aksi durumda sistem titreşim etkisindedir. Sistemin bütün önemli özelliklerini içine alan matematik model, sistem davranışını yöneten denklemlerin çıkarılabilmesi için gereklidir.

Diferansiyel Denklemlerin Çıkarılması;

Matematik modelleme yapıldıktan sonra dinamik prensiplerin kullanılarak titreşimin karakterini yöneten diferansiyel denklemlerin elde edilmesi gerekir. Ayrık sistemler için bu denklemler genellikle adi diferansiyel denklemler şeklinde, sürekli sistemler için ise kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak formüle edilir.

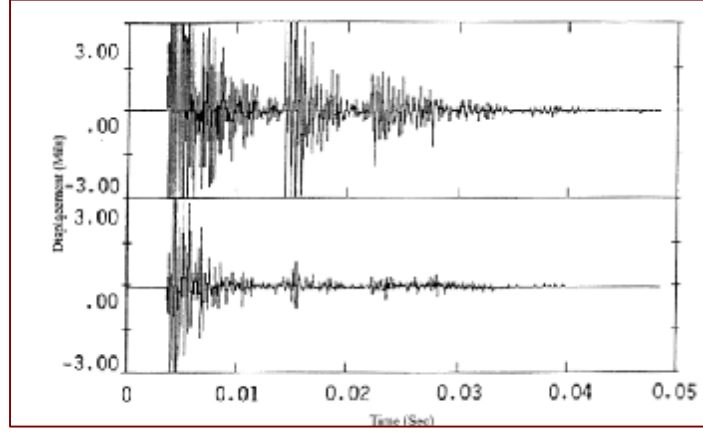
Hareket Denklemlerinin Bulunması;

Matematik modelden elde edilmiş diferansiyel denklemlerin uygun metodlarla çözümüyle sistemin genel davranışını belirleyen hareket denklemleri elde edilir. Bu çözümler, zaman düzleminde (domeninde) olabildiği gibi yapılan titreşim analizinin maksadına bağlı olarak, frekans düzleminde de olabilmektedir. Bu şekilde, titreşim sisteminin cevabı elde edilir.

Gerçek hayatta titreşim problemlerinin çözülebilmesi için karmaşık makina datalarının toplanması gerekmektedir. Çalışan bir makina parçası incelendiğinde, önceki sayfada yer alan basit teorik titreşim eğrileri yerini çok daha kompleks titreşim davranışlarına bırakır. Bu karmaşıklığın sebebi titreşimin çok fazla kaynaktan oluşmasıdır.

Herbir kaynak kendi hareket karakteristiğini ortaya çıkarmaktadır, fakat bu hareketler birbirlerine eklenerek tek bir kompozit titreşim profili ortaya çıkartmaktadır.

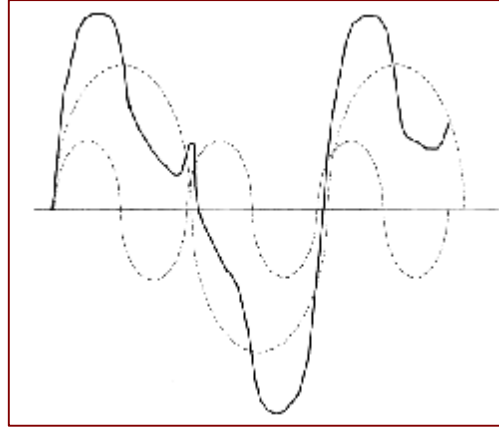
Bu hareket profilleri iki ayrı formatta incelenebilmektedir; bunlar frekans boyutu ve zaman boyutudur.



Şekil 4.11: Zaman Domeninde Bir Titreşim Profili

Zaman Domeni ; titreşim datası genliğine karşılık zaman şeklinde çizilir. Buna basit örnekler Şekil 4.10'da gösterilmektedir. Bu tip titreşim datalarının kompleksliğini görmek için çalışan bir makinadan alınmış grafiğe bakılabilir. Zaman boyutunda hareket eğrileri çizimi tüm lineer ve harmonik çalışan mekanizmalar için gereklidir. Çalışma şartlarındaki değişimleri analiz etmek için zaman domenini kullanmak çok faydalıdır, fakat zaman domenini datalarını kullanmak çokta kolay sayılmaz. Çünkü, örnek olarak herhangi bir andaki deplasman, titreşime neden olan tüm kaynaklardan gelen datalar birbirlerine eklenerek hesaplanmaktadır. Bu sebeple herhangi bir titreşim kaynağının toplam deplasmandaki katkısının ne olduğunu bulmak çok zordur.

Fransız fizik ve matematikçisi Jean Fourier zaman boyutundaki titreşim davranışı gibi harmonik olmayan hareket fonksiyonlarının aslında birden fazla basit harmonik hareketin üst üste matematiksel olarak toplanmasından meydana geldiğini söylemektedir.

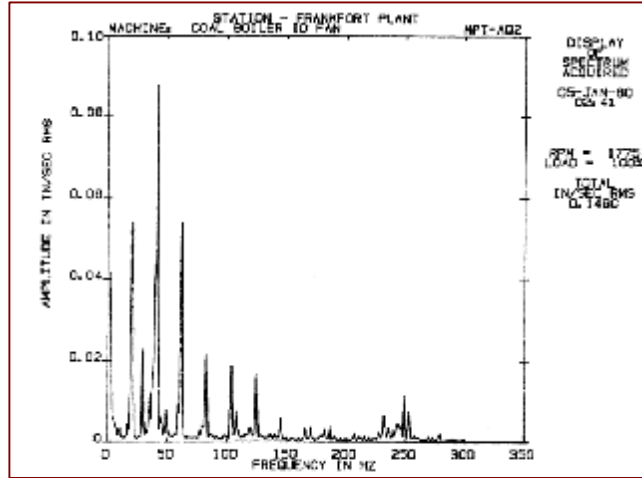


Şekil 4.12: Zaman Domeninde Ayrık (harmonik) ve Toplam (harmonik olmayan) Titreşimler

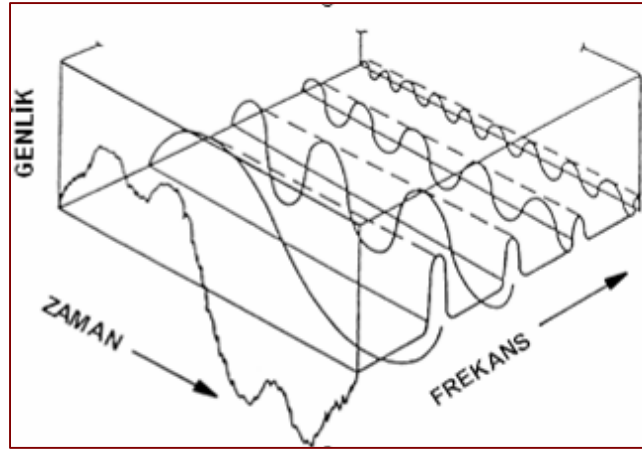
Şekil 4.11’de gösterilen kesikli çizgiler, bir araya gelerek toplam hareket karakteristiğini belirleyen ayrık harmonik hareket komponentlerini göstermektedir

Frekans Domeni; Pratik bir bakış açısıyla basit harmonik titreşim fonksiyonları dönen veya hareketli parçaların açısal frekanslarıyla ilişkilidir. Bu frekansları bulmak makinanın çalışma şartlarının analiz edilmesinde ilk adımı oluşturur.

Frekans domeni verileri, Fast Fourier Transform (FFT) denilen matematik çözüm tekniğiyle hesaplanan zaman domenindeki dataların dönüşümü ile elde edilir. Kompleks bir makina spektrumunu oluşturan her bir titreşim komponentini ayrık olarak pik değerleri ile göstermede FFT kullanılır. Frekans domeninde y eksenini gözlenen titreşim komponentinin birim zamandaki yerdeğiştirmesi olabilir. Buna karşılık zaman domeninde y eksenini hareketi oluşturan tüm titreşim komponentlerinin hızlarının toplamını gösterir. Frekans domeninde bir titreşim grafiği Şekil 4.12’de gösterilmiştir.



Şekil 4.13: Frekans Domeninde Titreşim Profili



Şekil 4.14: Frekans-Zaman Domeni İlişkisi

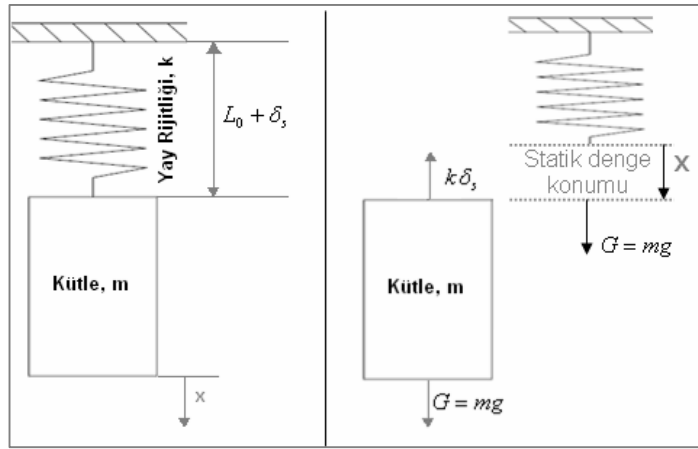
4.4.2 Tek serbestlik dereceli sistemlerin serbest titreşimi

Titreşim sistemlerini zorlanma durumu ve sönüm özelliklerine göre dört gruba ayırarak incelemek mümkündür.

Sönümsüz Tek Serbestlik Dereceli Sistem, Şekil 4.15’de gösterilen kütle-yay sistemi mümkün olabilecek en basit bir titreşim sistemini göstermektedir. Bu sistem, tek serbestlik dereceli bir sistemdir. Çünkü, sistemin kütesinin konumu herhangi bir anda sadece x koordinatının verilmesi ile belirlenebilir. Sisteme dışarıdan etki eden herhangi bir zorlayıcı kuvvet olmadığı için sistem eğer denge konumunu bir anlık bozduracak bir etki ile karşılaşırsa serbest titreşim yapacaktır. Sistemde enerji yutan

bir eleman olmadığı için titreşimin genlikleri zaman ile değişmez sabit kalır. Bu yüzden, bu tür sistemler sönümsüz sistem olarak adlandırılmaktadır. Titreşim genlikleri zamanla azalan azalan titreşimlere ise sönümlü sistem denmektedir. Sönümlü ve sönümsüz tek serbestlik dereceli sistemlerin serbest titreşimini bilmek, daha kompleks sistemlerin titreşimlerini anlamada büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

Sönümsüz ve dış kuvvet etkisi olmayan tek serbestlik dereceli sistem, titreşim sistemlerinin anlaşılma bakımından en basit formudur. Böyle bir sistemi açıklayan örnek Şekil 4.14'te gösterilmektedir.



Şekil 4.15: Sönümsüz Tek Serbestlik Dereceli Sistem

Statik denge konumu : $\sum F_{st} = 0$

$$G = mg = k\delta_s$$

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{d_{st}} = \omega_n^2$$

$$\omega_n = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \right) = \left(\sqrt{\frac{g}{d_{st}}} \right) \quad (4.9)$$

ω_n , sistemin doğal frekansıdır. Newton'un 2.kanununu uyguladığımızda,

$$\sum F = ma \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x + d_{st}) + G$$

$kd_{st} = G$ olduğundan dolayı (statik denge şartı) ;

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ bulunur.} \quad (4.10)$$

(4.10) denklemindeki statik denge konumundan uzaklık olan $x(t)$ zamanın fonksiyonu olarak yazdığımızda, eşitlik,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.11)$$

halini alır. Bu denklem m ile bölündüğünde eşitliğin yeni hali;

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Sistemin anlaşılmasını sağlayan (4.11) ve (4.12) denklemleri sabit katsayılı diferansiyel denklemlerdir. Bunların çözümünde,

$$x(t) = Ae^{st} \quad (4.13)$$

olduğu kabul edilsin. Bu ifade ve ikinci türevi (4.12) denkleminde yerine konulur, bulunan eşitlik Ae^{st} ile bölünürse,

$$s^2 + \omega_n^2 = 0 \quad (4.14)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin köklerine özdeğerler denilir.

$$s_{1,2} = \pm i\omega_n \quad (4.15)$$

Burada bulunan kompleks eşlenik köklerde $i = \sqrt{-1}$ 'e eşittir. (4.12) denkleminin genel çözümü,

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \quad (4.16)$$

Burada A_1 ve A_2 başlangıç şartlarından hesaplanması gereken integrasyon sabitleridir. Bu denklemin çözümü için ($e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$) eşitliğinden faydalanırsak (4.16) ifadesi,

$$x(t) = B_1 \cos w_n t + B_2 \sin w_n t \quad (4.17)$$

biçiminde ifade edilebilir. Buradaki B_1 ve B_2 integrasyon sabitlerini hesaplayabilmek için sistemin başlangıç şartlarından yararlanılır. Yani $t = 0$ anında, $x(0) = x_0$ ve $\dot{x}(0) = v_0$ olarak kabul edilirse, son durumda hareket denklemi;

$$x(t) = x_0 \cos w_n t + \frac{x_0}{w_n} \sin w_n t \quad (4.18)$$

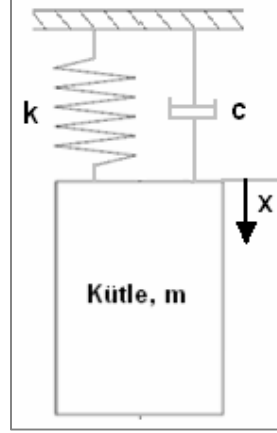
olarak elde edilir. Bu denklem ileriki vagon hesaplarında aşağıdaki formda kullanılmıştır.

$$x(t) = \frac{\sqrt{w_n^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2}}{w_n} \cos(w_n t - \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{w_n x_0}) \quad (4.19)$$

Bu eşitlikten ileride kullanılacak bazı çıkarımlar yapabiliriz. Bahsedilen sönümsüz tek serbestlik dereceli sistemin frekans cevabı 3 fiziksel parametreye bağlıdır. Bunlar sırasıyla ; sistemin doğal frekansı w_n , sistem başlangıç hızı v_0 ve sistem başlangıç yerdeğiştirmesi x_0 olarak sıralanır. Doğal frekans ifadesinden de anlaşılabileceği gibi sistemin doğal frekansı $\sqrt{m}$ ile ters orantılı, buna karşın $\sqrt{k}$ ile doğru orantılı olarak değişmektedir. Kütle veya yay katsayısındaki değişim titreşimin frekansını direkt olarak etkilemektedir.

Diğer bir çıkarım ise, faz açısı ve maksimum genlik te aynı zamanda doğal frekansın birer fonksiyonu olduğudur. Kütlenin artması ile titreşimin maksimum genlik değeri doğal frekansın azalmasına bağlı olarak azalmaktadır.

Yay katsayısının artışıyla sistemin doğal frekansı artmakta, bu da maksimum genlik değerinde artışa sebep olmaktadır.



Şekil 4.16: Sönümlü Tek Serbestlik Dereceli Sistem

Viskoz Sönümlü Tek Serbestlik Dereceli Sistemler; basit bir gösterimle Şekil 4.15’de sönümlü tek serbestlik dereceli bir sistem oluşturulmuştur. Bu tipte sistemlerin hareket denklemleri genel olarak aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilir.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.20)$$

Burada, m kütle, c viskoz sönüm katsayısı ve k yay katsayısını ifade etmektedir.

(4.20) eşitliği kütle m ile bölümdüğünde, bu denklem;

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta w_n \dot{x}(t) + w_n^2 x(t) = 0 \quad (4.21)$$

haline dönüşür. (4.21) denkleminde yer alan w_n sönümsüz durum doğal frekansını, ζ viskoz sönüm oranını göstermektedir.

$$\zeta = \frac{c}{2mw_n} \quad (4.22)$$

Bu hareket denkleminin çözülmesi için, diferansiyel denklem çözümünün aşağıdaki formda olacağı kabul edilirse,

$$x(t) = Ae^{st} \quad (4.23)$$

(4.23) ifadesi ve türevleri (4.21) denkleminde yerine konular, bulunan eşitlik Ae^{st} ile bölünürse;

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (4.24)$$

karakteristik denklemini elde edilir. Bu denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır. Bunlar şu şekildedir;

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4.25)$$

Bu sebeple;

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.26)$$

formunda bir diferansiyel denklem çözümü olacaktır. A katsayıları başlangıç şartlarından hesaplanan sabitlerdir. (4.24) karakteristik denkleminde $\frac{c}{m} = 2\chi w_n$ ve

$\frac{k}{m} = w_n^2$ değişiklikleri yapıldıktan sonra çözüldüğünde;

$$s_{1,2} = \left(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 1}\right) w_n \quad (4.27)$$

denklem kökleri elde edilir. Bu kökler (4.26) ifadesinde yerine konulduğunda aşağıdaki frekans cevabı denklemini elde edilir.

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\chi + \sqrt{\chi^2 - 1}\right) w_n t} + A_2 e^{\left(-\chi - \sqrt{\chi^2 - 1}\right) w_n t} \quad (4.28)$$

Eğer, $\chi = 0$ ise sistem bir önceki başlık altında açıklandığı gibi sönümsüz serbest titreşim yapacaktır. Diğer titreşim halleri χ nın alacağı değerlere göre üç duruma ayrılır. Bunlar; $\chi < 1$ durumunda zayıf sönümlü, $\chi = 1$ durumunda kritik sönümlü ve $\chi > 1$ durumunda aşırı sönümlü sistemler olarak adlandırılırlar.

1. Durum : Zayıf sönümlü sistem ($\chi < 1$)

Kritik altı sönümlü sistemler de denen bu durumda, $(\chi^2 - 1)$ negatif olur. Bu durumda,

$$s_1 = \left(-\chi + i\sqrt{\chi^2 - 1}\right) w_n \quad (4.29)$$

$$s_2 = \left(-x - i\sqrt{x^2 - 1}\right)w_n \quad (4.30)$$

olur. Sistemin bir çift eşlenik kompleks kökü olduğundan, çözüm bu sefer farklı bir formda olacaktır.

$$x(t) = A_1 e^{\left(-x + i\sqrt{1-x^2}\right)w_n t} + A_2 e^{\left(-x - i\sqrt{1-x^2}\right)w_n t} \quad (4.31)$$

$$x(t) = e^{-xw_n t} \left(A_1 e^{\left(i\sqrt{1-x^2}\right)w_n t} + A_2 e^{\left(-i\sqrt{1-x^2}\right)w_n t} \right) \quad (4.32)$$

Burada parantez içinde bulunan üstel ifadeyi trigonometrik eşitliğini kullanarak açarsak,

yeni denklem şu forma gelir;

$$x(t) = e^{-xw_n t} \left[(A_1 + A_2) \cos\left(\sqrt{1-x^2} w_n t\right) + i(A_1 - A_2) \sin\left(\sqrt{1-x^2} w_n t\right) \right] \quad (4.33)$$

Bulunan bu eşitlik daha toplu olarak;

$$x(t) = A e^{-xw_n t} \sin\left(\sqrt{1-x^2} w_n t + f\right) \quad (4.34)$$

biçiminde ifade edilir. Burada buluna A ve f bilinmeyenleri başlangıç şartlarının kullanılması ile hesaplanır. Başlangıç şartları olarak, $x(t=0) = x_0$ ve $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ kabulü ile,

$$B_1 = A_1 + A_2 = x_0 \quad (4.35)$$

$$B_2 = A_1 - A_2 = \frac{\dot{x}_0 + xw_n x_0}{w_n \sqrt{1-x^2}} \quad (4.36)$$

olarak bulunur.

Bu ifadeler yardımıyla (4.34) denklemindeki A ve f bilinmeyenleri şu şekilde ifade edilebilir;

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad (4.37)$$

$$f = \tan^{-1}(B_2 / B_1) \quad (4.38)$$

Ayrıca sönümlü sistemin doğal frekansı da;

$$w_d = \sqrt{1-x^2} w_n \quad (4.39)$$

ifadesiyle sistemin doğal frekansına bağlıdır. Son durumda zayıf sönümlü sistemin frekans cevabı aşağıdaki formda elde edilir.

$$x(t) = \sqrt{\frac{(v_0 + xw_n x_0)^2 + (x_0 w_n \sqrt{1-x^2})^2}{(w_n \sqrt{1-x^2})^2}} e^{(-xw_n t)} \cdot \sin \left[\left(w_n \sqrt{1-x^2} \right) t + \tan^{-1} \left(\frac{x_0 w_n \sqrt{1-x^2}}{v_0 + xw_n x_0} \right) \right] \quad (4.40)$$

Bulunan bu ifade görünüşte çok karışık olmasına rağmen sadece w_n , v_0 , x ve x_0 bu dört değişkene bağlıdır. Daha evvel sönümsüz sistem için bulunan frekans cevabı ifadesi (4.19) ile çok benzeşmektedir. Farklılık elbetteki sönüm ile ilgili büyüklüklerden oluşmaktadır. Denklemden bulunan büyüklüklerin birbirlerini nasıl etkilediği sönümsüz sistemde anlatılmıştı. Burada hesaba w_d sönümlü sistem doğal frekansının girdiğini görmekteyiz.

2.Durum , Kritik sönümlü sistem ($x = 1$). $ms^2 + cs + k = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ;

$$s_1 = s_2 = -w_n \quad (4.41)$$

şeklinde katlı kökler olduğundan dolayı $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümü;

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{-w_n t} \quad (4.42)$$

formunda olacaktır. Başlangıç şartları olarak, $x(t=0) = x_0$ ve $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ kabulü ile,

$$A_1 = x_0 \quad (4.43)$$

$$A_2 = \dot{x}_0 + w_n x_0 \quad (4.44)$$

olarak bulunur ve çözüm;

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + w_n x_0)t]e^{-w_n t} \quad (4.45)$$

3.Durum : Aşırı sönümlü sistem ($x > 1$)

Daha evvel hesaplanan $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$ (1.1) ifadesinin karakteristik denklemini olan $ms^2 + cs + k = 0$ denkleminin kökleri, (4.27)'deki gibi $s_{1,2} = \left(-x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)w_n$ olarak bulunmuştur. $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} > 0$ olmaktadır. Buradan bulunan kökler, reel ve ayırık olduğundan dolayı hareket denkleminin çözümü;

$$x(t) = e^{-xw_n t} \left(A_1 e^{(w_n t \sqrt{x^2 - 1})} + A_2 e^{(-w_n t \sqrt{x^2 - 1})} \right) \quad (4.46)$$

olarak bulunur.

Burada bulunan A_1 ve A_2 bilinmeyenleri kabul edilecek bir başlangıç şartlarının kullanılması ile hesaplanır. Başlangıç şartları olarak, $x(t = 0) = x_0$ ve $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ kabulü ile,

$$A_1 = \frac{-\dot{x}_0 + (-x + \sqrt{x^2 - 1})w_n x_0}{2w_n \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4.47)$$

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + (x + \sqrt{x^2 - 1})w_n x_0}{2w_n \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4.48)$$

şeklinde hesaplanır. (4.46) eşitliği görülüyor ki, azalan üstel bir fonksiyon olması nedeniyle sistem denge sınırlarında titreşim yapmak yerine kısa sürede başlangıç şartlarına dönmektedir. Bu hareket, periyodik olmayan bir hareket olup harmonik değildir. Eğer sistemde sönüm yok ise bu sistem sonsuza kadar titreşecektir. Sönüm olması durumunda, sönüm katsayısına bağlı olarak ya aşırı, ya zayıf veya kritik bir durumda sistem titreşimleri zamanla sönümlenecek ve sistem belirli bir zaman sonra duracaktır.

4.4.3 Zorlanmış (Harmonik ikazlı) titreşimler

Herhangi bir dış kuvvetin sistemi titreştirmek üzere etki etmesi halinde oluşan titreşimlere zorlanmış titreşimler denir. Bu tür titreşimleri oluşturan kuvvete zorlayıcı kuvvet denmektedir. Mekanik sistemlerde, titreşim doğuran çok çeşitli zorlayıcı kuvvetler vardır. Bu kuvvetler, ayrı ayrı titreşim oluşturdıkları gibi birkaçı beraber de sisteme etki edebilmektedir. Örneğin, ray düzgünsüzlüğü olan bir demiryolu hattında viraj dönme esnasında seyahat eden bir tren tekerleklerine yoldan gelen düşey darbelerle titreşim hareketi yaparken, aynı zamanda jeneratörün çalışma titreşimlerine de maruz kalacaktır. Dahası, merkezkaç kuvvetler etkisinde de yatay titreşim hareketleri oluşacaktır. Genelde, sisteme etki ederek titreşim oluşturan dış kuvvetleri üç ayrı grupta sınıflandırmak mümkündür:

- 1- Zorlayıcı dış kuvvetler,
- 2- Dengelenmemiş kütlelerin oluşturduğu kuvvetler,
- 3- Zeminden gelen kuvvetler,

Dinamik sistemler genellikle, bu zorlayıcı veya uyarıcı diye adlandırılan dış etkilere maruzdurlar. Eğer, bu dış etki harmonik ise sistemin bu harmonik zorlamaya cevabı da harmonik olacaktır. Burada sistemin doğal frekansı, zorlayıcı dış kuvvetin frekansı ile çakışırsa sistemin titreşimlerinin genlikleri sistemi tahrib edecek derecede büyük boyutlara ulaşır ki bu olaya rezonans denmektedir.

Diferansiyel Denklemlerin Çıkarılması aşağıda açıklandığı biçimde yapılabilir.

$F(t)$ zorlayıcı kuvvetin etkisi altındaki sistemin (Şekil 4.16) hareketinin diferansiyel denklemi, Newton'un İkinci Kanunu'nu uygularsak,

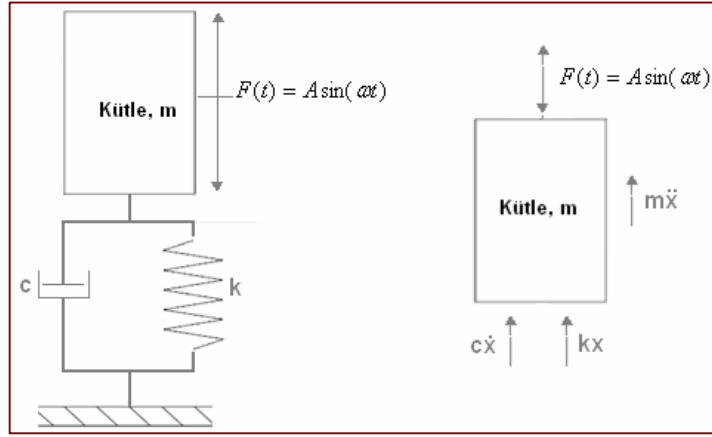
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = A\sin(\omega t) \quad (4.49)$$

şeklinde olur.

Bu denklem homojen olmadığından dolayı genel çözüm $x(t)$, homojen çözüm $x_h(t)$ ve özel çözümün $x_o(t)$ toplamı şeklinde olur. Burada bahsedilen homojen çözüm $x_h(t)$,

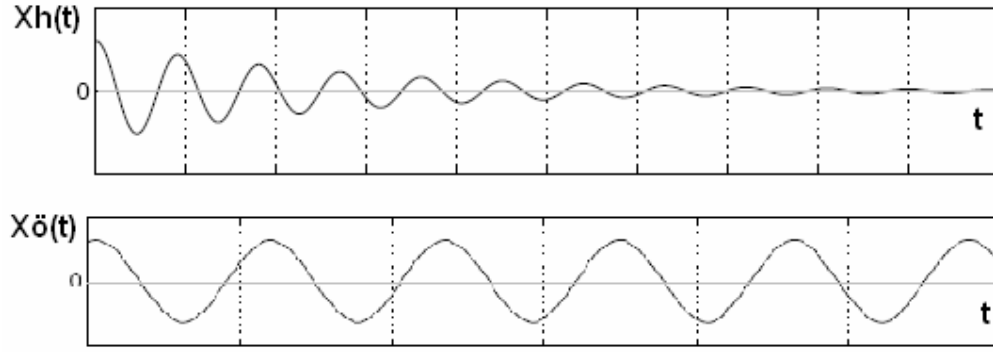
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.50)$$

homojen diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu çözüm kütlenin serbest titreşimlerini ifade etmektedir. Bu serbest titreşimler, ihtimal dahilindeki bütün başlangıç şartları için sönüm oranının alacağı değerlere göre zaman içinde kaybolurlar.



Şekil 4.17: Sönümlü Zorlanmış Titreşim Modeli

Bu sebeple, (4.49) denkleminin çözümü olan $x_o(t)$, sürekli titreşimleri ifade eder. Sürekli titreşim hareketi, zorlayıcı kuvvet var olduğu sürece vardır. Homojen çözümden $x_h(t)$ kaynaklanan titreşimler ise birkaç periyod sonra sönümlenmektedir. Çünkü, serbest titreşim yapan bir sistemde sönüm elemanı varsa bu titreşimler sönümden dolayı zamanla yok olacaktır. Titreşimlerin sönümden dolayı zamanla kaybolan kısmına geçici titreşimler denmektedir.



Şekil 4.18: Sönümlü Zorlanmış Titreşim Sisteminde Özel ve Homojen Çözüm Yapıları

Sönümsüz Zorlanmış Titreşimler; Bundan önceki bölümlerde tek serbestlik dereceli sistemlerin serbest titreşim durumunda frekans cevabı anlatılmıştı. Şimdi böyle bir sisteme dışardan zorlayıcı bir kuvvet etkimesi durumunda sistemin cevabının nasıl değiştiği anlatılmaya çalışılacaktır. En genel halde sisteme etkiyen dış kuvvet harmonik olarak,

$$F(t) = F_0 \cos(\omega.t) \quad (4.51)$$

kabul edelim. Burada ω zorlayıcı kuvvet veya sürüş frekansı olarak adlandırılır. Bu durumda sönümsüz sistemin hareketinin diferansiyel denklemi Newton'un İkinci Kanun'u uygulandığı zaman,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega.t) \quad (4.52)$$

olarak elde edilmektedir. Bu diferansiyel denklemin homojen çözümü,

$$x_h(t) = A_1 \sin(\omega_n t) + A_2 \cos(\omega_n t) \quad (4.53)$$

olup burada ω_n sistemin doğal frekansıdır. Uyarıcı dış kuvvet $F(t)$, harmonik olduğundan dolayı diferansiyel denklem özel çözüm $x_o(t)$ de harmonik ve aynı ω frekansına sahip olacaktır. Yani,

$$x_{\delta}(t) = X \cos(w t) \quad (4.54)$$

burada X bir sabit olup, $x_{\delta}(t)$ nin maksimum genliğini ifade etmektedir. (4.54) denklemini, (4.52) denkleminde aşağıdaki türevleri ile yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x_{\delta}(t) &= X \cos(wt) \\ \dot{x}_{\delta}(t) &= -wX \sin(wt) \\ \ddot{x}_{\delta}(t) &= -w^2 X \cos(wt) \end{aligned}$$

(4.54) denkleminin maksimum genlik değeri,

$$X = \frac{F_0}{k - mw^2} \quad (4.55)$$

olarak elde edilecek, dolayısıyla genel çözüm,

$$x(t) = A_1 \sin(w_n t) + A_2 \cos(w_n t) + \frac{F_0}{k - mw^2} \cos(wt) \quad (4.56)$$

bulunacaktır. (4.56) denklemindeki A_1 ve A_2 katsayıları, başlangıç şartları ifade edildiği takdirde bulunabilir. Başlangıç şartları olarak, $x(t=0) = x_0$ ve $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ kabulü ile,

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0}{w_n} \quad (4.57)$$

$$A_2 = x_0 - \frac{F_0}{k - mw^2} \quad (4.58)$$

olarak elde edilir.

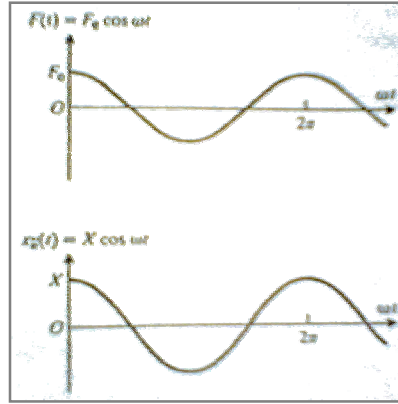
Bulunan A_1 ve A_2 katsayıları (4.56) denkleminde yerlerine yazıldığında sönümsüz zorlanmış titreşim sisteminin frekans cevabı aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin(w_n t) + \left(x_0 - \frac{f_0}{w_n^2 - w^2} \right) \cos(w_n t) + \frac{f_0}{w_n^2 - w^2} \cos(wt) \quad (4.59)$$

Bulunan bu diferansiyel denklemde $f_0 = F_0 / m$ ifadesine eşittir. Burada frekans cevabını tanımlayan temel parametreler sistem doğal frekansı w_n ve dış kuvvet frekansı w olarak gözükmele birlikte daha da doğrusu bu iki parametrenin birbirlerine oranı w/w_n nın büyüklüğüdür. (4.59) nolu frekans cevabını ifade eden diferansiyel denklem incelendiğinde, sistem cevabı için üç farklı durum olabileceği görülmektedir.

1.Durum : $0 < w/w_n < 1$ ise,

Denklem (4.55) in paydası pozitif olmakta ve denklem (4.54) ile verilen dış kuvvete karşılık sistem cevabı değişmemektedir. Sistemin harmonik cevabı $x_0(t)$, Şekil 4.18’de gösterilen dış kuvvet ile aynı fazdadır.



Şekil 4.19: Durum 1 İçin Kuvvet ve Yerdeğişimi

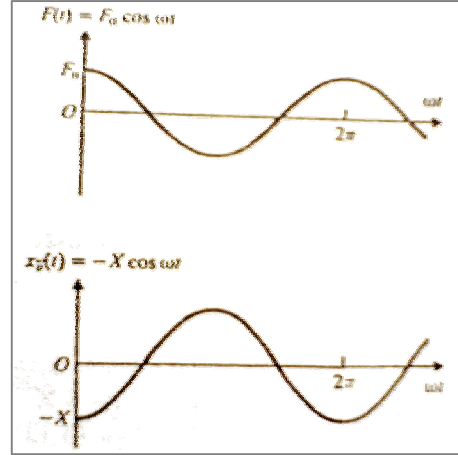
2. Durum : $1 < w/w_n$ ise,

Denklem (4.59) un paydası negatif olmakta ve sürekli rejim halinin çözümü,

$$x_0(t) = -X \cos(wt) \quad (4.60)$$

biçiminde yazılır.

Bu durumda $F(t)$ ve $x_o(t)$ nin zamanla değişimi şekil 4.19'daki grafik gibi olmaktadır. $F(t)$ ve $x_o(t)$ zıt işaretili ifadeler olduklarından dolayı sistem cevabı ile zorlayıcı dış kuvvet arasında 180^0 faz farkı oluşmaktadır.



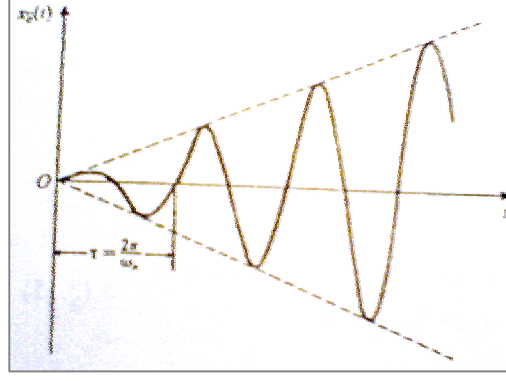
şekil 4.20: Durum 2 İçin Kuvvet ve Yerdeğişimi

3. Durum : $w/w_n=1$ ise,

Denklem (4.55) ile verilen X genliği sonsuz olmaktadır. Burada zorlayıcı kuvvetin frekansının, sistemin doğal frekansına eşit olması halinde oluşan rezonans olayı ifade edilmektedir. Bu durumda (4.59) nolu ifadenin 3.terimi frekans cevabı için özel çözüm olarak geçerli bir çözüm olmamaktadır. Bunun yerine özel çözüm olarak,

$$x_o(t) = \frac{f_0}{2w_n} .t. \sin(w_n t) \quad (4.61)$$

denklemini kullanılmaktadır. Bu terim rezonans probleminin temelini oluşturmaktadır denebilir. Gerçek sistemlerde malzemelerin belli bir akma gerilme değerleri vardır. Rezonans durumunda oluşan yüksek genliklerde malzemeler akma değerlerinin üzerinde gerilmelere maruz kalmakta ve bu durum sistemde hasarlara yol açmaktadır.



Şekil 4.21: Durum 3 İçin Yerdeğişimi

Sönümlü Zorlanmış Titreşimlerde Harmonik Zorlayıcı Kuvvet ile Titreşim;

Zorlayıcı kuvvetin tipi $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ise sistem yine sönümsüz haldeki gibi harmonik bir hareket yapacaktır. Fakat, zorlayıcı dış kuvvet ile titreşim hareketi arasında belirli bir faz farkı oluştuğu görülmektedir. Newton Kanunu'na göre, dış bir kuvvet etkisi altındaki tek serbestlik dereceli sönümlü bir sistemin hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (4.62)$$

şeklinde olacaktır. Bu eşitliğin homojen çözümü,

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + q) \quad (4.63)$$

olarak ifade edilebilir. Bu denklemde yer alan ω_d sönümlü sistemin doğal frekansını gösterir ve $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2}$ ifadesi ile gösterilir. Ayrıca A ve q sabitleri başlangıç şartlarına bağlı olarak hesaplanır.

Dış kuvvetin özel çözümüne bakarsak, (4.62) nolu denklemin özel çözümünün de $x_o(t)$ harmonik olması gerektiğinden dolayı,

$$x_o(t) = X \sin(\omega t - f) \quad (4.64)$$

biçiminde bir çözüm önerilir. Bu denklemde, X ve f tesbit edilmesi gereken sabit sayılardır. Burada, X titreşimlerin genliğini, f de faz açısını göstermektedir. (4.64) nolu denklem, (4.62) de yerine yazıldıktan sonra, trigonometrik birkaç işlemlerin ardından genlik ifadesi,

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \quad (4.65)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlik kütle m ile bölünür, $f = F_0 / m$ ve $x = c/2mw_n$ ifadeleri denkleme yerleştirildiği zaman aşağıdaki formda yeni bir genlik denklemi elde edilir;

$$X = \frac{f}{\sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + (2xw_n w)^2}} \quad (4.66)$$

faz farkını ifade eden denklem ise,

$$f = \tan^{-1} \left(\frac{2xw_n w}{w_n^2 - w^2} \right) \quad (4.67)$$

olarak bulunur.

Sistemin toplam frekans cevabı $x(t) = x_h(t) + x_o(t)$ biçiminde homojen çözüm ile özel çözümün toplamına eşittir.

$$x(t) = Ae^{-xwt} \sin(w_d . t + q) + X \sin(wt - f) \quad (4.68)$$

4.5 Normal Mod Analize Bakış

Doğal frekanslar ve özvektörler için hareket denkleminin çözümünde, hareket denkleminin özel indirgenmiş haline ihtiyaç vardır. Eğer sistemde sönüm ve herhangi bir dış kuvvet yoksa, hareket eşitliği matris formda;

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (4.69)$$

Şeklinde ifade edilir. Burada yer alan değişkenler,

$[M]$ = kütle matrisi

$[K]$ = yay rijitlik matrisi

(4.69) ifadesi sönümsüz serbest titreşim hareketi yapan bir sistemin denklemini göstermektedir. Bu denklemi çözebilmek için aşağıdaki formda bir harmonik çözüm kabul edilir:

$$\{u\} = \{f\} \sin \omega t \quad (4.70)$$

Burada:

$\{f\}$ = özvektör veya mod şekli

ω = doğal frekans

olarak ifade edilir.

Bu harmonik hareket formu, probleme nümerik çözüm sağlamasının yanında aynı zamanda fiziksel bir öneme de sahiptir. Çözümün harmonik biçimi, titreşim hareketi yapan sistemin tüm serbestlik derecelerinin senkronize biçimde ilerlemesi anlamına gelir. Yapı konfigürasyonundaki değişimler, hareket süresince oluşan ve devam eden sistem temel şeklini değiştirmez. Sadece titreşim hareketinin genliği değiştirilebilir.

Eğer çözüm kabul edilen harmonik ifadenin (4.70) türevleri alınıp, hareket denkleminde yerlerine yazılırsa ;

$$-\omega^2 [M]\{f\} \sin \omega t + [K]\{f\} \sin \omega t = 0 \quad (4.71)$$

Yukarıdaki ifade elde edilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde şu eşitliğe ulaşılır;

$$([K] - \omega^2 [M])\{f\} = 0 \quad (4.72)$$

Bu eşitlik hareket özdenklemini olarak ifade edilir. Bu denklem, özvektörlerin homojen cebirsel eşitliklerinden oluşur, özdeğer probleminin temellerini oluşturur. Bir özdeğer probleminin en temel formu şu şekilde ifade edilir.

$$[A - \lambda I]x = 0 \quad (4.73)$$

Bu ifade içinde;

A = kare matris

λ = özdeğer

I = birim matris

x = özvektör olarak tanımlanır.

Yapısal analizlerde, özdenklemin içerisinde bulunan kütle ve yay rijitlik matrisi, fiziksel olarak sistemin doğal frekansı ve sistem özvektörleri ile ilişkilidir. Sonuç olarak, sistem özdenklemini K , M ve ω büyüklüklerine bağlı olarak (4.73) deki gibi ifade edilir. Özdeğer hesabı yapılırken ω^2 yerine λ ile ifade edilebilmektedir.

(4.73) için mümkün olabilecek 2 ayrı çözüm vardır:

1. Eğer $\det([K] - \omega^2[M]) \neq 0$ ise, tek çözüm;

$$\{f\} = 0 \quad (4.74)$$

Bu çözüm denklemin trivial çözümüdür. Sistemde herhangi bir hareket olmadığını gösterir. (Yukarıda geçen “det” ifadesi bir matrisin determinanı anlamına gelmektedir.)

2. Eğer $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ durumu trivial olmayan bir çözüme $\{f\} \neq 0$ sahiptir.

$$([K] - \omega^2[M])\{f\} = 0 \quad (4.75)$$

Bu durumda, bilinen matematik özdeğer problemi aşağıdaki denklemin çözümünden elde edilecek olan kökleri hesaplamaya getirilir.

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (4.76)$$

Ya da

$$\det([K] - l[M]) = 0 \quad (4.77)$$

(4.77) ifadesinde daha evvel de açıklandığı gibi $l = w^2$, herbir özdeğere karşılık gelen ve (4.75) ifadesini sağlayan bir özvektör vardır. Sonuçta (4.75) ifadesi yeniden şu şekilde yazılabilir;

$$(K - w_i^2 M)\{f_i\} = 0 \quad i = 1, 2, 3... \quad (4.78)$$

Herbir özdeğer ve özvektör, sistemin serbest titreşim modlarından birini ifade eder.

Misal,

i -nci özdeğer l_i , i -nci doğal frekans ile ilgilidir.

$$f_i = \frac{w_i}{2\pi} \quad (4.79)$$

Burada ;

f_i = i -nci doğal frekans

$$w_i = \sqrt{l_i}$$

Özdeğer ve özvektörlerin sayısı ilgili kütlenin serbestlik derecesine bağlıdır. Birçok dinamik analizde kullanılması ile faydalı olan , bir takım doğal frekans ve mode şekil karakteristikleri vardır. İlk olarak, lineer elastik bir yapı serbest titreşim veya zorlanmış bir titreşim yaparken, verilen herhangi bir andaki şekil değiştirmesi onun normal modlarının lineer bir kombinasyonudur.

$$\{u\} = \sum_i (f_i)x_i \quad (4.80)$$

Burada,

$\{u\}$ = yerdeğiştirme vektörü

$\{f_i\}$ = i -nci mod şekli

x_i = i -nci modal yerdeğiştirme

İkinci olarak, eğer kütle matrisi $[M]$ ve yay rijitlik matrisi $[K]$, simetrik hem de reel ise aşağıdaki matematik eşitlikleri elde edilir.

$$\{f_i\}^T [M] \{f_j\} = 0 \quad \text{eğer } i \neq j \quad (4.81)$$

$$\{f_j\}^T [M] \{f_j\} = m_j = \text{j-inci genelleştirilmiş kütle} \quad (4.82)$$

ve

$$\{f_j\}^T [K] \{f_j\} = 0 \quad \text{eğer } i \neq j \quad (4.83)$$

$$\{f_j\}^T [K] \{f_j\} = k_j = \text{j-inci genelleştirilmiş rijitlik} = w^2 m_j \quad (4.84)$$

Aynı zamanda (5.18) ve (5.20) eşitliklerinden Rayleigh eşitliği elde edilir.

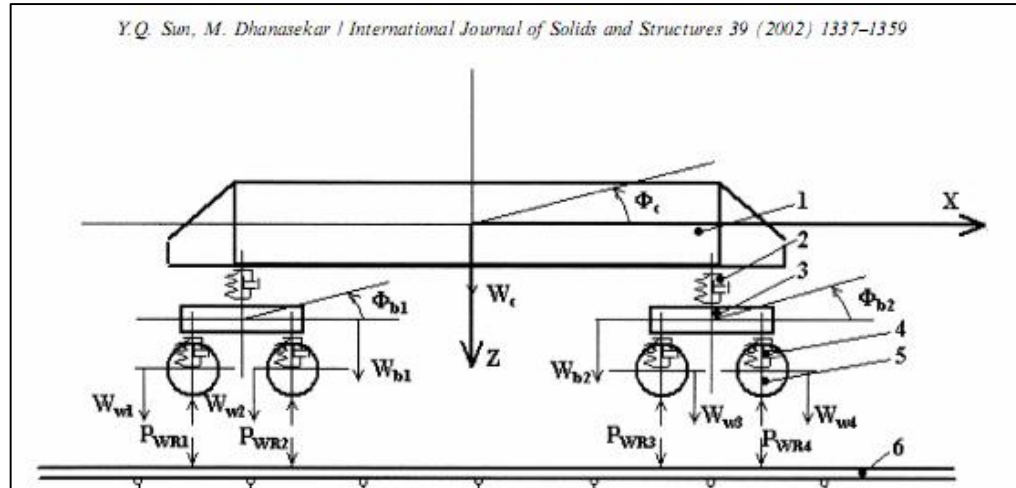
$$w_j^2 = \frac{\{f_j\}^T [K] \{f_j\}}{\{f_j\}^T [M] \{f_j\}} \quad (4.85)$$

(4.81) ve (4.83) ifadeleri normal mode analizinde ortogonallık özelliği olarak bilinir. Fiziksel olarak , modların ortogonallığı herbir mod şeklinin kendine has olduğunu ve bir mod şeklinin diğer herhangi bir modun lineer mod kombinasyonundan elde edilemeyeceğini ifade eder. Buna ek olarak, bir sistemin doğal modu genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş rijitlik matrisleri ile de ifade edilebilmektedir. Eğer bir sistemin serbestlikleri uzayda tamamıyla kısıtlanmamışsa, bu sistem komple veya sistemin bir parçası rijit body hareket yapacaktır.

5. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN TİTREŞİMİ

5.1 Tanım

Çevremizdeki mekanik yapılara baktığımızda, genelde mühendislik sistemlerinin birbirlerine elastik elemanlarla bağlı rijit sistemlerden oluştuğunu görmekteyiz. Örnek vermek gerekirse, Şekil 5.1’de gösterilen basitleştirilmiş bir vagon modelinde olduğu gibi. Diğer taraftan, bazı sistemler mevcuttur ki kütlenin belirli bir elastisitesi olduğu gibi yay elemanının da kütlesi hesaba katılır. Bu durumda buradaki gibi iki farklı yapıdaki sistemi aynı çözüm metodlarıyla incelemek mümkün olmayabilir. Bununla beraber ayrı karakterde olan sistemleri aynı metodlarla çözmek mümkün olup, sistemlerin karakterlerine bağlı çözüm metodları geliştirilmiştir.

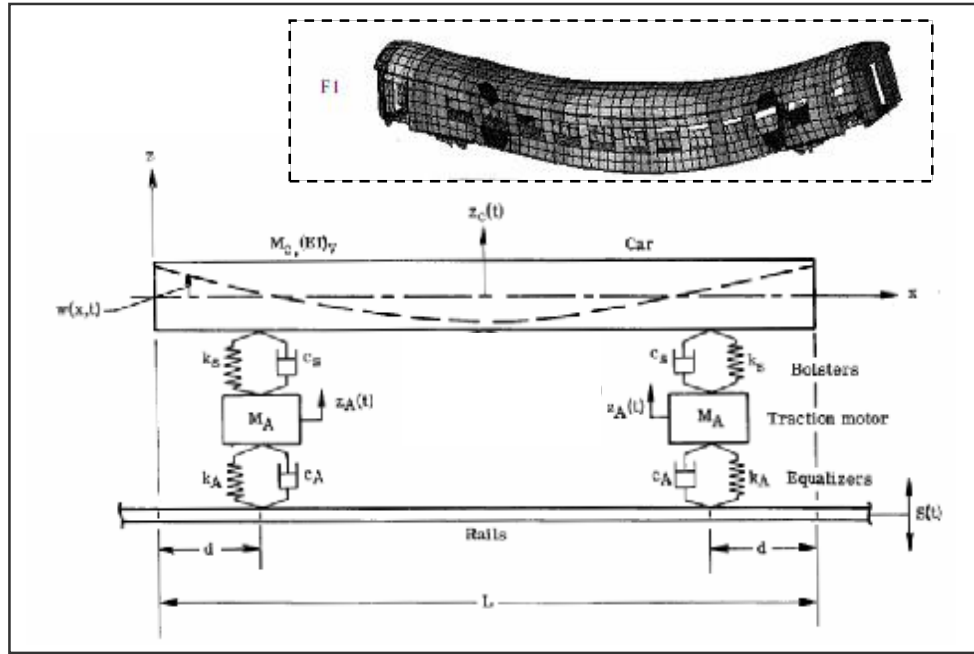


Şekil 5.1: Y.Q Sun ve M. Dhanasekar Tarafından Kullanılan Vagon Modeli

Sistemlerin belirli bölgelerinde kısmi çözümler ve incelemeler yapmak, daha detaylı ve hassas hesaplamalar yapabilmek açısından ve de belki de en önemlisi kısa sürede sonuca varmak için bilgisayarda mühendislik programları kullanmak bir zorunluluk olabilir.

Bazen de çok büyük kompleks sistemleri parçalara ayırıp öylece incelemek daha basit ve kullanışlı olur. İşte bu tür benzer durumlarda kütsüz elemanlar olarak kabul edilen yay ve benzeri elemanlar kullanarak sistemin birbirine bağı rijit elemanlardan oluşan matematiksel modelleri çıkarılıp, çözümler bunlara göre yapılır. Matematik formülasyonu ve bilgisayar kullanımı açısından çok kolay olan bu modelleme “ayrık sistem modeli” olarak tanımlanır.(Şekil 5.1) Bu şekilde sistem, aslında tek bir yapı gibi görünse de çok serbestlik dereceli sisteme dönüşmüş olur.

Diğer bir bakış açısıyla, alternatif bir inceleme tarzı olarak, sistem olduğu gibi matematik diferansiyel ifadelerle elastisite teorisine göre çözülür ki, buna da “sürekli sistem modeli” denmektedir(Şekil 5.2).



Şekil 5.2: Sürekli Sisteme Bir Örnek, NASA Tarafından Kullanılan Vagon Modeli

Ayrık sistem modeli ile sürekli sistem modelini karşılaştırdığımızda sürekli sistem daha kesin ve daha az hata ile sonuç vermektedir. Fakat, ayrık sistem modeli de uygulama açısından daha pratik ve kolaydır.

Bu tez içeriğinde incelenen vagon modeli de ayrıık sistem olarak ele alınmıştır. Vagon sistemi üzerinde Newton-D'Alembert Prensibi kullanılarak; serbest titreşim, doğal frekans ve zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır. Bu analizler yapılırken kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki sistematik prensipler takip edilmiştir.

- 1- Sistemin birbirine elastik elemanlarla bağlı rijit kütlelerden oluşan modeli çıkartılır.
- 2- Sistemin statik denge konumu belirlenir.
- 3- Sistem geometrisini belirlemek ve dinamik analizde ihtiyaç duyulan sistem dinamiklerini belirlemek için koordinat sayısı ve bunların pozitif yn tayin edilir.
- 4- Herhangi bir t anındaki doğrusal ve açısal yerdeğişim durumunda kütlelere etki eden kuvvetler ve momentler belirlenir.
- 5- Ktlelere ait doğrusal ve açısal koordinatlar genelleştirilmiş koordinatlarda yazılarak koordinat sayısının serbestlik derecesi ile eşitliği sağlanır.
- 6- Uygun görülen matematiksel çözüm metodu kullanılarak, dinamik sistemin diferansiyel denklem sistemi ve dolayısıyla hareket denklemleri elde edilir.

5.2 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Hareket Denklemleri

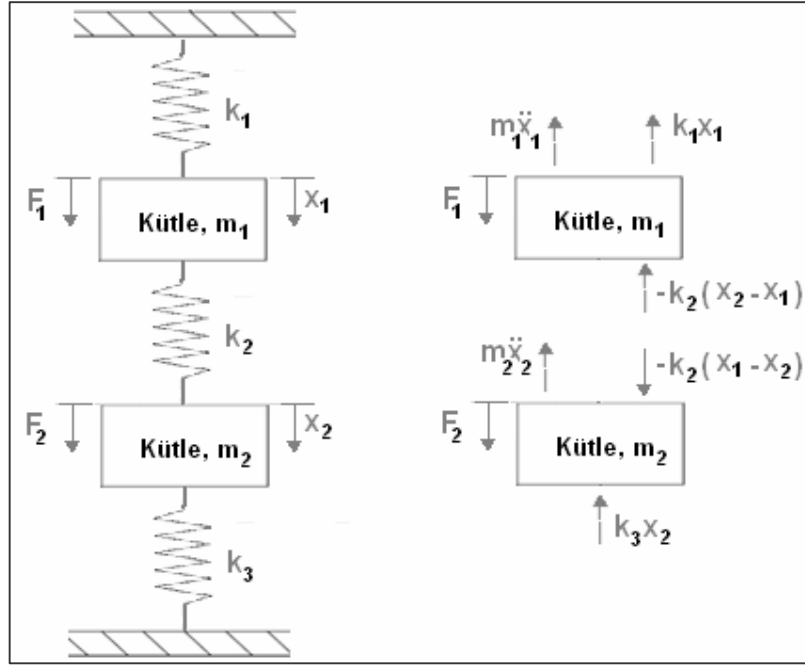
Çok serbestlik dereceli bir sistem, serbestlik derecesi kadar diferansiyel denklem ile ifade edilir. Farzedelim ki n serbestlik dereceye sahip bir sistem varsa, bu sistemin n adet doğal frekansı vardır. Her bir doğal frekansta sistem belli bir mod şekline sahiptir. Gelecek bāřlıklarda, çok serbestlik dereceli sistemlerin doğal frekanslarının dolayısıyla kritik hızlarının bulunması, mod şekilleri ve zorlanmış titreşimlerin cevapları incelenecektir.

Çok Serbestlik Dereceli Sönümsüz Sistemlerin Hareket Denklemleri;

Basit bir örnek olması dolayısıyla, şekil 5.3'teki iki serbestlik dereceli sisteme Newton-D'Alembert Prensibi uygulanırsa, m_1 ve m_2 kütleleri gösterilen kuvvetler etkisi altında dengede olacaklardır.

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1(t) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2(t) - k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2$$



Şekil 5.3: İki Serbestlik Dereceli Sistemin Serbest Cisim Diyagramı

Bu denklemleri matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Bulunan bu denklem, daha önceki bölümlerde bir serbestlik dereceli sistemler için hesaplanan $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega t)$ diferansiyel denklemi ile benzeşmektedir.

(5.2) denkemini kapalı matris formunda yazarsak,

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (5.3)$$

şeklini alır. Öyle ki, burada $[M]$ ve $[K]$ sırasıyla kütle ve yay sabiti matrisleri, $\{u\}$ ve $\{x\}$ ise sırasıyla ivme ve genlik vektörleri, $\{F\}$ ise zorlayıcı kuvvet vektörüdür. Eğer burada,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(wt) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(wt) \\ F_1(t) &= f_1 \cos(wt) \\ F_2(t) &= f_2 \cos(wt) \end{aligned} \tag{5.4}$$

ifadelerini (5.2) eşitliğinde yerlerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 w^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 w^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

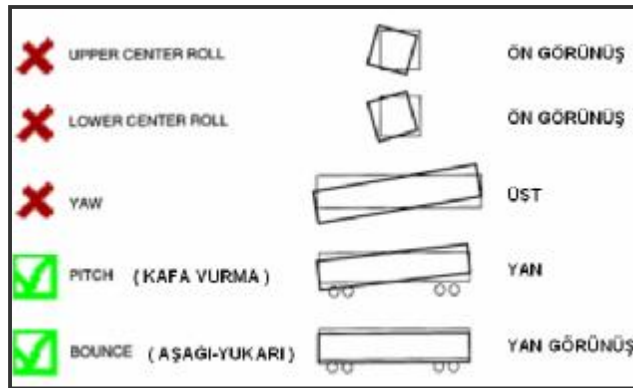
biçiminde maksimum genliklerin hesaplanabileceği yeni bir karakteristik matris eşitliği bulunur.

6. TEK VAGON İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN HESABI

6.1 Vagonun Doğal Frekanslarının Hesabı

Tek vagon doğal frekansları hesaplanırken, Şekil 6.2’de gösterilen altı serbestlik derecesine sahip vagon modelinden faydalanılacaktır. Model çizimi üzerinde bir vagonun dinamik davranışına etki eden temel büyüklükler verilmiştir. Bu büyüklüklerin sayısal değerleri [16] nolu kaynakta Dhanasekar tarafından çalışılan gerçek vagon parametrelerinden alınmıştır.

Analizin içeriğini kısaca anlatmak gerekirse; öncelikle Şekil 6.2’deki sistem kurgulanmış ve serbestlik derecesi istenilen şekilde sınırlandırılmıştır. Burada incelenmesi istenilen konu vagonun düşey (bounce) titreşimleri ve taşıt tekniğinde kafa vurma olarak tabir edilen (pitch) vagon gövdesi ile bojilerin dönme titreşimleridir. Sistemin serbestilerine bakacak olursak, vagon ve iki adet boji düşey ekseninde serbesttirler. Aynı zamanda bu üç yapı ağırlık merkezlerinden geçen z ekseninde de dönmeye serbest bırakılmışlardır. Tüm bu serbestiler hesaba katıldığında üzerinde çalışılan sistem altı serbestlik dereceli bir vagon modelidir. Üzerinde çalışılan serbestlik derecesi Şekil 6.1’de de ayrıntılı olarak yer almaktadır.



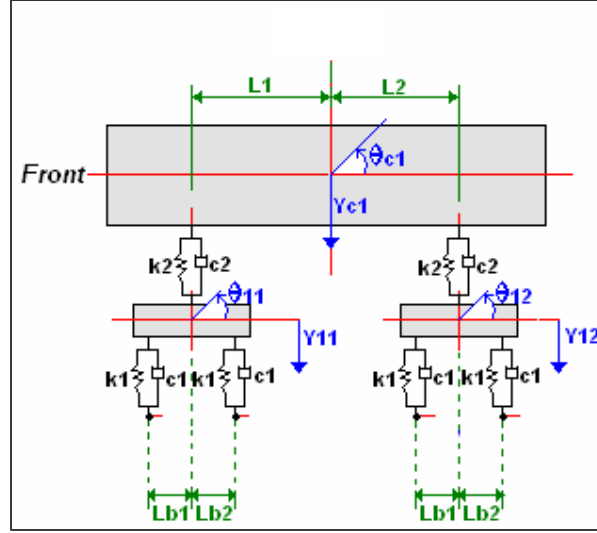
Şekil 6.1: Analizde Kullanılan Vagon Serbestileri

Yanal ve boyuna titreşimler hesaba katılmamıştır. Bir yolcu vagonu ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre tamamen simetrik olduğundan dolayı düşey ve yanal titreşimleri birbirinden bağımsız olarak incelemek mümkün olmaktadır [13].

Buradan hesaplarımızda kullandığımız vagonun serbestlik dereceleri ($\sqrt{\quad}$) işareti ile hesaba katmadığımız serbestlik dereceleri ($\times$) işareti ile belirtilmiştir. Vagon sistemi toplu kütleli model olarak gözönüne alınmıştır. Vagon gövdesi ve iki adet boji sistemdeki kütleleri oluşturmuş, bu kütleler birbirlerine yay ve sönüm elemanları ile bağlanmışlardır. Vagon gövdesi ve boji şasisi eğilme hareketi yapmayan rijit cisimler olarak kabul edilmiştir. Vagon gövdesi ile bojiler arasında, bojiler ile de akslar arasında olmak üzere iki tipte yay-damper elemanı kullanılmıştır. Bütün yay ve sönüm elemanlarının lineer karakterli olduğu varsayılmıştır.

Herbir kütlenin serbestlik derecesine göre altı adet diferansiyel denklem çıkarılmıştır. Bu denklemler (6.2) – (6.6) nolu denklemler olup ileride açıklanmıştır. Bu denklemler incelendiğinde eşitliklerin sağ taraflarının sıfır “0” olduğu görülecektir. Bunun sebebi Şekil 6.1’den de anlaşılacağı üzere dışarıdan herhangi bir zorlayıcı etki bulunmamasıdır. Sistemin hareketlerinin diferansiyel denklemleri çıkarılırken [9] nolu kaynaktan anlatıldığı yöntem uygulanmıştır. Herbir kütle serbestisi yönünde çok küçük miktarda hareket ettirilerek statik denge konumundan çıkarılmış, bu durumda sistemde oluşan atalet kuvvetleri ve dönme atalet momentleri için Newton II. Prensibine göre denge eşitlikleri çıkarılmıştır. Örnek olarak bojilere ağırlık merkezi etrafında bir dönme ve düşey eksen doğrultusunda bir ötelenme hareketi verilmiştir. Bu çıkarılan denklemler ikinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin herbiri [9] nolu kaynaktaki gibi birinci dereceden iki diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve bulunan oniki adet birinci dereceden diferansiyel denklem matris formunda yazılmıştır. Bu matrisin çözümü için Matlab programı kullanılmıştır. Kullanılan programın içeriği de bölüm içerisinde verilmiştir.

Hazırlanan bu Matlab programı ile tek vagon sisteminin doğal frekansları hesaplanmıştır. Hesaplanan doğal frekansların doğruluğunun ispatlanabilmesi için ise gerçek bir test düzeneği yerine MSC.Adams dinamik analiz programı kullanılmıştır. Kısaca, Şekil 6.2 ‘deki tek vagon modeli MSC.Adams programında oluşturulmuş ve doğal frekans analizi yapılmıştır. Analizin sonunda, Matlab Programı ve MSC.Adams programından hesaplanan sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.2: Altı Serbestlik Dereceli Toplu Kütleli Vagon Modeli

Tek Vagonun Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;

1- Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{c1});

$$M_{c1} \ddot{y}_{c1} + 2K_2 y_{c1} + 2C_2 \dot{y}_{c1} + K_2 q_{c1} L_1 + C_2 \dot{q}_{c1} L_1 - K_2 q_{c1} L_2 - C_2 \dot{q}_{c1} L_2 - K_2 y_{11} - C_2 \dot{y}_{11} - K_2 y_{12} - C_2 \dot{y}_{12} = 0 \quad (6.1)$$

2- Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{c1});

$$J_{c1} \ddot{\theta}_{c1} + K_2 \theta_{c1} L_1^2 + C_2 \dot{\theta}_{c1} L_1^2 + K_2 \theta_{c1} L_2^2 + C_2 \dot{\theta}_{c1} L_2^2 + K_2 y_{c1} L_1 + C_2 \dot{y}_{c1} L_1 - K_2 y_{c1} L_2 - C_2 \dot{y}_{c1} L_2 - K_2 y_{11} L_1 - C_2 \dot{y}_{11} L_1 + K_2 y_{12} L_2 + C_2 \dot{y}_{12} L_2 = 0 \quad (6.2)$$

3- Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{11});

$$M_{11} \ddot{y}_{11} + 2K_1 y_{11} + 2C_1 \dot{y}_{11} + K_2 y_{11} + C_2 \dot{y}_{11} - K_2 y_{c1} - C_2 \dot{y}_{c1} - K_2 \theta_{c1} L_1 - C_2 \dot{\theta}_{c1} L_1 + K_1 \theta_{11} L_{b1} + C_1 \dot{\theta}_{11} L_{b1} - K_1 \theta_{11} L_{b2} - C_1 \dot{\theta}_{11} L_{b2} = 0 \quad (6.3)$$

4- Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{11});

$$J_{11}\ddot{\theta}_{11} + K_1 q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \dot{\theta}_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \dot{\theta}_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \dot{y}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \dot{y}_{11} \cdot L_{b2} = 0 \quad (6.4)$$

5- Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{12});

$$M_{12}\ddot{y}_{12} + 2K_1 y_{12} + 2C_1 \dot{y}_{12} + K_2 y_{12} + C_2 \dot{y}_{12} - K_2 y_{c1} - C_2 \dot{y}_{c1} + K_2 \theta_{c1} \cdot L_1 + C_2 \dot{\theta}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \theta_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \dot{\theta}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \theta_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \dot{\theta}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \quad (6.5)$$

6- Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{12});

$$J_{12}\ddot{\theta}_{12} + K_1 q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \dot{\theta}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \dot{\theta}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \dot{y}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \dot{y}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \quad (6.6)$$

Yukarıda oluşturulan diferansiyel denklemlerde, kütle ötelenmesinden oluşan kuvvetlerde yukarı yöndeki kuvvetler pozitif ve kütlelerin dönmesinden oluşan momentlerde ise saat yönünde dönmeye zorlayan momentler pozitif kabul edilmiştir.

$$M = \begin{bmatrix} M_{c1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{c1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{12} \end{bmatrix}$$

Şekil 6.3: Tek Vagon Kütle Matrisi

$$K = \begin{bmatrix} 2.K_2 & 0 & -K_2 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & 2.K_2.L_c^2 & -K_2.L_c & 0 & K_2.L_c & 0 \\ -K_2 & -K_2.L_c & K_2 + 2.K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.K_1.L_w^2 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2.L_c & 0 & 0 & K_2 + 2.K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.K_1.L_w^2 \end{bmatrix}$$

Şekil 6.4: Tek Vagon Rijitlik Matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 2.C_2 & 0 & -C_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 2.C_2.L_c^2 & -C_2.L_c & 0 & C_2.L_c & 0 \\ -C_2 & -C_2.L_c & C_2 + 2.C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.C_1.L_w^2 & 0 & 0 \\ -C_2 & C_2.L_c & 0 & 0 & C_2 + 2.C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.C_1.L_w^2 \end{bmatrix}$$

Şekil 6.5: Tek Vagon Sönüm Matrisi

Yukarıda anlatılan altı adet eşitlik, ikinci dereceden diferansiyel denklemdir. Geçici sistem cevabını (transient response) çözebilmek için altı serbestlik derecesinin de başlangıç şartlarındaki yerdeğiştirme ve hız büyüklüklerine ihtiyaç duyulur.

Durum uzayı çözümlerinde, sistem matrisini oluşturabilmek için bahsedilen altı adet ikinci dereceden diferansiyel denklem birinci dereceden oniki adet diferansiyel eşitliğe dönüştürülür. Bu dönüştürme işlemi [9] nolu kaynakta anlatıldığı gibi kolaylık açısından yeni notasyolar tanımlanarak yapılmıştır.

Tablo 6.1: Sistem Matrisini Oluşturan Notasyonlar ve Açıklamaları

<i>Notasyon</i>	<i>Tanım</i>		<i>Notasyon</i>	<i>Tanım</i>
$x_1 = y_{c1}$	Gövde düşey pozisyonu		$x_7 = \dot{y}_{c1}$	Gövde düşey hızı
$x_2 = \theta_{c1}$	Gövde açısal pozisyonu		$x_8 = \dot{\theta}_{c1}$	Gövde açısal hızı
$x_3 = y_{11}$	Boji düşey pozisyonu		$x_9 = \dot{y}_{11}$	Boji düşey hızı
$x_4 = \theta_{11}$	Boji açısal pozisyonu		$x_{10} = \dot{\theta}_{11}$	Boji açısal hızı
$x_5 = y_{12}$	Boji düşey pozisyonu		$x_{11} = \dot{y}_{12}$	Boji düşey hızı
$x_6 = \theta_{12}$	Boji açısal pozisyonu		$x_{12} = \dot{\theta}_{12}$	Boji açısal hızı

Çıkarılan bu notasyonları kullanarak, bahsedilen durum değişkenleri ve bunların birinci türevleri arasında aşağıdaki ilişkiyi çıkarabiliriz.

Tablo 6.2: Sistem Matrisini Oluşturan Durum Değişkenleri ve Türevleri

$\dot{y}_{c1} = x_7 = \dot{x}_1$
$\dot{\theta}_{c1} = x_8 = \dot{x}_2$
$\dot{y}_{11} = x_9 = \dot{x}_3$
$\dot{\theta}_{11} = x_{10} = \dot{x}_4$
$\dot{y}_{12} = x_{11} = \dot{x}_5$
$\dot{\theta}_{12} = x_{12} = \dot{x}_6$
$\ddot{y}_{c1} = \dot{x}_7$
$\ddot{\theta}_{c1} = \dot{x}_8$
$\ddot{y}_{11} = \dot{x}_9$
$\ddot{\theta}_{11} = \dot{x}_{10}$
$\ddot{y}_{12} = \dot{x}_{11}$
$\ddot{\theta}_{12} = \dot{x}_{12}$

Aynı zamanda birinci ve ikinci türevleri arasındaki ilişki son altı satır içinde verilmiştir.

x_1 'den x_{12} 'ya kadar olan oniki durum ifadesine önceden hesapladığımız ikinci derece denklemleri $y_{c1}, y_{c1}, y_{11}, y_{11}, y_{12}, y_{12}$ yerleştirirsek (6.7) deki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_7 \\
x_2 &= x_8 \\
x_3 &= x_9 \\
x_4 &= x_{10} \\
x_5 &= x_{11} \\
x_6 &= x_{12} \\
x_7 &= - \left(\frac{2K_2 \cdot y_{c1} + 2C_2 \cdot y_{c1} + K_2 q_{c1} \cdot L_1 + C_2 q_{c1} \cdot L_1 - K_2 q_{c1} \cdot L_2}{-C_2 q_{c1} \cdot L_2 - K_2 \cdot y_{11} - C_2 \cdot y_{11} - K_2 \cdot y_{12} - C_2 \cdot y_{12}} \right) / M_{c1} \\
x_8 &= - \left(\frac{K_2 q_{c1} \cdot L_1^2 + C_2 q_{c1} \cdot L_1^2 + K_2 q_{c1} \cdot L_2^2 + C_2 q_{c1} \cdot L_2^2}{+K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot y_{c1} \cdot L_1 - K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_2 - C_2 \cdot y_{c1} \cdot L_2} \right) / J_{c1} \\
x_9 &= - \left(\frac{2K_1 \cdot y_{11} + 2C_1 \cdot y_{11} + K_2 \cdot y_{11} + C_2 \cdot y_{11} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot y_{c1} - K_2 q_{c1} \cdot L_1}{-C_2 q_{c1} \cdot L_1 + K_1 q_{11} \cdot L_{b1} + C_1 q_{11} \cdot L_{b1} - K_1 q_{11} \cdot L_{b2} - C_1 q_{11} \cdot L_{b2}} \right) / M_{11} \\
x_{10} &= - \left(\frac{K_1 q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 q_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 q_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1}}{-K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2}} \right) / J_{11} \\
x_{11} &= - \left(\frac{2K_1 \cdot y_{12} + 2C_1 \cdot y_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot y_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot y_{c1} + K_2 q_{c1} \cdot L_1}{+C_2 q_{c1} \cdot L_1 + K_1 q_{12} \cdot L_{b1} + C_1 q_{12} \cdot L_{b1} - K_1 q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 q_{12} \cdot L_{b2}} \right) / M_{12} \\
x_{12} &= - \left(\frac{K_1 q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 q_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 q_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1}}{-K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2}} \right) / J_{12}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Oluşturulan bu denklemleri matris formunda;

$$X = Ax + Bu \tag{6.8}$$

durum uzayı (state space) ifadesi şeklinde yazarsak, aşağıdaki matris eşitliklerini elde ederiz. Sisteme dışardan ikaz olmadığından B matrisi yazılmamıştır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2K_2}{M_{e1}} & \frac{-K_2(L_1 - L_2)}{M_{e1}} & \frac{-K_2}{M_{e1}} & 0 & \frac{-K_2}{M_{e1}} & 0 \\ \frac{-K_2(L_1 - L_2)}{J_{e1}} & \frac{-K_2(L_1^2 + L_2^2)}{J_{e1}} & \frac{K_2 L_1}{J_{e1}} & 0 & \frac{-K_2 L_2}{J_{e1}} & 0 \\ \frac{K_2}{M_{11}} & \frac{K_2 L_1}{M_{11}} & \frac{-(2K_1 + K_2)}{M_{11}} & \frac{-K_1(L_{b1} - L_{b2})}{M_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_1(L_{b1} - L_{b2})}{J_{11}} & \frac{-K_2(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)}{J_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{M_{12}} & \frac{-K_2 L_1}{M_{12}} & 0 & 0 & \frac{-(2K_1 + K_2)}{M_{12}} & \frac{-K_1(L_{b1} - L_{b2})}{M_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-K_1(L_{b1} - L_{b2})}{J_{12}} & \frac{-K_2(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)}{J_{12}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2C_2}{M_{e1}} & \frac{-2C_2(L_1 - L_2)}{M_{e1}} & \frac{-C_2}{M_{e1}} & 0 & \frac{-C_2}{M_{e1}} & 0 \\ \frac{-C_2(L_1 - L_2)}{J_{e1}} & \frac{-C_2(L_1^2 + L_2^2)}{J_{e1}} & \frac{C_2 L_1}{J_{e1}} & 0 & \frac{-C_2 L_2}{J_{e1}} & 0 \\ \frac{C_2}{M_{11}} & \frac{C_2 L_1}{M_{11}} & \frac{-(2C_1 + C_2)}{M_{11}} & \frac{-C_1(L_{b1} - L_{b2})}{M_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-C_1(L_{b1} - L_{b2})}{J_{11}} & \frac{-C_2(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)}{J_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{C_2}{M_{12}} & \frac{-C_2 L_1}{M_{12}} & 0 & 0 & \frac{-(2C_1 + C_2)}{M_{12}} & \frac{-C_1(L_{b1} - L_{b2})}{M_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-C_1(L_{b1} - L_{b2})}{J_{12}} & \frac{-C_2(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)}{J_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

Şekil 6.6: Tek Vagon İçin A Sistem Matrisi

$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ifadesinin matris yapısına baktığımızda şu şekilde kısa bir gösterimle ifade edilebileceği açıktır. Bu matrisin içeriğindeki alt matrislerin düzeni Matlab programı yazarken büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} [0]_{6 \times 6} & [I]_{6 \times 6} \\ [-\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}]_{6 \times 6} & [-\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}]_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad (6.9)$$

Buradaki sistemin hareketlerini ifade eden durum uzayı eşitliğini (state space equations)

tanımlayacak olursak: **A** matrisine sistem matrisi, **B** matrisine sistem giriş matrisi ve skaler olan **u** 'ya ise giriş denilmektedir. Sütun vektörü olan **x** sistem durum vektörünü içermektedir.

Bu bölümde incelenen tek vagonun doğal frekanslarının hesaplanmasında Matlab programında yazılan kod kullanılmıştır. Vagon parametreleri Dhanasekar [16] tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır. Burada yapacağımız analiz de dahil olmak üzere gelecek bölümlerdeki analizlerde de bu parametreler kullanılacaktır.

Tablo 6.3: Çalışmada Kullanılan Vagonun Sayısal Değerleri

Notasyon	Parametre	Değer
M_C	Vagon gövde kütlesi	58400 kg
J_C	Vagon gövdesi kütle atalet momenti	617282 kg m ²
M_{11}	Boji kütlesi	3600 kg
J_{11}	Boji kütle atalet momenti	1801 kg m ²
M_{12}	Boji kütlesi	3600 kg
J_{12}	Boji kütle atalet momenti	1801 kg m ²
K_2	Boji-Gövde arası yay katsayısı	2555 kN / m
C_2	Boji-Gövde arası sönüm katsayısı	30 kNs / m
K_1	Aks-Boji arası yay katsayısı	6500 kN / m
C_1	Aks-Boji arası sönüm katsayısı	10 kNs / m
L_1, L_2	Vagon merkezi-Bojiler arası mesafe	10 m
L_{b1}, L_{b2}	Boji merkezi-Akslar arası mesafe	2 m

Matlab Programı İle Modelleme;

Tek vagon modal analiz çözümü için Program1.1 Matlab kodu yazılmıştır;

Program 1.1: vagon1_modal.m

%%TEK VAGON'un DOĞAL FREKANS HESABI

clc

clear all

%%Girilen Vagon Parametreleri

Mc = 58400 ; %Vagon Gövdesinin Ağırlığı, kg

Jc = 617218 ; %Vagon Gövdesi Kütle Atalet Momenti, kgm^2

Mb1 = 2615 ;, Mb2 = 2615; %Bojilerin Ağırlıkları, kg

Jb1 = 1801; , Jb2 = 1801; %Bojilerin Kütle Atalet Momenti, kgm^2

Ksc = 2555000; %Gövde-Boji Arası Yay Katsayısı, N/m

Csc = 30000; %Gövde-Boji Arası Sönüm Katsayısı, Ns/m

Kpr = 6500000; %Boji-Akslar Arası Yay Katsayısı, N/m

Cpr = 10000; %Boji-Akslar Arası Sönüm Katsayısı, Ns/m

%%

%%Diyagonal Kütle Matrisi

Mmat = diag([Mc Jc Mb1 Jb1 Mb2 Jb2]);

%%

%%Simetrik Kütle Matrisi

*Kmat = [2*Ksc 0 -Ksc 0 -Ksc 0;*
*0 2*Ksc*Lc^2 -Ksc*Lc 0 Ksc*Lc 0;*
*-Ksc -Ksc*Lc Ksc+2*Kpr 0 0 0;*
*0 0 0 2*Kpr*Lw^2 0 0;*
*-Ksc Ksc*Lc 0 0 Ksc+2*Kpr 0;*
*0 0 0 0 0 2*Kpr*Lw^2]*

%%

%%

%%Simetrik Sönüm Matrisi

```
Cmat = [2*Csc 0 -Csc 0 -Csc 0;
        0 2*Csc*Lc^2 -Csc*Lc 0 Csc*Lc 0;
        -Csc -Csc*Lc Csc+2*Cpr 0 0 0;
        0 0 0 2*Cpr*Lw^2 0 0;
        -Csc Csc*Lc 0 0 Csc+2*Cpr 0;
        0 0 0 0 0
        2*Cpr*Lw^2]
```

%%

%% A Sistem Matrisi

```
Amat = [ zeros(6,6) eye(6)
        -inv(Mmat)*Kmat -inv(Mmat)*Cmat];
```

%%

%%Özdeğer ve Özvektörlerin hesaplanması

```
E = eig(Amat); %kompleks özdeğer, rad/sn
```

```
E2=eig(inv(Mmat)*Kmat); %reel özdeğer, (rad/sn)^2
```

```
w = sqrt(E2); %reel özdeğer, rad/sn
```

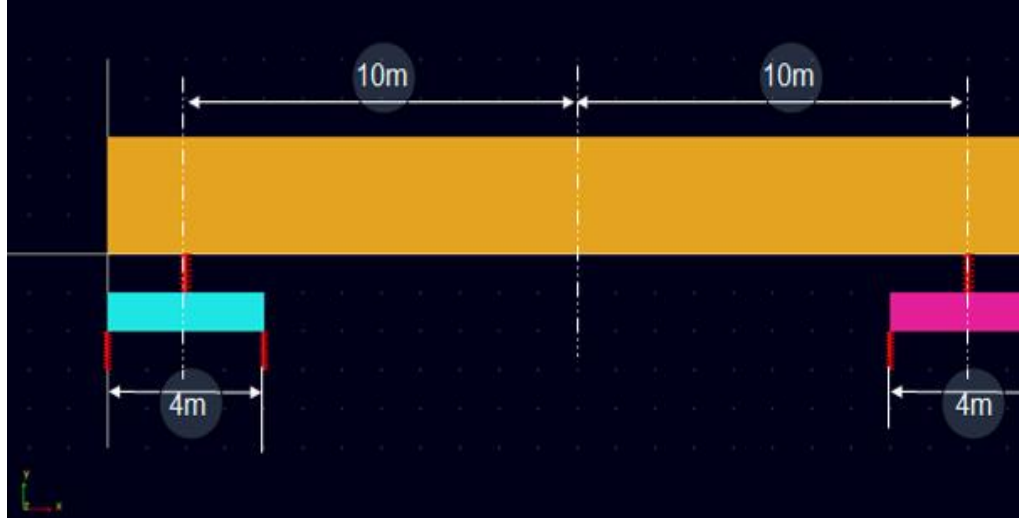
```
E3=(eig(Amat))/(2*pi); %kompleks özdeğer, Hz
```

```
E4=(sqrt(E2))/(2*pi); %reel özdeğer, Hz
```

```
[v,w2]=eig(inv(Mmat)*Kmat); %v-özvektörler, w2-özdeğerlerin karesi
```

MSC.Adams Programı İle Modelleme;

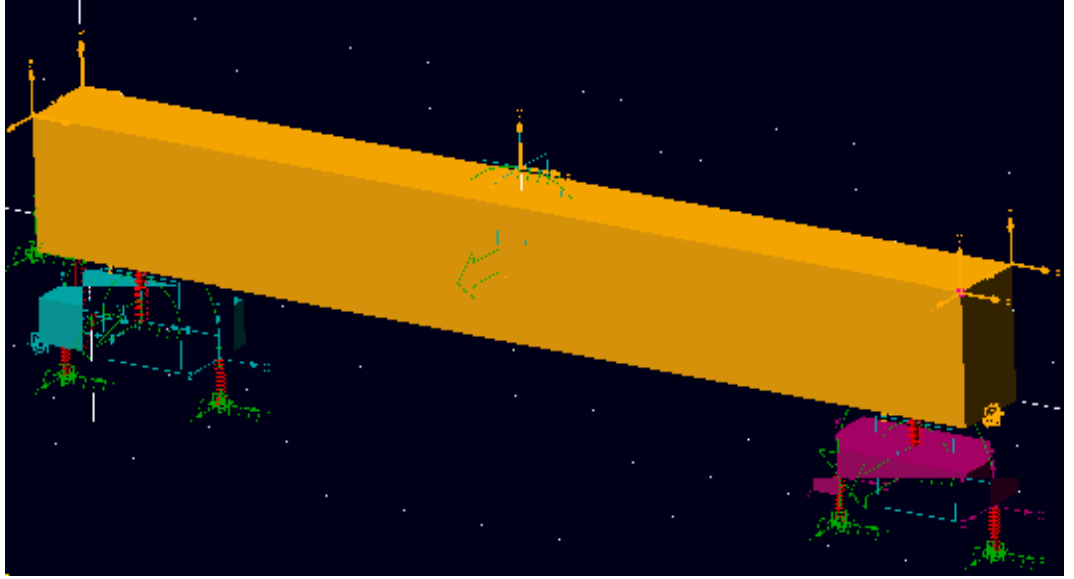
Tek vagon sistemi MSC.Adams programında aşağıda detayları verildiği şekilde modellenmiştir. Bu program modal analiz çözümü için kullanılmış, Matlab ile hazırlanmış olan programdan alınan özdeğer sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır.



Şekil 6.7: Tek Vagon MSC.Adams Modeli Temel Boyutları

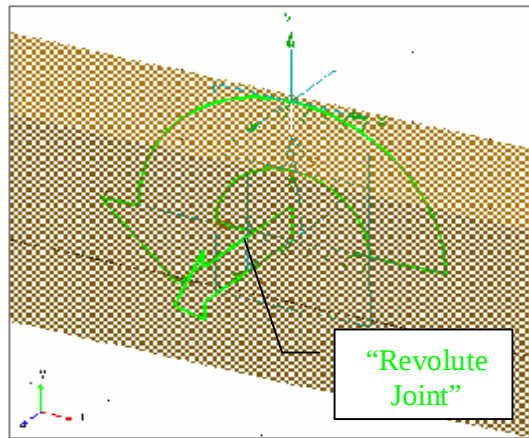
Şekil 6.7’de gösterilen boyutlar (vagon gövde uzunluğu, bojilerin uzunlukları) vagonun doğal frekanslarının hesabı için yeterli olmaktadır. Bu uzunluk ölçüleri kütlelerin dönmeleri esnasında oluşan momentlerin hesaplanması amacıyla kullanılmaktadır. Burada yaptığımız hesaplamalarda vagonun veya bojilerin genişlik, yükseklik vb. boyutlarına gerek yoktur. Bu nedenle Şekil 6.7 ve Şekil 6.8’de vagon ve bojileri temsil eden geometriler sadece görsel kolaylık sağlamaktadır.

Serbestlik derecelerinin istediğimiz biçimde kurgulanabilmesi için Adams programında yer alan 2 farklı serbesti aracı kullanılmıştır. Vagon gövdesi kütlesi ve herbir bojinin kütleleri global z ekseninde dönmeye serbest bırakılmış, diğer dönmeler kısıtlanmıştır. Bu durum programda “revolute joint” denilen dönme eksenlerinin serbestlik derecesini kontrol eden araç ile gerçekleştirilmiştir (Şekil 6.9).

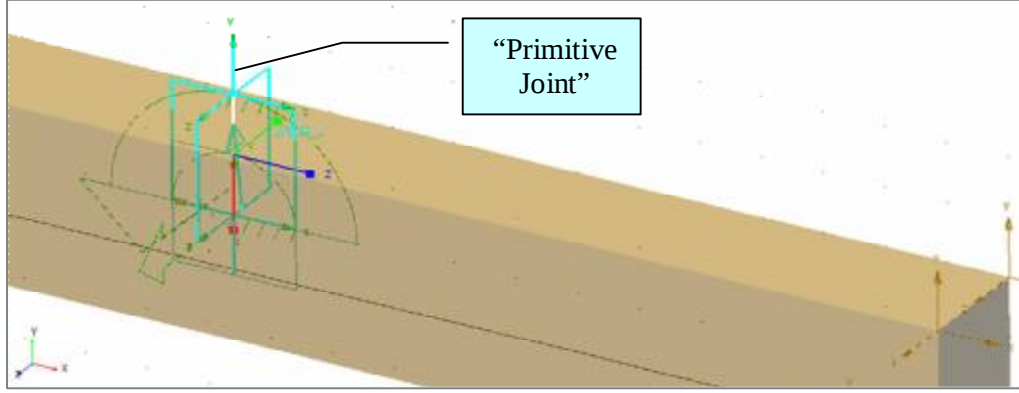


Şekil 6.8: Tek Vagon MSC.Adams Model Serbestileri

Vagon gövdesi ve bojilerin ötelenme durumları kontrol edilmiştir. Sistemin sadece y eksenini yönündeki düşey titreşim hareketleri inceleneceğinden dolayı, tüm kütleler sadece bu yönde hareket edebilecek şekilde serbestlik dereceleri ayarlanmıştır. Bu sınırlandırma Adams programında yer alan “primitive joint” aracı ile gerçekleştirilmiştir (Şekil 6.10).



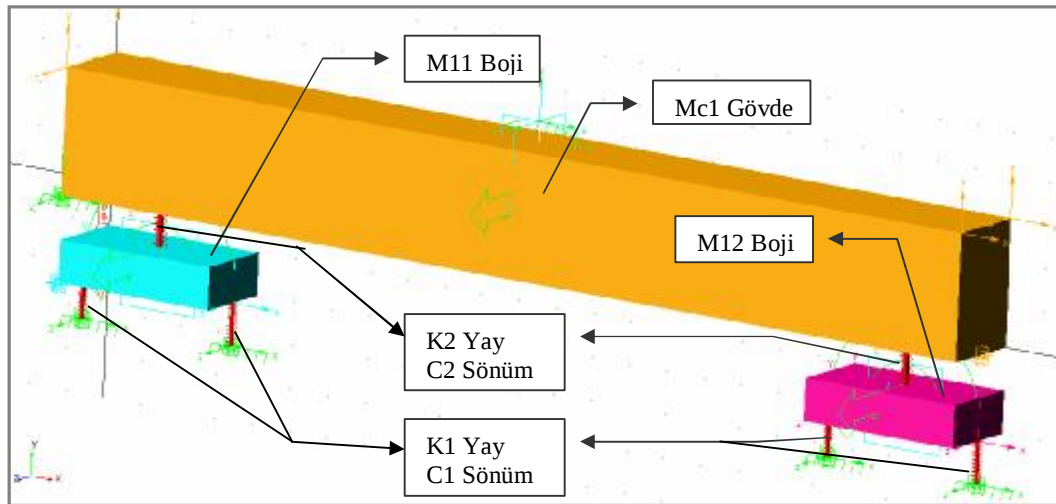
Şekil 6.9: Yalnızca z Ekseninde Dönme Serbestisinin Sağlanması (Revolute Joint)



Şekil 6.10: Yalnızca x-y Düzleminde Ötelenme Serbestisi (Primitive Joint)

Çalışmanın başında Şekil 6.2’de kurulan toplu kütleli vagon sistemi Adams programında da Şekil 6.11’de gösterildiği gibi modellenmiştir. Tüm model, altı serbestlik derecesini sağlayacak şekilde Adams programının sunduğu serbesti kısıtlama araçları kullanılarak hazırlanmıştır.

Modelde yer alan kütle, yay ve sönüm elemanı gibi parametrelerin sayısal değerleri de Tablo 6.3’ deki veriler kullanılarak Adams programına girilmiştir.



Şekil 6.11: Tek Vagon MSC.Adams Sayısal Büyüklüklerin Tanımlanışı

Aşağıda verilen Şekil 6.12’den Şekil 6.15 arasındaki 5 adet şekil Adams programında kütle, yay ve sönüm değerlerinin nasıl girildiğini göstermektedir.



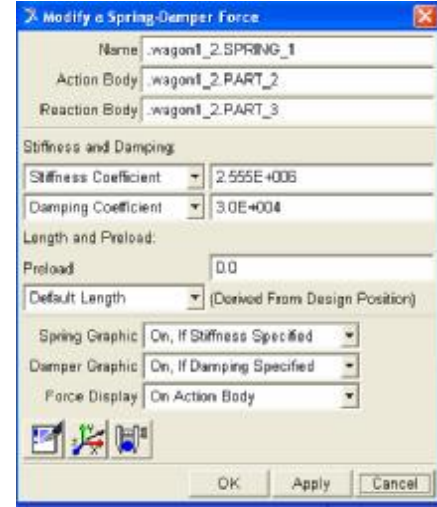
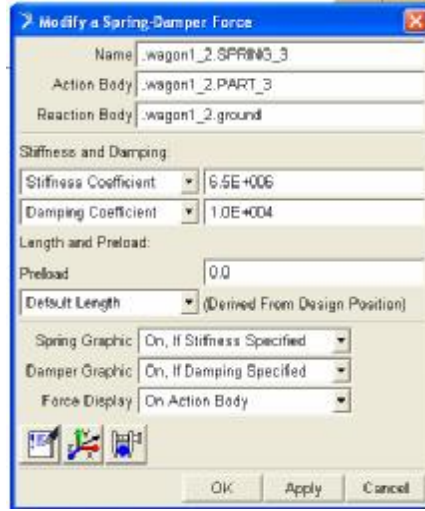
Şekil 6.12: Vagon Gövdesinin Kütlesi ve Atalet Momenti Değerleri Girişi (M_c, J_c)



Şekil 6.13: Bojilerin Kütlesi ve Atalet Momenti Değerleri Girişi (M_{b1}, J_{b1})



Şekil 6.14: Bojilerin Kütlesi ve Atalet Momenti Değerleri Girişi (M_{b2}, J_{b2})



Şekil 6.15: Birincil ve İkincil SüspansiyonYay-Sönüm Değerleri Girişi

Tüm bu bahsedilen aşamalar Adams programında yapıldıktan sonra, vagon modeli modal analize hazır hale gelmektedir. Tek vagon anlatıldığı biçimde modellenmiş ve modal çözümü yapılmıştır. Sistemin özvektör ve özdeğerleri elde edilmiş ve Tablo 6.4 de Matlab programından elde edilen çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

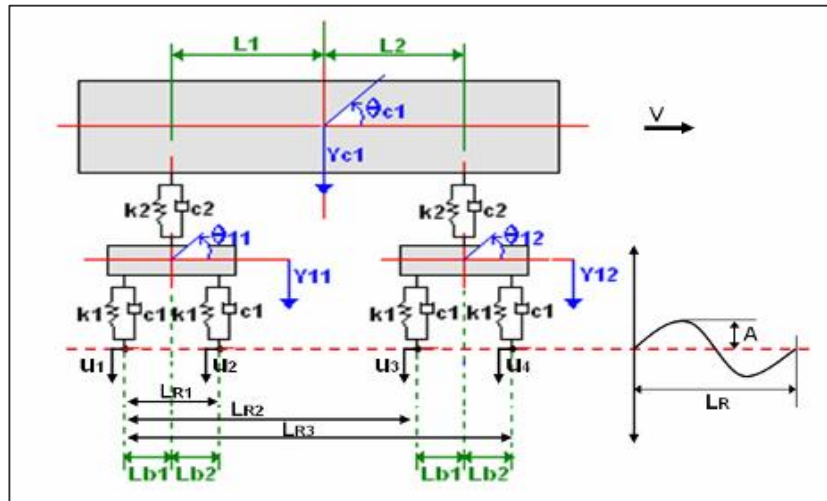
Tablo 6.4: Tek Vagon için Modal Sonuçların Karşılaştırması

	<i>Frekans Değerleri (Hz)</i>	
	MATLAB	MSC.ADAMS
1.Mod	1.359	1.360
2.Mod	4.133	4.152
3.Mod	12.289	12.228
4.Mod	12.432	12.349
5.Mod	27.043	26.982
6.Mod	27.043	26.982

6.2 Tek Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı

Modelin Açıklanması;

Tek vagon için zorlanmış titreşimlere karşılık sistemin cevabı hesaplanırken, Şekil 6.16’da gösterilen altı serbestlik derecesine sahip vagon modelinden faydalanılacaktır. Model çizimi üzerinde bir vagonun dinamik davranışına etki eden temel büyüklükler verilmiştir. Burada sistemi dışarıdan tetikleyen etki, aksların üzerinde yürüdüğü raylardaki düzgünsüzlüklerden dolayı oluşmaktadır. Bu düzgünsüzlüklerin yapısı sinüsoidal harmonik bir zorlama yapısında olduğu kabul edilmiştir. Vagon sabit bir V hızı ile bu ray üzerinde yürürken dört aksta birbirinden farklı dört ayrı ikaz oluşacaktır. Şekil 6.16’da gösterilen “A” harmonik ikaz genliğini, “LR” dalga boyunu ifade etmektedir.



Şekil 6.16: Altı Serbestlik Dereceli Toplu Kütleli Vagon Modeli

Modelden görüldüğü gibi düzgün olmayan ray üzerinde hareket eden bir vagon göz önüne alındığında, yol fonksiyonu $u(t) = A \sin(wdr.t)$ kabulü ile sistemin hareketinin diferansiyel denklemi genel bir tanım olarak,

$$\sum F = m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} + c(y - u) + k(y - u) = 0 \quad (6.10)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Eğer $u(t)$ yerine konursa;

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + ky = k.A.\sin(w_{dr}.t) + c.w_{dr}.A\cos(w_{dr}.t) \quad (6.11)$$

eşitliği elde edilmektedir. Görüldüğü gibi, zeminin düzgünsüzlüğü sebebiyle büyüklüğü $[k.A.\sin(w_{dr}.t) + c.w_{dr}.A\cos(w_{dr}.t)]$ olan harmonik bir kuvvetin kütleye dışardan etkimesi ile aynı eşdeğerde olmaktadır.

Tek Vagonun Harmonik İkaz Durumunda Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;

1- Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{c1});

$$M_{c1}.\ddot{y}_{c1} + 2.K_2.y_{c1} + 2.C_2.\dot{y}_{c1} + K_2.q_{c1}.L_1 + C_2.\dot{q}_{c1}.L_1 - K_2.q_{c1}.L_2 - C_2.\dot{q}_{c1}.L_2 - K_2.y_{11} - C_2.\dot{y}_{11} - K_2.y_{12} - C_2.\dot{y}_{12} = 0 \quad (6.12)$$

2- Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{c1});

$$J_{c1}.\ddot{\theta}_{c1} + K_2.\theta_{c1}.L_1^2 + C_2.\dot{\theta}_{c1}.L_1^2 + K_2.\theta_{c1}.L_2^2 + C_2.\dot{\theta}_{c1}.L_2^2 + K_2.y_{c1}.L_1 + C_2.\dot{y}_{c1}.L_1 - K_2.y_{c1}.L_2 - C_2.\dot{y}_{c1}.L_2 - K_2.y_{11}.L_1 - C_2.\dot{y}_{11}.L_1 + K_2.y_{12}.L_2 + C_2.\dot{y}_{12}.L_2 = 0 \quad (6.13)$$

3- Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{11});

$$M_{11}.\ddot{y}_{11} + 2.K_1.y_{11} + 2.C_1.\dot{y}_{11} + K_2.y_{11} + C_2.\dot{y}_{11} - K_2.y_{c1} - C_2.\dot{y}_{c1} - K_2.q_{c1}.L_1 - C_2.\dot{q}_{c1}.L_1 + K_1.q_{11}.L_{b1} + C_1.\dot{q}_{11}.L_{b1} - K_1.q_{11}.L_{b2} - C_1.\dot{q}_{11}.L_{b2} = K_1(u_1 + u_2) + C_1(\dot{u}_1 + \dot{u}_2) \quad (6.14)$$

4- Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{11});

$$J_{11}.\ddot{\theta}_{11} + K_1.q_{11}.L_{b1}^2 + C_1.\dot{q}_{11}.L_{b1}^2 + K_1.q_{11}.L_{b2}^2 + C_1.\dot{q}_{11}.L_{b2}^2 + K_1.y_{11}.L_{b1} + C_1.\dot{y}_{11}.L_{b1} - K_1.y_{11}.L_{b2} - C_1.\dot{y}_{11}.L_{b2} = K_1u_1L_{b1} + C_1\dot{u}_1L_{b1} - K_1u_2L_{b2} - C_1\dot{u}_2L_{b2} \quad (6.15)$$

5- Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{12});

$$M_{12}.\ddot{y}_{12} + 2.K_1.y_{12} + 2.C_1.\dot{y}_{12} + K_2.y_{12} + C_2.\dot{y}_{12} - K_2.y_{c1} - C_2.\dot{y}_{c1} + K_2.q_{c1}.L_1 + C_2.\dot{q}_{c1}.L_1 + K_1.q_{12}.L_{b1} + C_1.\dot{q}_{12}.L_{b1} - K_1.q_{12}.L_{b2} - C_1.\dot{q}_{12}.L_{b2} = K_1(u_3 + u_4) + C_1(\dot{u}_3 + \dot{u}_4) \quad (6.16)$$

6- Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{12});

$$J_{12}\ddot{\theta}_{12} + K_1 q_{12} L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{12} L_{b1}^2 + K_1 q_{12} L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{12} L_{b2}^2 + K_1 y_{12} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{12} L_{b1} - K_1 y_{12} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{12} L_{b2} = K_1 u_3 L_{b1} + C_1 \dot{u}_3 L_{b1} - K_1 u_4 L_{b2} - C_1 \dot{u}_4 L_{b2} \quad (6.17)$$

Sistemin hareket denklemlerini matris formunda yazarsak; [M], [C] ve [K] sırasıyla kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri tek vagon modal analizi sırasında hazırlanan matrislerle aynı olacaktır. Bu sebeple yeniden yazılmayacaktır. Sadece farklı olarak sistemin sağ tarafında kuvvet matrisi oluşacaktır.

Harmonik ikaz durumunda vagon gövdesini düşey yerdeğiştirmesi (Yc) ve boji gövdelerinin (Yb) düşey yerdeğiştirmeleri incelenmiştir. Bu amaç için Matlab programında “*Program 1.2: vagon1_harmonik_ikaz.m*” adlı kod yazılmıştır. Bu kod hesaplamayı şu şekilde yapmaktadır;

Önce kullanıcı vagon parametrelerini girmekte, istediği ikaz frekansını w_{dr} ve dalga boyunu tanımlayarak ta dış harmonik ikaz karakterini oluşturmaktadır. Vagon, 4 ayrı akstan farklı faz açılara sahip ikazlar almaktadır. Bu faz açılarını hesaplayabilmek amacıyla ilk aks referans kabul edilmiş, diğer aksların ilk aks ile olan mesafelerinden herbir aksın (V) vagon hızına bağlı olarak faz farkları hesaplanmıştır. (Lr1, Lr2 ve Lr3) uzunlukları bu amaç için verilmiştir. Bulunan bu faz açılarını da hesaba katarak herbir akstaki yerdeğişim (u) ve hız hesaplanmıştır. Sisteme dışarıdan etkiyen ikaz büyüklüğü (6.14)-(6.17) denklemlerinin sağ tarafından alınmıştır.

Sistemin çözümüne gelirse, çözüm matrisi tanım olarak literatürde [9] hareketin durum uzay eşitliği denilen sistem giriş matris formu için;

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.18)$$

sistem çıkış matris formu için ise;

$$y = Cx + Du \quad (6.19)$$

şeklinde genel formülasyon ile gösterilmektedir. Buradaki sistemin hareketlerini ifade eden durum uzayı eşitliğini (state space equations) tanımlayacak olursak; **A** matrisine sistem matrisi, **B** matrisine sistem giriş matrisi ve skaler olan **u** ‘ya ise giriş

denilmektedir. Sütun vektörü olan y sistem durum vektörünü içermektedir. C matrisi sistem çıkış matrisi, D transfer matrisi olarak tanımlanmaktadır. Burada C matrisi çıktı istenen serbestiler kadar satıra sahiptir, D matrisinin sütun sayısı B matrisine satır sayısı C matrisine eşittir. Bizim çalışmamızda dört akstan ikaz alan tek vagonun kütlelerinin düşey yerdeğişimlerini ölçmek istemekteyiz. Bu sebeple sisteme dört giriş buna karşın üç çıkış olacaktır. Oluşturulan matrisler hazırlanan kod içinden detaylı olarak incelenebilmektedir. Genel halde matris boyutları şu şekilde;

$$[x]_{12 \times 1} = [A]_{12 \times 12} [x]_{12 \times 1} + [B]_{12 \times 4} [u] \quad (6.20)$$

$$[y]_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 12} [x]_{12 \times 1} + [D]_{3 \times 4} [u] \quad (6.21)$$

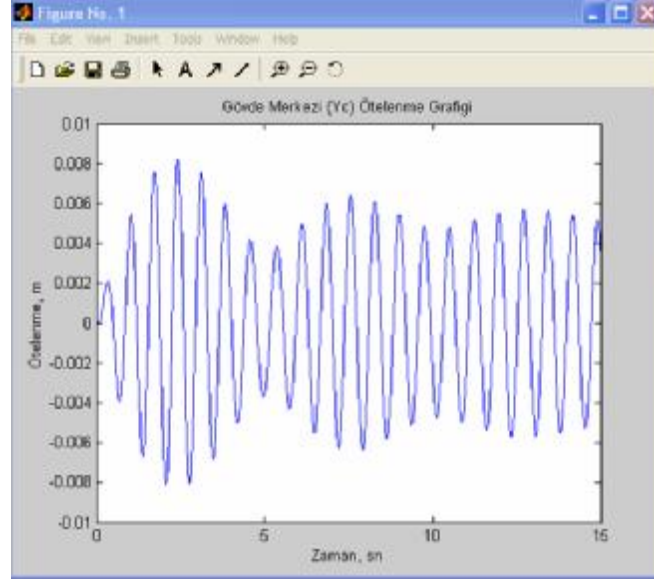
Burada $[u]$ matrisinin satır sayısı çözümü yapacağımız zaman süresince kaç artımda bir sonuç alacağımıza bağlıdır. Sütun sayısı ise dört girişe karşılık dört tanedir.

Tablo 6.5: Çalışmada Kullanılan Vagonun Sayısal Değerleri

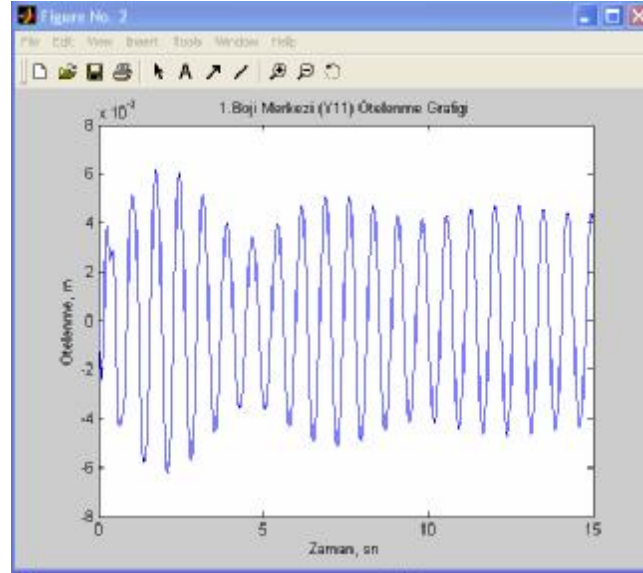
Notasyon	Parametre	Değer
M_C	Vagon gövde kütlesi	58400 <i>kg</i>
J_C	Vagon gövdesi kütle atalet momenti	617282 <i>kg m²</i>
M_{11}, M_{12}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{11}, J_{12}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
K_2	Boji-Gövde arası yay katsayısı	2555 <i>kN / m</i>
C_2	Boji-Gövde arası sönüm katsayısı	30 <i>kNs / m</i>
K_1	Aks-Boji arası yay katsayısı	6500 <i>kN / m</i>
C_1	Aks-Boji arası sönüm katsayısı	10 <i>kNs / m</i>
L_1, L_2	Vagon merkezi-Bojiler arası mesafe	10 <i>m</i>
L_{b1}, L_{b2}	Boji merkezi-Akslar arası mesafe	2 <i>m</i>
L_{r1}, L_{r2}, L_{r3}	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	4, 20, 24 <i>m</i>
L_R	Ray dalga boyu	6 <i>m</i>

Ray dalga boyu 6m olarak [13] nolu kaynaktan alınmıştır.

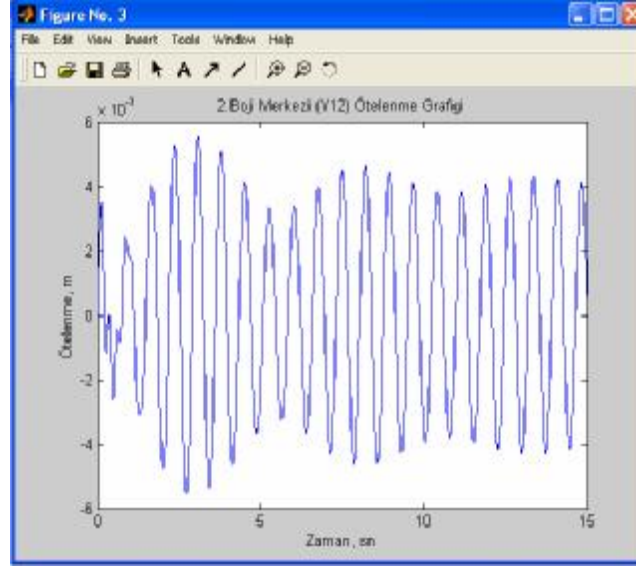
Aşağıda Tablo 6.5 deki parametreler kullanılarak elde edilmiş vagon yapılarının yerdeğişim grafikleri görülmektedir. İkaz frekansı olarak sistemin 1.doğal frekansı olan 8.541 rad/sn alınmıştır.



Şekil 6.17: Vagon Gövde Merkezinin (Yc) Harmonik İkaz Cevabı



Şekil 6.18: Birinci Boji Merkezinin (Y11) Harmonik İkaz Cevabı



Şekil 6.19: İkinci Boji Merkezinin (Y12) Harmonik İkaz Cevabı

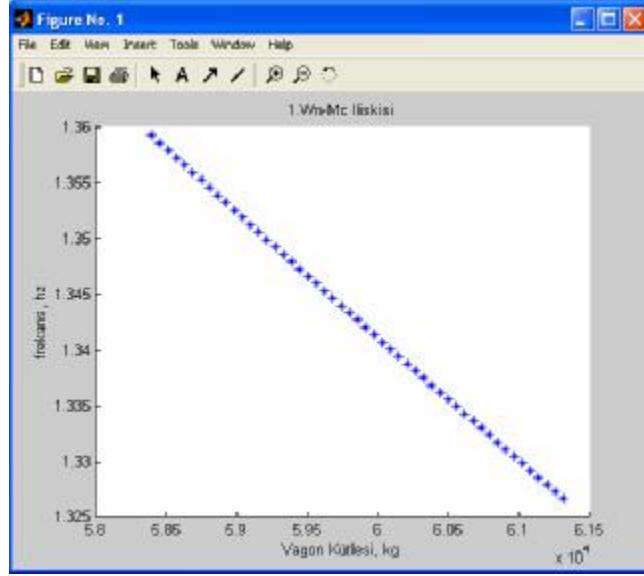
Grafiklerin genel yapısına bakıldığında, uygulanan 0.005m ikaz genliğine karşılık önce kütle merkezlerinin düşey salınım genlikleri artmakta yaklaşık 10sn sonra dalgalanmalar dengeye oturmaktadır. Bu durumda araç 29.3 km/h hızla hareket etmektedir.

6.3. Tek Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi

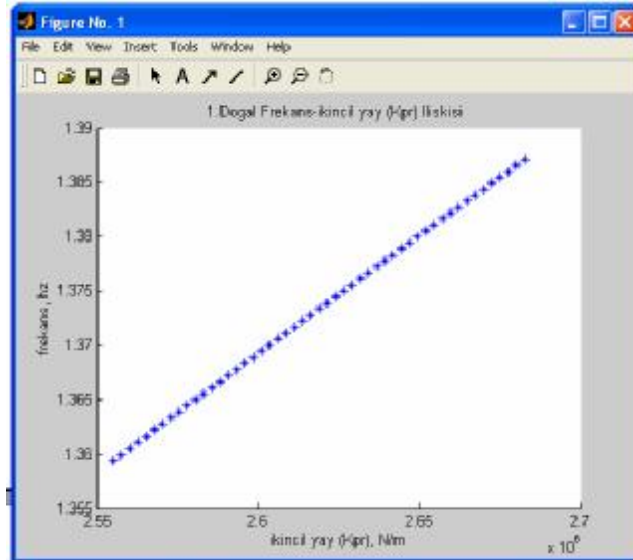
Bu analizin amacı, tek vagon sisteminin doğal frekanslarının hangi parametrelerden, ne kadar etkilendiğinin ortaya çıkarılmasıdır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar yardımıyla özellikle vagonun birinci doğal frekansının kontrolünü hangi büyüklük ile daha fazla değiştirilebileceğini görebilmekteyiz. Analiz yapabilmek için vagon üzerinden parametreler seçilmiştir. Bunlar;

- Vagonun gövde ağırlığı (M_c)
- Vagon kütsel atalet momenti (J_c)
- Bojilerin ağırlıkları (M_{b1} , M_{b2})
- Bojilerin kütsel atalet momentleri (J_{b1} , J_{b2})
- Birincil süspansiyon elemanları (K_1 , C_1)
- İkinci süspansiyon elemanları (K_2 , C_2)

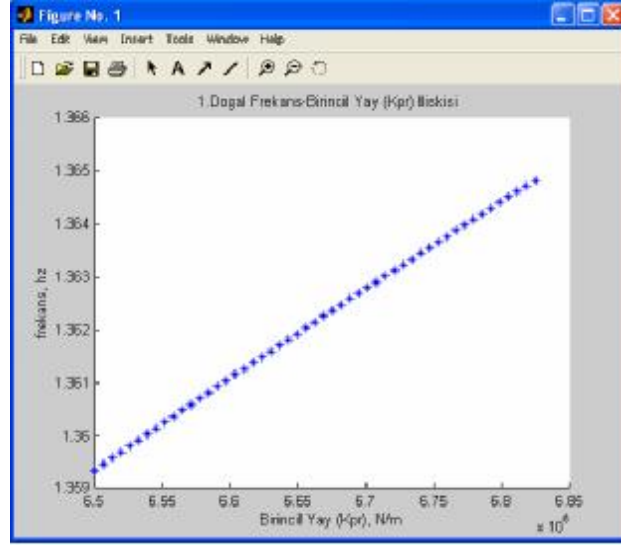
olmak üzere 10 adet vagon parametreleridir. Bu parametrelerin herbirinin duyarlılık analizi için Matlab programında on adet kod yazılmıştır. Bu kodlar ek cd’de Program-3’den Program-13’e verilmektedir. Aşağıda tek vagon parametrelerinin %5 kadar artımından doğal frekanslarının nasıl etkilendiği görülmektedir.



Şekil 6.20: Doğal Frekansın, Vagon Gövde Ağırlığı (Mc) ile Değişimi



Şekil 6.21: Doğal Frekansın, İkincil Yay Katsayısı (K2) ile Değişimi



Şekil 6.22: Doğal Frekansın, Birincil Yay Katsayısı (K1) ile Değişimi

Yukarıda vagon doğal frekansını belli bir şekilde değiştiren parametrelerin grafiği verilmiştir. Aynı şekilde Tablo 6.6’da da bu parametrelerin yüzde olarak 1.doğal frekans üzerindeki etkileri verilmektedir. Sonuncu doğal frekans her durumda sabit kalmaktadır.

Tablo 6.6: Tek Vagonda İlk Doğal Frekansı Etkileyen Parametreler

Değişen Parametre	1. Doğal Frekans		% değişim
	İlk Değer (wi)	Son Değer (ws)	
Mc	1.359	1.327	-2,35
K1	1.359	1.365	0,44
K2	1.359	1.387	2,06

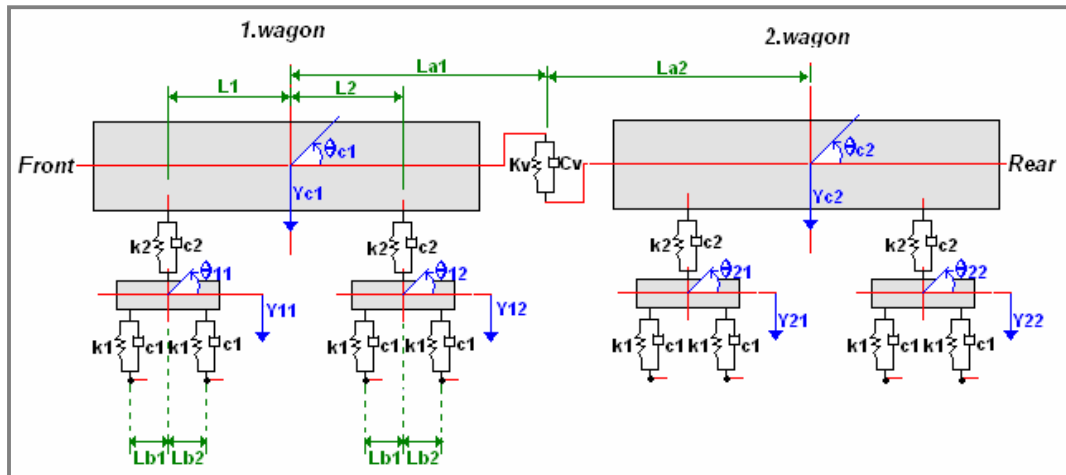
Diğer parametrelerde ise boji kütleleri (M11, M12) 1.doğal frekansın azalmasına sebep olmakta, fakat bu değer hesaba katılamayacak kadar çok ufak olmaktadır. Vagonun ve bojilerin kütsesel atalet momentleri ile sönüm değerleri doğal frekansta değişime sebep olmamaktadır.

7. ÇİFT VAGON İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN HESABI

7.1 Sistemin Doğal Frekanslarının Hesabı

Çift vagon sisteminin doğal frekanslarını hesaplayabilmek için Şekil 7.1'deki toplu kütleli tren modeli oluşturulmuştur. Bu model temel olarak bir evvelki tek vagon doğal frekans hesaplamasında kullanılan vagonun aynısıdır. Modelden görülebileceği gibi tek fark iki vagonun birbirine bağlanmış olmasıdır. İki vagonun bağlantısı birer yay ve sönüm elemanı vasıtasıyla gerçekleştirilmiştir. Bu elemanların sayısal değerleri diğer süspansiyon elemanlarından farklıdır, bu sebeple yeni bir notasyon olarak yay için K_v , sönüm elemanı için C_v kullanılacaktır. Bu elemanlar da lineer karakterli olarak kabul edilmiştir. Her bir vagon kütle ötelenmeleri ve kütle dönmeleri olmak üzere altı serbestlik derecesine sahiptir. Çözüm metodu tek vagon için kullanılan yöntemin aynısıdır. Sadece tek fark diferansiyel denklemler ve matrisler bir vagon eklenmesiyle iki kat büyümüş olacaktır.

Çift Vagonun Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;



Şekil 7.1: İki Vagonlu Toplu Kütle Tren Modeli

1.Vagon İçin Hareket Denklemleri

1.Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{c1} \cdot \ddot{y}_{c1} + 2 \cdot K_2 \cdot y_{c1} + 2 \cdot C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_v \cdot y_{c1} + C_v \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 - K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_2 \\ - C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_2 - K_v \cdot q_{c1} \cdot L_{a1} - C_v \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_{a1} - K_2 \cdot y_{11} - C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{12} - C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_v \cdot y_{c2} \\ - C_v \cdot \dot{y}_{c2} - K_v \cdot q_{c2} \cdot L_{a2} - C_v \cdot \dot{q}_{c2} \cdot L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

1.Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{c1} \cdot \ddot{\theta}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1^2 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1^2 + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_2^2 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_2^2 + K_v \cdot q_{c1} \cdot L_{a1}^2 + C_v \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_{a1}^2 + K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_1 \\ + C_2 \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_1 - K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_2 - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_2 - K_v \cdot y_{c1} \cdot L_{a1} - C_v \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_{a1} - K_2 \cdot y_{11} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_1 + K_2 \cdot y_{12} \cdot L_2 \\ + C_2 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_2 + K_v \cdot y_{c2} \cdot L_{a1} + C_v \cdot \dot{y}_{c2} \cdot L_{a1} + K_v \cdot q_{c2} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} + C_v \cdot \dot{q}_{c2} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

1.Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{11} \cdot \ddot{y}_{11} + 2 \cdot K_1 \cdot y_{11} + 2 \cdot C_1 \cdot \dot{y}_{11} + K_2 \cdot y_{11} + C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} - K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 \\ + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

1.Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{11} \cdot \ddot{\theta}_{11} + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

1.Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{12} \cdot \ddot{y}_{12} + 2 \cdot K_1 \cdot y_{12} + 2 \cdot C_1 \cdot \dot{y}_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1} \\ + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

1.Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{12} \cdot \ddot{\theta}_{12} + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

2.Vagon İçin Hareket Denklemleri

2.Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{c2} \ddot{y}_{c2} + 2K_2 y_{c2} + 2C_2 \dot{y}_{c2} + K_v y_{c2} + C_v \dot{y}_{c2} + K_2 q_{c2} L_1 + C_2 \dot{q}_{c2} L_1 - K_2 q_{c2} L_2 - C_2 \dot{q}_{c2} L_2 \\ + K_v q_{c2} L_{a2} + C_v \dot{q}_{c2} L_{a2} - K_2 y_{21} - C_2 \dot{y}_{21} - K_2 y_{22} - C_2 \dot{y}_{22} - K_v y_{c1} - C_v \dot{y}_{c1} + K_v q_{c1} L_{a1} \\ + C_v \dot{q}_{c1} L_{a1} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

2.Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{c2} \ddot{\theta}_{c2} + K_2 q_{c2} L_1^2 + C_2 \dot{q}_{c2} L_1^2 + K_2 q_{c2} L_2^2 + C_2 \dot{q}_{c2} L_2^2 + K_v q_{c2} L_{a2}^2 \\ + C_v \dot{q}_{c2} L_{a2}^2 + K_2 y_{c2} L_1 + C_2 \dot{y}_{c2} L_1 - K_2 y_{c2} L_2 - C_2 \dot{y}_{c2} L_2 + K_v y_{c2} L_{a2} \\ + C_v \dot{y}_{c2} L_{a2} - K_2 y_{21} L_1 - C_2 \dot{y}_{21} L_1 + K_2 y_{22} L_2 + C_2 \dot{y}_{22} L_2 - K_v y_{c1} L_{a2} \\ - C_v \dot{y}_{c1} L_{a2} + K_v q_{c1} L_{a1} L_{a2} + C_v \dot{q}_{c1} L_{a1} L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

2.Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{21} \ddot{y}_{21} + 2K_1 y_{21} + 2C_1 \dot{y}_{21} + K_2 y_{21} + C_2 \dot{y}_{21} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} - K_2 q_{c2} L_1 - C_2 \dot{q}_{c2} L_1 \\ + K_1 q_{21} L_{b1} + C_1 \dot{q}_{21} L_{b1} - K_1 q_{21} L_{b2} - C_1 \dot{q}_{21} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

2.Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{21} \ddot{\theta}_{21} + K_1 q_{21} L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{21} L_{b1}^2 + K_1 q_{21} L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{21} L_{b2}^2 + K_1 y_{21} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{21} L_{b1} \\ - K_1 y_{21} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{21} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

2.Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{22} \ddot{y}_{22} + 2K_1 y_{22} + 2C_1 \dot{y}_{22} + K_2 y_{22} + C_2 \dot{y}_{22} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} + K_2 q_{c2} L_2 \\ + C_2 \dot{q}_{c2} L_2 + K_1 q_{22} L_{b1} + C_1 \dot{q}_{22} L_{b1} - K_1 q_{22} L_{b2} - C_1 \dot{q}_{22} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

2.Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{22} \ddot{\theta}_{22} + K_1 q_{22} L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{22} L_{b1}^2 + K_1 q_{22} L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{22} L_{b2}^2 + K_1 y_{22} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{22} L_{b1} \\ - K_1 y_{22} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{22} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{C1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{C1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{C2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{C2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{22} \end{bmatrix}$$

Şekil 7.2: İki Vagon’lu Sistemin Kütle Matrisi

Yeni kütle matrisinden de anlaşılacağı gibi 6x6 olan tek vagon için önceden hazırlanan kütle matrisine ikinci vagonun parametreleri köşegen üzerinde eklenerek 12x12 boyutunda yeni kütle matrisi oluşturulmuştur. Kütle matrisinde olduğu gibi rijitlik ve sönüm matrislerinin boyutları da iki katına çıkmıştır. Tek sayfa içinde gösterebilmek amacıyla bu matrisler üç parçaya bölünüp, üç satır halinde Şekil 7.3 ve Şekil 7.4’te verilmiştir.

$$\begin{aligned}
K = & \begin{bmatrix}
2K_2 + K_v & K_2(L_1 - L_2) - K_v L_{a1} & -K_2 & 0 & -K_2 \\
K_2(L_1 - L_2) - K_v L_{a1} & K_2(L_1^2 - L_2^2) + K_v L_{a1}^2 & -K_2 L_1 & 0 & K_2 L_2 \\
-K_2 & -K_2 L_1 & K_2 + 2K_1 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 \\
0 & 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 \\
-K_2 & K_2 L_2 & 0 & 0 & K_2 + 2K_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
-K_v & K_v L_{a1} & 0 & 0 & 0 \\
-K_v L_{a2} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
0 & -K_v & -K_v L_{a2} & 0 \\
0 & K_v L_{a1} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 & 0 \\
K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2K_2 + K_v & K_2(L_1 - L_2) + K_v L_{a2} & -K_2 \\
0 & K_2(L_1 - L_2) + K_v L_{a2} & K_2(L_1^2 - L_2^2) + K_v L_{a2}^2 & -K_2 L_1 \\
0 & -K_2 & -K_2 L_1 & K_2 + 2K_1 \\
0 & 0 & 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
0 & -K_2 & K_2 L_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & -K_2 & 0 \\
0 & K_2 L_2 & 0 \\
K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \\
K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\
0 & K_2 + 2K_1 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Şekil 7.3: İki Vagon'lu Sistemin Rijitlik Matrisi

$$\begin{aligned}
C = & \begin{bmatrix}
2C_2 + C_v & C_2(L_1 - L_2) - C_v L_{a1} & -C_2 & 0 & -C_2 \\
C_2(L_1 - L_2) - C_v L_{a1} & C_2(L_1^2 - L_2^2) + C_v L_{a1}^2 & -C_2 L_1 & 0 & C_2 L_2 \\
-C_2 & -C_2 L_1 & C_2 + 2C_1 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 \\
0 & 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 \\
-C_2 & C_2 L_2 & 0 & 0 & C_2 + 2C_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
-C_v & C_v L_{a1} & 0 & 0 & 0 \\
-C_v L_{a2} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
0 & -C_v & -C_v L_{a2} & 0 \\
0 & C_v L_{a1} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 & 0 \\
C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2C_2 + C_v & C_2(L_1 - L_2) + C_v L_{a2} & -C_2 \\
0 & C_2(L_1 - L_2) + C_v L_{a2} & C_2(L_1^2 - L_2^2) + C_v L_{a2}^2 & -C_2 L_1 \\
0 & -C_2 & -C_2 L_1 & C_2 + 2C_1 \\
0 & 0 & 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
0 & -C_2 & C_2 L_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & -C_2 & 0 \\
0 & C_2 L_2 & 0 \\
C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \\
C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\
0 & C_2 + 2C_1 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\
0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2)
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Şekil 7.4: İki Vagon'lu Sistemin Sönüm Matrisi

Durum uzayı çözümlerinde, sistem matrisini oluşturabilmek için bahsedilen oniki adet ikinci dereceden diferansiyel denklem birinci dereceden yirmidört adet diferansiyel eşitliğe dönüştürülür. Bu dönüştürme işlemi [9] nolu kaynakta anlatıldığı gibi kolaylık açısından yeni notasyolar tanımlanarak yapılmıştır.

Tablo 7.1: İki Vagon İçin Sistem Matrisini Oluşturan Notasyonlar ve Açıklamaları

<i>Notasyon</i>	<i>Tanım</i>		<i>Notasyon</i>	<i>Tanım</i>
$x_1 = y_{c1}$	1.Gövde düşey pozisyonu		$x_{13} = \dot{y}_{c1}$	1.Gövde düşey hızı
$x_2 = \theta_{c1}$	1.Gövde açısal pozisyonu		$x_{14} = \dot{\theta}_{c1}$	1.Gövde açısal hızı
$x_3 = y_{11}$	1.Boji düşey pozisyonu		$x_{15} = \dot{y}_{11}$	1.Boji düşey hızı
$x_4 = \theta_{11}$	1.Boji açısal pozisyonu		$x_{16} = \dot{\theta}_{11}$	1.Boji açısal hızı
$x_5 = y_{12}$	1.Boji düşey pozisyonu		$x_{17} = \dot{y}_{12}$	1.Boji düşey hızı
$x_6 = \theta_{12}$	1.Boji açısal pozisyonu		$x_{18} = \dot{\theta}_{12}$	1.Boji açısal hızı
$x_7 = y_{c2}$	2.Gövde düşey pozisyonu		$x_{19} = \dot{y}_{c2}$	2.Gövde düşey hızı
$x_8 = \theta_{c2}$	2.Gövde açısal pozisyonu		$x_{20} = \dot{\theta}_{c2}$	2.Gövde açısal hızı
$x_9 = y_{21}$	2.Boji düşey pozisyonu		$x_{21} = \dot{y}_{11}$	2.Boji düşey hızı
$x_{10} = \theta_{21}$	2.Boji açısal pozisyonu		$x_{22} = \dot{\theta}_{21}$	2.Boji açısal hızı
$x_{11} = y_{22}$	2.Boji düşey pozisyonu		$x_{23} = \dot{y}_{22}$	2.Boji düşey hızı
$x_{12} = \theta_{22}$	2.Boji açısal pozisyonu		$x_{24} = \dot{\theta}_{22}$	2.Boji açısal hızı

Çıkarılan bu notasyonları kullanarak, bahsedilen durum değişkenleri ve bunların birinci türevleri arasında Tablo 7.1 ‘deki ilişkiyi elde edebiliriz.

Yukarıda oluşturulan diferansiyel denklemlerde, kütle ötelenmesinden oluşan kuvvetlerde yukarı yöndeki kuvvetler pozitif ve kütlelerin dönmesinden oluşan momentlerde ise saat yönünde dönmeye zorlayan momentler pozitif kabul edilmiştir.

Tablo 7.2: Sistem Matrisini Oluşturan Durum Değişkenlerinin Birinci ve İkinci Türevleri

$\dot{y}_{c1} = x_{13} = \dot{x}_1$
$\dot{\theta}_{c1} = x_{14} = \dot{x}_2$
$\dot{y}_{11} = x_{15} = \dot{x}_3$
$\dot{\theta}_{11} = x_{16} = \dot{x}_4$
$\dot{y}_{12} = x_{17} = \dot{x}_5$
$\dot{\theta}_{12} = x_{18} = \dot{x}_6$
$\dot{y}_{c2} = x_{19} = \dot{x}_7$
$\dot{\theta}_{c2} = x_{20} = \dot{x}_8$
$\dot{y}_{21} = x_{21} = \dot{x}_9$
$\dot{\theta}_{21} = x_{22} = \dot{x}_{10}$
$\dot{y}_{22} = x_{23} = \dot{x}_{11}$
$\dot{\theta}_{22} = x_{24} = \dot{x}_{12}$

$\ddot{y}_{c1} = \ddot{x}_{13}$
$\ddot{\theta}_{c1} = \ddot{x}_{14}$
$\ddot{y}_{11} = \ddot{x}_{15}$
$\ddot{\theta}_{11} = \ddot{x}_{16}$
$\ddot{y}_{12} = \ddot{x}_{17}$
$\ddot{\theta}_{12} = \ddot{x}_{18}$
$\ddot{y}_{c2} = \ddot{x}_{19}$
$\ddot{\theta}_{c2} = \ddot{x}_{20}$
$\ddot{y}_{21} = \ddot{x}_{21}$
$\ddot{\theta}_{21} = \ddot{x}_{22}$
$\ddot{y}_{22} = \ddot{x}_{23}$
$\ddot{\theta}_{22} = \ddot{x}_{24}$

şeklinde Tablo 7.2 ‘deki gibi ikinci türev bağıntıları elde edilir. Yeni notasyonları kullanarak birinci türevlerin denklemlerini yazarsak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_{13} \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_{14} \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_{15} \\
\mathbf{x}_4 &= \mathbf{x}_{16} \\
\mathbf{x}_5 &= \mathbf{x}_{17} \\
\mathbf{x}_6 &= \mathbf{x}_{18} \\
\mathbf{x}_7 &= \mathbf{x}_{19} \\
\mathbf{x}_8 &= \mathbf{x}_{20} \\
\mathbf{x}_9 &= \mathbf{x}_{21} \\
\mathbf{x}_{10} &= \mathbf{x}_{22} \\
\mathbf{x}_{11} &= \mathbf{x}_{23} \\
\mathbf{x}_{12} &= \mathbf{x}_{24}
\end{aligned} \tag{7.13a}$$

$$\mathbf{x}_{13} = - \begin{pmatrix} 2.K_2.y_{c1} + 2.C_2.\mathfrak{y}_{c1} + K_v.y_{c1} + C_v.\mathfrak{y}_{c1} + K_2.q_{c1}.L_1 + C_2.\mathfrak{q}_{c1}.L_1 - K_2.q_{c1}.L_2 \\ -C_2.\mathfrak{q}_{c1}.L_2 - K_v.q_{c1}.L_{a1} - C_v.\mathfrak{q}_{c1}.L_{a1} - K_2.y_{11} - C_2.\mathfrak{y}_{11} - K_2.y_{12} - C_2.\mathfrak{y}_{12} \\ -K_v.y_{c2} - C_v.\mathfrak{y}_{c2} - K_v.q_{c2}.L_{a2} - C_v.\mathfrak{q}_{c2}.L_{a2} \end{pmatrix} M_c$$

$$\mathbf{x}_{14} = - \begin{pmatrix} K_2.q_{c1}.L_1^2 + C_2.\mathfrak{q}_{c1}.L_1^2 + K_2.q_{c1}.L_2^2 + C_2.\mathfrak{q}_{c1}.L_2^2 + K_v.q_{c1}.L_{a1}^2 \\ + C_v.\mathfrak{q}_{c1}.L_{a1}^2 + K_2.y_{c1}.L_1 + C_2.\mathfrak{y}_{c1}.L_1 - K_2.y_{c1}.L_2 - C_2.\mathfrak{y}_{c1}.L_2 \\ -K_v.y_{c1}.L_{a1} - C_v.\mathfrak{y}_{c1}.L_{a1} - K_2.y_{11}.L_1 - C_2.\mathfrak{y}_{11}.L_1 + K_2.y_{12}.L_2 \\ + C_2.\mathfrak{y}_{12}.L_2 + K_v.y_{c2}.L_{a1} + C_v.\mathfrak{y}_{c2}.L_{a1} + K_v.q_{c2}.L_{a1}.L_{a2} + C_v.\mathfrak{q}_{c2}.L_{a1}.L_{a2} \end{pmatrix} / J_{c1} \tag{7.13b}$$

$$\mathbf{x}_{15} = - \begin{pmatrix} 2.K_1.y_{11} + 2.C_1.\mathfrak{y}_{11} + K_2.y_{11} + C_2.\mathfrak{y}_{11} - K_2.y_{c1} - C_2.\mathfrak{y}_{c1} - K_2.q_{c1}.L_1 \\ -C_2.\mathfrak{q}_{c1}.L_1 + K_1.q_{11}.L_{b1} + C_1.\mathfrak{q}_{11}.L_{b1} - K_1.q_{11}.L_{b2} - C_1.\mathfrak{q}_{11}.L_{b2} \end{pmatrix} M_{11}$$

$$\mathbf{x}_{16} = - \begin{pmatrix} K_1.q_{11}.L_{b1}^2 + C_1.\mathfrak{q}_{11}.L_{b1}^2 + K_1.q_{11}.L_{b2}^2 + C_1.\mathfrak{q}_{11}.L_{b2}^2 + K_1.y_{11}.L_{b1} \\ + C_1.\mathfrak{y}_{11}.L_{b1} - K_1.y_{11}.L_{b2} - C_1.\mathfrak{y}_{11}.L_{b2} \end{pmatrix} / J_{11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{17} &= - \left(\begin{aligned} &2K_1 \cdot y_{12} + 2C_1 \cdot \mathfrak{y}_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot \mathfrak{y}_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c1} + K_2 q_{c1} \cdot L_1 \\ &+ C_2 \mathfrak{d}_{c1} \cdot L_1 + K_1 q_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \mathfrak{d}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \mathfrak{d}_{12} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / M_{12} \\
\mathbf{k}_{18} &= - \left(\begin{aligned} &K_1 q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} \\ &+ C_1 \cdot \mathfrak{y}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \mathfrak{y}_{12} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / J_{12} \\
\mathbf{k}_{19} &= - \left(\begin{aligned} &2K_2 \cdot y_{c2} + 2C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c2} + K_v \cdot y_{c2} + C_v \cdot \mathfrak{y}_{c2} + K_2 q_{c2} \cdot L_1 + C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_1 - K_2 q_{c2} \cdot L_2 \\ &- C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_2 + K_v q_{c2} \cdot L_{a2} + C_v \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_{a2} - K_2 \cdot y_{21} - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{21} - K_2 \cdot y_{22} - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{22} \\ &- K_v \cdot y_{c1} - C_v \cdot \mathfrak{y}_{c1} + K_v q_{c1} \cdot L_{a1} + C_v \mathfrak{d}_{c1} \cdot L_{a1} \end{aligned} \right) / M_{c2} \\
\mathbf{k}_{20} &= - \left(\begin{aligned} &K_2 q_{c2} \cdot L_1^2 + C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_1^2 + K_2 q_{c2} \cdot L_2^2 + C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_2^2 + K_v q_{c2} \cdot L_{a2}^2 \\ &+ C_v \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_{a2}^2 + K_2 \cdot y_{c2} \cdot L_1 + C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c2} \cdot L_1 - K_2 \cdot y_{c2} \cdot L_2 - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c2} \cdot L_2 + K_v \cdot y_{c2} \cdot L_{a2} \\ &+ C_v \cdot \mathfrak{y}_{c2} \cdot L_{a2} - K_2 \cdot y_{21} \cdot L_1 - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{21} \cdot L_1 + K_2 \cdot y_{22} \cdot L_2 + C_2 \cdot \mathfrak{y}_{22} \cdot L_2 - K_v \cdot y_{c1} \cdot L_{a2} \\ &- C_v \cdot \mathfrak{y}_{c1} \cdot L_{a2} + K_v q_{c1} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} + C_v \mathfrak{d}_{c1} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} \end{aligned} \right) / J_{c2} \quad (7.13c) \\
\mathbf{k}_{21} &= - \left(\begin{aligned} &2K_1 \cdot y_{21} + 2C_1 \cdot \mathfrak{y}_{21} + K_2 \cdot y_{21} + C_2 \cdot \mathfrak{y}_{21} - K_2 \cdot y_{c2} - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c2} - K_2 q_{c2} \cdot L_1 \\ &- C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_1 + K_1 q_{21} \cdot L_{b1} + C_1 \mathfrak{d}_{21} \cdot L_{b1} - K_1 q_{21} \cdot L_{b2} - C_1 \mathfrak{d}_{21} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / M_{21} \\
\mathbf{k}_{22} &= - \left(\begin{aligned} &K_1 q_{21} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{21} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{21} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{21} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{21} \cdot L_{b1} \\ &+ C_1 \cdot \mathfrak{y}_{21} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{21} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \mathfrak{y}_{21} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / J_{21} \\
\mathbf{k}_{23} &= - \left(\begin{aligned} &2K_1 \cdot y_{22} + 2C_1 \cdot \mathfrak{y}_{22} + K_2 \cdot y_{22} + C_2 \cdot \mathfrak{y}_{22} - K_2 \cdot y_{c2} - C_2 \cdot \mathfrak{y}_{c2} + K_2 q_{c2} \cdot L_2 \\ &+ C_2 \mathfrak{d}_{c2} \cdot L_2 + K_1 q_{22} \cdot L_{b1} + C_1 \mathfrak{d}_{22} \cdot L_{b1} - K_1 q_{22} \cdot L_{b2} - C_1 \mathfrak{d}_{22} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / M_{22} \\
\mathbf{k}_{24} &= - \left(\begin{aligned} &K_1 q_{22} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{22} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{22} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \mathfrak{d}_{22} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{22} \cdot L_{b1} \\ &+ C_1 \cdot \mathfrak{y}_{22} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{22} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \mathfrak{y}_{22} \cdot L_{b2} \end{aligned} \right) / J_{22}
\end{aligned}$$

x_1 'den x_{24} 'e kadar olan yirmidört durum ifadesine önceden hesapladığımız ikinci

derece denklemleri $\mathfrak{y}_{c1}, \mathfrak{d}_{c1}, \mathfrak{y}_{11}, \mathfrak{d}_{11}, \mathfrak{y}_{12}, \mathfrak{d}_{12}, \mathfrak{y}_{c2}, \mathfrak{d}_{c2}, \mathfrak{y}_{21}, \mathfrak{d}_{21}, \mathfrak{y}_{22}, \mathfrak{d}_{22}$

yerleştirirsek önceki sayfadaki yirmidört adet eşitlikleri elde ederiz.

Oluşturulan bu denklemleri matris formunda;

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (7.14)$$

durum uzayı (state space) ifadesi şeklinde tek vagon hesaplarında yaptığımız gibi matris eşitliklerini elde ederiz. Bu sisteme de dışarıdan herhangi bir zorlayıcı etki olmadığından dolayı (7.14) ifadesinde “ $\mathbf{B}u$ ” kısmı sıfır matrisi oluşturur. Bu nedenle modal çözüm için sadece $\mathbf{A}$ matrisini oluşturmak yeterli gelmektedir. $\mathbf{A}$ sistem matrisini buraya sığdırmak zor olduğundan dolayı, matris eşitliği ek cd’deki “*Program3.1_vagon3_modal*” matlab programı içinde verilmiştir.

$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ifadesinin matris yapısına baktığımızda şu şekilde kısa bir gösterimle ifade edilebileceği açıktır. Bu matrisin içeriğindeki alt matrislerin düzeni Matlab programı yazarken büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}_{24 \times 1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{12 \times 12} & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{12 \times 12} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}_{12 \times 12} & \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \end{bmatrix}_{24 \times 24} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \end{bmatrix}_{24 \times 1} \quad (7.15)$$

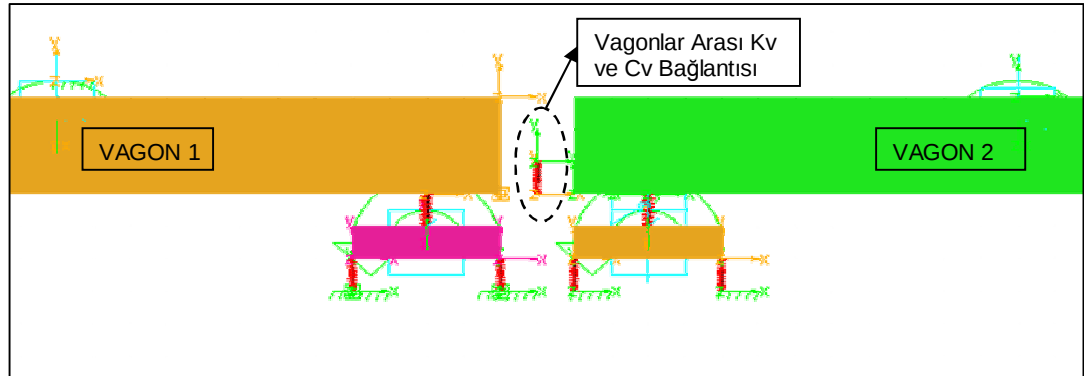
Buradaki sistemin hareketlerini ifade eden (7.14) eşitliğinde $[\mathbf{A}]_{24 \times 24}$ matrisine sistem matrisi denilmektedir. Sütun vektörü olan $\mathbf{x}$ sistem durum vektörünü içermektedir.

Bu bölümde incelenen çift vagonun doğal frekanslarının hesaplanması için de Matlab programı yardımıyla yazılan kod kullanılmıştır. Her iki vagon parametreleri de birbirinin aynıdır ve tek vagon hesabında kullanılan parametrelerdir. Farklı bir durum olarak, büyüklüklerin alındığı kaynakta tek vagon analizi yapıldığından dolayı iki vagon sisteminde ortaya çıkan vagonlar arası ile ilgili K_v ve C_v parametreleri yoktur. Bu nedenle bu vagonlar arası süspansiyon parametreleri Tablo 7.3’de gösterildiği gibi kabul edilmiştir. Şekil 7.5’de ise sistemdeki yerleri gösterilmiştir. İki vagon arası 2m olarak bırakılmıştır.

Tablo 7.3: Çalışmada Kullanılan Vagonun Sayısal Değerleri

Notasyon	Parametre	Değer
M_{C1}, M_{C2}	Vagon gövde kütlesi	58400 <i>kg</i>
J_{C1}, J_{C2}	Vagon gövdesi kütle atalet momenti	617282 <i>kg m²</i>
M_{11}, M_{21}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{11}, J_{21}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
M_{12}, M_{22}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{12}, J_{22}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
K_2	Boji-Gövde arası yay katsayısı	2555 <i>kN / m</i>
C_2	Boji-Gövde arası sönüm katsayısı	30 <i>kNs / m</i>
K_1	Aks-Boji arası yay katsayısı	6500 <i>kN / m</i>
C_1	Aks-Boji arası sönüm katsayısı	10 <i>kNs / m</i>
K_v	İki Gövde arası yay katsayısı	2000 <i>kN / m</i>
C_v	İki Gövde arası sönüm katsayısı	400 <i>kNs / m</i>
L_{a1}, L_{a2}	İki Gövde merkezi arası mesafe	13 <i>m</i>
L_1, L_2	Vagon merkezi-Bojiler arası mesafe	10 <i>m</i>
L_{b1}, L_{b2}	Boji merkezi-Akslar arası mesafe	2 <i>m</i>

Şekil 7.5’de vagonlar arası süspansiyon bölgesi gösterilmektedir.

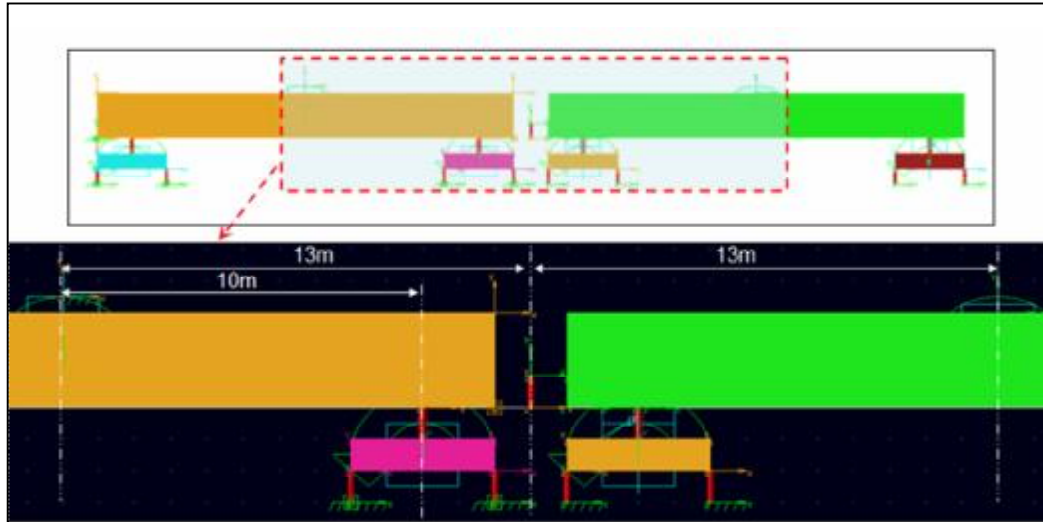
**Şekil 7.5:** Vagonlar Arası Yay ve Sönüm Elemanı

Matlab Programı İle Modelleme;

Çift vagon modal analizinin çözümü için “*Program 2.1: vagon2_modal.m*” adında Matlab kodu yazılmıştır. Bu kodun içeriği buraya yazılmayacaktır, bu sebeple ek cd’de sunulmuştur.

MSC.Adams Programı İle Modelleme;

Çift vagon sistemi MSC.Adams programında aşağıda detayları verildiği şekilde modellenmiştir. Bu program modal analiz çözümü için kullanılmış, Matlab ile hazırlanmış olan “*Program 2.1*” programından alınan özdeğer sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır.



Şekil 7.6: Çift Vagon MSC.Adams Temel Boyutları

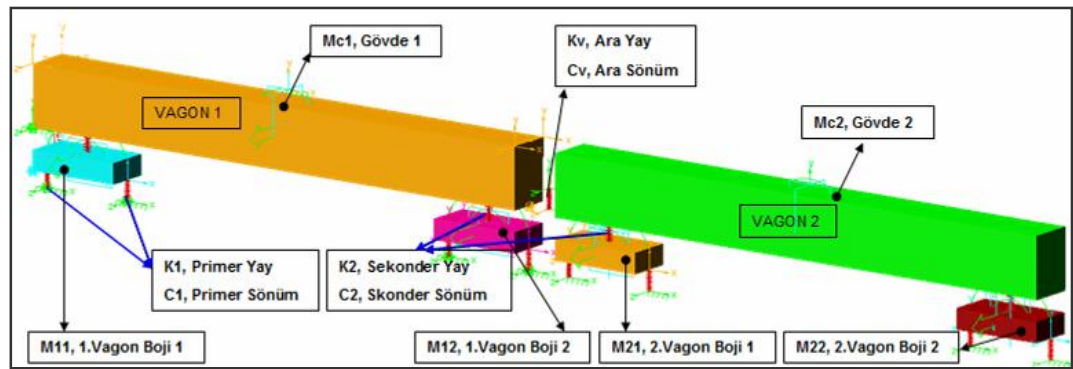
Şekil 7.6’da gösterilen boyutlar (vagon gövdesi-boji arası mesafe, gövde merkezleri arası uzunluklar, bojilerin uzunlukları) vagonun doğal frekanslarının hesabı için yeterli olmaktadır. Yukarıda gösterilen ölçüler dışındaki uzunluklar tek vagon parametreleri ile aynıdır, bu sebeple tek vagon modeline de bakılabilir. Bu uzunluk ölçüleri kütlelerin dönmeleri esnasında oluşan momentlerin hesaplanması amacıyla kullanılmaktadır. Burada yaptığımız hesaplamalarda vagonun veya bojilerin genişlik, yükseklik vb. boyutlarına gerek yoktur.

Bu nedenle Şekil 7.6’da vagon ve bojileri temsil eden geometriler daha önceden de söylediğimiz gibi sadece görsel kolaylık sağlamaktadır.

Serbestlik derecelerinin istediğimiz biçimde kurgulanabilmesi için 6.Bölüm’de tek vagon analizindeki gibi Adams programında yer alan 2 farklı serbesti aracı kullanılmıştır. Vagon gövdesi kütlesi ve herbir bojinin kütleleri global z ekseninde dönmeye serbest bırakılmış, diğer dönmeler kısıtlanmıştır. Bu durum programda “revolute joint” denilen dönme eksenlerinin serbestlik derecesini kontrol eden araç ile gerçekleştirilmiştir.(Şekil 6.9) Vagon gövdesi ve bojilerin ötelenme durumları da kontrol edilmiştir. Sistemin sadece y eksenini yönündeki düşey titreşim hareketleri inceleneceğinden dolayı, tüm kütleler sadece bu yönde hareket edebilecek şekilde serbestlik dereceleri ayarlanmıştır. Bu sınırlandırma Adams programında yer alan “primitive joint” aracı ile gerçekleştirilmiştir. Detaylı gösterim için tek vagon sisteminde açıklanan Şekil 6.10’daki grafiğe bakılabilir.

Çalışmanın başında Şekil 7.1’de kurulan toplu kütleli vagon sistemi Adams programında da Şekil 7.7’de gösterildiği gibi modellenmiştir. Tüm model, oniki serbestlik derecesini sağlayacak şekilde Adams programının sunduğu serbesti kısıtlama araçları kullanılarak hazırlanmıştır.

Modelde yer alan kütle, yay ve sönüm elemanı gibi parametrelerin sayısal değerleri de Tablo 7.3’ deki veriler kullanılarak Adams programına girilmiştir.



Şekil 7.7: Çift Vagon MSC.Adams Sayısal Büyüklüklerin Tanımlanışı

Adams programında kütle, yay ve sönüm değerlerinin nasıl girildiğine ilişkin bilgi için tek vagon sisteminde verilen Şekil 6.12 ve Şekil 6.16 arasındaki bilgiler yeterince aydınlatıcıdır.

Burada da aynı şekilde veriler girilmektedir. Çift vagon sisteminde, tek vagona göre ekstradan ara süspansiyon sistemi ve ikinci bir vagon sistemi vardır.

Tüm bu bahsedilen aşamalar Adams programında yapıldıktan sonra, vagon modeli modal analize hazır hale gelmektedir. Çift vagon sistemi de anlatıldığı biçimde modellenmiş ve modal çözümü yapılmıştır. Sistemin özvektör ve özdeğerleri elde edilmiş ve Tablo 7.4’de Matlab programından elde edilen çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

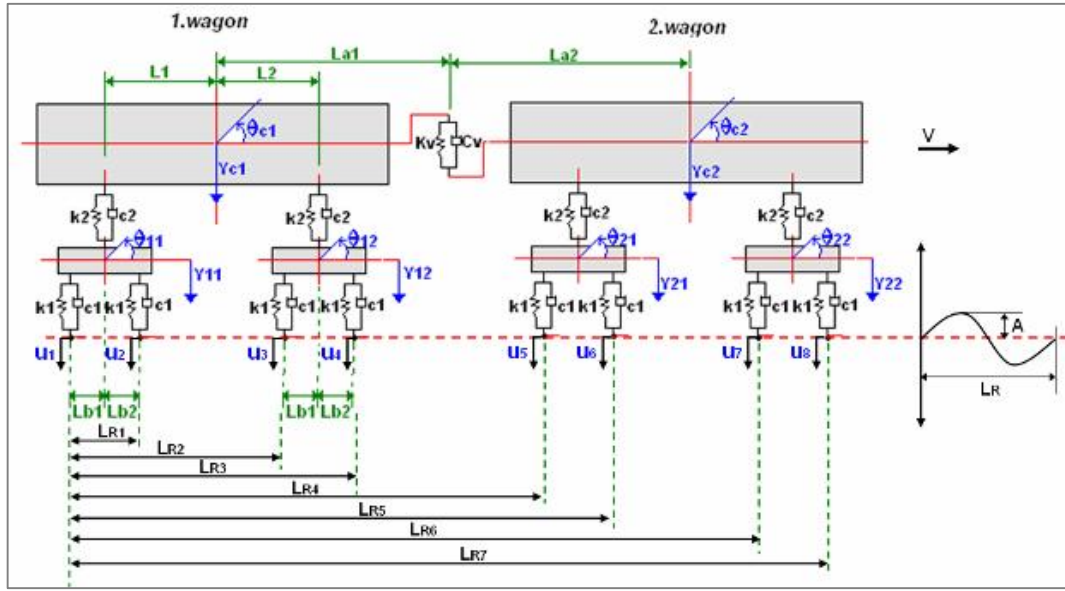
Tablo 7.4. İki Vagon için Modal Sonuçların Karşılaştırılması

	Frekans Değerleri (Hz)	
	MATLAB	MSC.ADAMS
1.Mod	1.359	1.360
2.Mod	1.360	1.360
3.Mod	4.133	4.152
4.Mod	4.136	4.155
5.Mod	12.289	12.283
6.Mod	12.289	12.283
7.Mod	12.432	12.348
8.Mod	12.432	12.348
9.Mod	27.043	26.982
10.Mod	27.043	26.982
11.Mod	27.043	26.982
12.Mod	27.043	26.982

7.2. Çift Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı

Modelin Açıklanması;

Çift vagon için zorlanmış titreşimlere karşılık sistemin cevabı hesaplanırken, Şekil 7.8’ de gösterilen oniki serbestlik derecesine sahip vagon modelinden faydalanılacaktır. Model çizimi üzerinde bir vagonun dinamik davranışına etki eden temel büyüklükler verilmiştir. Burada da tek vagonda kabul edildiği gibi aksların üzerinde yürüdüğü raylardaki düzgünsüzlüklerin sinüsoidal harmonik bir zorlama yapısında olduğu kabul edilmiştir. Vagon sabit bir V hızı ile bu ray üzerinde yürürken sekiz aksta birbirinden farklı sekiz ayrı ikaz oluşacaktır. Şekil 7.8’de gösterilen “A” harmonik ikaz genliğini, “ L_R ” dalga boyunu ifade etmektedir.



Şekil 7.8: Oniki Serbestlik Dereceli Toplu Kütleli Çift Vagon Modeli

Modelden görüldüğü gibi düzgün olmayan ray üzerinde hareket eden bir vagon göz önüne alındığında, yol fonksiyonu $u(t) = A \sin(wdr.t)$ biçiminde sinüsoidal bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir.

Harmonik ikaz durumunda vagon gövdelerinin düşey yerdeğiştirmeleri (Y_{c1} , Y_{c2}) ve dört adet boji gövdesinin (Y_b) düşey yerdeğiştirmeleri incelenmiştir. Bu amaç için Matlab programında “Program 2.2: vagon2_harmonik_ikaz.m” adlı kod yazılmıştır.

Çift Vagonun Harmonik İkaz Durumunda Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;

Harmonik ikaz durumu için çift vagon modelinin hareket denklemlerini yazdığımızda, modal analizde çıkarttığımız (7.13) denklemlerinden tek farklılığı denklemlerin bazılarında kuvvet eşitliğinin de girmesi olacaktır. Bu nedenle harmonik ikazda, zorlanmaya maruz kalan kütlelere kuvvet terimleri eklenecektir. Diğer kütle denklemleri (7.13)'teki modal analizde bulunan denklemlerin aynısı olacaktır. Bu sebeple burada sadece kuvvet terimi eklenerek değişen denklemler yazılacaktır. Bu denklemler ;

1. Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{11});

$$\begin{aligned} M_{11} \cdot \ddot{y}_{11} + 2 \cdot K_1 \cdot y_{11} + 2 \cdot C_1 \cdot \dot{y}_{11} + K_2 \cdot y_{11} + C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} - K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 \\ - C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2} = K_1 (u_1 + u_2) \\ + C_1 (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) \end{aligned} \quad (7.16)$$

1. Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{11});

$$\begin{aligned} J_{11} \cdot \ddot{\theta}_{11} + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b2} = K_1 u_1 L_{b1} + C_1 \dot{u}_1 L_{b1} - K_1 u_2 L_{b2} - C_1 \dot{u}_2 L_{b2} \end{aligned} \quad (7.17)$$

1. Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{12});

$$\begin{aligned} M_{12} \cdot \ddot{y}_{12} + 2 \cdot K_1 \cdot y_{12} + 2 \cdot C_1 \cdot \dot{y}_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 \\ + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2} = K_1 (u_3 + u_4) \\ + C_1 (\dot{u}_3 + \dot{u}_4) \end{aligned} \quad (7.18)$$

1. Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{12});

$$\begin{aligned} J_{12} \cdot \ddot{\theta}_{12} + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b2} = K_1 u_3 L_{b1} + C_1 \dot{u}_3 L_{b1} - K_1 u_4 L_{b2} - C_1 \dot{u}_4 L_{b2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

2. Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{21});

$$M_{21} \ddot{y}_{21} + 2K_1 y_{21} + 2C_1 \dot{y}_{21} + K_2 y_{21} + C_2 \dot{y}_{21} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} - K_2 \theta_{c2} L_1 - C_2 \dot{\theta}_{c2} L_1 + K_1 \theta_{21} L_{b1} + C_1 \dot{\theta}_{21} L_{b1} - K_1 \theta_{21} L_{b2} - C_1 \dot{\theta}_{21} L_{b2} = K_1(u_5 + u_6) + C_1(\dot{u}_5 + \dot{u}_6) \quad (7.20)$$

2. Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{21});

$$J_{21} \ddot{\theta}_{21} + K_1 \theta_{21} L_{b1}^2 + C_1 \dot{\theta}_{21} L_{b1}^2 + K_1 \theta_{21} L_{b2}^2 + C_1 \dot{\theta}_{21} L_{b2}^2 + K_1 y_{21} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{21} L_{b1} - K_1 y_{21} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{21} L_{b2} = K_1 u_5 L_{b1} + C_1 \dot{u}_5 L_{b1} - K_1 u_6 L_{b2} - C_1 \dot{u}_6 L_{b2} \quad (7.21)$$

2. Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{22});

$$M_{22} \ddot{y}_{22} + 2K_1 y_{22} + 2C_1 \dot{y}_{22} + K_2 y_{22} + C_2 \dot{y}_{22} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} - K_2 \theta_{c2} L_1 - C_2 \dot{\theta}_{c2} L_1 + K_1 \theta_{22} L_{b1} + C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b1} - K_1 \theta_{22} L_{b2} - C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b2} = K_1(u_7 + u_8) + C_1(\dot{u}_7 + \dot{u}_8) \quad (7.22)$$

2. Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{22});

$$J_{22} \ddot{\theta}_{22} + K_1 \theta_{22} L_{b1}^2 + C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b1}^2 + K_1 \theta_{22} L_{b2}^2 + C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b2}^2 + K_1 y_{22} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{22} L_{b1} - K_1 y_{22} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{22} L_{b2} = K_1 u_7 L_{b1} + C_1 \dot{u}_7 L_{b1} - K_1 u_8 L_{b2} - C_1 \dot{u}_8 L_{b2} \quad (7.23)$$

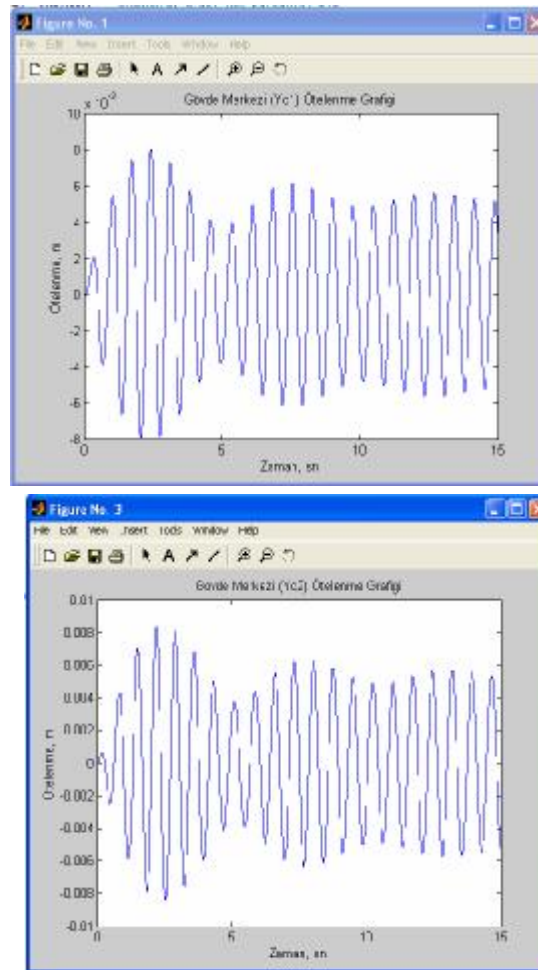
olmak üzere sekiz adet akstan yansıyan kuvvetleri içermektedirler. Harmonik ikaz durumunda vagon gövdelerinin düşey yerdeğiştirmesi ve boji gövdelerinin düşey yerdeğiştirmeleri incelenmiştir. Bu amaç için Matlab programında “*Program 2.2: vagon2_harmonik_ikaz.m*” adlı kod yazılmıştır.

Çalışmada kullanılan sayısal parametreler Tablo 7.3’deki modal analizde kullanılan değerlerin aynıdır. Bu tabloda olmayan akslar arası mesafeler ve ikaz büyüklükleri ise Tablo 7.5’de verilmiştir.

Tablo 7.5: Çift Vagon Sisteminde İkaz Cevabı İçin Gerekli Değerler

Notasyon	Parametre	Değer
L_{r1}, L_{r2}, L_{r3}	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	4, 20, 24 m
$L_{r4}, L_{r5}, L_{r6}, L_{r7}$	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	26, 30, 46, 50 m
L_R	Ray dalga boyu	6 m
A	Ray dalga genliği	0.005 m

Aşağıda Tablo 6.5 ve Tablo 7.5'deki parametreler kullanılarak elde edilmiş vagon yapılarının yerdeğişim grafikleri görülmektedir. İkaz frekansı olarak sistemin 1.doğal frekansı olan 8.541 rad/sn alınmıştır.



Şekil 7.9: Birinci ve İkinci Vagon Gövdesinin Yerdeğişimi

7.3. Çift Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi

Bu analizin amacı, çift vagon sisteminin doğal frekanslarının hangi parametrelerden, ne kadar etkilendiğinin ortaya çıkarılmasıdır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar yardımıyla sistemin birinci doğal frekansının hangi büyüklükten daha fazla etkilendiğini görebilmekteyiz. Analiz yapabilmek için vagonlar üzerinden parametreler seçilmiştir. Bunlar;

- Vagonların gövde ağırlığı (M_{c1} , M_{c2})
- Vagonların kütleli atalet momenti (J_{c1} , J_{c2})
- Bojilerin ağırlıkları (M_{b11} , M_{b12} , M_{b21} , M_{b22})
- Bojilerin kütleli atalet momentleri (J_{b11} , J_{b12} , J_{b21} , J_{b22})
- Birincil süspansiyon elemanları (K_1 , C_1)
- İkinci süspansiyon elemanları (K_2 , C_2)
- Ara süspansiyon elemanları (K_v , C_v)

olmak üzere 18 adet vagon parametreleridir. Bu parametrelerin herbirinin duyarlılık analizi için Matlab programında ayrı ayrı kodlar yazılmıştır. Bu kodlar ek cd’de Program.2.3’den Program 2.21’e verilmektedir. Aşağıda çift vagon parametrelerinin %5 kadar artımından doğal frekanslarının nasıl etkilendiği görülmektedir.

Tablo 7.6: Çift Vagonda İlk Doğal Frekansı Etkileyen Parametreler

Değişen Parametre	1. Doğal Frekans		% değişim
	İlk Değer (w_i)	Son Değer (w_s)	
Mc1	1.359	1.327	-2,35
Mc2	1.359	1.327	-2,35
Mb11	1.359	1.349	-0,74
Mb12	1.359	1.349	-0,74
Mb21	1.359	1.349	-0,74
Mb22	1.359	1.349	-0,74
K1	1.359	1.365	0,44
K2	1.359	1.365	0,44

Tablo 7.7: Çift Vagonda Son Doğal Frekansı Etkileyen Parametreler

	Son Doğal Frekans		
Değişen Parametre	İlk Değer (wi)	Son Değer (ws)	% değişim
K1	27,04	27,71	2,48

Tablo 7.6'ya yazılmayan parametrelerin sistemin 1.doğal frekansı üzerinde herhangi bir etkisi görülmemektedir. Sistemin sonuncu doğal frekansı ise Tablo 7.7'de verildiği gibi sadece birincil sistem yay katsayısı ile değişmektedir.

Üç Vagonun Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;

Öncelikle katardaki 1.Vagon İçin Hareket Denklemlerini oluşturursak,

1.Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{c1} \ddot{y}_{c1} + 2K_2 \cdot y_{c1} + 2C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_v \cdot y_{c1} + C_v \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot \theta_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_1 - K_2 \cdot \theta_{c1} \cdot L_2 \\ - C_2 \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_2 - K_v \cdot \theta_{c1} \cdot L_{a1} - C_v \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_{a1} - K_2 \cdot y_{11} - C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{12} - C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_v \cdot y_{c3} \\ - C_v \cdot \dot{y}_{c3} - K_v \cdot \theta_{c3} \cdot L_{a2} - C_v \cdot \dot{\theta}_{c3} \cdot L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

1.Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{c1} \ddot{\theta}_{c1} + K_2 \cdot \theta_{c1} \cdot L_1^2 + C_2 \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_1^2 + K_2 \cdot \theta_{c1} \cdot L_2^2 + C_2 \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_2^2 + K_v \cdot \theta_{c1} \cdot L_{a1}^2 \\ + C_v \cdot \dot{\theta}_{c1} \cdot L_{a1}^2 + K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_1 - K_2 \cdot y_{c1} \cdot L_2 - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_2 - K_v \cdot y_{c1} \cdot L_{a1} \\ - C_v \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_{a1} - K_2 \cdot y_{11} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_1 + K_2 \cdot y_{12} \cdot L_2 + C_2 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_2 + K_v \cdot y_{c3} \cdot L_{a1} \\ + C_v \cdot \dot{y}_{c3} \cdot L_{a1} + K_v \cdot \theta_{c3} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} + C_v \cdot \dot{\theta}_{c3} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

1.Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{y}_{11} + 2K_1 \cdot y_{11} + 2C_1 \cdot \dot{y}_{11} + K_2 \cdot y_{11} + C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} - K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 \\ + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

1.Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{11} \ddot{q}_{11} + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

1.Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{12} \ddot{y}_{12} + 2K_1 \cdot y_{12} + 2C_1 \cdot \dot{y}_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1} \\ + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

1.Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{12} \ddot{q}_{12} + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b1} \\ - K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

3.Vagon İçin Hareket Denklemleri;

3.Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & M_{c3} \ddot{y}_{c3} - K_v \cdot y_{c1} - C_v \cdot \dot{y}_{c1} + K_v q_{c1} \cdot L_{a1} + C_v \dot{q}_{c1} \cdot L_{a1} + 2K_2 \cdot y_{c3} + 2C_2 \cdot \dot{y}_{c3} + 2K_v \cdot y_{c3} + 2C_v \cdot \dot{y}_{c3} \\
 & + K_v q_{c3} \cdot L_{a2} + C_v \dot{q}_{c3} \cdot L_{a2} - K_v q_{c3} \cdot L_{a1} - C_v \dot{q}_{c3} \cdot L_{a1} + K_2 q_{c3} \cdot L_1 + C_2 \dot{q}_{c3} \cdot L_1 - K_2 q_{c3} \cdot L_2 - C_2 \dot{q}_{c3} \cdot L_2 \\
 & - K_2 \cdot y_{31} - C_2 \cdot \dot{y}_{31} - K_2 \cdot y_{32} - C_2 \cdot \dot{y}_{32} - K_v \cdot y_{c2} - C_v \cdot \dot{y}_{c2} - K_v q_{c2} \cdot L_{a2} - C_v \dot{q}_{c2} \cdot L_{a2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.7)$$

3.Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & J_{c3} \ddot{\theta}_{c3} - K_v \cdot y_{c1} \cdot L_{a2} - C_v \cdot \dot{y}_{c1} \cdot L_{a2} + K_v q_{c1} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} + C_v \dot{q}_{c1} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} + K_v \cdot y_{c3} \cdot L_{a2} + C_v \cdot \dot{y}_{c3} \cdot L_{a2} \\
 & + K_2 \cdot y_{c3} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{y}_{c3} \cdot L_1 - K_2 \cdot y_{c3} \cdot L_2 - C_2 \cdot \dot{y}_{c3} \cdot L_2 - K_v \cdot y_{c3} \cdot L_{a1} - C_v \cdot \dot{y}_{c3} \cdot L_{a1} + K_v q_{c3} \cdot L_{a2}^2 \\
 & + C_v \dot{q}_{c3} \cdot L_{a2}^2 + K_2 q_{c3} \cdot L_1^2 + C_2 \dot{q}_{c3} \cdot L_1^2 + K_2 q_{c3} \cdot L_2^2 + C_2 \dot{q}_{c3} \cdot L_2^2 + K_v q_{c3} \cdot L_{a1}^2 + C_v \dot{q}_{c3} \cdot L_{a1}^2 \\
 & - K_2 \cdot y_{31} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{y}_{31} \cdot L_1 + K_2 \cdot y_{32} \cdot L_2 + C_2 \cdot \dot{y}_{32} \cdot L_2 + K_v \cdot y_{c2} \cdot L_{a1} + C_v \cdot \dot{y}_{c2} \cdot L_{a1} + K_v q_{c2} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} \\
 & + C_v \dot{q}_{c2} \cdot L_{a1} \cdot L_{a2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.8)$$

3.Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & M_{31} \ddot{y}_{31} + 2K_1 \cdot y_{31} + 2C_1 \cdot \dot{y}_{31} + K_2 \cdot y_{31} + C_2 \cdot \dot{y}_{31} - K_2 \cdot y_{c3} - C_2 \cdot \dot{y}_{c3} - K_2 q_{c3} \cdot L_1 - C_2 \dot{q}_{c3} \cdot L_1 \\
 & + K_1 q_{31} \cdot L_{b1} + C_1 \dot{q}_{31} \cdot L_{b1} - K_1 q_{31} \cdot L_{b2} - C_1 \dot{q}_{31} \cdot L_{b2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.9)$$

3.Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & J_{31} \ddot{\theta}_{31} + K_1 q_{31} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{31} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{31} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{31} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{31} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{31} \cdot L_{b1} \\
 & - K_1 \cdot y_{31} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{31} \cdot L_{b2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.10)$$

3.Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & M_{32} \ddot{y}_{32} + 2K_1 \cdot y_{32} + 2C_1 \cdot \dot{y}_{32} + K_2 \cdot y_{32} + C_2 \cdot \dot{y}_{32} - K_2 \cdot y_{c3} - C_2 \cdot \dot{y}_{c3} + K_2 \cdot \theta_{c3} \cdot L_2 \\
 & + C_2 \cdot \dot{\theta}_{c3} \cdot L_2 + K_1 \cdot \theta_{32} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot \theta_{32} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{\theta}_{32} \cdot L_{b2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.11)$$

3.Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned}
 & J_{32} \ddot{\theta}_{32} + K_1 q_{32} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{32} \cdot L_{b1}^2 + K_1 q_{32} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{32} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{32} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{32} \cdot L_{b1} \\
 & - K_1 \cdot y_{32} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{32} \cdot L_{b2} = 0
 \end{aligned} \quad (8.12)$$

2.Vagon İçin Hareket Denklemleri;

2.Vagon gövdesi aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{c2} \ddot{y}_{c2} + 2K_2 y_{c2} + 2C_2 \dot{y}_{c2} + K_v y_{c2} + C_v \dot{y}_{c2} + K_2 \theta_{c2} L_1 + C_2 \dot{\theta}_{c2} L_1 - K_2 \theta_{c2} L_2 \\ - C_2 \dot{\theta}_{c2} L_2 + K_v \theta_{c2} L_{a2} + C_v \dot{\theta}_{c2} L_{a2} - K_2 y_{21} - C_2 \dot{y}_{21} - K_2 y_{22} - C_2 \dot{y}_{22} - K_v y_{c3} \\ - C_v \dot{y}_{c3} + K_v \theta_{c3} L_{a1} + C_v \dot{\theta}_{c3} L_{a1} = 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

2.Vagon gövdesi dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{c2} \ddot{\theta}_{c2} + K_2 \theta_{c2} L_1^2 + C_2 \dot{\theta}_{c2} L_1^2 + K_2 \theta_{c2} L_2^2 + C_2 \dot{\theta}_{c2} L_2^2 + K_v \theta_{c2} L_{a2}^2 \\ + C_v \dot{\theta}_{c2} L_{a2}^2 + K_2 y_{c2} L_1 + C_2 \dot{y}_{c2} L_1 - K_2 y_{c2} L_2 - C_2 \dot{y}_{c2} L_2 + K_v y_{c2} L_{a2} \\ + C_v \dot{y}_{c2} L_{a2} - K_2 y_{21} L_1 - C_2 \dot{y}_{21} L_1 + K_2 y_{22} L_2 + C_2 \dot{y}_{22} L_2 - K_v y_{c3} L_{a2} \\ - C_v \dot{y}_{c3} L_{a2} + K_v \theta_{c3} L_{a1} L_{a2} + C_v \dot{\theta}_{c3} L_{a1} L_{a2} = 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

2.Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{21} \ddot{y}_{21} + 2K_1 y_{21} + 2C_1 \dot{y}_{21} + K_2 y_{21} + C_2 \dot{y}_{21} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} - K_2 q_{c2} L_1 - C_2 \dot{q}_{c2} L_1 \\ + K_1 q_{21} L_{b1} + C_1 \dot{q}_{21} L_{b1} - K_1 q_{21} L_{b2} - C_1 \dot{q}_{21} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

2.Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{21} \ddot{q}_{21} + K_1 q_{21} L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{21} L_{b1}^2 + K_1 q_{21} L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{21} L_{b2}^2 + K_1 y_{21} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{21} L_{b1} \\ - K_1 y_{21} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{21} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

2.Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} M_{22} \ddot{y}_{22} + 2K_1 y_{22} + 2C_1 \dot{y}_{22} + K_2 y_{22} + C_2 \dot{y}_{22} - K_2 y_{c2} - C_2 \dot{y}_{c2} + K_2 \theta_{c2} L_2 \\ + C_2 \dot{\theta}_{c2} L_2 + K_1 \theta_{22} L_{b1} + C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b1} - K_1 \theta_{22} L_{b2} - C_1 \dot{\theta}_{22} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

2.Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi;

$$\begin{aligned} J_{22} \ddot{q}_{22} + K_1 q_{22} L_{b1}^2 + C_1 \dot{q}_{22} L_{b1}^2 + K_1 q_{22} L_{b2}^2 + C_1 \dot{q}_{22} L_{b2}^2 + K_1 y_{22} L_{b1} + C_1 \dot{y}_{22} L_{b1} \\ - K_1 y_{22} L_{b2} - C_1 \dot{y}_{22} L_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

[illegible]

Şekil 8.2: Üç Vagonlu Sistemin Kütle Matrisi

Üç vagonlu sistemin 18x18 boyutundaki rijitlik matrisi burada verebilmek amacıyla alt matrislere bölünerek 6x6 boyutunda bir matris haline getirilmiştir. Alt matrisler aşağıda verilmektedir.

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 2K_2 + K_v & K_2(L_1 - L_2) - K_v L_{a1} & -K_2 \\ K_2(L_1 - L_2) - K_v L_{a1} & K_2(L_1^2 + L_2^2) + K_v L_{a1}^2 & -K_2 L_1 \\ -K_2 & -K_2 L_1 & K_2 + 2K_1 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -K_2 & K_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} -K_v & K_v L_{a1} & 0 \\ -K_v L_{a2} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{41} = [0]_{3 \times 3}, \quad K_{51} = [0]_{3 \times 3}, \quad K_{61} = [0]_{3 \times 3}$$

(8.19)

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 L_2 & 0 \\ K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 + 2K_1 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = [0]_{3 \times 3}, \quad K_{42} = [0]_{3 \times 3}, \quad K_{52} = [0]_{3 \times 3}, \quad K_{62} = [0]_{3 \times 3}$$

$$K13 = \begin{bmatrix} -K_v & -K_v L_{a2} & 0 \\ K_v L_{a1} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K23 = [0]_{3 \times 3}$$

$$K33 = \begin{bmatrix} 2(K_2 + K_v) & K_2(L_1 - L_2) + K_v(L_{a2} - L_{a1}) & -K_2 \\ K_2(L_1 - L_2) + K_v(L_{a2} - L_{a1}) & K_2(L_1^2 + L_2^2) + K_v(L_{a1}^2 + L_{a2}^2) & -K_2 L_1 \\ -K_2 & -K_2 L_1 & K_2 + 2K_1 \end{bmatrix}$$

$$K43 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -K_2 & K_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K53 = \begin{bmatrix} -K_v & K_v L_{a1} & 0 \\ K_v L_{a2} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

$$K63 = [0]_{3 \times 3}$$

$$K14 = [0]_{3 \times 3}, \quad K24 = [0]_{3 \times 3},$$

$$K34 = \begin{bmatrix} 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 L_2 & 0 \\ K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K44 = \begin{bmatrix} K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 + 2K_1 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

$$K54 = [0]_{3 \times 3}, \quad K64 = [0]_{3 \times 3}$$

(8.21)

$$K15 = [0]_{3 \times 3}, \quad K25 = [0]_{3 \times 3}$$

$$K35 = \begin{bmatrix} -K_v & -K_v L_{a2} & 0 \\ K_v L_{a1} & K_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K45 = [0]_{3 \times 3}$$

$$K55 = \begin{bmatrix} 2K_2 + K_v & K_2(L_1 - L_2) + K_v L_{a2} & -K_2 \\ K_2(L_1 - L_2) + K_v L_{a2} & K_2(L_1^2 + L_2^2) + K_v L_{a2}^2 & -K_2 L_1 \\ -K_2 & -K_2 L_1 & K_2 + 2K_1 \end{bmatrix}$$

$$K65 = \begin{bmatrix} 0 & -K_2 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -K_2 & K_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K16 = [0]_{3 \times 3}, \quad K26 = [0]_{3 \times 3}, \quad K36 = [0]_{3 \times 3}, \quad K46 = [0]_{3 \times 3}$$

$$K56 = \begin{bmatrix} 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & K_2 L_2 & 0 \\ K_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K66 = \begin{bmatrix} K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 + 2K_1 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & K_1(L_{b1} - L_{b2}) & K_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

Bu matrisler aşağıdaki toplu matris içerisinde yerleştirildiğinde üç vagonlu sistemin rijitlik matrisi elde edilmektedir.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

Şekil 8.3: Üç Vagonlu Sistemin Rijitlik Matrisi

Yine rijitlik matrisinin alt matrislere bölünmesi mantığı gibi üç vagonlu sistemin sönüm matriside aşağıda oluşturulmuştur.

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 2C_2 + C_v & C_2(L_1 - L_2) - C_v L_{a1} & -C_2 \\ C_2(L_1 - L_2) - C_v L_{a1} & C_2(L_1^2 + L_2^2) + C_v L_{a1}^2 & -C_2 L_1 \\ -C_2 & -C_2 L_1 & C_2 + 2C_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -C_2 & C_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} -C_v & C_v L_{a1} & 0 \\ -C_v L_{a2} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{41} = [0]_{3 \times 3}, \quad C_{51} = [0]_{3 \times 3}, \quad C_{61} = [0]_{3 \times 3}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & C_2 L_2 & 0 \\ C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

$$C22 = \begin{bmatrix} C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & C_2 + 2C_1 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

$$C32 = [0]_{3 \times 3}, \quad C42 = [0]_{3 \times 3}, \quad C52 = [0]_{3 \times 3}, \quad C62 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C13 = \begin{bmatrix} -C_v & -C_v L_{a2} & 0 \\ C_v L_{a1} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C23 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C33 = \begin{bmatrix} 2(C_2 + C_v) & C_2(L_1 - L_2) + C_v(L_{a2} - L_{a1}) & -C_2 \\ C_2(L_1 - L_2) + C_v(L_{a2} - L_{a1}) & C_2(L_1^2 + L_2^2) + C_v(L_{a1}^2 + L_{a2}^2) & -C_2 L_1 \\ -C_2 & -C_2 L_1 & C_2 + 2C_1 \end{bmatrix}$$

$$C43 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -C_2 & C_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C53 = \begin{bmatrix} -C_v & C_v L_{a1} & 0 \\ C_v L_{a2} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C63 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C14 = [0]_{3 \times 3}, \quad C24 = [0]_{3 \times 3},$$

$$C34 = \begin{bmatrix} 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & C_2 L_2 & 0 \\ C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

$$C44 = \begin{bmatrix} C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & C_2 + 2C_1 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

$$C54 = [0]_{3 \times 3}, \quad C64 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C15 = [0]_{3 \times 3}, \quad C25 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C35 = \begin{bmatrix} -C_v & -C_v L_{a2} & 0 \\ C_v L_{a1} & C_v L_{a1} L_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C45 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C55 = \begin{bmatrix} 2C_2 + C_v & C_2(L_1 - L_2) + C_v L_{a2} & -C_2 \\ C_2(L_1 - L_2) + C_v L_{a2} & C_2(L_1^2 + L_2^2) + C_v L_{a2}^2 & -C_2 L_1 \\ -C_2 & -C_2 L_1 & C_2 + 2C_1 \end{bmatrix}$$

$$C65 = \begin{bmatrix} 0 & -C_2 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ -C_2 & C_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C16 = [0]_{3 \times 3}, \quad C26 = [0]_{3 \times 3}, \quad C36 = [0]_{3 \times 3}, \quad C46 = [0]_{3 \times 3}$$

$$C56 = \begin{bmatrix} 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & C_2 L_2 & 0 \\ C_1(L_{b1} - L_{b2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C66 = \begin{bmatrix} C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) & 0 & 0 \\ 0 & C_2 + 2C_1 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) \\ 0 & C_1(L_{b1} - L_{b2}) & C_1(L_{b1}^2 + L_{b2}^2) \end{bmatrix}$$

(8.25)

Bu matrisler aşağıdaki toplu matris içerisine yerleştirildiğinde üç vagonlu sistemin sönüm matrisi elde edilmektedir.

$$C = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 & C15 & C16 \\ C21 & C22 & C23 & C24 & C25 & C26 \\ C31 & C32 & C33 & C34 & C35 & C36 \\ C41 & C42 & C43 & C44 & C45 & C46 \\ C51 & C52 & C53 & C54 & C55 & C56 \\ C61 & C62 & C63 & C64 & C65 & C66 \end{bmatrix}$$

Şekil 8.4: Üç Vagonlu Sistemin Sönüm Matrisi

Durum uzayı çözümlerinde, sistem matrisini oluşturabilmek için bahsedilen onsekiz adet ikinci dereceden diferansiyel denklem birinci dereceden otuzaltı adet diferansiyel eşitliğe dönüştürülür. Bu dönüştürme işlemi [9] nolu kaynakta anlatıldığı gibi kolaylık açısından yeni notasyonlar tanımlanarak yapılmıştır. Bundan önceki iki analizde ayrıntılı olarak anlatıldığından dolayı burada notasyon tanımlamalarına yer verilmeyecektir.

Hesapların sonunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix}_{36 \times 1} = \begin{bmatrix} [0]_{18 \times 18} & [I]_{18 \times 18} \\ [-KM^{-1}]_{18 \times 18} & [-CM^{-1}]_{18 \times 18} \end{bmatrix}_{36 \times 36} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}_{36 \times 1} \quad (8.26)$$

Formunda sistem matrisi oluşturulmuştur.

Tablo 8.1: Çalışmada Kullanılan Vagonun Sayısal Değerleri

Notasyon	Parametre	Değer
M_{C1}, M_{C2}, M_{C3}	Vagon gövde kütlesi	58400 <i>kg</i>
J_{C1}, J_{C2}, J_{C3}	Vagon gövdesi kütle atalet momenti	617282 <i>kg m²</i>
M_{11}, M_{12}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{11}, J_{12}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
M_{21}, M_{22}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{21}, J_{22}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
M_{31}, M_{32}	Boji kütlesi	3600 <i>kg</i>
J_{31}, J_{32}	Boji kütle atalet momenti	1801 <i>kg m²</i>
K_2	Boji-Gövde arası yay katsayısı	2555 <i>kN / m</i>
C_2	Boji-Gövde arası sönüm katsayısı	30 <i>kNs / m</i>
K_1	Aks-Boji arası yay katsayısı	6500 <i>kN / m</i>
C_1	Aks-Boji arası sönüm katsayısı	10 <i>kNs / m</i>
K_v	İki Gövde arası yay katsayısı	2000 <i>kN / m</i>
C_v	İki Gövde arası sönüm katsayısı	400 <i>kNs / m</i>
L_{a1}, L_{a2}	İki Gövde merkezi arası mesafe	13 <i>m</i>
L_1, L_2	Vagon merkezi-Bojiler arası mesafe	10 <i>m</i>
L_{b1}, L_{b2}	Boji merkezi-Akslar arası mesafe	2 <i>m</i>

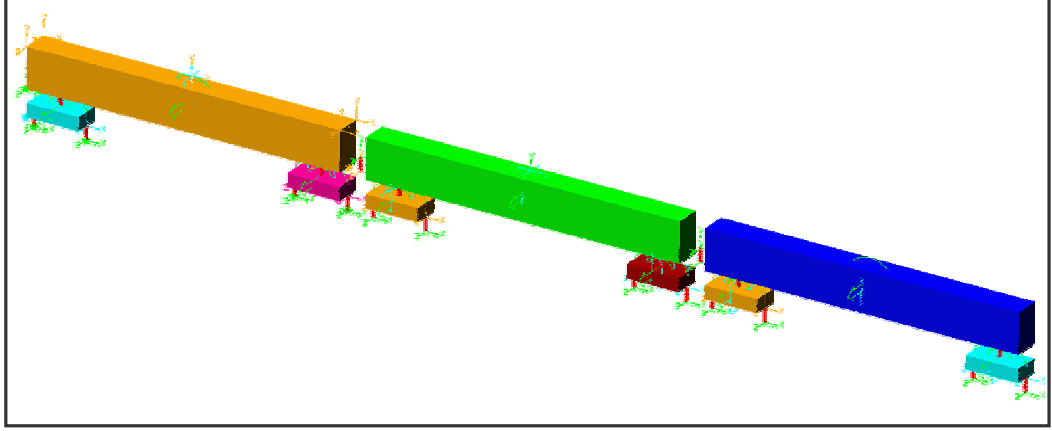
Matlab Programı İle Modelleme;

Üçlü vagon modal analiz çözümü için Program1.3 Matlab kodu yazılmıştır;

Program 1.3: vagon2_modal.m programı ek cd’de verilmiştir.

MSC.Adams Programı İle Modelleme;

Çift vagon sistemi MSC.Adams programında aşağıda detayları verildiği Şekil 8.5’deki gibi modellenmiştir. Bu program modal analiz çözümü için kullanılmış, Matlab ile hazırlanmış olan programdan alınan özdeğer sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır. Modelde yer alan kütle, yay ve sönüm elemanı gibi parametrelerin sayısal değerleri de Tablo 8.1’deki veriler kullanılarak Adams programına girilmiştir.



Şekil 8.5: Üçlü Vagon MSC.Adams Modeli

Tüm aşamalar Adams programında yapıldıktan sonra, vagon modeli modal analize hazır hale gelmektedir. Üçlü vagon sistemi de Şekil 8.5 'de anlatıldığı biçimde modellenmiş ve modal çözümü yapılmıştır. Sistemin özvektör ve özdeğerleri elde edilmiş ve Tablo8.2'de Matlab programından elde edilen çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 8.2: Üç Vagon için Modal Sonuçların Karşılaştırması

	<i>Frekans Değerleri (Hz)</i>	
	MATLAB	MSC.ADAMS
1.Mod	1.3593	1.3600
2.Mod	1.3597	1.3604
3.Mod	1.3603	1.3610
4.Mod	4.1333	4.1521
5.Mod	4.1349	4.1539
6.Mod	4.1382	4.1575
7.Mod	12.2899	12.2833
8.Mod	12.2899	12.2833
9.Mod	12.2899	12.2833
10.Mod	12.4322	12.3485
11.Mod	12.4322	12.3493
12.Mod	12.4322	12.3496
13.Mod	27.0436	26.9822
14.Mod	27.0436	26.9822
15.Mod	27.0436	26.9822
16.Mod	27.0436	26.9822
17.Mod	27.0436	26.9822
18.Mod	27.0436	26.9822

8.2 Üç Vagonun Harmonik İkaz Halinde Titreşim Hesabı

Modelin Açıklanması;

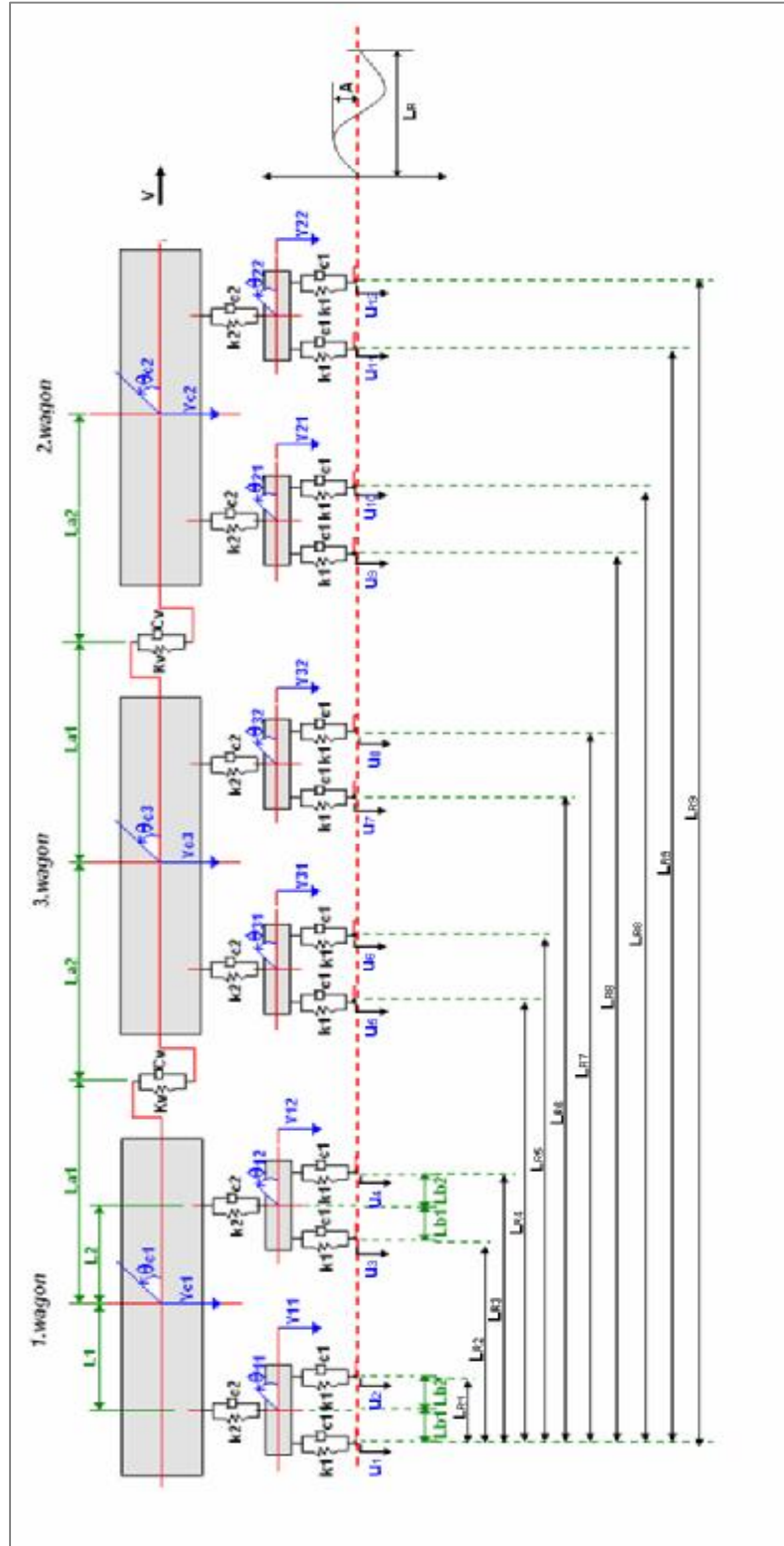
Üç vagon için zorlanmış titreşimlere karşılık sistemin cevabı hesaplanırken, Şekil 7.8’ de gösterilen onsekiz serbestlik derecesine sahip vagon modelinden faydalanılacaktır. Model çizimi üzerinde bir vagonun dinamik davranışına etki eden temel büyüklükler verilmiştir. Burada da önceki çözümlerde kabul edildiği gibi aksların üzerinde yürüdüğü raylardaki düzgünsüzlüklerin sinüsoidal harmonik bir zorlama yapısında olduğu kabul edilmiştir. Vagon sabit bir V hızı ile bu ray üzerinde yürürken oniki aksta birbirinden farklı oniki ayrı ikaz oluşacaktır. Şekil 7.8’de gösterilen “A” harmonik ikaz genliğini, “ L_R ” dalga boyunu ifade etmektedir.

Şekil 8.6’da gösterilen yol fonksiyonu $u(t) = A \sin(w_d t)$ biçiminde sinüsoidal bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir. Harmonik ikaz durumunda vagon gövdelerinin düşey yerdeğiştirmeleri (Y_{c1} , Y_{c2} , Y_{c3}) ve altı adet boji gövdesinin (Y_b) düşey yerdeğiştirmeleri incelenmiştir. Bu amaç için Matlab programında “*Program 3.2: vagon3_harmonik_ikaz.m*” adlı kod yazılmıştır.

Üç Vagonun Harmonik İkaz Durumunda Hareket Diferansiyel Denklemlerinin Çıkarılması;

Harmonik ikaz durumu için çift vagon modelinin hareket denklemlerini yazdığımızda, modal analizde çıkarttığımız denklemlerden tek farklılığı denklemlerin bazılarında kuvvet eşitliğinin de girmesi olacaktır. Bu nedenle harmonik ikazda, zorlanmaya maruz kalan kütlelere kuvvet terimleri eklenecektir. Diğer kütle denklemleri modal analizde bulunan denklemlerin aynısı olacaktır.

Bu sebeple burada sadece kuvvet terimi eklenerek değişen denklemler yazılacaktır.



Şekil 8.6: Onsekiz Serbestlik Dereceli Toplu Kütleli Üç Vagon Modeli

1. Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{11});

$$M_{11} \ddot{y}_{11} + 2.K_1 \cdot y_{11} + 2.C_1 \cdot \dot{y}_{11} + K_2 \cdot y_{11} + C_2 \cdot \dot{y}_{11} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} - K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2} = K_1(u_1 + u_2) + C_1(\dot{u}_1 + \dot{u}_2) \quad (8.27)$$

1. Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{11});

$$J_{11} \ddot{\theta}_{11} + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{11} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{11} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{11} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{11} \cdot L_{b2} = K_1 u_1 L_{b1} + C_1 \dot{u}_1 L_{b1} - K_1 u_2 L_{b2} - C_1 \dot{u}_2 L_{b2} \quad (8.28)$$

1. Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{12});

$$M_{12} \ddot{y}_{12} + 2.K_1 \cdot y_{12} + 2.C_1 \cdot \dot{y}_{12} + K_2 \cdot y_{12} + C_2 \cdot \dot{y}_{12} - K_2 \cdot y_{c1} - C_2 \cdot \dot{y}_{c1} + K_2 \cdot q_{c1} \cdot L_1 + C_2 \cdot \dot{q}_{c1} \cdot L_1 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2} = K_1(u_3 + u_4) + C_1(\dot{u}_3 + \dot{u}_4) \quad (8.29)$$

1. Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{12});

$$J_{12} \ddot{\theta}_{12} + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot q_{12} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{q}_{12} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{12} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{12} \cdot L_{b2} = K_1 u_3 L_{b1} + C_1 \dot{u}_3 L_{b1} - K_1 u_4 L_{b2} - C_1 \dot{u}_4 L_{b2} \quad (8.30)$$

2. Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{21});

$$M_{21} \ddot{y}_{21} + 2.K_1 \cdot y_{21} + 2.C_1 \cdot \dot{y}_{21} + K_2 \cdot y_{21} + C_2 \cdot \dot{y}_{21} - K_2 \cdot y_{c2} - C_2 \cdot \dot{y}_{c2} - K_2 \cdot \theta_{c2} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{\theta}_{c2} \cdot L_1 + K_1 \cdot \theta_{21} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot \theta_{21} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot L_{b2} = K_1(u_5 + u_6) + C_1(\dot{u}_5 + \dot{u}_6) \quad (8.31)$$

2. Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{21});

$$J_{21} \ddot{\theta}_{21} + K_1 \cdot \theta_{21} \cdot L_{b1}^2 + C_1 \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot L_{b1}^2 + K_1 \cdot \theta_{21} \cdot L_{b2}^2 + C_1 \cdot \dot{\theta}_{21} \cdot L_{b2}^2 + K_1 \cdot y_{21} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{y}_{21} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot y_{21} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{y}_{21} \cdot L_{b2} = K_1 u_5 L_{b1} + C_1 \dot{u}_5 L_{b1} - K_1 u_6 L_{b2} - C_1 \dot{u}_6 L_{b2} \quad (8.32)$$

2. Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{22});

$$M_{22} \ddot{y}_{22} + 2.K_1 \cdot y_{22} + 2.C_1 \cdot \dot{y}_{22} + K_2 \cdot y_{22} + C_2 \cdot \dot{y}_{22} - K_2 \cdot y_{c2} - C_2 \cdot \dot{y}_{c2} - K_2 \cdot \theta_{c2} \cdot L_1 - C_2 \cdot \dot{\theta}_{c2} \cdot L_1 + K_1 \cdot \theta_{22} \cdot L_{b1} + C_1 \cdot \dot{\theta}_{22} \cdot L_{b1} - K_1 \cdot \theta_{22} \cdot L_{b2} - C_1 \cdot \dot{\theta}_{22} \cdot L_{b2} = K_1(u_7 + u_8) + C_1(\dot{u}_7 + \dot{u}_8) \quad (8.33)$$

2. Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (θ_{22});

$$J_{22}\ddot{\theta}_{22} + K_1\theta_{22}L_{b1}^2 + C_1\dot{\theta}_{22}L_{b1}^2 + K_1\theta_{22}L_{b2}^2 + C_1\dot{\theta}_{22}L_{b2}^2 + K_1y_{22}L_{b1} + C_1\dot{y}_{22}L_{b1} - K_1y_{22}L_{b2} - C_1\dot{y}_{22}L_{b2} = K_1u_7L_{b1} + C_1\dot{u}_7L_{b1} - K_1u_8L_{b2} - C_1\dot{u}_8L_{b2} \quad (8.34)$$

3. Vagon ön boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{31});

$$M_{31}\ddot{y}_{31} + 2K_1y_{31} + 2C_1\dot{y}_{31} + K_2y_{31} + C_2\dot{y}_{31} - K_2y_{c3} - C_2\dot{y}_{c3} - K_2q_{c3}L_1 - C_2\dot{q}_{c3}L_1 + K_1q_{31}L_{b1} + C_1\dot{q}_{31}L_{b1} - K_1q_{31}L_{b2} - C_1\dot{q}_{31}L_{b2} = K_1(u_9 + u_{10}) + C_1(\dot{u}_9 + \dot{u}_{10}) \quad (8.35)$$

3. Vagon ön boji dönme (pitch) hareket denklemi (q_{31});

$$J_{31}\ddot{q}_{31} + K_1q_{31}L_{b1}^2 + C_1\dot{q}_{31}L_{b1}^2 + K_1q_{31}L_{b2}^2 + C_1\dot{q}_{31}L_{b2}^2 + K_1y_{31}L_{b1} + C_1\dot{y}_{31}L_{b1} - K_1y_{31}L_{b2} - C_1\dot{y}_{31}L_{b2} = K_1u_9L_{b1} + C_1\dot{u}_9L_{b1} - K_1u_{10}L_{b2} - C_1\dot{u}_{10}L_{b2} \quad (8.36)$$

3. Vagon arka boji aşağı-yukarı (bounce) hareket denklemi (y_{32});

$$M_{32}\ddot{y}_{32} + 2K_1y_{32} + 2C_1\dot{y}_{32} + K_2y_{22} + C_3\dot{y}_{22} - K_2y_{c3} - C_2\dot{y}_{c3} - K_2q_{c3}L_1 - C_2\dot{q}_{c3}L_1 + K_1q_{32}L_{b1} + C_1\dot{q}_{32}L_{b1} - K_1q_{32}L_{b2} - C_1\dot{q}_{32}L_{b2} = K_1(u_{11} + u_{12}) + C_1(\dot{u}_{11} + \dot{u}_{12}) \quad (8.37)$$

3. Vagon arka boji dönme (pitch) hareket denklemi (q_{32});

$$J_{32}\ddot{q}_{32} + K_1q_{32}L_{b1}^2 + C_1\dot{q}_{32}L_{b1}^2 + K_1q_{32}L_{b2}^2 + C_1\dot{q}_{32}L_{b2}^2 + K_1y_{32}L_{b1} + C_1\dot{y}_{32}L_{b1} - K_1y_{32}L_{b2} - C_1\dot{y}_{32}L_{b2} = K_1u_{11}L_{b1} + C_1\dot{u}_{11}L_{b1} - K_1u_{12}L_{b2} - C_1\dot{u}_{12}L_{b2} \quad (8.38)$$

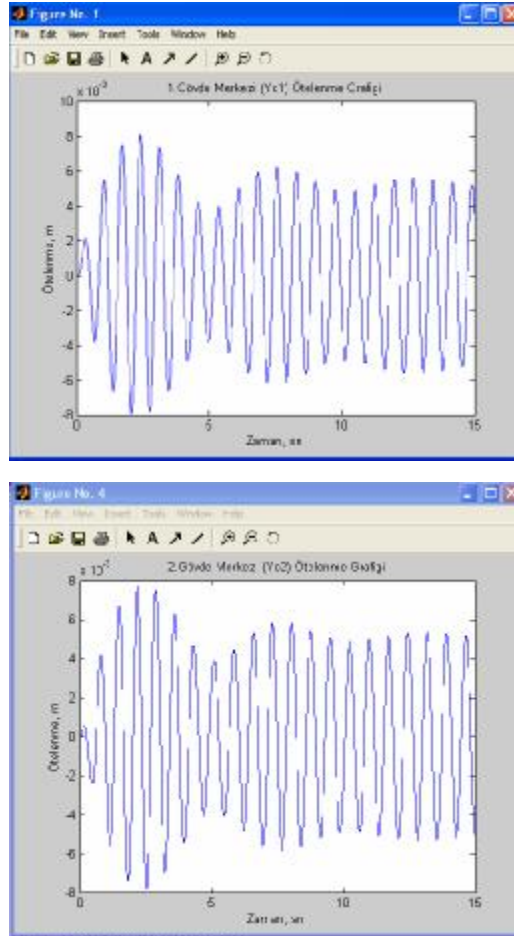
olmak üzere oniki adet akstan yansıyan kuvvetleri içermektedirler. Harmonik ikaz durumunda vagon gövdelerinin düşey yerdeğiştirmesi ve boji gövdelerinin düşey yerdeğiştirmeleri incelenmiştir. Bu amaç için Matlab programında “*Program 3.2: vagon3_harmonik_ikaz.m*” adlı kod hazırlanmıştır.

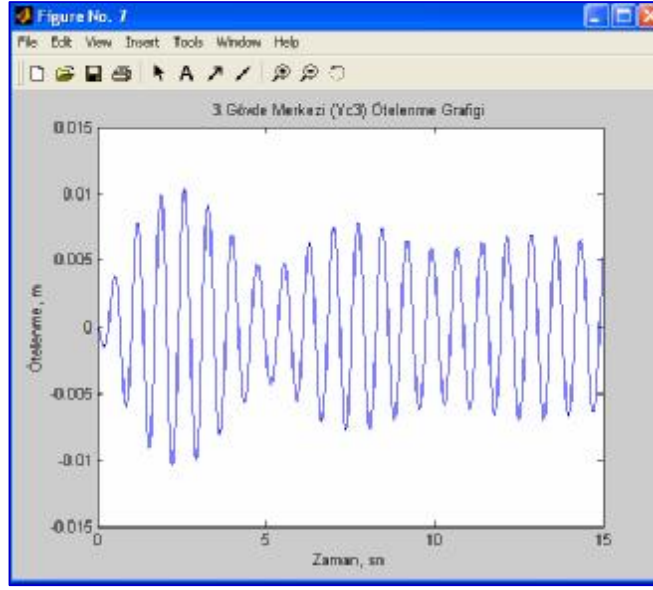
Çalışmada kullanılan sayısal parametreler Tablo 8.1 modal analizde kullanılan değerlerin aynıdır. Bu tabloda olmayan akslar arası mesafeler ve ikaz büyüklükleri ise Tablo 8.3’de verilmiştir.

Tablo 8.3: Üç Vagon Sisteminde İkaz Cevabı İçin Gerekli Değerler

Notasyon	Parametre	Değer
L_{r1}, L_{r2}, L_{r3}	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	4, 20, 24 m
$L_{r4}, L_{r5}, L_{r6}, L_{r7}$	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	26, 30, 46, 50 m
$L_{r8}, L_{r9}, L_{r10}, L_{r11}$	Akslar arası mesafe (sırasıyla)	52, 56, 72, 76 m
L_R	Ray dalga boyu	6 m
A	Ray dalga genliği	0.005 m

Aşağıda Tablo 8.1 ve Tablo 8.3 deki parametreler kullanılarak elde edilmiş vagon yapılarının yerdeğişim grafikleri görülmektedir. İkaz frekansı olarak sistemin 1.doğal frekansı olan 8.547 rad/sn alınmıştır.

**Şekil 8.7:** Birinci ve İkinci Vagon Gövdelerinin Yerdeğişimleri



Şekil 8.8: Üçüncü Vagon Gövdesinin Yerdeğişimi

8.3 Üç Vagonun Sistem Parametrelerinin Duyarlılık Analizi

Burada üç vagon sisteminin doğal frekanslarının hangi parametrelerden, ne kadar etkilendiği gösterilmeye çalışılacaktır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar yardımıyla sistemin birinci doğal frekansının hangi büyüklükten daha fazla etkilendiğini görebilmekteyiz. Analiz yapabilmek için vagonlar üzerinden parametreler seçilmiştir. Bunlar;

- Vagonların gövde ağırlığı (M_{c1} , M_{c2} , M_{c3})
- Vagonların kütleli atalet momenti (J_{c1} , J_{c2} , J_{c3})
- Bojilerin ağırlıkları (M_{b11} , M_{b12} , M_{b21} , M_{b22} , M_{b31} , M_{b32})
- Bojilerin kütleli atalet momentleri (J_{b11} , J_{b12} , J_{b21} , J_{b22} , J_{b31} , J_{b32})
- Birincil süspansiyon elemanları (K_1 , C_1)
- İkinci süspansiyon elemanları (K_2 , C_2)
- Ara süspansiyon elemanları (K_v , C_v)

olmak üzere 24 adet vagon parametreleridir. Bu parametrelerin herbirinin duyarlılık analizi için Matlab programında ayrı ayrı kodlar yazılmıştır. Bu kodlar ek cd'de

Program.3.3'den Program 3.27'e verilmektedir. Aşağıda üç vagon parametrelerinin %5 kadar artımından doğal frekanslarının nasıl etkilendiği görülmektedir.

Tablo 8.4 Üç Vagonda İlk Doğal Frekansı Etkileyen Parametreler

Değişen Parametre	1. Doğal Frekans		% değişim
	İlk Değer (wi)	Son Değer (ws)	
K2	1.359	1.387	2,06
K1	1.359	1.365	0,44
Mc1	1.359	1.327	-2,35
Mc2	1.359	1.327	-2,35
Mc3	1.359	1.327	-2,35

Tablo 8.4'te yazılmayan parametrelerin sistemin 1.doğal frekansı üzerinde herhangi bir etkisi görülmemektedir.

Sadece boji kütleleri doğal frekansı düşürme eğiliminde olmaktadır, fakat bu değerlerde çok ufaktır. Sistemin sonuncu doğal frekansı ise Tablo 8.5'te verildiği gibi sadece birincil sistem yay katsayısı ile değişmektedir.

Tablo 8.5 Üç Vagonda Son Doğal Frekansı Etkileyen Parametreler

Değişen Parametre	Son Doğal Frekans		% değişim
	İlk Değer (wi)	Son Değer (ws)	
K1	27,04	27,71	2,48

9. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Yapılan bu çalışmada, bir tren katarının tek vagondan başlayarak beş vagonlu katarına kadarki durumlarının doğal frekansları hesaplanmıştır. Yapılan bu hesaplar duyarlılık analizinde kullanılarak vagonun hangi dinamik parametresinin sistem birinci ve sonuncu doğal frekansı üzerinde baskın karaktere sahip olduğu ortaya konulmuştur. Son olarak ta vagon sistemi üç vagonlu katar kadar ikaz frekans cevabı analizi yapılarak, ray düzgünlüklerinin üst yapıda oluşturduğu harmonik yerdeğiştirmeler hesaplanmıştır.

Tek vagondan başlayarak beş vagona kadarki katarların doğal frekansları incelendiğinde sistem doğal frekanslarının 1.359 Hz ile 27.043 Hz arasında bir bantta bulunduğu görülmüştür. Vagon sayısının artırılması veya eksilmesi bu alt-üst limit frekanslarını değiştirmemektedir. Sadece bu limitler arasında yeni modlar oluşturmaktadır.

Duyarlılık analizine baktığımızda ikincil süspansiyon sisteminde bulunan K_2 yayının sistemin doğal frekansları üzerindeki etkisinin birincil sistemdeki K_1 yayından daha baskın olduğu görülmüştür. Özellikle birinci doğal frekans üzerinde kontrol gerektiğinde bu yayın katsayısının oynanması daha etkili sonuçlar verecektir.

Sistemin doğal frekansını en fazla etkileyen parametrenin vagon gövde ağırlıkları olduğu görülmüştür. Birinci doğal frekanslar M_c 'nin değişmesinden büyük oranda etkilenmektedir. Yüzde 5 kadarlık kütle artışı birinci doğal frekansta yüzde 2.4 mertebesinde düşüşe sebep olmaktadır.

Ayrıca yazılan Matlab kodu vagon adetine bağlı olarak sistem matrisini genişletebilmektedir. Bu sayede istenen vagon adetine sahip bir tren katarının doğal frekansları hesaplanabilmektedir. Şu durumda sadece üç farklı vagon parametresi girilebilmektedir.

Bu konu ile ilgili mevcut çalışmayı daha da geliştirebilmek için; burada sadece vagon düşey titreşimleri çalışılmıştı. Buna ek olarak vagon yanal ve boyuna titreşim denklemleri de çıkarılarak hesaba bu serbestilerde dahil edilebilir. Bunun yanında

vagon gövdesini toplu kütle almak yerine sonlu elemanlarla modelleyerek, vagonun yapısal modlarında sistem titreşimine etkisi hesaplanabilir. Demiryolu ile ilgili olarak, ray elastik olarak modellenerek, tekerleklerle kontak durumu için sistemin frekans cevap analizi yapılabilir. Demiryolu virajlarından tren geçiş anında oluşan merkezkaç kuvvetler hesaplanıp, deray durumu incelenebilir. Son olarakta vagon katarının elastik modlarında hesaba katılacak şekilde modellenmiş bir köprü üzerinden geçiş anında frekans cevabı hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Garg, V.K. ve Dukkipati, R.V.**, 1984. Dynamics of Railway Vehicle Systems, Academic Press, New York, London
- [2] **Mastinu, G.R.M., Gobbi, M. ve Pace, G.D.**, Analytical formulae for the design of a railway vehicle suspension system, Department of Mechanical Engineering, Proc. Instn. Mech. Engrs., Politecnico di Milano, **215**, Part C, 683-698, Italy
- [3] **Goodall, R.M., Zheng, X. ve Zolotas, A.C.**, 1998. Modelling of Flexible Bodied Railway Vehicles For Vibration Suppression, Department of Electronic and Electrical Engineering, Loughbrough University, Leicestershire
- [4] **Meirovitch, L.**, 2001. Fundamentals of Vibrations, Mc Graw Hill Book Company, International Edition
- [5] **Iwnicki, S.**, 2006. Handbook of Railway Vehicle Dynamics, Taylor and Francis Group, London.
- [6] **Kuchnicki, S.**, 2004. Simple Vibration Problems with Matlab, New York.
- [7] **Ouleaa, N., Rezaiguia, A. ve Laulagnet, B.**, 2005. Vibro-acoustic Modelling of a Railway Bridge Crossed by a Train, *Applied Acoustics*, **67**, 461-467.
- [8] **Hatter, D.J.**, 1992. Matrix Computer Methods of Vibration Analysis
- [9] **Hatch, M.R.**, 2001. Vibration Simulation Using Matlab and Ansys, Chapman & Hall/CRC
- [10] **Wang, J.F., Lin, C.C. ve Chen, B.L.**, 2002. Vibration Suppression for High-Speed Railway Bridges Using Tuned Mass Dampers, *Journal of Solids and Structures*, **40**, 465-491.
- [11] **Sakman, E. ve Taşkın, Y.**, 2005. Üzerinden Birçok Taşıt Geçen Bir Köprünün Dinamik Davranışının Analizi, *II.Mühendislik Bilimleri Genç Araştırmacılar Kongresi*, İstanbul 17-19 Kasım 2005.
- [12] **Xu, Y.L., Zhang, N. ve Xia, H.**, 2004. Vibration of Coupled Train and Cable Stayed Bridge Systems in Cross Winds, *Engineering Structures*, **26**, 1389-1406.

- [13] **Aba, E.**, 1994. Bir Yolcu Vagonun Dinamik Tasarımı ve Titreşim Konforunun Analizi Üzerine Bir Yaklaşım, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- [14] **Liang, B., Zhu, D. ve Cai, Y.**, 2000. Dynamic Analysis of The Vehicle Subgrade Model of a Vertical Coupled System, *Journal of Sound and Vibration*, **245**, 79-92.
- [15] **Zhai, W. Ve Cai, Z.**, 1995. Dynamic Interaction Between a Lumped Mass Vehicle and Discretely Supported Continous Rail Track, *Computers & Structures*, **63**, 987-997.
- [16] **Sun, Y.Q. ve Dhanasekar, M.**, 2000. A Dynamic Model for The Vertical Interaction of The Rail Track and Wagon Systems, *Journal of Solids and Structures*, **39**, 1337- 1359.
- [17] **Sewall, J.L, Parrish, R.V. ve Durling, B.J.**, 1971. Dynamic Responses of Railroad Car Models to Vertical and Lateral Rail Inputs, NASA Technical Note, Langley Research Center, USA
- [18] **Peacock, T. ve Hadjiconstantinou, N.**, 2007. Dynamics and Controls I Course Materials, Lecture 23, M.I.T. OpenCourseWare, USA
- [19] **Peacock, T. ve Hadjiconstantinou, N.**, 2007. Dynamics and Controls I Course Materials, Lecture 24, M.I.T. OpenCourseWare, USA
- [20] **Beards, C.F.**, 1996. Structural Vibration Analysis and Damping, Consultant in Dynamics, Noise and Vibration Formerly of Imperial College of Science, Chapter2, University of London
- [21] **Mathworks Inc.**, 2001. Matlab The Language of Technical Computing, Computation Visualization Programming Using Matlab Version6
- [22] **Tahralı, N., Kaya, F., Yüksek, İ. ve Güçlü, R.**, 2002. Makina Dinamiği, Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi Yayını
- [23] **Carlbom, P.**, 2000. Carbody And Passangers in Rail Vehicle Dynamics, *Doktora Tezi*, Royal Institute of Technology, Stockholm
- [24] **Mobley, R.K.**, 1999. Root Cause Failure Analysis, Butterworth-Heinemann
- [25] **Singiresu, S.R.**, 2004. Mechanical Vibrations, Pearson Prentice Hall, Universty of Miami

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Sivas'ın Gürün ilçesinde doğdu. İlk ve Orta öğrenimini İstanbul Sefaköy'de bitirdi. Lise öğrenimine 1996-2000 yılları arasında Avcılar Süleyman Nazif Anadolu Lisesi'nde devam etti. Haziran 2005 'te Yıldız Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi Konstrüksiyon Anabilimdalı'ndan ikinci dereceyle mezun oldu. Aynı yıl içinde İstanbul Teknik Üniversitesi Konstrüksiyon Anabilimdalı'na yüksek lisans eğitimine başladı. Halen, Ford Otosan AŞ firmasının Araştırma ve Geliştirme Departmanında ürün geliştirme mühendisi olarak görev yapmaktadır.