

**SİSTEM SIFIRLARININ KAPALI ÇEVİRİM SİSTEM
DAVRANIŞINA ETKİLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Ahmet Faik GÜVEN
(504041121)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Atilla BİR (İ.T.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri Doç. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. M.K. Külmez ÇEVİK (İ.T.Ü.)**

Haziran 2007

ÖNSÖZ

Sistem kutupları veya diğer bir deyişle sisteme ilişkin öz değerler, sistem dinamik davranışı ve sistem kararlılığı üzerinde baskın bir role sahiptir. Bu nedenle kontrol sistemlerinde, sistem davranışını incelemek ve kontrol etmek üzere sistem kutuplarını esas alan pek çok yöntem geliştirilmiştir. Ancak bazı durumlarda bu yöntemler kullanılarak gerçekleştirilen tasarım ve/veya analiz istenen kriterlerin sağlanmadığı görülür. Bu durumun esas sebebi kapalı çevrim sistem sıfırlarının, kapalı çevrim sistem cevabı üzerindeki etkilerinin ihmal edilmesidir. Bu tez kapsamında sistem sıfırlarının s karmaşık frekans düzlemindeki tanımı, karakteristik özellikleri ve sistem davranışına olan etkileri incelenecektir.

Bu tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen başta tez danışmanım sayın Prof. Dr. Atilla BİR olmak üzere değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Leyla GÖREN, ve sayın Doç. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ 'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen aileme ve dostlarıma sonsuz şükranlarımı sunarım.

Mayıs 2007

Ahmet Faik GÜVEN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	x
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. SİSTEM SIFIRLARININ SİSTEM DAVRANIŞINA ETKİSİ	2
2.1 Köklerin Yer Eğrisi ve Farklı Sistem Yapılardaki Sistem Sıfırlarının Sistem Davranışına Etkisi	2
2.2 Kapalı Çevrim Sıfırlarının Sistem Cevabına Etkisi	12
2.2.1 Kapalı Çevrim Sıfır Konumunun Sistem Cevabına Etkisi	12
2.2.2 Sonlu Bir Sıfıra Sahip Birinci Mertebeden Sistem Tasarımında Sıfır Etkisi	20
2.2.3 İkinci Mertebeden Sistemlerin Analitik Analizi	26
2.2.4 Sıfır İçeren İkinci Mertebeden Bir Sistemin Birim Basamak Cevabı	28
2.2.4.1 Yerleşme Zamanının Elde Edilmesi	30
2.2.4.2 Tepe Zamanının Elde Edilmesi	32
2.2.4.3 Maksimum Aşımın Elde Edilmesi	34
2.2.5 Minimum Fazlı Olmayan Sistemler	35
2.2.6 Sıfır Yerleştirme	37
3. KUTUPLAR VE SIFIRLAR	45
3.1 Polinomal Matris Gösterimi (PMD) ve Matris Çarpım Gösterimi	47
3.1.1 Polinom Matris Çarpım Tanımları (PMFD)	52
3.2 Transfer Fonksiyonu Matrisine İlişkin Kutup ve Sıfırlar	56
3.2.1 Smith Biçimi	56
3.2.2 Çarpım ve McMillan Dereceleri	61
3.2.3 Smith-McMillan Biçimi	69
3.2.4 Değişmez Sıfırlar	78
3.2.5 Aktarım Sıfırları	79
3.2.6 Ayrım Sıfırları	81
3.2.6.1 Giriş Ayrım Sıfırı	81
3.2.6.2 Çıkış Ayrım Sıfırı	82
3.2.6.3 Giriş – Çıkış Ayrım Sıfırı	83
4. SIFIRLARIN TANIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ	85
4.1 Sıfırların Değişmezliği	85

4.1.1	Durum Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali	86
4.1.2	Giriş Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali	87
4.1.3	Çıkış Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali	87
4.1.4	Statik Çıkış ve Durum Geri Beslemesi Yapılması Hali	88
4.2	Sistem Sıfırlarına İlişkin Doğrultular	89
4.3	Kareye İndirgeme ve Kareye Yükseltgeme	92
4.4	Yüksek Genlikli Çıkış Geri Beslemesi Altında İletim Sıfırları Davranışı	94
5.	SIFIR YERLEŞTİRME	97
5.1	Genelleştirilmiş İz Düşüm Yaklaşımı	98
5.2	Çıkış Geri Beslemesi İle Kutup Yerleştirme	105
5.2.1	Genelleştirilmiş İz Düşüm Yaklaşımı	108
5.3	Dinamik Çıkış Geri Beslemesi	109
5.4	Kısmi Kutup Yerleştirme Durumu	114
5.5	Alternatif Bir Yöntem	121
6.	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	127
	KAYNAKLAR	131
	EKLER	133
	ÖZGEÇMİŞ	135

KISALTMALAR

MFD	: Matris Çarpım Gösterimi
PMFD	: Polinomal Matris Çarpım Gösterimi
PMD	: Polinomal Matris Gösterimi
DOR	: Diferansiyel Operatör Gösterimi
MFD_R	: Sağ Matris Çarpım Gösterimi
MFD_L	: Sol Matris Çarpım Gösterimi
PBH	: Popov – Belevitch – Hautus Test

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1 : Kontrolör yerleşim konumuna göre sistem başarımlarının karşılaştırması	8
Tablo 2.2 : Kontrolör yerleşim konumuna göre sistem başarımlarının karşılaştırması	11

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Lineer zamanla değişmeyen geri beslemeli bir sistem	2
Şekil 2.2 : (a) Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi hali (b) Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi hali	3
Şekil 2.3 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerinin değişimi	5
Şekil 2.4 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin basamak cevabı	6
Şekil 2.5 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerin değişimi	7
Şekil 2.6 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak yanıtı	7
Şekil 2.7 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerine ilişkin yer eğrisi	9
Şekil 2.8 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı	10
Şekil 2.9 : Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerine ilişkin yer eğrisi	10
Şekil 2.10 : Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı	11
Şekil 2.11 : Aynı reel kısma sahip öz değerlerin s düzleminde yerleşimi ve darbe yanıtları	13
Şekil 2.12 : s düzleminde karmaşık eşlenik kutupların yerleşimi	14
Şekil 2.13 : Sönüm oranı ζ 'nin frekans cevabı genliğine etkisi	15
Şekil 2.14 : Farklı sönüm oranı değerleri için sistem birim basamak yanıtı	16
Şekil 2.15 : ($\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$) için sıfırların çeşitli konumlarına göre sistem yanıtının değişimi ($b = -0,5$; $b = 0,5$; 1 ; 2 ; ∞)	17

Şekil 2.16 : İkinci mertebeden ($\zeta = 1/\sqrt{2} \cong 0,7$) sistemine ilave edilen kutbun konumuna göre sistem cevabının değişimi ($\alpha = 0,1; \alpha = 0,5; \alpha = 1; \alpha = 2$ ve $\alpha = \infty$)	19
Şekil 2.17 : Sıfırın kutbun sağında olması halinde birim basamak yanıtı	21
Şekil 2.18 : Sıfırın kutbun solunda olması halinde birim basamak yanıtı	22
Şekil 2.19 : Kontrol edilmiş sisteme ilişkin köklerin yer eğrisi	24
Şekil 2.20 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde küçük K değerlerine ilişkin detay çizim	24
Şekil 2.21 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde küçük K değerlerine ilişkin detay çizim	25
Şekil 2.22 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı	26
Şekil 2.23 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı	26
Şekil 2.24 : İkinci mertebeden sistem kutuplarının s düzleminde konumu	27
Şekil 2.25 : Sonlu bir sıfıra sahip ikinci mertebeden sistemin s düzleminde kutup sıfır geometrisi	29
Şekil 2.26 : $x = a$ durumu için kutup sıfır geometrisi	30
Şekil 2.27 : İkinci mertebeden sisteme ilişkin zarf eğrisi	30
Şekil 2.28 : $T_{s, \min}$ yada $\phi_2 = \pi/2$ olması halinde s düzleminde kutup sıfır yerleşimi	32
Şekil 2.29 : İkinci mertebeden minimum fazlı olmayan bir sisteme ilişkin kutup sıfır yerleşimi	36
Şekil 2.30 : Sistem sıfırının farklı durumları için sönüm oranına göre en büyük aşım değerinin değişimi	38
Şekil 2.31 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerinin değişimi	40
Şekil 2.32 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sistem yanıtı	40
Şekil 2.33 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde köklerin geometrik yerleri	41

Şekil 2.34 : Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sistemin birim basamak yanıtı	41
Şekil 2.35 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde köklerin değişimi	43
Şekil 2.36 : Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sistem yanıtı	43
Şekil 3.1 : $G(s)$ transfer fonksiyonunda: a) Kutup etkisi b) Sıfır etkisi	45
Şekil 3.2 : $G(s) = (s + 1)/(s + 2)$ için kutup ve sıfır davranışı	46
Şekil 3.3 : Denklem (3.1) ile tanımlanan lineer sisteme ilişkin blok diyagramı	46
Şekil 4.1 : Yüksek genlikli çıkış geri beslemesi için blok tablo	94
Şekil 5.1 : Sıfır ataması gerçekleştirilmiş hal için ikinci giriş ikinci çıkışa ilişkin zaman cevabı	105
Şekil 5.2 : Dinamik kontrolör eklenmesi halinde kapalı çevrim sistem blok şeması	119
Şekil 5.3 : Dinamik kontrolör eklenmesi halinde kapalı çevrim sistem cevabı	121
Şekil 5.4 : Kontrolsüz hal için birinci giriş birinci çıkışa ilişkin zaman cevabı	123
Şekil 5.5 : Sıfır ataması gerçekleştirilmiş hal için birinci giriş birinci çıkışa ilişkin zaman cevabı	126
Şekil 6.1 : Çıkışı sıfırlama problemini gösteren bir şema	128
Şekil 6.2 : Farklı sıfırlar tipleri arasındaki ilişkiyi gösteren blok şema	129

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{A}_{n \times n}$	: Açık çevrim sistemin durum matrisi
$\mathbf{A}_{e n \times n}$	: Kapalı çevrim sistemin durum matrisi
$\mathbf{B}_{n \times \ell}$	: Sistem giriş matrisi
$\mathbf{C}_{m \times n}$	: Sistem çıkış matrisi
$\mathbf{D}_{m \times \ell}$	: Doğrudan besleme matrisi
$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$	: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrisleri ile tanımlı sistem
$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$	: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) matrisleri ile tanımlı sistem
$\Re[s]$	: s düzleminde tanımlı reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
ℓ	: Giriş sayısı
m	: Çıkış sayısı
n	: Durum sayısı
δ_M	: McMillan derecesi
$\det \mathbf{A}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin determinanı
$\mathbf{S}(s)$	: $\mathbf{G}(s)$ transfer matrisinin Smith biçimi gösterimi
$\mathbf{M}(s)$	: $\mathbf{G}(s)$ transfer matrisinin Smith McMillan biçimi gösterimi
$\mathbf{S}^*(s)$	: $\mathbf{S}(s)$ matrisinin sıfırdan farklı diyagonal elemanlardan meydana gelen matris
$\mathbf{L}(s)_{m \times m}$	: Sol unimodular matris
$\mathbf{R}(s)_{\ell \times \ell}$	: Sağ unimodular matris
$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_R(s)_{m \times \ell} \\ \mathbf{Q}_R(s)_{\ell \times \ell} \end{array} \right\}$	: MFD_R matrisleri
$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_L(s)_{m \times \ell} \\ \mathbf{Q}_L(s)_{m \times m} \end{array} \right\}$	: MFD_L matrisleri

Λ_A	: Elemanları, A polinom matrisinin determinantal bölenlerinden meydana gelen diyagonal bir matris
s^*	: Herhangi bir reel sayı
Π	: Birleşim(Permutasyon) matrisi
ε_i	: $G(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin sıfır polinomunun kökleri
ψ_i	: $G(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin kutup polinomunun kökleri
δ	: Birim darbe fonksiyonu
λ	: A matrisine ilişkin öz değerler
$\sigma(A)$	: A matrisinin öz değerleri kümesi
K	: Durum geri besleme matrisi
K_y	: Çıkış geri besleme matrisi

SİSTEM SIFIRLARININ KAPALI ÇEVİRİM SİSTEM DAVRANIŞINA ETKİLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında lineer zamanla değişmeyen sistemlerde kapalı çevrim sıfırlarının sistem davranışı üzerine etkileri incelenmiştir. Öncelikle, ilk bölümde problemin tanımı ve yapılan çalışmanın amacı vurgulanmış, diğer bölümlere ait genel bir güdülenme verilmeye çalışılmıştır. İkinci bölümde ise, sistem sıfırlarının kapalı çevrim sistem davranışı üzerindeki etkilerini incelemek üzere tek giriş tek çıkışlı sistemlerin analizinde yaygın olarak kullanılan köklerin yer eğrisi yöntemi esas alınıp, sıfırların konumlarına göre sistem cevabı üzerine etkileri incelenmiştir. Bunun yanı sıra zaman tanım bölgesi performans kriteri ifadeleri, sıfır etkisi göz önüne alınarak yeniden yazılmış ve elde edilen sonuçlar doğrultusunda sıfır yerleştirme işlemi sırasında dikkat edilmesi gereken hususlar ve tasarım adımları sıralanmıştır. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde ele alınan tek giriş tek çıkışlı sistemler çok girişli çok çıkışlı yapıya genelleştirilmiş, çok giriş çok çıkışlı sistemlerin analizine yönelik temel kavramlar verilmiştir. Bu bilgiler ışığında sistem sıfırlarının yerlerinin belirlenmesi ve sınıflandırmasına yönelik tanımlar ve yöntemler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, lineer zamanla değişmeyen sistemlerde sıfırlara ilişkin karakteristik özellikler incelenmiştir. Beşinci bölümde; ilk olarak, istenmeyen sıfır dinamiklerinin, sistem cevabı üzerindeki etkisini azaltmaya veya tamamen kaldırmaya yönelik kullanılabilecek yöntemlerden biri olan Model eşleme yöntemi incelenmiş, istenen tasarımın gerçekleştirilebilmesi için gerekli koşullar verilmiştir. Daha sonra, ikinci bölümde tek giriş tek çıkışlı sistemler için gerçekleştirilen sıfır yerleştirme işlemini çok giriş çok çıkışlı sistemlere uygulamak üzere sırası ile, çıkış geri beslemesine indirgenmiş genelleştirilmiş iz düşüm (Mapping) yaklaşımı, dinamik çıkış geri besleme yapısı ve alternatif bir çıkış geri besleme yapısı incelenmiş, mevcut işlem adımları birer örnek üzerinde gösterilmiştir. Son olarak kullanılan yöntemler ve elde edilen sonuçlar ayrı bir bölüm halinde verilmiştir.

THE EFFECT OF SYSTEM ZEROS ON THE CLOSED LOOP SYSTEM PERFORMANCE

SUMMARY

In this thesis, the effect of closed loop zeros of the linear time invariant systems are examined. First of all in first chapter, the definition of the problem and the purpose of the study are emphasized to give motivation for other chapters. In the second chapter, the effects of the system zeros locations to the closed loop system response are investigated by the root locus technique, which is commonly used for SISO (single input single output) systems analysis. Moreover, time domain performance criteria expressions are redefined by take into consideration of effects of the system zeros and from the obtained results, the necessary conditions and design steps for successful zero assignment are arranged. In the third chapter, the SISO systems that are explained in second chapter are generalized to MIMO (multi input multi output) systems and some basic concepts for analysis of MIMO systems are given. By using this information, the definitions which are used for locating and classifying the zeros are examined. In the fourth chapter, the characteristics of zeros of linear time invariant systems are examined. In the first section of fifth chapter, Model Matching method which is one of the techniques used for eliminating or reducing the effect of undesired system zero dynamics on system response, is examined and the required conditions needed to realize desired design are given. Afterwards; in the second section, the zero assignment process which is applied for SISO systems is applied for MIMO systems by the methods respectively output feedback reduced generalized Mapping approach, Dynamic output feedback and an alternative approach. Each method are explained on numerical examples. Finally, suggested methods and their results are given as a separate chapter.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

Kontrol sistemlerinin dinamik davranışının incelenmesi ve sistemin istenen başarımları gerçekleşmesini mümkün kılmak üzere tasarlanacak kontrolör yapısının belirlenmesine yönelik gerek zaman düzleminde gerekse frekans düzleminde çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerle, sistem performansının sistem kapalı çevrim kutuplarınca belirlendiğini söyler. Ancak sistem performansına etki eden bir diğer faktörde kapalı çevrim sistem sıfırlarıdır.

Sistem sıfırları yalnızca sistem davranışının belirlenmesinde etkili olmayıp aynı zamanda tasarlanacak kontrolör ile erişilebilecek sistem performansını sınırlı kılar. Dolayısı ile kapalı çevrim sistem sıfırları gerek sistem cevabının gerekse tasarlanan kontrolörün istene başarımları sağlayıp sağlamadığının anlaşılmasında büyük öneme sahiptir.

Sıfırları, kutuplardan farklı kılan en temel özelliği şüphesiz değiştirilemez olmalarıdır. Şöyle ki sistem kapalı çevrim kutupları çeşitli yöntemlerle tasarlanabilen kontrolör yapıları ile hedeflenen sistem performansının sağlandığı yerlere getirilebilir. Ancak bu durum sıfırlar için geçerli değildir. Sıfırların yerlerini değiştirmek üzere kullanılabilecek hem yöntemler hem de bu yöntemlerle çözümün elde edilebildiği durumlar oldukça sınırlı. Yani diğer bir deyişle, ancak çok özel sistemler için bir çözümün varlığından söz edilebilir.

Bu tez kapsamında tek girişli tek çıkılı sistemler için sıfırların sistem cevabı üzerine etkileri incelenip daha sonraki bölümlerde sıfırlarının yerlerinin belirlenmesi, sıfır tipleri ve genel özellikleri üzerinde durulmuş, son olarak da sıfır atamanın gerçekleştirilebilmesi için gerekli koşullar ve yöntemler açıklanmıştır.

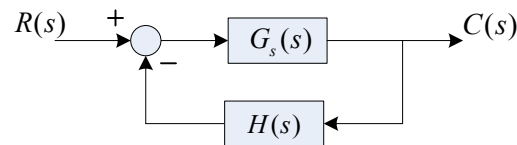
2. SİSTEM SIFIRLARININ SİSTEM DAVRANIŞINA ETKİSİ

Dinamik sistemlerin davranışları hakkında fikir veren yöntemlerin en önemlilerinden biri şüphesiz köklerin yer eğrisi yöntemidir (Evans, 1948). Temel olarak köklerin yer eğrisi oluşturulurken sistem açık çevrim transfer fonksiyonuna ilişkin kutup ve sıfırlar karmaşık s düzlemine yerleştirilir ve sistemin kapalı çevrim kutupları dolayısı ile de kapalı çevrim sistem dinamiği konusunda bilgi edinilir. Ancak köklerin yer eğrisinde gözden kaçan önemli bir nokta vardır. Yöntemde kapalı çevrim sistem sıfırlarının, sistem dinamiğine olan etkisi göz ardı edilir. Öyle ki bu ihmal yalnızca sistem cevabının yanlış yorumlanmasına neden olmaz, aynı zamanda istenen performans ölçütlerini karşılamak üzere tasarlanmak istenen kontrolöründe ileri yol mu yoksa geri besleme yolu üzerine mi yerleştirilmesinin daha uygun olacağı belirlenemez.

Yukarıda saydığımız tüm nedenlerden dolayı sistem dinamiği incelenirken yalnızca açık çevrim sistem kutupları ve sıfırlarına bakmanın yetersiz ve hatta yanıltıcı olduğunu söylenebilir. Bu bölümde açık çevrim sıfırlarının kapalı çevrim dinamiğine etkileri incelenmeye çalışılacaktır.

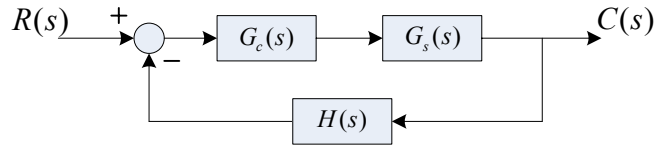
2.1 Köklerin Yer Eğrisi ve Farklı Sistem Yapıdaki Sistem Sıfırlarının Sistem Davranışına Etkisi

Şekil 2.1 'de görülen tek giriş ve tek çıkışlı lineer zamanla değişmeyen geri beslemeli bir sistemi ele alalım;

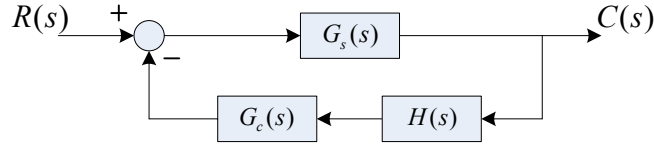


Şekil 2.1: Lineer zamanla değişmeyen geri beslemeli bir sistem

Kontrolörün ileri ya da geri besleme yolunda bulunması durumlarına göre iki farklı transfer fonksiyonu türetilir.



(a)



(b)

Şekil 2.2: (a) Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi hali
(b) Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi hali

Sisteme ilişkin $G_s(s)$ ve $H(s)$, ve kontrolöre ilişkin $G_c(s)$ transfer fonksiyonları ifadeleri aşağıdaki gibi iki polinomun oranından oluşur;

$$G_s(s) = \frac{N_s(s)}{D_s(s)}, \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}, \quad G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

Buradan kapalı çevrimli sistemin $T(s)$ transfer fonksiyonu Şekil 2.2 (a) 'da gösterilen durum için $T_1(s)$;

$$T_1(s) = \frac{N_c(s)N_s(s)D_H(s)}{D_c(s)D_s(s)D_H(s) + N_c(s)N_s(s)N_H(s)}$$

ve Şekil 2.2 (b) 'de gösterilen durum için;

$$T_1(s) = \frac{N_s(s)D_c(s)D_H(s)}{D_c(s)D_s(s)D_H(s) + N_c(s)N_s(s)N_H(s)}$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilecek olursa kapalı çevrim sistem sıfırları sadece ileri yol elemanlarının sıfırlarından ve geri besleme yolu elemanlarının kutuplarından oluşur.

Karmaşık s düzleminde kapalı çevrim sıfırlarını incelemek üzere, kök eğrisi çizimlerinde kapalı çevrim sıfırlarını meydana getiren kutup ($\otimes$) ve sıfırları ($\oslash$) şeklinde kutu içine alalım. Kapalı çevrim kutuplarını ise $*$ ile gösterelim. Kontrol sistemlerine ilişkin tasarımın nasıl yapılabileceğini iki örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 2.1

İkinci mertebeden örnek sistem;

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0,5)}$$

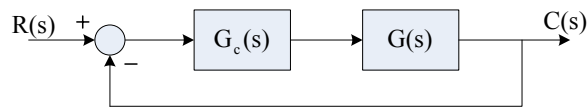
transfer fonksiyonu ile verilmiş olsun. Bu sisteme ilişkin T_s yerleşme zamanı 2 saniyenin altında ve maksimum aşım %21 ‘den az olacak şekilde faz ilerlemeli bir kontrolör tasarlayalım.

$$\%aşım = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0,21$$

ifadesinden sisteme ilişkin sönüm oranının $\zeta = 0,44$ ve T_s yerleşme zamanının;

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2$$

ifadesinden sistem doğal frekansının $\omega_n = 4,55$ olduğu görülür. Dolayısı ile sistemin hedeflenen kapalı çevrim kutupları $s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j4$ olarak bulunur. Eğer kontrolör sıfırı $\tau = 1/0,5 = 2$ saniye zaman sabitinin yaklaşık 2 katı $s = -2\tau = -4$ seçilirse, kontrolörün kutbu $s = -15,4$ ve sistem kazancı $K = 60$ olacaktır. Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sistemin blok diyagramı, açık çevrim transfer fonksiyonu ve K kazancına bağlı köklerin geometrik yerleri Şekil 2.3 ‘de olduğu gibi elde edilir.

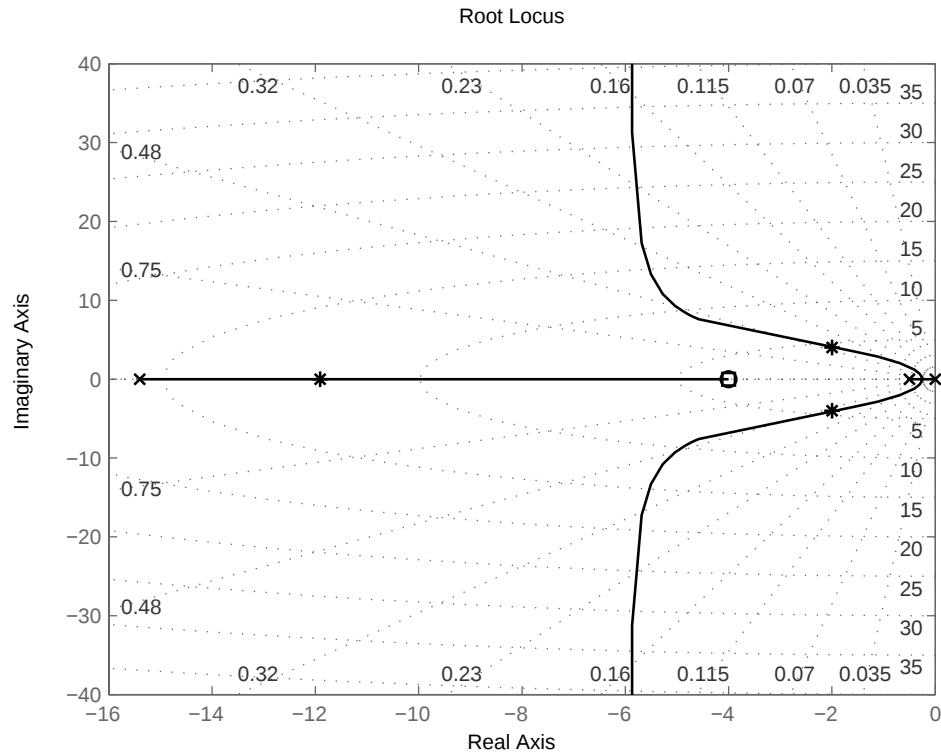


$$KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+15,4)(s+0,5)}$$

Asimptot;

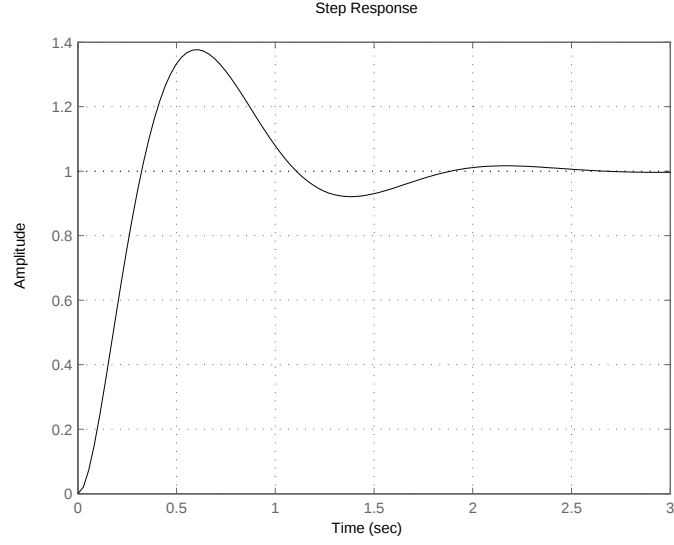
$$\sigma_K = \frac{4 - (15,4 + 0,5)}{2} = 7,95$$

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{60(s+4)}{s(s+0,5)(s+15,4) + 60(s+4)} = \frac{60(s+4)}{s^3 + 15,9s^2 + 67,7s + 240} \\ &= \frac{60(s+4)}{(s+11,9071)(s+1,99646 \pm j4,02122)} \end{aligned}$$



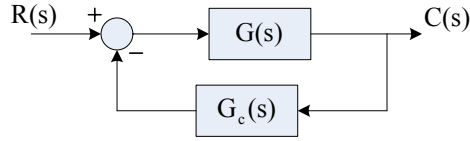
Şekil 2.3: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerinin değişimi

Bu durumda sistemin birim basamak yanıtı Şekil 2.4 ‘de görüldüğü gibi elde edilir.



Şekil 2.4: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin basamak cevabı

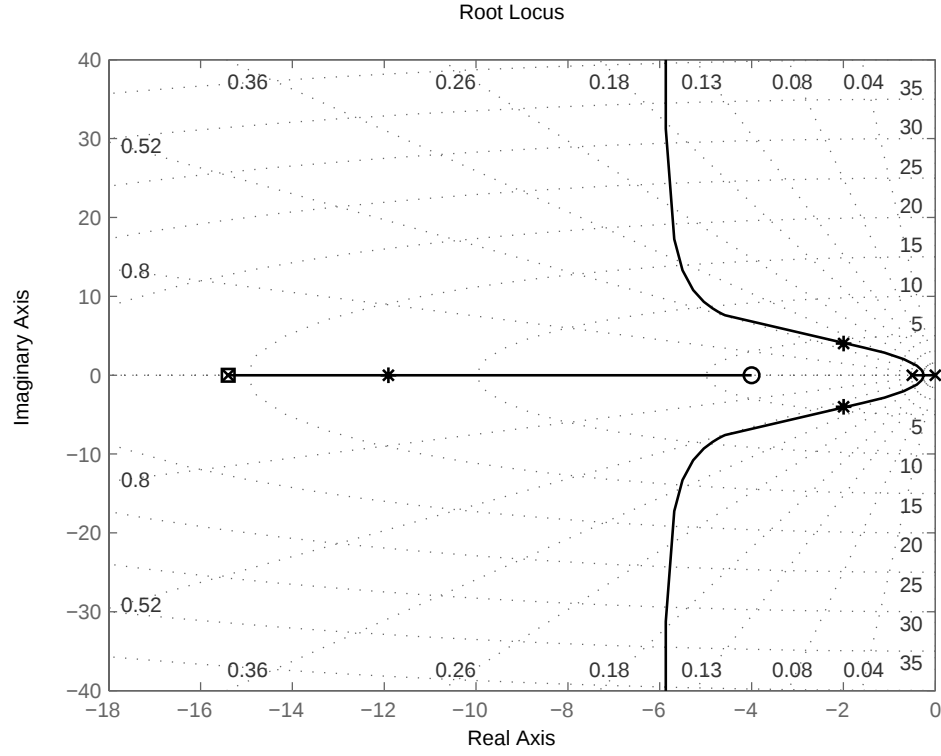
Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde ise sistem blok diyagramı, açık çevrim transfer fonksiyonu ve kök eğrisi Şekil 2.5 ‘teki gibi bulunur.



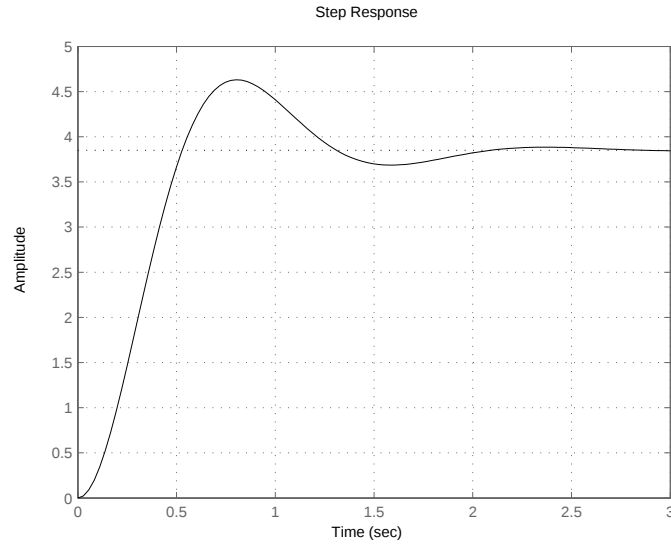
$$KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+15,4)(s+0,5)}$$

$$T(s) = \frac{60(s+15,4)}{s^3 + 15,9s^2 + 67,7s + 240} = \frac{60(s+15,4)}{(s+11,9071)(s+1,99646 \pm j 4,02122)}$$

Kontrolörün ileri yada geri besleme yolu üzerine yerleştirilmiş olduğu halleri ayrı ayrı incelemek iki durum arasındaki farkların anlaşılmasında büyük önem arz eder.



Şekil 2.5: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerin değişimi



Şekil 2.6: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak yanıtı

Yukarıdaki şekillerden de görüldüğü üzere iki yapı arasındaki tek fark kapalı çevrim sistem sıfırlarının yerleridir. Standart köklerin yer eğrisi prensibine göre her iki yapı

içinde aynı sistem performansını elde etmemiz gerekmektedir. Kapalı çevrim sıfırlarının gerek sistem dinamiğinin belirlenmesi hususunda ne kadar büyük bir etkiye sahip olduğunun anlaşılması gerekse kontrolörün ileri yola mı yoksa geri besleme yolu üzerine mi yerleştirilmesinin daha uygun olacağı hususunda fikir edinmek üzere Şekil 2.3 ve Şekil 2.5 da gösterilen yapılara ilişkin sistem başarımları Tablo 2.1 ‘de karşılaştırılmıştır.

Tablo 2.1: Kontrolör yerleşim konumuna göre sistem başarımlarının karşılaştırması

	T_s	T_p	%aşım
Şekil-3	1,7 s	0,6 s	%38
Şekil-5	1,8 s	0,8 s	%20

Yukarıdaki örnekten kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesinin her zaman iler yola yerleştirmeden daha iyi sonuç vereceği düşüncesi çıkabilir. Bu nedenle şimdi de tersi bir durumu sergileyen bir örneği inceleyelim;

Örnek 2.2

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3,5)(s+6)}$$

Transfer fonksiyonu ile verilmiş olan sistem için Örnek 2.1 ‘de verilen davranış ölçütlerini sağlayan bir kontrolör tasarlayalım. Hedeflenen kutuplar $s = -2 \pm j4$ ‘dir. Kontrolör sıfırı, kutbu ve kazancı sırası ile $s = -4$, $s = -20$ ve $K = 456,6$ değerini almaktadır.

Kontrolör eklenmiş sisteme ilişkin kutup ve sıfırlar, sisteme ilişkin köklerin yer eğrisini oluşturmak üzere karmaşık s düzlemine işlenir; kontrolör, ileri yola yerleştirildiğinde açık çevrim transfer fonksiyonu ve köklerin geometrik yerleri Şekil 2.7 ‘de, sistemin birim basamak cevabı ise Şekil 2.8 ‘de olduğu gibi elde edilir.

$$KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3,5)(s+6)(s+20)}$$

$$T(s) = \frac{456,6(s+4)}{s^4 + 29,5s^3 + 211s^2 + 876,6s + 1826,4}$$

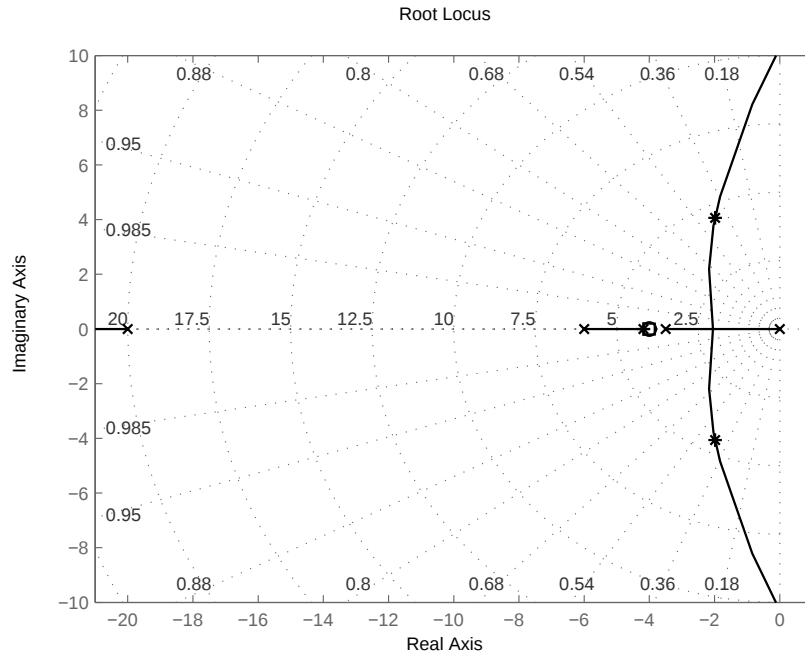
$$= \frac{456,6(s+4)}{(s+1,98364 \pm j4,06593)(s+4,17905)(s+21,3537)}$$

Kontrolör geri besleme yoluna yerleştirildiğinde açık çevrim transfer fonksiyonu ve köklerin geometrik yerleri Şekil 2.9 ‘da, sistemin birim basamak cevabı ise Şekil 2.10 ‘da olduğu gibi elde edilir.

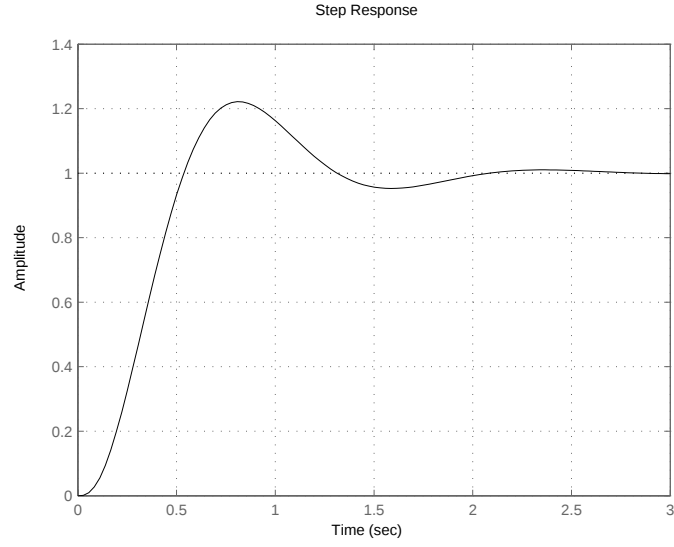
$$KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3,5)(s+6)(s+20)}$$

$$T(s) = \frac{456,6(s+20)}{s^4 + 29,5s^3 + 211s^2 + 876,6s + 1826,4}$$

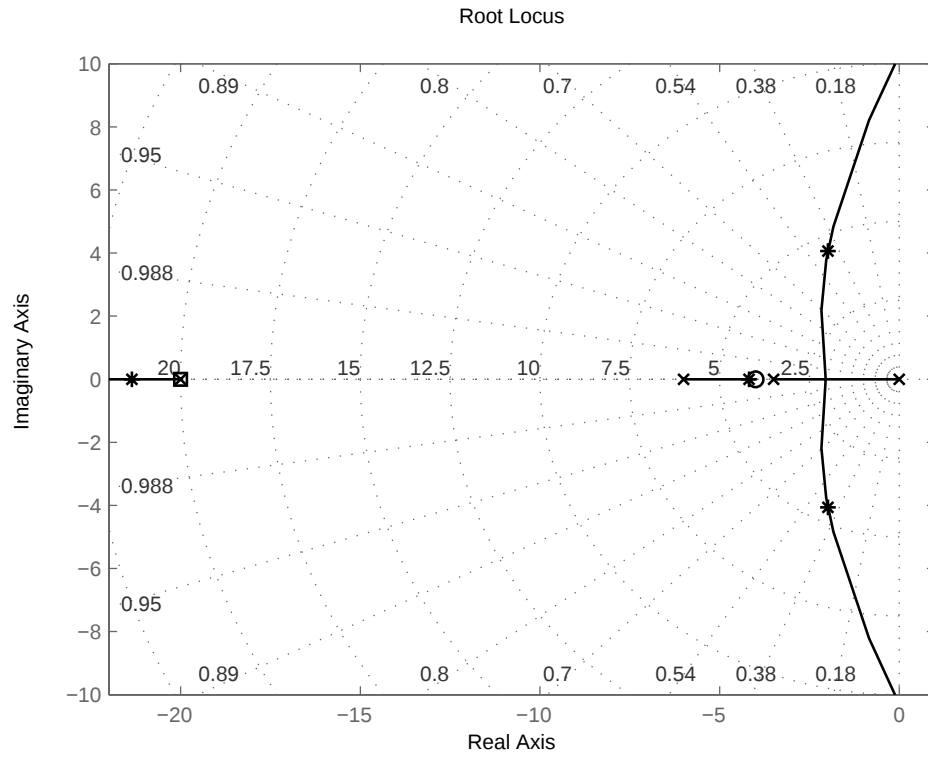
$$= \frac{456,6(s+20)}{(s+1,98364 \pm j4,06593)(s+4,17905)(s+21,3537)}$$



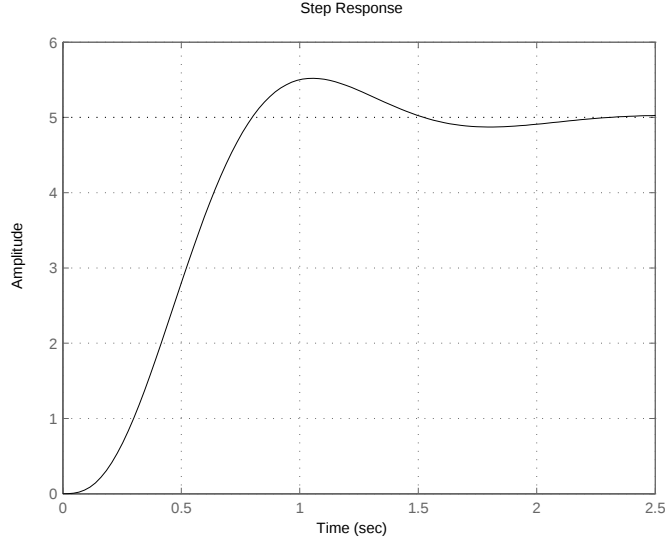
Şekil 2.7: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerine ilişkin yer eğrisi



Şekil 2.8: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı



Şekil 2.9: Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerine ilişkin yer eğrisi



Şekil 2.10: Kontrolörün geri besleme yoluna yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı

Her iki durum için elde edilen sistem başarımları Tablo 2.2 ‘de karşılaştırılmıştır.

Tablo 2.2: Kontrolör yerleşim konumuna göre sistem başarımlarının karşılaştırması

	T_s	T_p	%aşım
Şekil-7	1,8s	0,8s	%21
Şekil-9	1,9s	1,1s	%10

Özetlenirse; kontrolörün ileri yol üzerine yerleştirilmesi halinde performans ölçütleri yeterli biçimde sağlanmış olmaktadır ve Şekil 2.7 ‘de $s = -4,17905$ ‘deki kutup, $s = -4$ ‘deki kapalı çevrim sıfırına oldukça yakın olduğundan kutup sıfır sadeleşmesi gerçekleşmektedir. Ancak kontrolör geri besleme yolu üzerine yerleştirilirse kapalı çevrim sıfırı bu kez $s = -20$ ‘ye gelmektedir ve dolayısı ile kapalı çevrim sıfırı ile herhangi bir sadeleşme gerçekleşmemektedir. Buradan sistem cevabının merkeze yakın üç kutup tarafından belirlendiği görülür. Tablo 2.2 ‘deki davranış başarımlarından açıkça görüldüğü gibi;(neden zaman uzadı aşım azaldı)

Yukarıda verilen örneklerden de anlaşılacağı üzere köklerin yer eğrisinin yorumlanmasında belirgin bir eksiklik mevcuttur. Bu eksiklikleri yeniden vurgulamak gerekirse, köklerin geometrik yeri yöntemi kontrolörün ileri yol üzerine mi, yoksa geri besleme yolu üzerine mi yerleştirilmesinin daha uygun olacağı

konusunda herhangi bir fikir vermemektedir. İkinci konu, kapalı çevrim sıfırların sistem cevabını ne şekilde etkilediğidir. Bu konu bir sonraki alt bölümde incelenecektir.

2.2 Kapalı Çevrim Sıfırlarının Sistem Cevabına Etkisi

2.2.1 Kapalı Çevrim Sıfır Konumunun Sistem Cevabına Etkisi

Sistem öz değerlerini belirleyerek zaman cevabının iyileştirilmesi oldukça yaygın bir yöntemdir. Zaman cevabının istenmeyen durumları ve bu durumları giderecek başlıca yöntemleri inceleyelim;

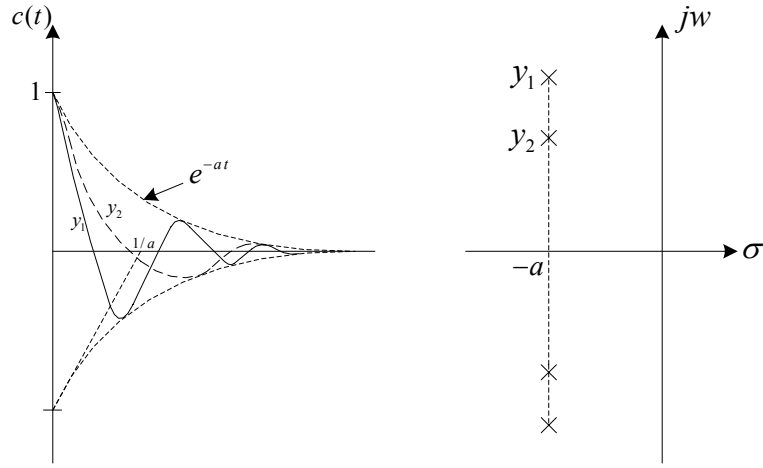
Eğer sistem cevabı salınımlı ve sistemin yerleşme zamanı oldukça büyük ise sistemin baskın öz değeri merkeze çok yakın bir yerdedir. Sistem cevabındaki yüksek salınımların hızlı bir şekilde sönmesi için merkeze çok yakın olan kutup bulunduğu noktadan sola negatif değerlere doğru çekilmelidir.

Eğer kontrol işaretinde yüksek frekanslı işaretler mevcut ise, yüksek frekanslı işaretleri kontrol işaretinden ayıklamanın yolu sistemin bant genişliğini düşürmektir. Böylelikle merkezden çok uzakta bulunan öz değerler, ω_b yarıçapı ile tanımlı bir çemberin içerisinde kalacak şekilde merkeze yaklaştırılır. Böylelikle frekans cevabının mutlak değeri $\omega > \omega_b$ değerleri için etkisiz kalır.

Eğer kapalı çevrim öz değerleri, açık çevrim sıfırlarına çok yakın bir yere kaydırılmak isteniyorsa köklerin yer eğrisinden de görülebileceği gibi kazancı arttırmak gerekir. Sürücü sistemler, yüksek kazanç değerlerinde doymaya girdiklerinden kazancın yükselmesi özellikle mekanik sistemlerde istenmeyen bir durumdur.

Şimdi ikinci ve üçüncü mertebeden sistemler için zaman cevabı ile öz değerlerin yeri arasındaki temel ilişkileri inceleyelim;

Eğer tüm öz değerler $\sigma = -a$ 'da sanal eksene paralel olarak yerleşmiş ise bütün öz değerlerin darbe yanıtları $e^{\pm at}$ zarfı ile sınırlıdır.

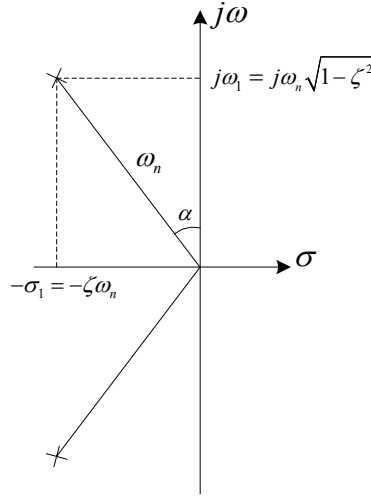


Şekil 2.11: Aynı reel kısma sahip öz değerlerin s düzleminde yerleşimi ve darbe yanıtları

y_1 ve y_2 aynı reel kısımlara ($\sigma = -a$) sahip öz değerlerdir. Şekil 2.1 'de görülen $\pm e^{-at}$ eğrisi içerisinde kalan y_1 ve y_2 zaman cevaplarından y_1 , daha düşük frekansa (ω_2) sahip y_2 'den daha fazla salınım ve daha fazla aşım yaptığından istenmeyen bir durumu temsil etmektedir. Dolayısı ile yüksek frekansa sahip öz değerler s düzleminin merkezine yakın olacak şekilde sola yerleştirilmelidirler. Bunu sağlamak içinse ζ sönüm oranının minimum değeri gerekir. $-\sigma \pm j\omega_d$ şeklinde tanımlı karmaşık eşlenik köklere sahip bir sisteme ilişkin karakteristik denklem;

$$P(s) = (s - \sigma_1 - j\omega_1)(s - \sigma_1 + j\omega_1) = s^2 - 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \omega_1^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bir öz değerin merkeze olan uzaklığı doğal frekans $\omega_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}$, ve $\zeta = -\sigma_1 / \omega_1$ sönüm oranıdır. ω_1 ve σ_1 arasındaki ilişkiyi $\sigma_1 = -\zeta\omega_1$, $\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ şeklinde de yazılabilir. Tanımlamış olduğumuz bu ilişkileri Şekil 2.12 'de görülebilir.



Şekil 2.12: s düzleminde karmaşık eşlenik kutupların yerleşimi

α , sanal s_1 kutbu ile sanal eksen arasında kalan merkezi açı olmak üzere;

$$\sigma_1/\omega_n = \zeta = \sin \alpha \quad |\zeta| < 1$$

yazılabilir.

Birim geri beslemeli ikinci mertebeden bir sistemin transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.2)$$

şeklindedir. (2.1) denklemi ile verilen sisteme ilişkin basamak giriş yanıtı;

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right)$$

ifadesini sağlar. Görüldüğü gibi ω_n doğal frekansı yukarıda verilen zaman yanıtında yalnızca $\omega_n t$ şeklinde görülmektedir. Dolayısı ile burada ω_n doğal frekansının bir zaman ölçeklendirme çarpanı şeklindedir.

(2.2) transfer fonksiyonu ile verilen sisteme ilişkin birim basamak yanıtı $U(s) = 1/s$ ve $Y(s) = G(s)U(s)$ olmak üzere, eğer $\omega_n = 1$ rad/s alınırsa,

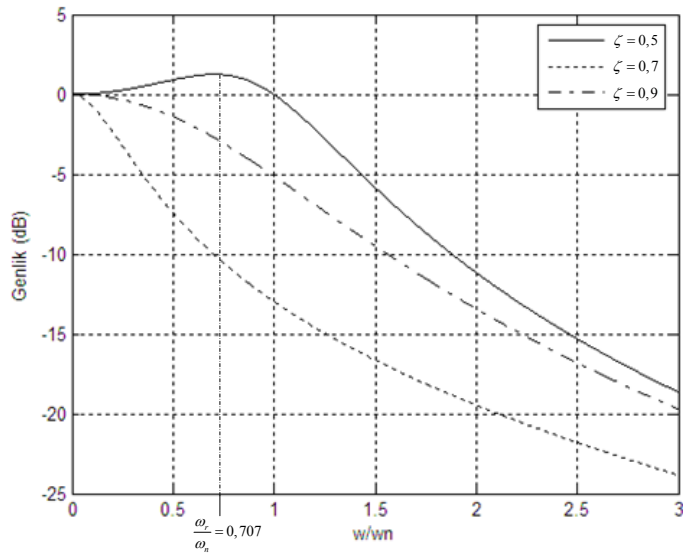
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta t} \left[\cos(\sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} t) \right]$$

elde edilir. Özellikle $\zeta = 0.5; \zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ ve $\zeta = 0,9$ için sistemin frekansı ve birim basamak yanıtı Şekil 2.13 ve Şekil 2.14 'de verildiği gibidir. Sönüm oranı $\zeta \approx 0,7$ için;

$$\%aşım = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \Big|_{\zeta=1/\sqrt{2}} = e^{-\pi} = 0,043$$

$$\omega_n t = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Big|_{\zeta=1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pi = 4,44$$

zamanında oluşur. Sistem yanıtı, yalnızca küçük ζ sönüm oranı değerleri için bir en büyük değere sahiptir. ζ sönüm oranı $|G(j\omega)|$ frekans cevabı genliği üzerinde de belirleyicidir.

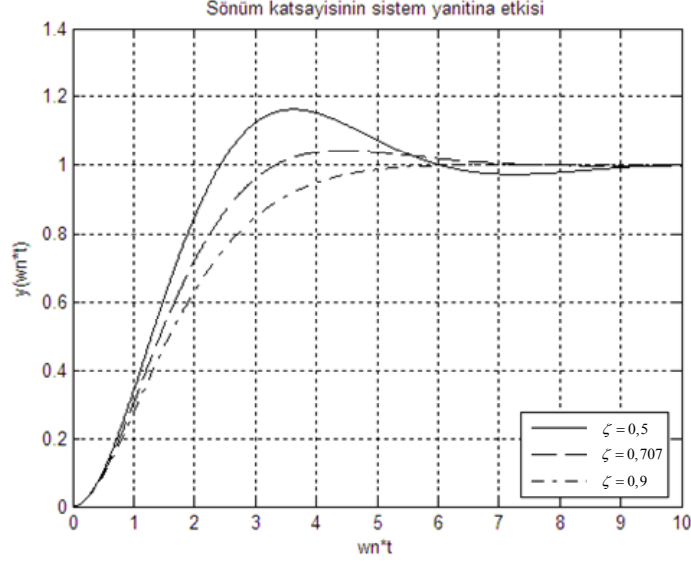


Şekil 2.13: Sönüm oranı ζ 'nin frekans cevabı genliğine etkisi

Rezonans frekansı $\omega_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$ 'dir. Büyük sönüm oranı değerleri için ($\zeta > \sqrt{2}/2$) rezonans gerçekleşmez.

$$\zeta = 0,7 \quad \text{için} \quad \omega_r / \omega_n = 0$$

$$\zeta = 0,5 \quad \text{için} \quad \omega_r / \omega_n = \sqrt{1-0,5^2} = 0.707 \text{ 'dir.}$$



Şekil 2.14: Farklı sönüm oranı değerleri için sistem birim basamak yanıtı

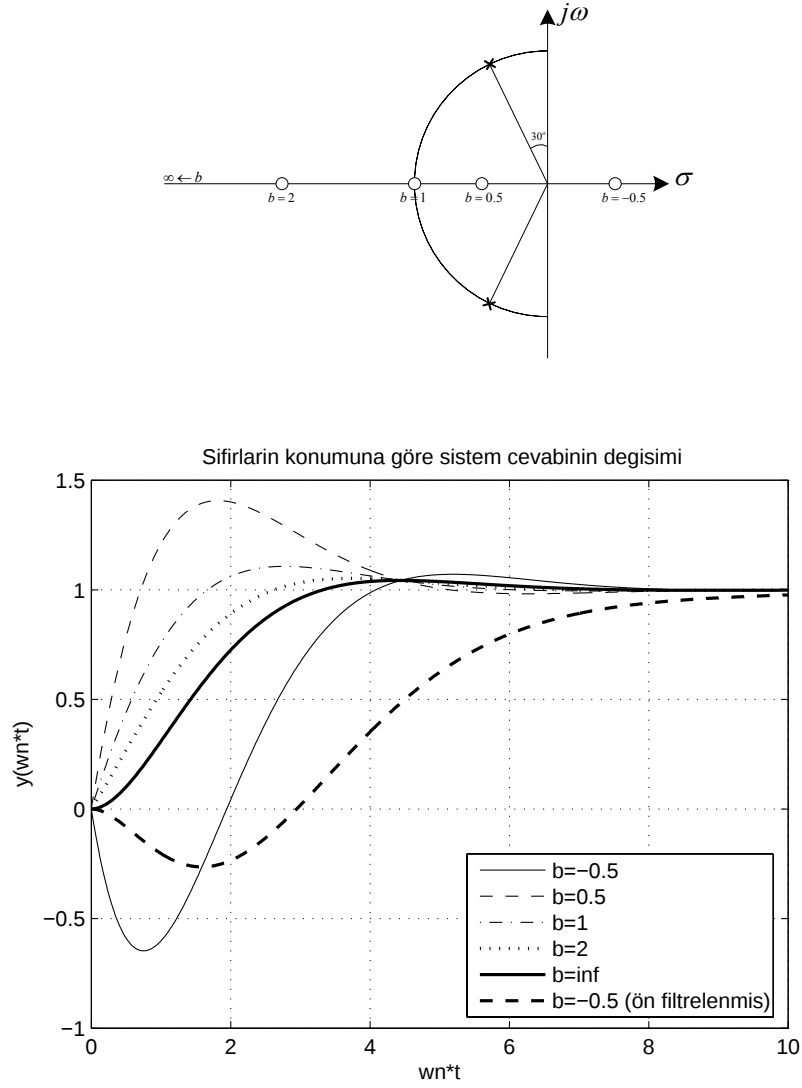
(2.2) transfer fonksiyonu ile verilen sistemin $s = -b \omega_n$ 'de bir de sıfırı bulunduğunu varsayalım;

$$G(s) = \frac{\frac{\omega_n}{b}(s + b \omega_n)}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.3)$$

(2.2) transfer fonksiyonuna ilişkin birim basamak cevabı;

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t\right) + \frac{\zeta - 1/b}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t\right) \right] \quad (2.4)$$

Şeklindedir. Bu ifadede zaman ω_n çarpanı ile ölçeklendirilirler. $\zeta = 0,7$ için b 'nin bazı değerleri için kutup sıfır yerleşimi ve her bir duruma ilişkin basamak cevapları Şekil 2.15 'de görülmektedir.



Şekil 2.15: ($\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$) için sıfırların çeşitli konumlarına göre sistem yanıtının değişimi ($b = -0,5 ; b = 0,5 ; 1 ; 2 ; \infty$)

Şekil 2.15 ‘de elde edilen tüm sistem yanıtları incelenirse, $\omega_n t = \pi\sqrt{2}$ zamanında aynı noktada kesiştiği görülür. Bunun sebebi, (2.4) denklemindeki sinüslü ifadenin $\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \pi$ ve $\zeta = 1/\sqrt{2}$ için $\omega_n t = \pi\sqrt{2}$ norm zamanında kaybolması ve geriye yalnızca b ’nin değişiminden bağımsız bir ifadenin kalmasıdır. $b \rightarrow \infty$ olması halinde elde edilecek zaman cevabı Şekil 2.15 ‘de ortada görülen cevap eğrisi elde edilir. Şekil 2.15 ‘den görülebileceği gibi sistem sıfırı; $b = 2$ için zaman cevabında çok önemli bir değişiklik oluşturmaz, $b = 1$ noktasında iken kabul edilebilir düzeyde bir etki görülmektedir ancak sıfır kutuptan çok merkeze doğru yaklaştıkça büyük bir aşım oluşur. Bu durum özellikle sıfır $b = 0,5$ konumunda iken meydana gelen

%40,7'lik aşımından görülür. Sistemin $s = 0,5$ 'deki sıfırı sadeleştirilerek basamak yanıtı üzerindeki etkisi ortadan kaldırılabilir. Ancak sadeleştirmeden kaçınılarak bu etki giderilmek isteniyorsa, öz değerler merkeze yaklaştırılarak sistemin bant genişliği düşürülür veya sönüm oranı arttırılır.

Sistem sıfırının sağ yarı s düzleminde bulunduğu durumlarda (yani b negatif değerler aldığı takdirde), sistem minimum fazlı olmayan bir sistem haline dönüşür. Minimum fazlı olmayan sistemlerin basamak yanıtı basamak işaretine ters yönde değişerek başlar. Sağ yarı s düzlemindeki sıfırların etkisi sistemin kararsız öz değerlere sahip hale getirebileceğinden (kapalı çevrim sistemde sıfırlara kutuplar yerleştirilerek) sadeleştirme yapılarak giderilemez. Minimum fazlı olmayan sistemlerde görülen ters aşım, mevcut sıfırın sanal eksene göre simetriği alınarak bir ön filtreleme ile azaltılabilir. $b = -0,5$ 'de bulunan bir sıfır için bu ön filtre $0,5/(s + 0,5)$ şeklinde gerçekleştirilir. Eklenen bu ön filtrenin $b = -0,5$ 'de sıfırı bulunan minimum fazlı bir sistemin basamak cevabında meydana gelen ters aşımı önemli ölçüde azalttığı ancak bunun yanı sıra sistem cevabını yavaşlattığı Şekil 2.15 'de görülmektedir.

Son olarak (2.2) ifadesinde görülen sisteme bir kutup ilave edilmesi durumunda sistem;

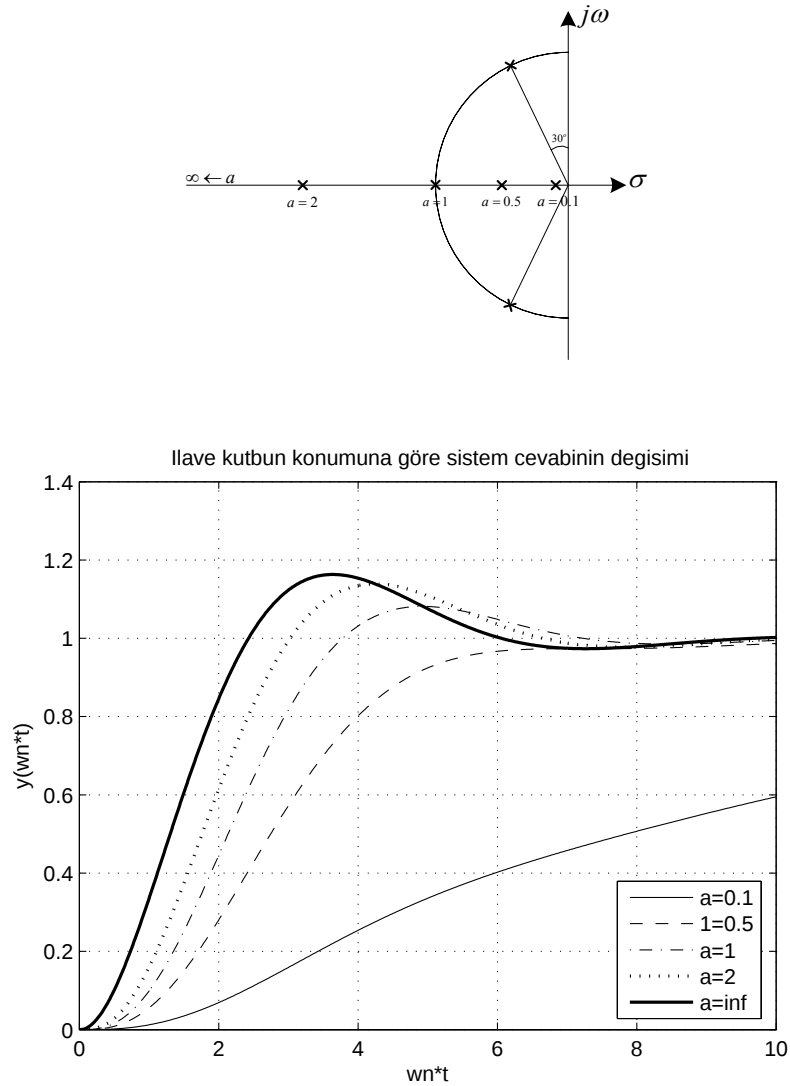
$$G(s) = \frac{\omega_n^3 a}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\omega_n)} \quad (2.5)$$

haline dönüşür. Sisteme ilişkin basamak cevabı;

$$y(t) = 1 - \frac{1}{a^2 - 2a\zeta + 1} \left[e^{-a\omega_n t} + e^{-\zeta t} \left(a\{a - 2\zeta\} \cos\left[\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t\right] + \frac{a(1 + a\zeta - 2\zeta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left[\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t\right] \right) \right]$$

şeklinde elde edilir. İlave edilen kutup sistemin rezonansa girmesini önleyici bir etkiye sahip olduğundan sistemin sönüm oranı küçük seçilebilir. Eğer $a \rightarrow \infty$ ve $\zeta = 0,5$ ise, basamak cevabının Şekil 2.14'de $\zeta = 0,5$ durumu için çizilen basamak

cevabı ile aynı olduğu görülür. Eklenen ilave kutbun konumuna göre sistem cevabının değişimi Şekil 2.16 ‘da görülmektedir.



Şekil 2.16: İkinci mertebeden ($\zeta = 1/\sqrt{2} \cong 0,7$) sistemine ilave edilen kutbun konumuna göre sistem cevabının değişimi ($\alpha = 0,1; \alpha = 0,5; \alpha = 1; \alpha = 2$ ve $\alpha = \infty$)

İlave kutbun $a = 2$ ‘de bulunması halinde sistem cevabını önemli derecede etkilemediği görülür ancak $a = 1$ ‘de bulunması halinde ilave edilmeden önce aynı sönüm oranı için meydana gelen %15,5’lik aşım miktarının %8,1’e düştüğü görülür. $a = 0,5$ konumunda ise sistem hiç aşım yapmaz. Kutup merkeze yaklaştıkça sistem cevabı üzerindeki etkisi artar ve sistem nihayetinde sistem cevabı üzerinde baskın hale gelir bu durumda karmaşık eşlenik kutupların etkisi ancak zaman cevabının başladığı zaman aralığında etkili olur.

2.2.2 Sonlu Bir Sıfıra Sahip Birinci Mertebeden Sistem Tasarımında Sıfır Etkisi

Birinci mertebeden bir sistemin basamak cevabının üstel karakteristiği oldukça belirgindir. Ancak sistemde sonlu bir sıfır olması durumu sistem davranışı üzerinde belirli değişiklikler meydana getirir. Aşağıda transfer fonksiyonu verilmiş iki sistem görülmektedir;

$$G_1(s) = \frac{p}{(s+p)} \quad , \quad G_2(s) = \frac{p(s+a)}{(s+p)} \quad (2.6)$$

Kapalı çevrim sıfırlarının sistem cevabı üzerindeki etkisini incelemek üzere $G_2(s)$ transfer fonksiyonunu $G_1(s)$ cinsinden ifade edecek olursak

$$G_2(s) = G_1(s) \left(1 + \frac{1}{a}s \right) \quad (2.7)$$

yazılabileceği görülür. Bu ilişki sistem yanıtı yönünden

$$c_2(t) = c_1(t) + \frac{1}{a} \left(\frac{d}{dt} c_1(t) \right) \quad (2.8)$$

anlamına gelir. Burada $c_1(t)$ yalnızca bir kutuptan oluşan birinci mertebeden bir sistem cevabını ve $c_2(t)$ sonlu bir sıfıra sahip birinci mertebeden bir sistem cevabını ifade eder. $G_2(s)$ 'de bulunan sıfır sistem cevabına genliği sıfırın konumuna bağlı bir türev ifadesi ekler. a 'nın büyük değerleri için yani sıfırın merkezden uzaklaşması halinde sıfırın sistem cevabı üzerindeki etkisi ihmal edilebilir dolayısı ile a büyüdükçe sistem cevabı saf kutuptan oluşan sistem cevabına yakınsar. Bunun yanı sıra a 'nın küçük değerleri için yani sıfırın merkeze yakın olduğu durumlarda türev terimi geçici hal üzerinde baskın olur.

Yukarıda yapılan analiz sistem birim basamak yanıtı üzerinde irdelenirse;

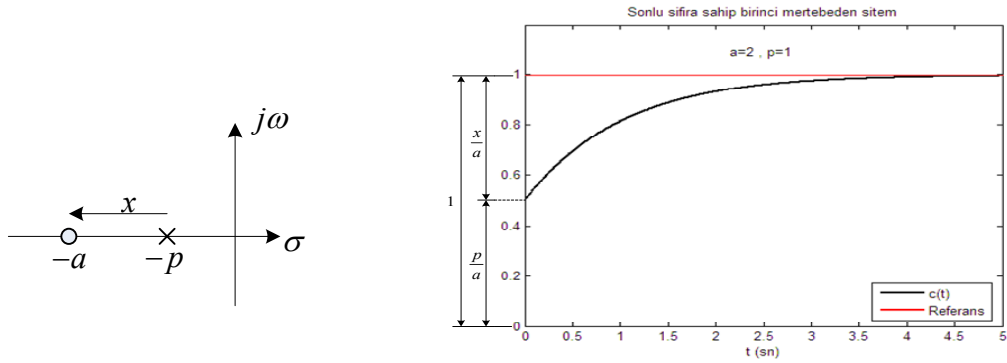
$$C_1(s) = \frac{p}{(s+p)s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+p}$$

$$c_1(t) = 1 - e^{-pt}$$

ve

$$c_2(t) = 1 - e^{-pt} + \frac{1}{a} \left(p e^{-pt} \right) = 1 - \frac{a-p}{a} e^{-pt} = 1 - \frac{x}{a} e^{-pt} \Big|_{x=a-p} \quad (2.9)$$

olduğu görülür. Burada dikkat etmemiz gereken husus $c_2(t)$ sistem birim basamak yanıtının; $x = a - p$ kutup ve sıfır arasındaki uzaklık olmak üzere, x/a oranına bağlı olduğudur. x/a oranı sıfıra yaklaştıkça kutup sıfır sadeleşmesi meydana gelmekte ve dolayısı ile sistem cevabı dinamik olmayan bir davranış sergilemektedir. Analizimizi biraz daha genişletmek için x işaretinin yani sıfırın kutbun sağında veya solunda (minimum fazlı sistem) olması durumları için sistem cevabının ne tür değişimler gösterdiğini inceleyelim. Eğer Şekil 2.17 'de görüldüğü gibi sıfır kutbun sağında ise sistem birim basamak yanıtı, p/a başlangıç koşuluna sahip yalnızca kutuptan oluşan sistem cevabına benzer bir davranış gösterir. Ancak sıfır, kutbun solunda ise (Şekil 2.18) sistem birim basamak cevabı x/a oranında bir aşım yapar.

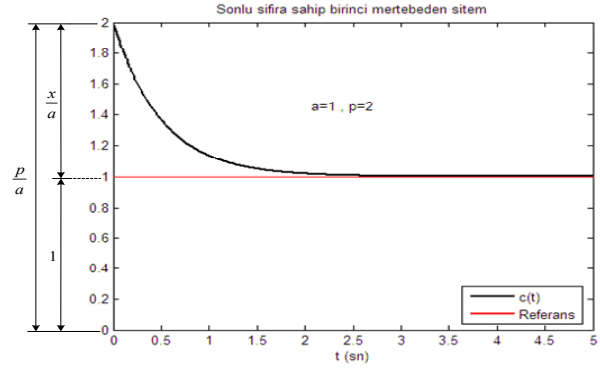
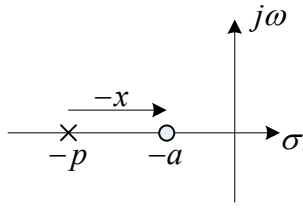


Şekil 2.17: Sıfırın kutbun sağında olması halinde birim basamak yanıtı

Özellikle $p=1$, $a=2$, $x=a-p=1$ için transfer fonksiyonu $G_2(s) = \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+1}$ ve basamak yanıtı;

$$c_2(t) = 1 - 0,5 e^{-t}$$

olarak elde edilir (bkz. Şekil 2.17).



Şekil 2.18: Sıfırın kutbun solunda olması halinde birim basamak yanıtı

Buna karşın $p = 2$, $a = 1$, $x = a - p = -1$ için transfer fonksiyonu $G_2(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)}$ ve basamak yanıtı;

$$c_2(t) = 1 + e^{-2t}$$

olarak elde edilir (bkz. Şekil 2.18). Yapılan bu incelemeyi bir tasarım örneği üzerinde irdeleyelim.

Örnek 2.3

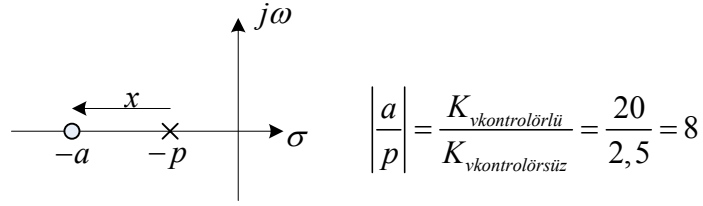
Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

şeklinde verilen sistem için baskın kutupların sönüm oranının $\zeta = 0,45$ olmasını sağlayacak ve aynı zamanda K_v hız hata katsayısının 20 kalmasını sağlayacak faz geriletmeli kontrolörü tasarlayalım.

Hedeflenen kutupların $s = -1 \pm j2$ olduklarını kabul edelim. Bu noktadaki kazanç değeri $K = 5$ 'dir. Dolayısı ile kontrolsüz durumdaki hız hata katsayısı

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \Big|_{K=5} = 2,5 \text{ 'dir. Böylelikle kontrolörün kutup ve sıfırı arasındaki oran}$$



olmaktadır. Eğer $a = 0,1$ ve $p = 0,1/8$ seçilirse yukarıda bulmuş olduğumuz oran sağlanır. Hesaplanan kutup ve sıfır bir birlerine çok yakın seçildiklerinden hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının yerinde önemli bir değişiklik oluşmaz. Açık ve kapalı çevrim transfer fonksiyonları sırası ile

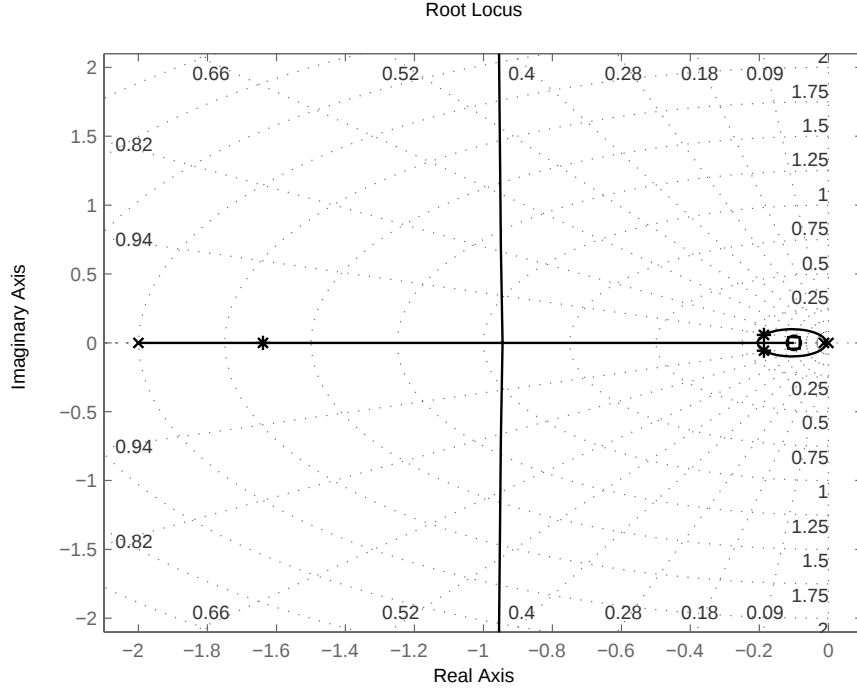
$$G(s) = G_c(s)G_s(s) = \frac{5(s+0,1)}{8s(s+2)(s+0,0125)} \approx \frac{0,625}{s(s+2)}$$

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \frac{5}{8} \frac{(s+0,1)}{s^3 + 2,0125s^2 + 0,65s + 0,0625} \\ &= \frac{5}{8} \frac{(s+0,1)}{(s+1,63923)(s+0.186634 \pm j0.0574057)} \end{aligned}$$

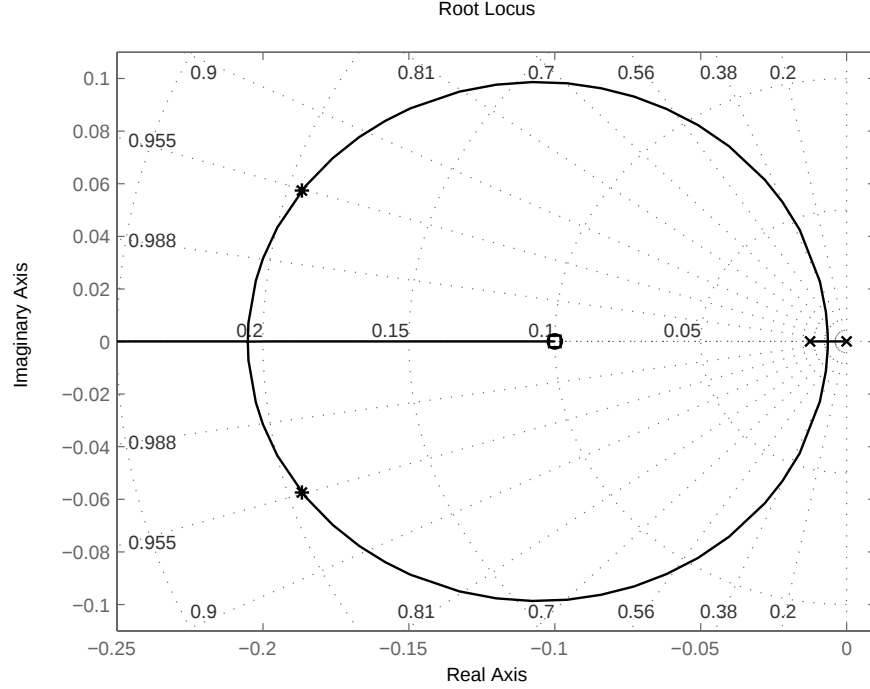
$G_c(s)$ kontrolörünün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin açık çevrim ve kapalı çevrim transfer fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

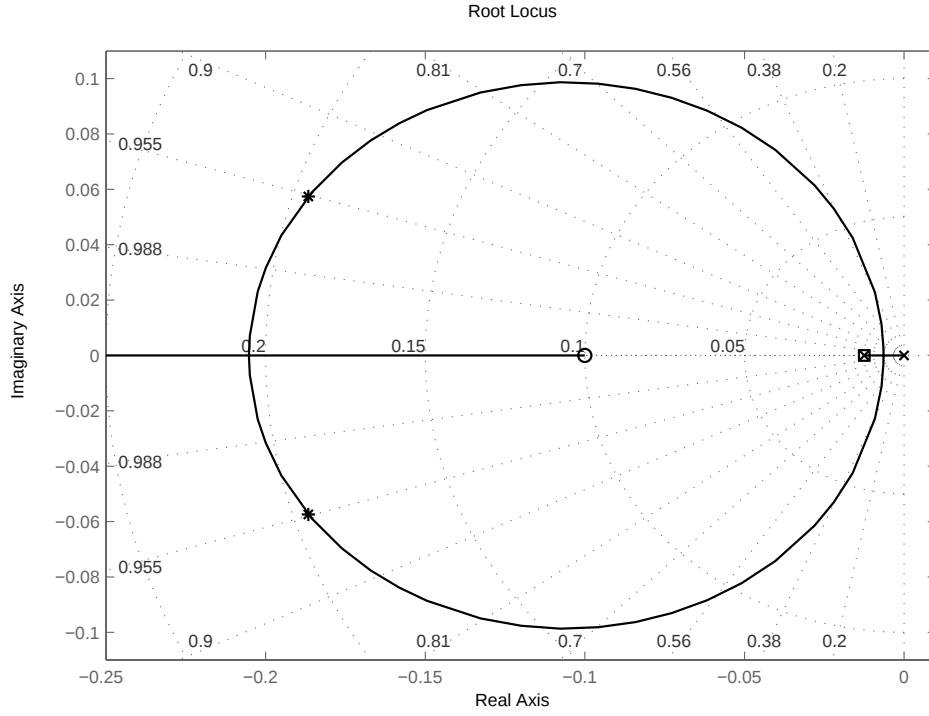
$$G(s) = G_s(s)G_c(s) = \frac{5(s+0,1)}{8s(s+2)(s+0,0125)} \approx \frac{0,625}{s(s+2)}$$

$$\begin{aligned} T_2(s) &= \frac{G_s(s)}{1+G_s(s)G_c(s)} = \frac{5(s+0,0125)}{s^3 + 2,0125s^2 + 5,025s + 0,5} \\ &= \frac{5(s+0,0125)}{(s+0.103578)(s+0.954461 \pm j1.97896)} \end{aligned}$$



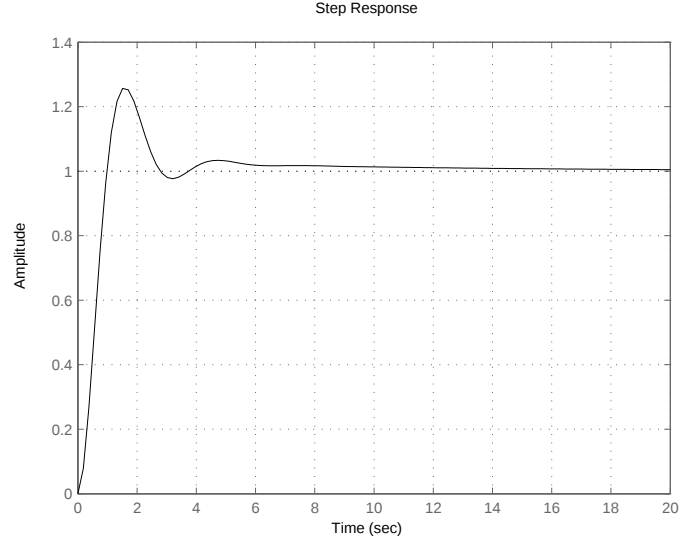
Şekil 2.19: Kontrol edilmiş sisteme ilişkin köklerin yer eğrisi



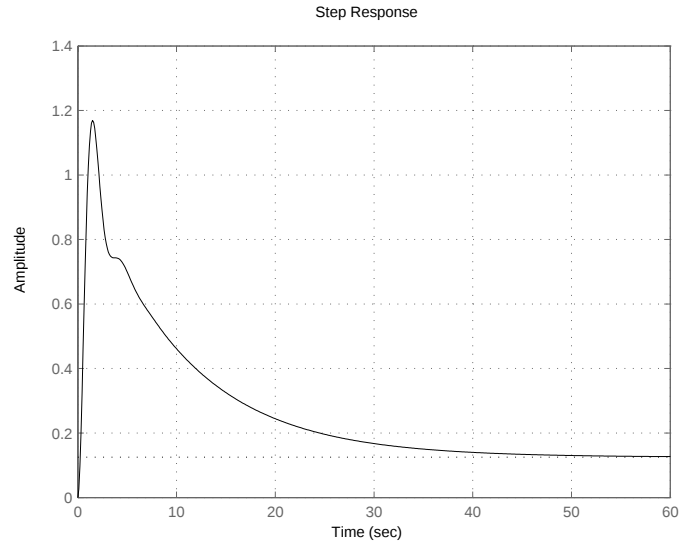


Şekil 2.21: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde küçük K değerlerine ilişkin detay çizim

Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirildiği durumu inceleyelim. Hedeflenen karmaşık eşlenik kutupların baskın olabilmesi için reel eksen üzerindeki merkeze yakın kutup ve sıfır birbirine çok yakın olduğundan sadeleşme olacağı varsayılabilir. Ancak (2.9) denkleminde bilindiği üzere kapalı çevrim sıfırın sistem cevabı üzerine etkisi yalnızca x 'in uzunluğuna bağlı olmayıp aynı zamanda sıfırın karmaşık s düzlemindeki yerine diğer bir değişle x/a oranına bağlıdır. Kapalı çevrim sıfırının $s = -0,1/8$ ile belirtildiği durum için $K = 5$ kazanç değerinde, kapalı çevrim kutupları $s = -0,1$ 'deki açık çevrim sıfırı hizasına ulaşır. Dolayısı ile $x/a = 7$ olduğundan herhangi bir kutup sıfır sadeleşmesi gerçekleşmez ve sistem birim basamak yanıtında % 835 'lük bir aşım meydana gelir. Şu halde bu durumda kontrolörün kesinlikle geri besleme yoluna yerleştirilmesi gerekir.



Şekil 2.22: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı

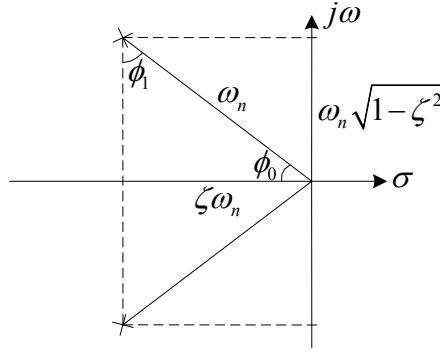


Şekil 2.23: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sisteme ilişkin birim basamak cevabı

2.2.3 İkinci Mertebeden Sistemlerin Analitik Analizi

İkinci mertebeden sıfırı bulunmayan bir sistemi göz önünde bulunduralım;

$$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad 0 < \zeta < 1 \quad (2.10)$$



Şekil 2.24: İkinci mertebeden sistem kutuplarının s düzleminde konumu

Transfer fonksiyonu $G_1(s)$ ile verilmiş olan sisteme ilişkin $c_1(t)$ birim basamak yanıtı;

$$c_1(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \cos \left[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1 \right] \quad (2.11)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

şeklindedir. Sistem cevabının % 2 bandına erişme zamanına karşı düşen T_s yerleşme zamanı

$$T_s = \frac{\ln \left(0.02 \sqrt{1-\zeta^2} \right)}{\zeta \omega_n} \gg \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (2.12)$$

T_p tepe değerine ulaşım zamanı

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.13)$$

ve % aşım ;

$$\% \text{aşım} = 100 e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \pi}$$

ifadelerinden analitik olarak hesaplanabilir.

Yukarıda verilen ifadeler karmaşık eşlenik baskın kutuplar esas alınarak kolaylıkla yüksek mertebeden sistemlere uygulanabilir. Şimdi ikinci mertebeden ve bir gerçek sıfır içeren sisteme ilişkin sistem yanıtını ve davranış ölçütlerini inceleyelim.

2.2.4 Sıfır İçeren İkinci Mertebeden Bir Sistemin Birim Basamak Cevabı

İkinci mertebeden bir sıfırı bulunan bir sistemin transfer fonksiyonu;

$$G_2(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce birinci mertebeden sistemler için yaptığımız işlemi yani $G_2(s)$ 'i $G_1(s)$ cinsinden ifade edelim ve (2.8) denkleminde olduğu gibi sıfırların sistem cevabı üzerine etkisini gösterelim. Bilindiği gibi sıfırın a konumu sistemin geçici hal cevabını etkiler. Sistem cevabı büyük a değerlerinde çok, küçük a değerlerinde ise az etkilenir. (2.14) denklemiyle verilen sisteme ilişkin basamak yanıtı;

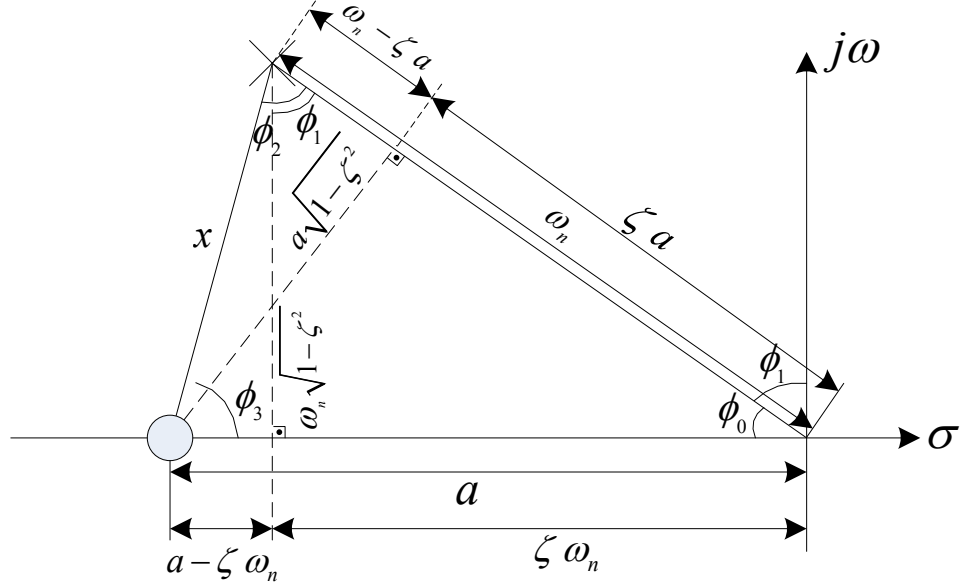
$$\begin{aligned} c_2(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) - \frac{\omega_n - \zeta a}{a \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \\ &= 1 + e^{-\zeta\omega_n t} \frac{x}{a \sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_2] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{a \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n - \zeta a} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

$$x = \sqrt{(\omega_n - \zeta a)^2 + a^2 (1-\zeta^2)} = \sqrt{(a - \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 (1-\zeta^2)} \quad (2.16)$$

olarak tanımlanır ve Şekil 2.25 'den de görüldüğü gibi bu değer sıfır-kutup mesafesine karşı düşer.



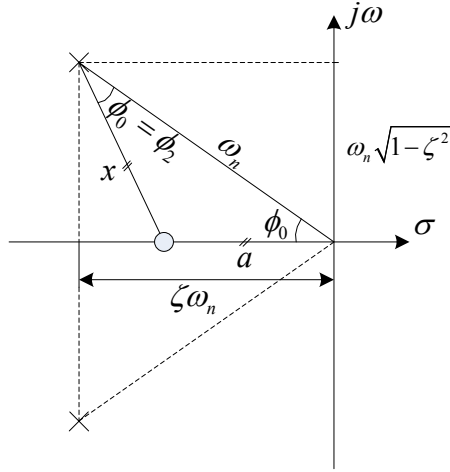
Şekil 2.25: Sonlu bir sıfıra sahip ikinci mertebeden sistemin s düzleminde kutup sıfır geometrisi

Sıfır bulunması halinde elde etmiş olduğumuz sonuçları (Denklem (2.15)) yalnızca kutuplardan oluşan sistem için elde etmiş olduğumuz sonuçlarla karşılaştırabilmek için (2.15) denklemini bir kosinüs fonksiyonu şeklinde düzenleyelim;

$$c_2(t) = 1 + e^{-\zeta \omega_n t} \frac{x}{a \sqrt{1-\zeta^2}} \cos \left[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \left(\phi_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (2.17)$$

Buradan; s düzleminde a sıfırı $-\infty$ 'a yaklaştıkça x/a oranı bire gider (bkz. Şekil 2.25), (2.17) ve (2.11) denklemleri yakınsar. $\sin \alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$.

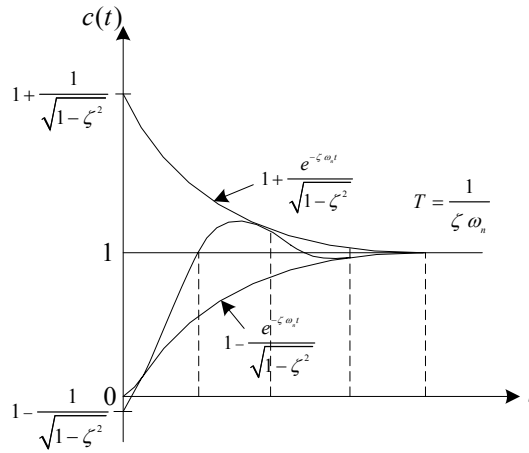
Dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli husus ise şayet sıfır merkeze ve kutba eşit uzaklıkta bir yere yerleştirilecek olursa yani $x=a$ ise $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ sistem cevapları arasındaki tek fark faz açılarıdır. Bu durumda Şekil 2.26 'da görüldüğü gibi $\phi_2 = \phi_0 = \cos^{-1} \zeta$ değerini alır.



Şekil 2.26: $x = a$ durumu için kutup sıfır geometrisi

2.2.4.1 Yerleşme Zamanının Elde Edilmesi

Zaman tanım bölgesi davranışı ölçütlerinden T_s yerleşme zamanını belirlenirken yanıt eğrisinin zarf eğrisinin % 2 bandına girme zamanı temel olarak tanımlanır.



Şekil 2.27: İkinci mertebeden sisteme ilişkin zarf eğrisi

Sıfır içeren ikinci mertebeden bir sistemde yerleşme zamanı ifadesini türetmek için (2.17) denkleminde zarf eğrisinin % 2 bandına girme zamanı

$$\left| \frac{x}{a\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_s} \right| = 0,02 \quad (2.18)$$

İlişkisinden türetilir. Bu ifadede T_s yerleşme zamanı, küçük ζ değerleri için

$$T_s = \frac{-\ln\left(\frac{0,02\sqrt{1-\zeta^2}}{|x/a|}\right)}{\zeta \omega_n} = \frac{\ln\left(\left|\frac{x}{a}\right|\right) - \ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \omega_n} > \frac{-4 + \ln\left(\left|\frac{x}{a}\right|\right)}{\zeta \omega_n} \quad (2.19)$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz yerleşme zamanı ifadesine dikkat edilecek olursa $x=a$ da ya da $-\infty$ 'a yakın bir yerde bir sıfırın bulunması halinde, sıfırın zaman cevabı üzerinde herhangi bir etkisi olmadığı rahatlıkla söylenebilir. Benzer şekilde (2.19) denkleminde $x > a$ yani sıfırın merkeze yakın olduğu durumda ise yerleşme zamanı artar. Ancak $x < a$ değerleri için $\ln(x/a)$ negatif değerler alır dolayısı ile sistemde hiç sıfır yokken elde edilenden çok daha kısa bir yerleşme zamanı elde edilir. Aslında sistem kapalı çevrim sistem sıfırları ideal bir türev elemanı işlevini üstlenir.

Yerleşme zamanının en küçük değerini veren kapalı çevrim sıfır değerini bulalım. (2.19) denkleminde x yerine (2.16) ilişkisi yazılırsa

$$\frac{dT_s}{da} = \frac{d}{da} \left[\ln\left(\frac{x}{a}\right) \right] = 0 \quad (2.20)$$

koşulundan

$$a = \frac{\omega_n}{\zeta}$$

elde edilir. Bu değer (2.16) denkleminde yerine konursa;

$$\left(\frac{x}{a}\right)_{\min} = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.21)$$

ve (2.19) ifadesinden küçük ζ değerleri için $\sqrt{1-\zeta^2} \cong 1$ 'e yaklaştığı için;

$$T_{s\min} = -\frac{\ln(0.02)}{\zeta \omega_n} \quad (2.22)$$

bulunur. Ayrıca Şekil 2.25 gereği yazılabilen

$$\sin \phi_2 = \frac{a\sqrt{1-\zeta^2}}{x}$$

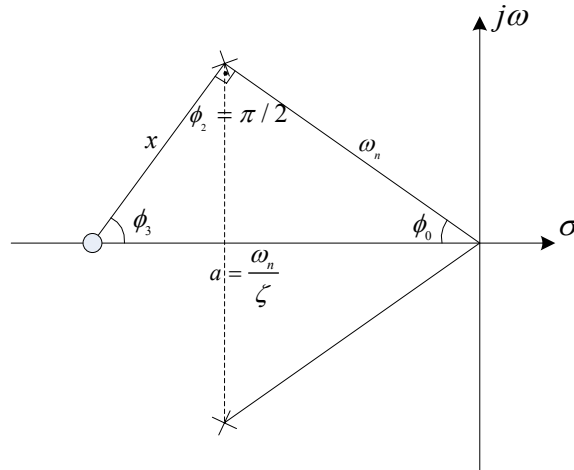
ilişkisinden (2.21) koşulu ile, $\sin \phi_{2\min} = 1$ yada

$$\phi_{2\min} = \frac{\pi}{2} \quad (2.23)$$

elde edilir. Sonuç olarak $c_2(t)$, (2.17) denkleminde aşağıdaki şekle dönüşür;

$$c_2(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

Bulunan $T_{s\min}$ sonuçları s düzleminde işlenirse Şekil 2.28 ‘deki yerleşime ulaşır.



Şekil 2.28: $T_{s\min}$ yada $\phi_2 = \pi/2$ olması halinde s düzleminde kutup sıfır yerleşimi

Buradan görüleceği üzere $T_{s\min}$ minimum yerleşme zamanı, ϕ_2 açısının Şekil 2.28 ‘de ki gibi $\phi_2 = \pi/2$ olduğu durumda gerçekleşir.

2.2.4.2 Tepe Zamanının Elde Edilmesi

Sönümlü ikinci mertebeden sistemlerde sistem sıfırının yalnızca yerleşme zamanı üzerinde etkisi olmayıp aynı zamanda aşımın olduğu T_p tepe zamanını da etkiler. Tepe zamanı sistem birim basamak cevabının birinci türevi alınarak hesaplanabilir. Bu türev ifadesi frekans tanım bölgesinde yazılırsa

$$L[\dot{c}(t)] = s G(s) \frac{1}{s} = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

ve ters laplace dönüşümü alınır;

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= \frac{\omega_n}{a} e^{-\zeta \omega_n t} \left[\omega_n \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{a-\zeta \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \\ &= \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \frac{x}{a\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_3] \end{aligned} \quad (2.24)$$

yazılabilir. Burada ϕ_3 açısı;

$$\phi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{a-\zeta \omega_n} \right) \quad (2.25)$$

ve x ifadesi (2.16) denkleminde olduğu gibi,

$$x = \sqrt{(a-\zeta \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1-\zeta^2)} \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır.

Denklem (2.24) 'den görüldüğü gibi sistem cevabının maksimum ve minimum değeri sinüslü terimin sıfır olduğu noktada gerçekleşir:

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_3 = n\pi \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.27)$$

(2.24) ilişkisinden $\phi_3 \neq 0$ için $t=0$ anında bir çözümünün bulunmadığı açıkça görülür. Buna göre $t=0$ anında bir çözümün varlığı ancak sıfır eksi sonsuzda ise mümkündür, çünkü bu durumda Şekil 2.28 'den görüldüğü gibi $\phi_3 \equiv 0$ olur. Yalnızca kutuplardan oluşmuş sistemlerin aksine sıfır içeren ikinci mertebeden sistemlerde sistem cevabı ifadesi $t=0$ anında mevcut sıfırın fazına bağlı olduğundan sıfırın etkisi ile sistem yanıtı sistemin başlangıç koşulundan oldukça sık saptığı görülür.

Dikkat edilecek olursak Denklem (2.27) nin sıfırdan farklı ilk çözümü ($n=1$) bize tepe zamanını verir;

$$T_p = \frac{\pi - \phi_3}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.28)$$

Denklem (2.13) 'de yalnızca kutuplardan oluşmuş ikinci mertebeden sistem için yazmış olduğumuz tepe zamanı ifadesini Denklem (2.28) 'de elde etmiş olduğumuz sonlu bir sıfıra sahip ikinci mertebeden sisteme ilişkin tepe zamanı ifadesi ile karşılaştırsak, T_p zamanını azaltması, daha önce bahsetmiş olduğumuz sıfırların ideal türev elemanları olarak değerlendirilebileceği düşüncesini desteklediği gibi, T_p tepe zamanının ϕ_3 açısı ile orantılı olarak azaldığını kanıtlar. Yine (2.28) ve (2.13) ifadelerinden eğer kutup ve sıfır arasındaki açı $\phi_3 = \pi/2$ ise, diğer bir değişle kutup ve sıfır aynı reel kısımlara sahip ise, T_p tepe zamanının yarıya düşeceği açıkça görülür.

2.2.4.3 Maksimum Aşımın Elde Edilmesi

Elde etmiş olduğumuz tepe zamanı ifadesini, sonlu sıfıra sahip ikinci mertebeden sistemler için elde ettiğimiz (2.15) sistem birim basamak cevabı ifadesine uygularsak, sistem yanıtının en büyük değeri $c_2(T_p)$ için ;

$$\sin(\pi - \phi_2 - \phi_3) = \sin(\phi_0) = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

olduğundan,

$$c_2(T_p) = 1 + e^{-\zeta \left(\frac{\pi - \phi_3}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)} \frac{x}{a \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\pi - \phi_2 - \phi_3) = 1 + \frac{x}{a} e^{-\zeta \left(\frac{\pi - \phi_3}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)} \quad (2.29)$$

ve bu ilişkiden yüzde aşım ifadesi için

$$\% a_{şım} = \frac{100 x}{a} e^{-\zeta \left(\frac{\pi - \phi_3}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)} \quad (2.30)$$

ilişkisi elde edilir. Denklem (2.15) 'de verilen ifadeden $t \rightarrow \infty$ için sistem yanıtının $c_2(t) \rightarrow 1$ olduğu görülür.

Salt kutuplardan oluşan ikinci mertebeden sistemin %aşım ifadesi (2.13) ile karşılaştırılırsa, burada $(x/a) \exp\left(\zeta \phi_3 / \sqrt{1-\zeta^2}\right)$ çarpımı kadar daha büyük bir değer elde edilir. Eğer sıfır merkeze yakın (a küçük) ise, %100 'ün üzerinde bir aşım meydana gelir. Benzer şekilde eğer sıfır $-\infty$ 'a, x/a oranı ise bire yaklaşırsa, bu durumda $\phi_3 \cong 0$ olacağından sıfırın etkisini temsil eden ilave terim bire yaklaşır ve sıfırın sistem cevabı üzerindeki etkisi ihmal edilebilir bir düzeyde kalır.

2.2.5 Minimum Fazlı Olmayan Sistemler

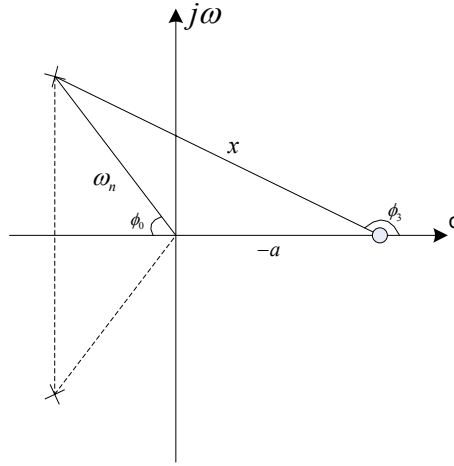
Şekil 2.29 'da görüldüğü gibi, sağ yarı s düzleminde en az bir sıfır ya da kutbu bulunan bir sisteme, minimum fazlı olmayan bir sistem denir.

Bu tür sistemlerin davranışları, sağ yarı s düzleminde sahip oldukları sıfırlar tarafından belirlenir. En önemli özelliği sisteme ilişkin geçici hal cevabının ilkin basamak girişe ters yönde bir değişim göstermesidir.

Şekil 2.29 incelendiğinde a 'nın yalnızca negatif işaretli ve aynı zamanda x/a oranının hep birden büyük olduğu görülür. Bunun yanı sıra sağ yarı s düzlemindeki sıfıra ait ϕ_3 açısının değeri merkeze aynı uzaklıktaki sol yarı s düzlemindeki sıfıra ait açıdan hep daha büyüktür. Bu nedenden dolayı daha önce yapmış olduğumuz analize farklı bir boyut getirilir.

(2.30) denklemi ile verilen en büyük yüzde aşım ifadesini göz önünde bulunduralım, minimum fazlı olmayan bir sistemde a 'nın işareti değişeceğinden minimum fazlı olmayan sistemlerde başlangıçta görülen ters yönde geçici hal davranışı aşım değerinde farklılığa neden olur. Daha önce yaptığımız incelemelerde, sıfır merkeze yaklaştıkça en büyük aşımın hep arttığı görülür. Ancak sıfırın merkezden çok uzağa artı sonsuza doğru götürüldüğünü düşünecek olursak, x/a oranı eksi bire ve ϕ_3 açısının değeri de π ye yakınsar. Bunun anlamı (2.30) denklemiyle verilen maksimum aşım ifadesinde bulunan üstel terimin eksi bire yaklaşması ve dolayısı ile de %aşım 'ın % 100 ters aşımaya yakınsamasıdır. Şu halde oluşan bu durum en büyük yüzde ters aşım (% en büyük ters aşım = 100 + % en büyük aşım) olarak

yorumlanabilir. Sistem sıfırının tıpkı sol yarı s düzlemi için yaptığımız analizlerdeki gibi merkezden uzaklaştıkça, yani sıfır artı sonsuza yaklaştıkça, sistem cevabı üzerindeki etkisinin azaldığı ve merkeze yaklaştıkça sistem basamak cevabının merkeze yakınlığı nispetinde baskın hale geldiği söylenebilir.



Şekil 2.29: İkinci mertebeden minimum fazlı olmayan bir sisteme ilişkin kutup sıfır yerleşimi

En büyük ters aşım meydana geldiği zaman (2.28) denkleminde de görüldüğü gibi, sıfır sağ yarı s düzlemi boyunca merkezden uzaklaştıkça $\pi - \phi_3$ değeri ile birlikte azalır.

Minimum fazlı olmayan sistemler için en büyük aşım ve tepe zamanı ifadeleri (- işareti yerine ilişkilerde π kadar faz ilave ederek) $\forall a < 0$ için aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\%a_{şım} = \frac{100x}{a} e^{-\zeta \left(\frac{2\pi - \phi_3}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)} , \quad T_p = \frac{2\pi - \phi_3}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.31)$$

Sağ yarı s düzlemindeki sıfırlar için x/a oranı hep birden büyük olduğundan sıfır, T_s yerleşme zamanını da etkiler. (2.19) denkleminde de görüldüğü gibi minimum fazlı olmayan sistemlerde sıfır artı sonsuza yaklaştığında $|x/a| \cong 1$ olacağından T_s yerleşme zamanı sistemde sıfırın bulunmadığı durumdaki değere yakınsar.

Yukarıda türetilen sonuçlar genelleştirilirse; eğer kutup sıfır arasındaki uzaklık sıfır ile merkez arasındaki uzaklıktan büyük ise en büyük aşım ve yerleşme zamanı büyür.

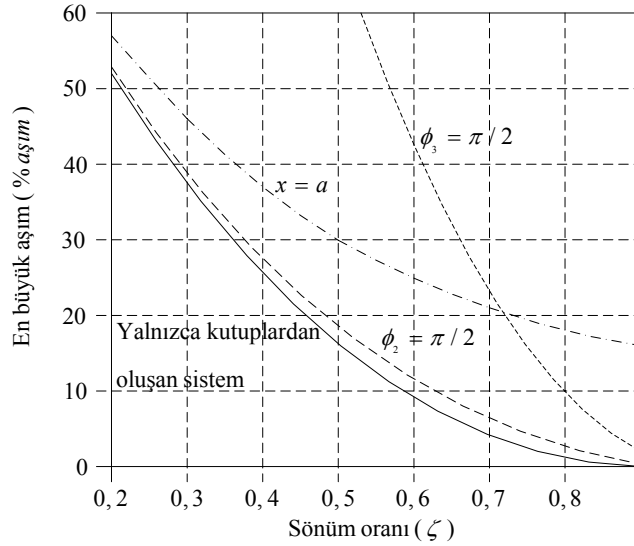
Bu durum minimum fazlı olmayan sistemlerde kaçınılmazdır ancak sıfır merkezden uzaklaştıkça etkisi önemli ölçüde azalır ve sonunda sistemde sıfırın bulunmadığı duruma yakınsar.

2.2.6 Sıfır Yerleştirme

Kapalı çevrim sıfırlarının sistemin dinamik davranışı üzerine etkilerini inceledikten sonra elde ettiğimiz sonuçları kullanarak kontrol sistemini tasarlamamız halinde sıfır atama işleminde bu sonuçlardan nasıl yararlanabileceğimizi görelim. Genellikle kontrol sistemleri tasarlanırken kutup ve sıfırların birbirini sadeleştirerek istenmeyen etkilerin en aza indirgenmesi için, mümkün olduğunca birbirlerine yakın seçilir. Ancak yukarıda yaptığımız analizler hangi kutup veya sıfırın sistem dinamiği üzerinde etkili olacağının sadece kutup sıfır arasındaki mesafeye bağlı olmadığını aynı zamanda x/a oranının da bir o kadar belirleyici olduğu anlaşılır.

Tasarım yapılırken dikkat edilmesi gereken diğer bir önemli husus ise tepe veya yükselme zamanını kısaltırken en büyük aşımı kabul edilebilir bir düzeyde tutabilmektir. Sıfırın kutbun solunda ve baskın kutbun gerçek olması halinde sistem cevabının aşım yapmadığı daha önce gözlemlenmişti. Karmaşık kutupların bulunması halinde, eğer, sıfır, kutuplara göre büyük bir ϕ_2 açısı oluşacak şekilde yerleştirilirse, sistem cevabı yalnızca kutuplardan oluşan sistem için hesaplanan en büyük aşımın yaklaşık % 3 civarında bir aşım yapar ve en küçük yerleşme zamanı gerçekleşir. Elde edilen T_s yerleşme zamanı $4/\zeta \omega_n$ ile elde edilecek değere çok yakındır.

Ancak özellikle düşük ζ sönüm oranına sahip sistemlerde, sıfırı merkezden oldukça uzağa yerleştirmek daha uygun bir sonuç verir. Bir diğer alternatif sıfırı, karmaşık kutuplarla aynı gerçek kısma sahip olacak şekilde, yani $\phi_3 = \pi/2$ seçmektir. Böylelikle tepe zamanını tamamen kutuplardan meydana gelen sisteme ilişkin tepe zamanının yarısı kadar bir tepe zamanı elde edilir. En büyük aşım ile sönüm oranı arasındaki ilişki Şekil 2.30 'da ki gibidir.



Şekil 2.30: Sistem sıfırının farklı durumları için sönüm oranına göre en büyük aşım değerinin değişimi

Sıfırın $\phi_3 = \pi/2$ olacak şekilde yerleştirilmesi; Şekil 2.30 'dan da görüldüğü gibi sönüm oranının 0,7 veya daha çok, kutup bölgesinin merkezle yaptığı açının $\phi_0 < \pi/4$ olduğu durumda ve aşımın % 20 veya daha az olduğu sistemler için uygundur. Bu durumda x/a oranı her zaman birden küçük olacak ve (2.19) denklemi uyarınca yerleşme zamanı her zaman sadece kutuplardan oluşan bir sistemin yerleşme zamanından biraz daha küçük olur. Ancak mevcut durumun biraz dışına çıkılması halinde yalnızca yerleşme zamanı hızlı bir biçimde artmakla kalmaz, bunun yanı sıra en büyük yüzde aşım ve sönüm oranı da giderek daha duyarlı bir hale gelir.

Böyle bir durumla karşı karşıya kalınması halinde sıfırı merkezle kutba eşit uzaklıkta bir yere yerleştirmek yani $x = a$ seçmek çok daha iyi bir sonuç verir. Bu yöntem tamamen kutuplardan oluşan bir sistemle aynı yerleşme zamanı performansını sağlayacak, bunun yanı sıra en büyük yüzde aşım miktarını ve sönüm oranını düzeltecektir.

Örnek – 2.4

Transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

şeklinde verilen sistem için T_s yerleşme zamanını 4 saniyeden az, ayrıca aşım değerini %20 'de tutacak faz ilerlemeli bir kontrolör tasarlanmak istenmektedir.

$$\%aşım = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0,20$$

ilişkisinden $\zeta = 0,45$ ve T_s yerleşme zamanı

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4 \text{ s}$$

ifadesinden $\omega_n = 2,2$ olduğu görülür. Dolayısı ile sistemin hedeflenen kapalı çevrim kutupları $s_{1,2} = -1 \pm j2$ 'dir. Kontrolör sıfırını hedeflenen kutbun yaklaşık olarak iki katı uzaklıkta $s = -2$, kutbu $s = -12$ ve sistem kazancını sistem üçüncü kutbu $s_3 = -10$ 'a gelecek şekilde $K = 25$ olarak seçelim. Bu durumda açık çevrim transfer fonksiyonu

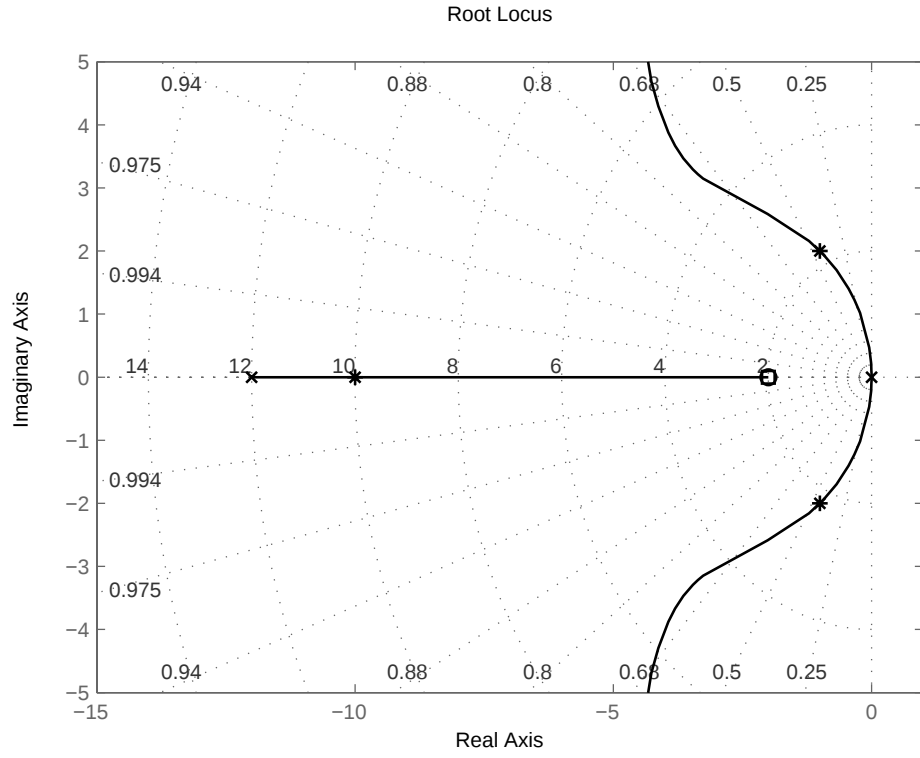
$$KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+12)}$$

şeklinde elde edilir. Köklerin geometrik yerleri Şekil 2.31 'da, sistemin birim basamak yanıtı Şekil 2.32 'de verilmiştir.

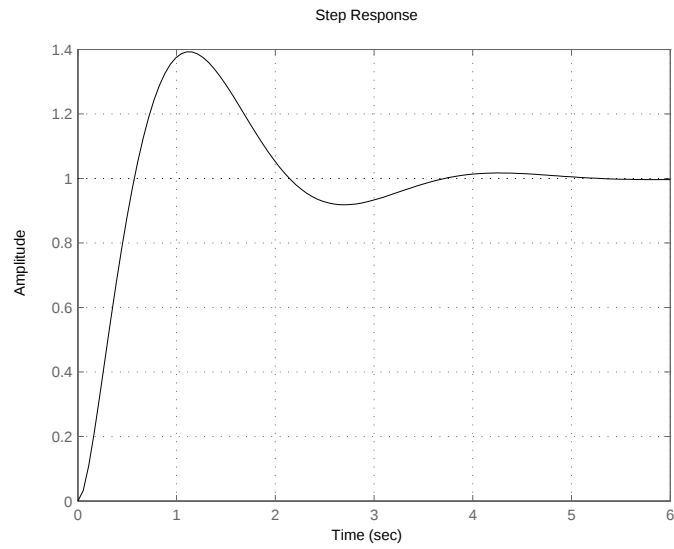
Sistemin birim basamak yanıtı eğrisinden;

$$T_s = 3,47 \text{ s} \quad , \quad \%aşım = \%40$$

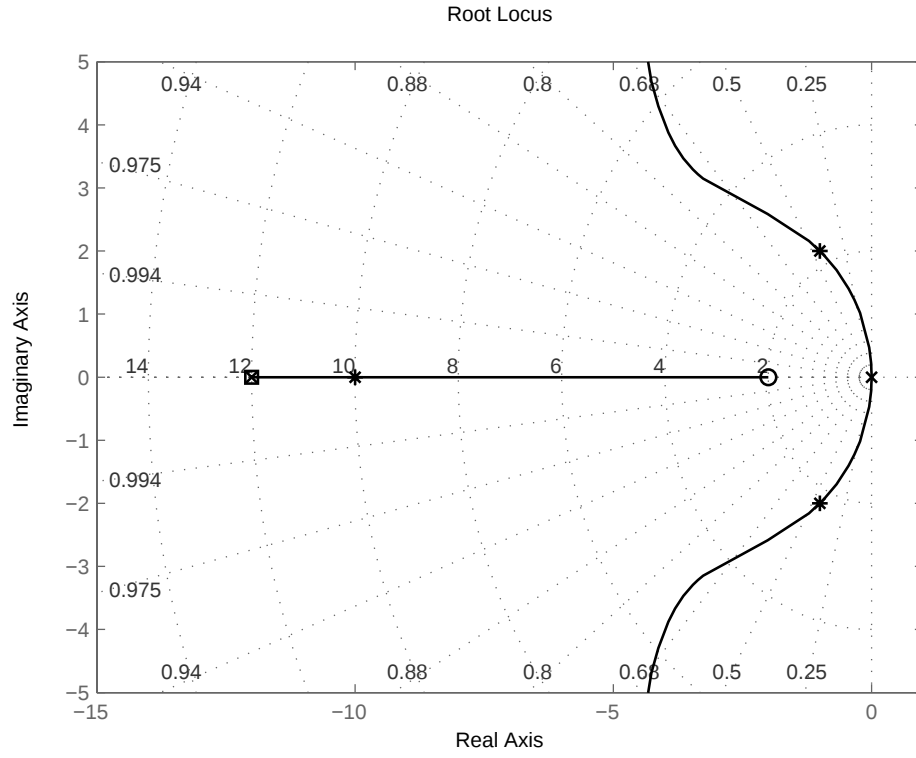
olarak elde edilir.



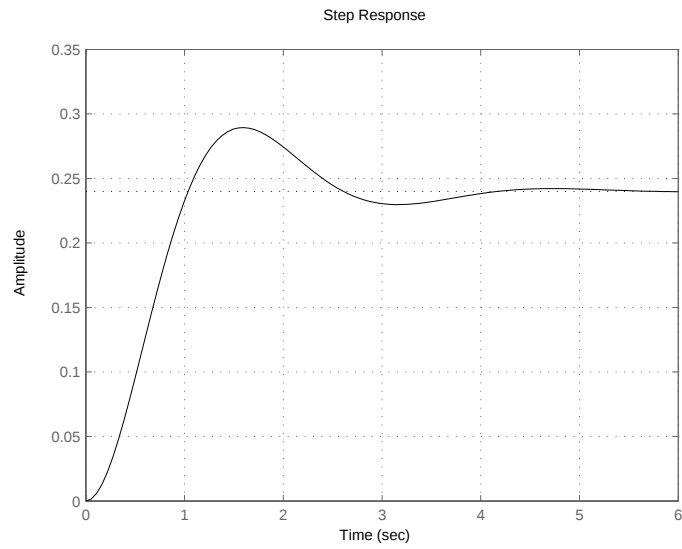
Şekil 2.31: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde kapalı çevrim köklerinin değişimi



Şekil 2.32: Kontrolörün iler yola yerleştirilmesi halinde sistem yanıtı



Şekil 2.33: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde köklerin geometrik yerleri



Şekil 2.34: Kontrolörün geri besleme yolu üzerine yerleştirilmesi halinde sistemin birim basamak yanıtı

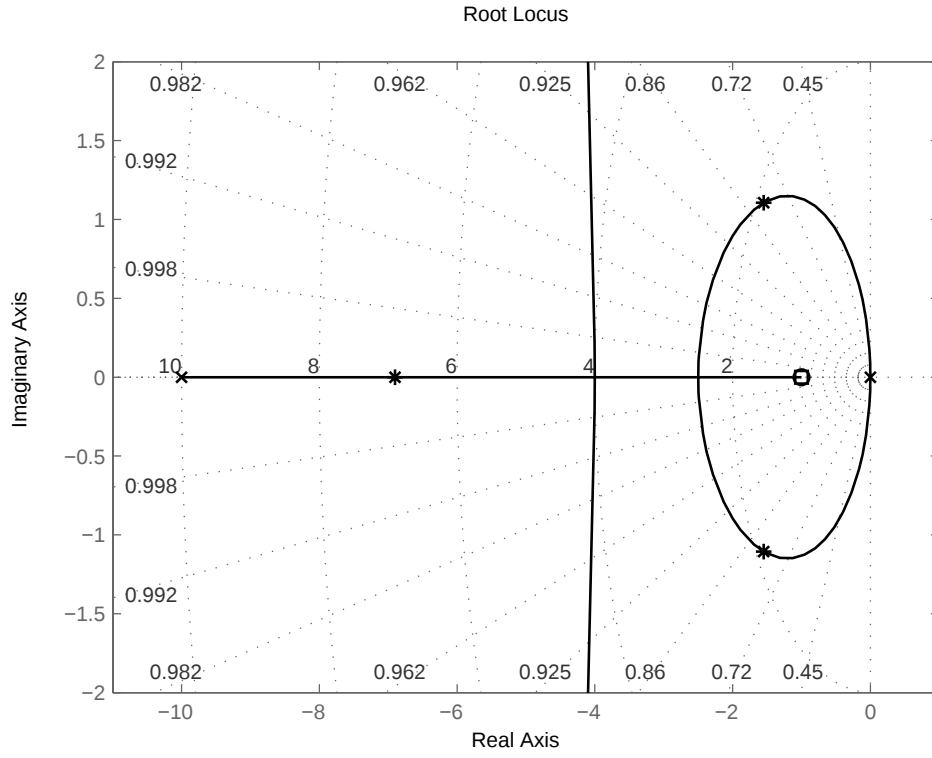
Eğer kontrolör geri besleme yolu üzerine yerleştirilirse köklerin yer eğrisi Şekil 2.33 ‘de, birim basamak giriş yanıtı Şekil 2.34 ‘de olduğu gibi elde edilir. Bu örnekte T_s yerleşme zamanı ve aşım için

$$T_s = 3,75 \text{ s} \quad , \quad \%aşım = \%20$$

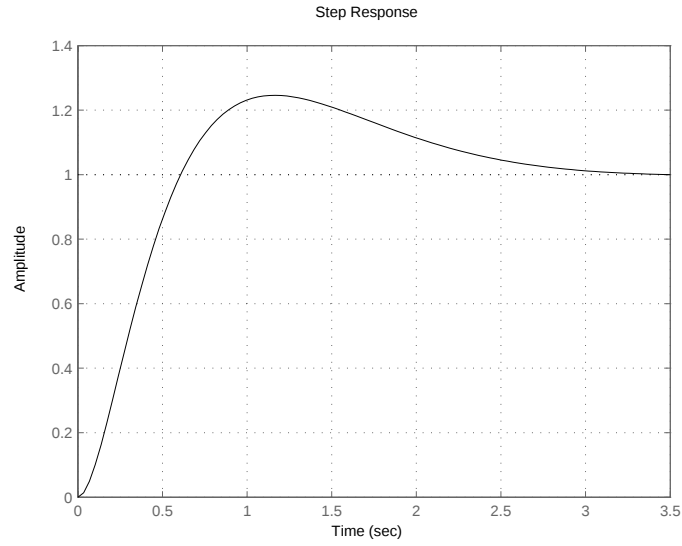
değerleri elde edilir. Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlara göre kontrolörü geri besleme yolu üzerine yerleştirmek daha iyi sonuç vermektedir. Şimdi kontrolörün ileri yol üzerine yerleştirildiği durumda sıfır yerleştirme kurallarını kullanarak sistem cevabında iyileştirme yapılabilir mi ona bakalım.

İlk olarak kontrolör sıfırını, sistem cevabını saf kutuplardan oluşan sistem cevabına yakın bir cevap verecek şekilde, büyük bir ϕ_2 veya $\phi_2 = \pi/2$ olacak şekilde yerleştirmeyi düşünelim. Ancak bu durumda yerleştireceğimiz sıfırın konumu hedeflenen kapalı çevrim kutuplarından uzak kalabilir. Bu nedenle farklı bir tasarım stratejisi izlemek gerekir.

Sistem sıfırını, hedeflenen kapalı çevrim kutuplarıyla aynı reel kısma sahip olacak şekilde yerleştirdiğimizi düşünelim. Şekil 2.30 ‘dan da görüldüğü üzere sıfır kapalı çevrim kutupları ile aynı reel kısma sahip ($\phi_3 = \pi/2$) olacak şekilde seçmek yalnızca $\zeta \geq 0,7$ ve $\phi_0 < \pi/4$ olduğu durumda aşımı % 20 nin altında tutmak için yeğlenir, aksi takdirde yanıtıcı sonuç elde edilir. Bu durumda tasarımı gerçekleştirmek üzere kullanacağımız strateji sistem sıfırını ve hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını merkeze eşit bir uzaklığa yerleştirmektir. Ancak burada sistem sıfırını Şekil 2.26 ‘da ki gibi yerleştirmek olanaksızdır, aksi takdirde yapacağımız sıfır yerleştirmesi $\phi_2 \geq \pi/2$ durumuna karşı gelir. Bu nedenden dolayı sıfır $s = -1$ noktasına yerleştirecek olursak, sıfırın merkez ve kapalı çevrim kutuplarına aynı mesafeye sahip olmasını sağlamak için hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını $s_{1,2} = -1 \pm j$ olarak değiştirir ve kontrolör kutbunu sistem cevabı üzerindeki etkisini ihmal edilebilecek düzeyde tutmak için sıfırdan on kat uzağa $s = -10$ ‘a yerleştiririz. Bu duruma ilişkin köklerin geometrik yerleri Şekil 2.35 ‘de, sistemin birim basamak yanıtı da Şekil 2.36 ‘de verilmiştir.



Şekil 2.35: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde köklerin değişimi



Şekil 2.36: Kontrolörün ileri yola yerleştirilmesi halinde sistem yanıtı

Sistem birim basamak yanıtından yerleşme zamanı ve aşımın

$$T_s = 2,83s \quad , \quad \%aşım = \%24,6$$

olduğu görülür. Sonuçlar karşılaştırılırsa elde edilen sonuçların diğer yerleştirme yöntemlerine göre daha iyi olduğu görülür.

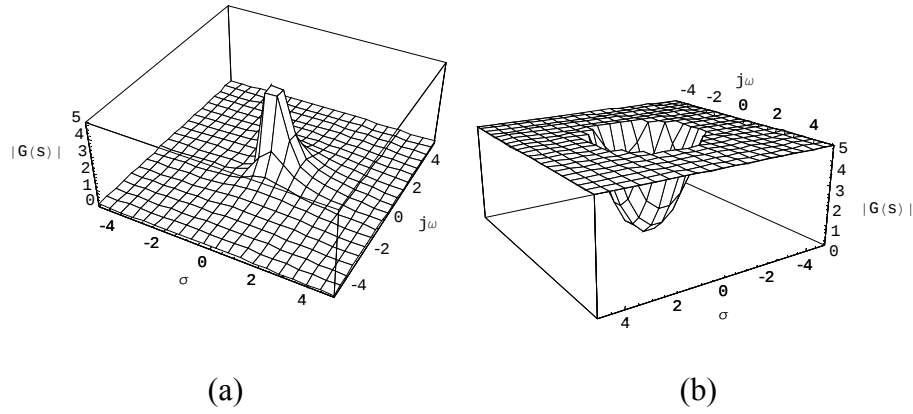
Sonuç olarak yukarıda tanımlanan sıfır konumu ve sistem cevabı arasındaki ilişkiler kısaca özetlenirse;

- Sıfırın baskın karmaşık kutupların solunda olması halinde sıfır, kutuplara göre büyük bir ϕ_2 açısı oluşturacak şekilde yerleştirilirse sistem cevabı yalnızca kutuplardan meydana gelen sistem cevabının % 3 'ü civarında bir aşım yapar.
- ζ sönüm oranının küçük olduğu sistemlerde, sıfırı merkezden oldukça uzağa yerleştirmek daha uygun bir sonuç verir.
- $\phi_3 = \pi / 2$ yani kutup ve sıfırın aynı reel kısımlara sahip olmaları halinde T_p zamanı, yalnızca kutuplardan meydana gelen bir sistemde elde edilecek olanın yarısı kadardır.
- $\phi_3 = \pi / 2$, çözümü Şekil 2.30 'dan da görüldüğü gibi sadece $\zeta \geq 0,7$, $\phi_0 < \pi / 4$ ve %aşım'ın % 20 'den az olduğu sistemlerde uygundur. Bu durumun dışına çıkılması halinde ($\zeta < 0,7$) Şekil 2.30 gereğince $x = a$ seçilmesi daha uygundur.

Yukarıda söz konusu edilen kurallar dikkate alınarak gerçekleştirilecek bir tasarım standart köklerin yer eğrisi esas alınarak yapılan bir tasarımda, mevcut sistem sıfırlarının göz ardı edilmesi sonucu oluşan hatalı tasarım önlenmiş olur.

3. KUTUPLAR VE SIFIRLAR

Bir sisteme ilişkin kutup ve sıfırlar, sisteme ilişkin ($G(s)$) transfer matrisini sonsuza ya da sıfıra götüren karmaşık frekans değerleridir. Skaler durumda $G(s)$ transfer fonksiyonu kutup ve sıfır davranışı Şekil 3.1 (a,b)'de olduğu gibi görüntülenebilir.

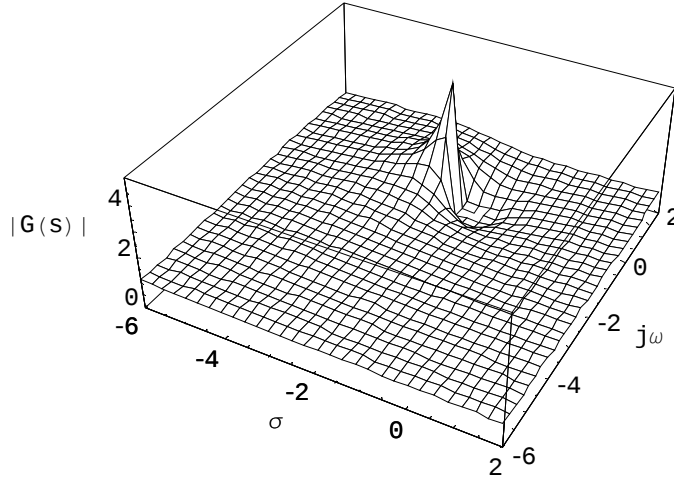


Şekil 3.1: $G(s)$ transfer fonksiyonunda:

- a) Kutup etkisi
- b) Sıfır etkisi

Örnek olarak $G(s) = (s+1)/(s+2)$ transfer fonksiyonu göz önünde bulundurulursa, $s = \sigma + j\omega$ karmaşık frekansı ifade eder. Bu transfer fonksiyonunun $z = -1$ 'de bir sıfıra, $p = -2$ 'de ise bir kutba sahiptir.

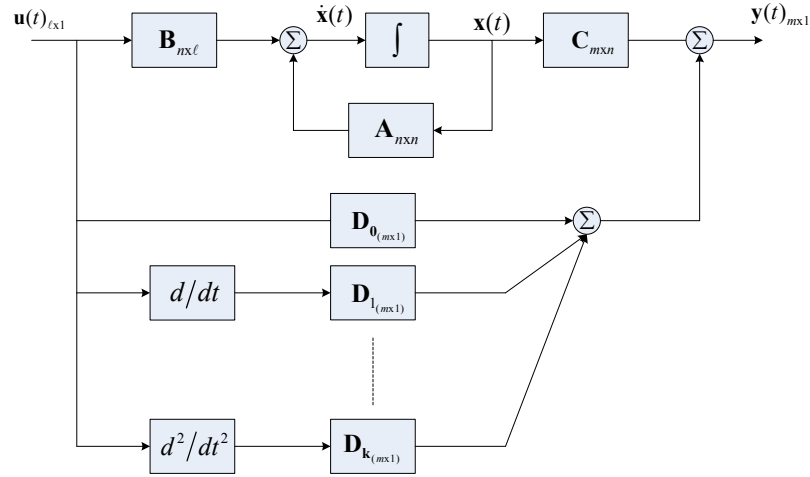
$|G(s)|$ fonksiyonunun çeşitli s frekansları için aldığı değerler Şekil 3.2 deki gibidir.



Şekil 3.2: $G(s) = (s+1)/(s+2)$ için kutup ve sıfır davranışı

Lineer doğrusal bir sistemin durum modelinin (3.1) denklemiyle verildiğini düşünelim;

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)_{(nx1)} &= \mathbf{A}_{(n \times n)} \mathbf{x}(t)_{(nx1)} + \mathbf{B}_{(n \times \ell)} \mathbf{u}(t)_{(\ell \times 1)} \\ \mathbf{y}(t)_{(mx1)} &= \mathbf{C}_{(m \times n)} \mathbf{x}(t)_{(nx1)} + \underbrace{\mathbf{D}_k \frac{d^k \mathbf{u}(t)}{dt^k} + \mathbf{D}_{k-1} \frac{d^{(k-1)} \mathbf{u}(t)}{dt^{(k-1)}} + \dots + \mathbf{D}_0 \mathbf{u}(t)}_{\mathbf{D}_{(m \times \ell)}} \end{aligned} \quad (3.1)$$



Şekil 3.3: Denklem (3.1) ile tanımlanan lineer sisteme ilişkin blok diyagramı

$\mathbf{D}_i(s)$ ($i = 0, \dots, k$) matrislerinin mertebesi (3.1) ifadesinde $(k \times \ell)$ boyutludur, ancak $k < m$ olmak üzere en genel hal göz önünde bulundurulursa, $\mathbf{D}(s)$ matrisinin boyut eksikliği;

$$\mathbf{D}_{(m \times \ell)} = [\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{D}_k \quad \dots \quad \mathbf{D}_0] \quad (3.2)$$

şeklinde düzenlenerek giderilir.

Özetle, kutuplar; denklem (3.1) ile tanımlı doğrusal çok değişkenli sistemin $\mathbf{A}$ matrisinin öz değerlerine karşı düşer. Kutuplar sistemin iç dinamiğine ilişkin özellikleri tanımlar. Özellikle sıfırlar belirli karmaşık frekans değerlerinde sistem dinamiğinin çıkışa aktarılmadığı anlamına gelir.

3.1 Polinomal Matris Gösterimi (PMD) ve Matris Çarpım Gösterimi

Çok giriş çok çıkışlı sistemler genellikle elemanları polinomlardan oluşan matrislerle ifade edilir. Bu matrislere polinom matrisleri denir.

Elemanları rasyonel fonksiyonlardan oluşan bir matris, iki polinom matrisinin oranı biçiminde yazılabileceği gibi, iki rasyonel matrisin çarpımı biçiminde de ifade edilebilir. Buna bir sistem matrisinin çarpım tanımı (Matrix Fractional Description) ya da kısaca MFD ‘si denir. Eğer bir sistem matrisinin MFD ‘si polinom matrislerinden meydana geliyorsa, buna PMFD denir ve PMFD, transfer fonksiyonu matrisinin iç (internal) gösterimine karşılık gelir. PMFD, sistemin iç (internal) ve dış (external) gösterimi arasındaki ilişkinin anlaşılmasında kolaylık sağlar. Bilindiği üzere sistemin iç ve dış gösterimleri özellikle birden fazla sistemin ilişkili olması halinde meydana gelen durumların anlaşılmasını olanaklı kılar.

Rasyonel matrislerin oranları veya daha kesin bir ifadeyle nedensel ve kararlı rasyonel matrislerin oranlarını içeren MFD‘ler geri beslemeli kontrol problemlerinde sistemin daha iyi temsil edilmesini sağlar.

MFD, gösterimi ile kararlı kılınabilir geri beslemeli kontrolörler gerçekleştirilir. Bunun yanı sıra, parametrelerin uygun seçilmesi halinde, kapalı çevrimli bir sistemin kararlı olmasını sağladığı gibi ilave kontrol kıstaslarını da garanti altına alır (bkz H_∞).

Sistem davranışları birden daha yüksek mertebeden türevlerle ifade edilen lineer zamanla değişmeyen sistemler, polinomal matris tanımı (PMD) ya da diferansiyel operatör gösterimi (DOR) ile de ifade edilebilir.

Örnek 3.1

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) + y_1(t) + y_2(t) &= \dot{u}_2(t) + u_1(t) \\ \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + 2y_2(t) &= \dot{u}_2(t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

diferansiyel denklemleriyle tanımlı bir sistemde $u_i(t)$ ve $y_i(t)$ durumları için uygun başlangıç koşulları ve $t = 0$ anındaki türevler verilmiş olsun.

Verilen sistem denklemlerine ilişkin uygun başlangıç koşullarını ve belirli bir giriş işareti için sistemin tüm çözümlerini kapsayacak şekilde birinci mertebeden basit diferansiyel denklemler yazabilmek için,

$$x_1(t) = \dot{y}_1(t) - u_2(t) \quad , \quad x_2(t) = y_1(t) \quad , \quad x_3(t) = y_1(t) + y_2(t) - u_2(t)$$

değişken dönüşümüne başvurulur. Böylece sistem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (3.4)$$

durum denklemleri ile tanımlanmış olur. Burada $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrislerine karşı düşer. Denklem (3.3) ile verilen sistem (3.4) ilişkileri ile ifade edilebileceği gibi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(q)\mathbf{z}(t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{R}(q)\mathbf{z}(t) + \mathbf{W}(q)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (3.5)$$

ilişkileri ile de ifade edilebilir. Burada $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ ve $q \triangleq d/dt$ 'yi göstermek üzere

$$\mathbf{P}(q) = \begin{bmatrix} q^2 + 1 & 1 \\ q & q + 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislere karşı düşer.

(3.5) ilişkisi $\mathcal{S}\{\mathbf{P}(q), \mathbf{Q}(q), \mathbf{R}(q), \mathbf{W}(q)\}$ şeklinde de yazılabilir. (3.4) durum denklemini $q \triangleq d/dt$ operatörü ile

$$\begin{aligned} (q\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabileceğine göre, eğer

$$\mathbf{P}(q) = (q\mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad \mathbf{Q}(q) = \mathbf{B}, \quad \mathbf{R}(q) = \mathbf{C}, \quad \mathbf{W}(q) = \mathbf{D} \tag{3.7}$$

olarak değerlendirilirse, durum denklemlerinin aslında (3.5) ifadesiyle verilen PMD 'nin özel bir haline karşı düştüğü açıkça görülür.

Buradan da anlaşılacağı üzere PMD, sisteme ilişkin fiziksel büyüklüklere doğrudan bağlı değişkenlerden oluşan diferansiyel veya fark denklemlerinin türetilmesini olanaklı kılar. Böylece, durum uzayına dönüştürmeye gerek duymaksızın sisteme ilişkin fiziksel değişkenler üzerinde çalışılabilir. Ancak PMD 'nin birden büyük mertebeli türev elemanları da içermesi beraberinde bir hesap yükü de getirir. Bu nedenden dolayı PMD nin özel bir hali olan PMFD sistem davranışının incelenmesinde genel formun aksine daha uygun bir yaklaşım sağlar.

(3.4) ifadesiyle verilen bir sisteme ilişkin PMD'nin en genel şekli, (5) ifadesiyle verilir. Burada $\mathbf{P}(q), \mathbf{Q}(q), \mathbf{R}(q)$ ve $\mathbf{W}(q)$, $\Re[q]$ 'da tanımlı ve sırası ile $(k \times k)$, $(k \times \ell)$, $(m \times k)$ ve $(m \times \ell)$ boyutlu reel polinomlardan oluşan matrislerdir. $\mathcal{S}\{\mathbf{A}(s), \mathbf{B}(s), \mathbf{C}(s)\}$ şeklinde tanımlı bir sistemin rasyonel transfer fonksiyonu matrisi

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{d(s)}$$

şeklinde yazılabilir. $d(s)$ burada $\mathbf{G}(s)$ matrisine ilişkin elemanların en büyük ortak bölenlerinin çarpımı olmak üzere

$$d(s) = s^r + d_1 s^{r-1} + \dots + d_r$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{G}(s)$ transfer matrisi, eğer sistem kontrol edilebilir ise

$$\mathbf{G}(s)_{mx\ell} = \mathbf{N}_R(s)_{mx\ell} \mathbf{D}_R^{-1}(s) \quad , \quad \mathbf{D}_R(s)_{mxm} = d(s) \mathbf{I}_{mxm} \quad , \quad \mathbf{N}_R(s) = \mathbf{N}(s) \quad (3.8)$$

ve benzer şekilde eğer sistem gözlemlenebilir ise

$$\mathbf{G}(s)_{mx\ell} = \mathbf{D}_L^{-1}(s) \mathbf{N}_L(s)_{mx\ell} \quad , \quad \mathbf{D}_L(s)_{\ell x\ell} = d(s) \mathbf{I}_{\ell x\ell} \quad , \quad \mathbf{N}_L(s) = \mathbf{N}(s) \quad (3.9)$$

biçiminde iki matris çarpımı ile ifade edilebilir. Burada verilen (3.8) ve (3.9) ifadeleri tek giriş tek çıkışlı sistem gösteriminin, çok giriş çok çıkışlı sistemlere genelleştirilmiş haline karşı düşer.

ℓ giriş ve m çıkışlı lineer sürekli bir sisteme ilişkin $(mx\ell)$ boyutlu transfer matrisi $\mathbf{G}(s)$ 'in elemanları, s karmaşık frekans değişkeninin nedensel rasyonel matris değerli bir fonksiyonudur. Diğer bir deyişle $\mathbf{G}(s)$ matrisini oluşturan her bir eleman s 'nin reel iki polinomunun oranından meydana gelir. Burada bu iki polinomdan payda polinomunun mertebesi pay polinomu mertebesinden en az bir fazladır. Bu durumda sistem durum uzayında, $\mathbf{x}$, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı bir durum vektörü olmak üzere, n inci mertebeden $\mathbf{x}$ durum vektörü mümkün olduğu ölçüde en küçük mertebeden gerçekleştirilerek

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Tanım 3.1

Nedensel rasyonel bir transfer matrisini gerçekleyen en küçük mertebeye McMillan derecesi denir ve δ_M ile gösterilir.

Bir sistemin McMillan derecesi, aday sistem mertebeleri arasında en büyük olasılığa sahiptir.

Herhangi bir sistemi en küçük mertebeden gerçeklemek her zaman kolay değildir. Bu amaca yönelik ilkin tek giriş ve çıkışlı sistemler için en küçük mertebeden gerçekleştirme $p(s)$ ve $q(s)$ sırası ile n ve $\leq n$ 'inci mertebeden s 'in aralarında asal birer polinomu olmak üzere, $g(s)$ nedensel transfer fonksiyonu matrisi ile

$$g(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (3.10)$$

yazılır. $p(s)$ ve $q(s)$ asal polinomlar oluşturduğundan ve (3.10) ifadesi ile gösterilen sistem en küçük mertebeden gerçeklemeye sahiptir, $g(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin bir diğer kesirli gerçekleştirme $\hat{p}(s)$ ve $\hat{q}(s)$ polinomları ile tanımlanabilir. Burada $\hat{q}(s)$ 'in mertebesi en az n dir.

Bir sistem gerçeklemesine ilişkin McMillan derecesi $q(s)$ polinomunun mertebesine yani n 'ye eşittir. Şöyle ki; $\mathcal{S}\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$, $g(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan matrisler olmak üzere $\hat{n} = \delta_M(g(s))$ olduğu kabul edilir ise $\mathbf{A}$ matrisi $(\hat{n} \times \hat{n})$ boyutlu olur. Dolayısı ile $(s\mathbf{I}_{\hat{n}} - \mathbf{A})^{-1}$ matrisi elemanları en fazla $\hat{n}$ mertebeden polinomlardan meydana gelir. $(s\mathbf{I}_{\hat{n}} - \mathbf{A})^{-1}$ matrisi soldan ve sağdan sırası ile $\hat{\mathbf{C}}$ ve $\hat{\mathbf{B}}$ matrisleri ile çarpılıp ve sonuç $\hat{\mathbf{D}}$ matrisi ile toplanırsa, elemanları en az $\hat{n}$ 'inci mertebeden polinomlardan meydana gelen bir transfer fonksiyonu matrisi elde edilir. $g(s)$ kesir polinomu sadeleştirilemez biçimde veya diğer bir değişle $g(s)$ transfer fonksiyonunu meydana getiren $p(s)$ ve $q(s)$ polinomları aralarında asal olduklarından, $n \leq \hat{n}$ ilişkisi geçerlidir. $g(s)$ nedensel bir kesir olduğundan, $d = \lim_{s \rightarrow \infty} g(s)$ ifadesi tam tanımlıdır (well-defined). Dolayısı ile $\tilde{p}(s)$, en fazla $(n-1)$ 'inci mertebeden bir polinom olmak üzere

$$g(s) = \frac{\tilde{p}(s)}{q(s)} + d$$

ilişkisi yazılabilir. Bu durumda $\tilde{p}(s)$ ve $q(s)$ polinomları

$$q(s) = s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n$$

$$\tilde{p}(s) = \gamma_1 s^{n-1} + \gamma_2 s^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} s + \gamma_n$$

olarak tanımlanırsa $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -q_n & -q_{n-1} & -q_{n-2} & \dots & -q_2 & -q_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\gamma_n \quad \gamma_{n-1} \quad \gamma_{n-2} \quad \dots \quad \gamma_2 \quad \gamma_1], \quad \mathbf{D} = d$$

şeklinde yazılabileceğinden $\delta_M(\mathbf{G}(s)) = n$ dir.

3.1.1 Polinom Matris Çarpım Tanımları (PMFD)

Eğer $\mathbf{F}(s)$ tekil olmayan bir polinom matrisi ise, $\mathbf{F}^{-1}(s)$ matrisi de genellikle s 'nin bir rasyonel matris fonksiyonudur. Dolayısı ile eğer $\mathbf{F}(s)$ tekil olmamasının yanında aynı zamanda unimodular bir matris ise $\mathbf{F}^{-1}(s)$ matrisi de bir polinom matrisi olur. Bilindiği üzere reel sayılardan meydana gelen matrisler için geçerli olan determinant ifadesi polinom matrisleri içinde geçerlidir. Dolayısı ile

$$\det[\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)] = [\det \mathbf{F}_1(s)][\det \mathbf{F}_2(s)] \quad (3.11)$$

(3.10) ve (3.11) ifadeleri gereğince iki tekil olmayan polinom matrisi çarpımının tekil olmayacağı ve benzer şekilde iki unimodular matris çarpımının da unimodular olacağı söylenebilir.

Tanım 3.2

$\mathbf{G}(s)$; $(m \times \ell)$ boyutlu s 'nin nedensel bir rasyonel polinom matrisi, $\mathbf{P}_R(s)$; $(m \times \ell)$ boyutlu reel bir polinom matrisi ve $\mathbf{Q}_R(s)$; $(\ell \times \ell)$ boyutlu tekil olmayan bir polinom

matrisi olmak üzere, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin sağ matris çarpım gösterimi (MFD_R)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{P}_R(s) \mathbf{Q}_R^{-1}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\mathbf{P}_L(s)$; $(m \times \ell)$ boyutlu reel bir polinom matrisi ve $\mathbf{Q}_L(s)$; $(m \times m)$ boyutlu tekil olmayan bir polinom matrisi olmak üzere, sol matris çarpım gösterimi (MFD_L)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{Q}_L^{-1}(s) \mathbf{P}_L(s)$$

biçiminde yazılabilir. Sağ ve sol MFD 'leri elde etmek için $q(s)$, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi elemanlarının en küçük ortak böleni olmak üzere $\mathbf{P}_R(s)$, $\mathbf{Q}_R(s)$, $\mathbf{P}_L(s)$ ve $\mathbf{Q}_L(s)$ matrisleri

$$\mathbf{P}_R(s) = q(s) \mathbf{G}(s)$$

$$\mathbf{Q}_R(s) = q(s) \mathbf{I}_{\ell \times \ell}$$

$$\mathbf{P}_L(s) = q(s) \mathbf{G}(s) = \mathbf{P}_R(s)$$

$$\mathbf{Q}_L(s) = q(s) \mathbf{I}_{m \times m}$$

ilişkilerinden türetilir.

Tanım 3.3

$\mathbf{G}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu reel nedensel rasyonel bir matris ve $\hat{\mathbf{P}}_R(s) \hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}(s)$ daha üst mertebeden bir sağ MFD olmak üzere eğer $\det \hat{\mathbf{Q}}_R(s)$ ifadesinin mertebesi, $\det \mathbf{Q}_R(s)$ ifadesinin mertebesinden ancak ve ancak büyük veya eşit ise $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sağ MFD 'si (MFD_R) en küçük mertebeden gerçeklemeye (minimal) sahiptir. Benzer şekilde, $\hat{\mathbf{Q}}_L^{-1}(s) \hat{\mathbf{P}}_L(s)$ daha üst mertebeden bir sol MFD 'yi tanımlamak üzere eğer ancak ve ancak $\text{mertebesi}[\det \hat{\mathbf{Q}}_L(s)] \geq \text{mertebesi}[\det \mathbf{Q}_L(s)]$ ifadesi sağlanıyorsa $\mathbf{G}(s)$

matrisinin sol MFD 'si (MFD_L) en küçük mertebeden gerçeklemeye (minimal) sahiptir.

Tanım 3.4

$\mathbf{F}_R(s)$, $(\ell \times \ell)$ boyutlu bir polinom matrisi olmak üzere

$$\mathbf{P}_R(s) = \hat{\mathbf{P}}_R(s) \mathbf{F}_R(s)$$

ve

$$\mathbf{Q}_R(s) = \hat{\mathbf{Q}}_R(s) \mathbf{F}_R(s)$$

ifadelerini sağlayan unimodular bir $\mathbf{F}_R(s)$ matrisi tanımlı ise ℓ sütundan meydana gelen $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri sağdan asal matrislerdir. Aynı ifade soldan asallık koşulu için yazılırsa, $\mathbf{F}_L(s)$, $(m \times m)$ boyutlu bir polinom matrisi olmak üzere

$$\mathbf{P}_L(s) = \mathbf{F}_L(s) \hat{\mathbf{P}}_L(s) \quad , \quad \mathbf{Q}_L(s) = \mathbf{F}_L(s) \hat{\mathbf{Q}}_L(s)$$

ifadelerini sağlayan unimodular bir $\mathbf{F}_L(s)$ matrisi tanımlı ise, m sütundan meydana gelen $\mathbf{P}_L(s)$ ve $\mathbf{Q}_L(s)$ matrisleri soldan asal matrislerdir.

Eğer iki polinom matrisi sağdan/soldan ortak bölen olarak yalnızca unimodular bir matrise sahip iseler bu polinom matrisleri sağdan/soldan asal matrislerdir. Dolayısı ile unimodular matrislerin, skaler polinomların aralarında asallıklarını göstermek üzere kullanılan sıfırdan farklı reel sayılar ile aynı işleve sahip olduğu söylenebilir. Kabaca, aynı boyutlara sahip herhangi iki unimodular matris sağdan ve soldan asaldır. Benzer şekilde $(r \times r)$ boyutlu herhangi bir unimodular matris, r sütundan meydana gelen herhangi bir polinom matrisi ile sağdan ve r satırdan meydana gelen herhangi bir polinom matrisi ile aralarında asaldır.

Tanım 3.5

$\mathbf{G}(s)$ $(m \times \ell)$ boyutlu reel nedensel rasyonel bir matris olmak üzere; eğer $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri sağdan asal ise $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisinin sağ MFD 'si

sadeleştirilemez biçimdedir. Aynı özellik sol MFD için $\mathbf{P}_L(s)$ ve $\mathbf{Q}_L(s)$ matrislerinin soldan asallığı koşulu için de yazılabilir.

Teorem 3.1

$\mathbf{G}(s)$ ($m \times \ell$) boyutlu reel nedensel rasyonel bir matris olmak üzere; $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin sağ MFD en küçük mertebeden gerçeklemeye sahip olması için $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$ ifadesi sadeleştirilemez olmalıdır. $\hat{\mathbf{P}}_R(s)\hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}$, $\mathbf{G}(s)$ matrisine ilişkin bir diğer MFD_R için eğer

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_R(s) &= \mathbf{P}_R(s)\mathbf{V}(s) \\ \hat{\mathbf{Q}}_R(s) &= \mathbf{Q}_R(s)\mathbf{V}(s)\end{aligned}$$

ifadelerini sağlayan unimodular bir $\mathbf{V}(s)$ matrisi tanımlı ise $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$ (MFD_R) ifadesi en küçük mertebeden gerçeklemeye sahiptir. Benzer şekilde verilen $\mathbf{G}(s)$ matrisi için yazılan $\mathbf{G}(s) = \mathbf{Q}_L^{-1}(s)\mathbf{P}_L(s)$ ifadesinin en küçük mertebeden gerçeklemeye sahip olabilmesi için

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_L(s) &= \mathbf{V}(s)\mathbf{P}_L(s) \\ \hat{\mathbf{Q}}_L(s) &= \mathbf{V}(s)\mathbf{Q}_L(s)\end{aligned}$$

ifadelerini sağlayan unimodular bir $\mathbf{V}(s)$ matrisi bulunmalıdır.

Dolayısı ile en küçük mertebeden gerçeklemeye sahip sağ ve sol MFD 'ler sadeleştirilemez. $\mathbf{F}(s)$ unimodular bir matris olmamak üzere $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ sırası ile $\mathbf{P}_R(s) = \hat{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{F}(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s) = \hat{\mathbf{Q}}_R(s)\mathbf{F}(s)$ şeklinde aralarında sağdan asal olmayan matrislerdir. $\mathbf{Q}_R(s)$ tekil olmayan bir matris olduğundan $\mathbf{F}(s)$ ve $\hat{\mathbf{Q}}_R(s)$ matrisleri de tekil olmayan matrislerdir. Bu durumda $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s) &= \mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s) = \mathbf{P}_R(s)\mathbf{F}(s)\mathbf{F}(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s) \\ &= \hat{\mathbf{P}}_R(s)\hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}(s)\end{aligned}\tag{3.12}$$

biçiminde yazılabilir. (3.12) ifadesinden de görüleceği üzere $\mathbf{F}(s)$ matrisinin unimodular olması halinde, elde edilen MFD en küçük mertebeden gerçeklemeyi

sağlar. Ancak $F(s)$ unimodular bir matris değilse $\det F(s)$ ifadesi pozitif mertebeye sahip bir polinom olur. Dolayısı ile $\text{mertebe}[\det \hat{Q}_R(s)] < \text{mertebe}[\det Q_R(s)]$ olur. Böylece elde edilecek MFD en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlamaz. Aynı durum sol MFD için de geçerlidir.

3.2 Transfer Fonksiyonu Matrisine İlişkin Kutup ve Sıfırlar

Skaler bir transfer fonksiyonuna ilişkin kutup ve sıfır analizini, matris transfer fonksiyonu formuna genelleştirebilmek için Smith-McMillan biçiminden yararlanılır. Ancak Smith-McMillan biçimi, Smith biçimindeki polinomal matrislerin özel bir hali olduğundan öncelikle Smith biçimini inceleyelim.

3.2.1 Smith Biçimi

(3.1) ile verilen sistem denkleminin Laplace dönüşümü alınır ve transfer fonksiyonu matrisi elde edilecek şekilde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathbf{G}(s)_{(m \times \ell)} = \mathbf{C}_{(m \times n)} \left[s\mathbf{I}_{(n \times n)} - \mathbf{A}_{(n \times n)} \right]^{-1} \mathbf{B}_{(n \times \ell)} + \mathbf{D}(s)_{(m \times \ell)} \quad (3.13)$$

elde edilir. Eğer reel katsayılı rasyonel fonksiyonlardan oluşan $\mathbf{G}(s)$ matrisinin tüm elemanları polinomlardan oluşuyorsa, $\mathbf{G}(s)$ matrisine polinom matrisi denir. $\Re[s]$, reel katsayılardan meydana gelen bir polinom kümesini göstermek üzere $\mathbf{G}(s)$ matrisinin tüm elemanları $\Re[s]$ 'de tanımlı ise $\mathbf{G}(s)$ matrisine polinom matrisi denir.

Tanım 3.6

m çıkış değişken sayısını, ℓ ise giriş değişkeni sayısını temsil etmek üzere; $\mathbf{G}(s)$, $\Re[s]$ 'de tanımlı $(m \times \ell)$ boyutlu bir polinom matrisidir. Buna göre; sonlu sayıdaki tekil değer haricindeki tüm s değerlerinde $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sahip olacağı rank değerine, ya da diğer bir deyişle bir matrisin sahip olabileceği en büyük rank değerine, o matrisin normal rankı denir. Bu değer aynı zamanda $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sıfırdan farklı en büyük minör mertebesine eşittir.

Tanım 3.7

$\mathbf{G}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu normal rankı r olan bir polinom transfer matrisi olmak üzere, bir takım basit satır ve sütun işlemleri uygulanarak bu matris $\mathbf{S}^*(s) = \text{diag}\{\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_r(s)\}$ olmak üzere

$$\mathbf{S}(s)_{(m \times \ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^*(s)_{(r \times r)} & \mathbf{0}_{r \times (\ell-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (\ell-r)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde bir diyagonal matrisine dönüştürülebilir. Burada $\varepsilon_1(s) | \varepsilon_2(s) | \dots | \varepsilon_r(s)$ şeklindedir ve $j > i$ olmak üzere, $\varepsilon_i(s) | \varepsilon_j(s)$ ifadeleri $\varepsilon_j(s)$ 'in $\varepsilon_i(s)$ 'e kalansız olarak bölünebildiğini belirtir. Diğer bir deyişle diyagonal eksen üzerindeki her bir eleman kendisinden önceki diğer bütün diyagonal elemanlara kalansız olarak bölünebilir.

Tanım 3.8

Eğer $\mathbf{U}(s)\hat{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{I}_{p \times p}$ koşulu, diğer bir deyişle $\hat{\mathbf{U}}(s)$ bir polinom matrisi olmak üzere $\mathbf{U}^{-1}(s) = \hat{\mathbf{U}}(s)$ koşulu sağlıyorsa, $(p \times p)$ boyutlu $\mathbf{U}(s) \in \mathfrak{R}[s]$ polinom matrisine unimodular denir. Benzer şekilde eğer $\det \mathbf{U}(s) = \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ ise $\mathbf{U}(s)$ matrisinin unimodular olduğu anlaşılır.

“Herhangi bir polinom matrisi bir dizi elementer satır ve sütun işlemleri uygulanarak veya bu işlemlere karşılık gelen unimodular matrislerle $(\mathbf{L}(s), \mathbf{R}(s))$ Smith biçimine dönüştürülebilir” [8].

Bir $\mathbf{G}(s)$ polinom matrisini Smith biçimine dönüştürmek için $\mathbf{G}(s)$ matrisini $\mathbf{L}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ unimodular matrisleri ile çarpmak gerekir:

$$\mathbf{S}(s)_{(m \times \ell)} = \mathbf{L}(s)_{(m \times m)} \mathbf{G}(s)_{(m \times \ell)} \mathbf{R}(s)_{(\ell \times \ell)} \quad (3.15)$$

Önerme 3.1

$\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri $(m \times \ell)$ ve $(\ell \times \ell)$ boyutlu reel polinom matrisleri olmak üzere, aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir.

- i. $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri sağdan asaldir.
- ii. $\mathbf{X}(s)_{\ell \times \ell} \mathbf{Q}_R(s) + \mathbf{Y}(s)_{\ell \times m} \mathbf{P}_R(s) = \mathbf{I}_{\ell \times \ell}$ ifadesini sağlayan $\mathbf{X}(s)$ ve $\mathbf{Y}(s)$ polinom matrisleri vardır.
- iii.

$$\mathbf{F}(s^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R(s^*) \\ \mathbf{P}_R(s^*) \end{bmatrix}_{(\ell+m) \times \ell}$$

matrisi tüm s^* değerleri için tam m rankına sahiptir.

Kanıt

$\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri $(\ell + m) \geq \ell$ olmak üzere, sırasıyla $\mathfrak{R}[s]^{\ell \times \ell}$ ve $\mathfrak{R}[s]^{m \times \ell}$ 'de tanımlı matrisler olmak üzere, sağdan asallıklarını sınamak için unimodular bir $\mathbf{L}(s)$ matrisi bulunması gerekir. Asallık koşulunu sağlayan tek bir unimodular matris bulunmadığından problem ortak bölenlerin en büyüğünün bulmaya yönelir. Verilen $\mathbf{F}(s)$ matrisini Hermit biçimine dönüştürmek için $\mathbf{L}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ unimodular matrisleri tanımlayalım $(\ell + m) \geq \ell$ ve $\text{rank}[\mathbf{F}(s)] = r \leq \ell \leq (m + \ell)$ olduğundan

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H(s)_{\ell \times \ell} \\ \mathbf{0}_{(m+\ell-r) \times \ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & \dots & x \\ 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\mathbf{L}(s)\mathbf{F}(s)$ matrisi sütun nedensel biçimdedir. $\mathbf{G}_R^*(s)$ matrisi, $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrislerinin sağdan en büyük ortak böleni olmak üzere (3.16) ifadesi

$$\mathbf{L}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R(s) \\ \mathbf{P}_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_R^*(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{L}(s)$ matrisi, $q = (\ell + m) - \ell$ olmak üzere $\bar{\mathbf{X}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{\ell \times \ell}$, $\bar{\mathbf{Y}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{\ell \times m}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{q \times \ell}$ ve $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{q \times m}$ şeklinde tanımlı matrislerden oluşsun

$$\mathbf{L}(s) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(s) & \bar{\mathbf{Y}}(s) \\ -\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) & \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

burada $\bar{\mathbf{X}}(s), \bar{\mathbf{Y}}(s)$ ve $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s), \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)$ soldan asal polinom matrisi çiftleridir. Aynı ifadeyi sağdan asal çiftler $(\bar{\mathbf{X}}(s), \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s)$ ve $\bar{\mathbf{Y}}(s), \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s))$ için yazılır ise

$$\mathbf{L}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) & -\tilde{\mathbf{Y}}(s) \\ \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) & \tilde{\mathbf{X}}(s) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\tilde{\mathbf{X}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{m \times q}$, $\tilde{\mathbf{Y}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{\ell \times q}$, $\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{\ell \times \ell}$ ve $\bar{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \in \mathfrak{R}[s]^{m \times \ell}$ biçiminde tanımlı matrislerdir. (3.17) ifadesi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{R}}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{-1}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^*(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \\ \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) \end{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^*(s) \quad (3.20)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bunun yanı sıra (3.17) ve (3.18) ifadelerinden

$$\bar{\mathbf{X}}(s)\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) + \bar{\mathbf{Y}}(s)\mathbf{P}_{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{G}_{\mathbf{R}}^*(s) \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{G}_{\mathbf{R}}^{*-1}(s)$ ile çarpılarak

$$\mathbf{X}(s)\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) + \mathbf{Y}(s)\mathbf{P}_{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{I}_{m \times m} \quad (3.22)$$

ifadesi elde edilir. $\mathbf{F}(s)$ matrisine ilişkin Smith biçimi, $\Lambda_{\mathbf{F}}(s)_{m \times m}$ matrisi diyagonal eksen üzerindeki determinantsal bölenleri göstermek üzere, $\mathbf{S}_{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{L}(s)\Lambda_{\mathbf{F}}(s)\mathbf{R}(s)$ biçiminde yazılabilir.

(3.19) ifadesi göz önünde bulundurularak

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{R}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \\ \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) \end{bmatrix} \Lambda_{\mathbf{F}}(s)\mathbf{R}^{-1}(s) \quad (3.23)$$

ifadesi yazılabilir. (3.23) ifadesinde de görüleceği üzere $\mathbf{P}_R(s)$ ve $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisleri sağdan $\mathbf{\Lambda}_F(s)\mathbf{R}^{-1}(s)$ ortak polinom matris çarpanına sahiptir. Dolayısı ile i önermesinin doğru olabilmesi için ortak çarpan matrisinin unimodular olması gerekir ve bu durum ancak $\mathbf{\Lambda}_R(s) = \mathbf{I}_{mxm}$ ise gerçekleşir.

ii önermesinin doğruluğu (3.22) ifadesinden görülmektedir. $\mathbf{F}(s)$ matrisi $s = s^*$ değerinde rank kaybetsin bu durumda (3.22) ifadesinde geçerliliğini yitireceğinden, $\mathbf{F}(s^*)$ matrisinin rankı tüm s^* değerleri için ℓ 'ye eşittir.

$\hat{\mathbf{R}}(s)$, $(\ell \times \ell)$ boyutlu unimodular olmayan bir matris olmak üzere

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_R(s) \\ \hat{\mathbf{Q}}_R(s) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}(s)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\hat{\mathbf{R}}(s)$ matrisi unimodular bir matris olmadığından herhangi bir $s = s^*$ değerinde $\det \hat{\mathbf{R}}(s^*) = 0$ değerini alacaktır. Dolayısı ile i, ii ve iii koşullarının birbirine eşdeğer oldukları anlaşılır.

Önerme 3.2

$\mathbf{P}_L(s)$ ve $\mathbf{Q}_L(s)$ sırası ile $(m \times \ell)$ ve $(m \times m)$ boyutlu reel polinom matrisleri olmak üzere aşağıdaki üç ifade birbirine eşdeğerdir.

- i. $\mathbf{P}_L(s)$ ve $\mathbf{Q}_L(s)$ matrisleri soldan asaldır.
- ii. $\mathbf{Q}_L(s)\mathbf{X}(s)_{mxm} + \mathbf{Y}(s)_{\ell \times m}\mathbf{P}_L(s) = \mathbf{I}_{mxm}$ ifadesini sağlayan $\mathbf{X}(s)$ ve $\mathbf{Y}(s)$ polinom matrisleri vardır.
- iii.

$$\mathbf{K}(s^*) = [\mathbf{Q}_L(s^*) \quad \mathbf{P}_R(s^*)]_{m \times (\ell + m)}$$

tüm $s = s^*$ değerleri için $\text{rank}[\mathbf{K}(s^*)] = m$ dir.

Önermelerden elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ ve $\hat{\mathbf{P}}_R(s)\hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}(s)$ sırası ile $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sadeleştirilemez biçimdeki sağ MFD 'si ve en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan sağ MFD olsun. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s)\mathbf{Q}_R(s) + \mathbf{Y}(s)\mathbf{P}_R(s) &= \mathbf{I}_{\ell \times \ell} \\ \hat{\mathbf{X}}(s)\hat{\mathbf{Q}}_R(s) + \hat{\mathbf{Y}}(s)\hat{\mathbf{P}}_R(s) &= \mathbf{I}_{\ell \times \ell} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ifadeleri yazılabilir. Teorem 3.1. 'de bahsedildiği üzere en küçük mertebeye sahip sağ MFD aynı zamanda sadeleştirilemez biçimde olduğundan

$$\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s) = \hat{\mathbf{P}}_R(s)\hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}(s) \quad (3.25)$$

yazılabilir. Dolayısı ile (3.24) ifadesi ve (3.25) ifadeleri doğrultusunda yeniden

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s)\hat{\mathbf{Q}}_R(s) + \mathbf{Y}(s)\hat{\mathbf{P}}_R(s) &= \mathbf{Q}_R^{-1}(s)\hat{\mathbf{Q}}_R(s) \\ \hat{\mathbf{X}}(s)\hat{\mathbf{Q}}_R(s) + \hat{\mathbf{Y}}(s)\hat{\mathbf{P}}_R(s) &= \hat{\mathbf{Q}}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s) \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.25) ifadesinden görüleceği üzere eşitliğin sağ tarafları birbirlerinin terslerini içeren polinom matrislerinden meydana geldiğinden bu matrisler unimodular dır. Dolayısı ile $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ matrisi en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlar.

3.2.2 Çarpım ve McMillan Dereceleri

Transfer fonksiyonu matrisinin skaler olduğu durumlarda payda polinomunun mertebesi doğrudan $g(s)$ transfer fonksiyona ilişkin McMillan derecesine eşittir. Benzer bir ilişki $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi McMillan derecesi ile $\mathbf{G}(s)$ matrisine ilişkin sağ ve sol MFD lerin payda matrisleri içinde geçerlidir. Şöyle ki

Tanım 3.9

$\mathbf{G}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu reel bir polinom matrisi olmak üzere, transfer fonksiyonu matrisine ilişkin çarpım mertebesi $(\delta_F[\mathbf{G}(s)])$ $\det \mathbf{Q}_R(s)$ 'in (veya $\det \mathbf{Q}_L(s)$ 'in) mertebesine eşittir.

$\mathbf{G}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu nedensel rasyonel bir polinom matrisi ve $\mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s)$ olmak üzere $\mathbf{Z}(s)$

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{D}$$

biçimde tanımlı bir matris olsun. Eğer $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan sağ MFD ise

$$\tilde{\mathbf{P}}_R(s) = \mathbf{P}_R(s) - \mathbf{D}\mathbf{Q}_R(s)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\tilde{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ ifadesi, $\mathbf{Z}(s)$ matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan sağ MFD dir.

$\tilde{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ ifadesinin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayıp sağlamadığını incelemek üzere

$$\mathbf{F}(s^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R(s^*) \\ \mathbf{P}_R(s^*) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}(s^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R(s^*) \\ \mathbf{P}_R(s^*) - \mathbf{D}\mathbf{Q}_R(s^*) \end{bmatrix}$$

şeklinde iki matris tanımlansın. $\mathbf{F}(s^*)$ ve $\tilde{\mathbf{F}}(s^*)$ matrisleri tüm s^* değerleri için aynı boşluk uzayına sahiptir dolayısı ile de rankları birbirine eşittir. Önerme – 3.1‘den de görüleceği üzere $\tilde{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ ifadesi sadeleştirilemez biçime sahiptir dolayısı ile en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlar. Buradan $\mathbf{Z}(s)$ ve $\mathbf{G}(s)$ matrislerinin aynı çarpım mertebesine sahip olduğu söylenebilir.

Eğer, transfer fonksiyonu McMillan derecesi $n = \delta_M(s)$ olmak üzere, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçekleştirme $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ise PBH test gereği

$$\mathbf{K}(s^*) = \begin{bmatrix} (s^* \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}) & \mathbf{B} \end{bmatrix}_{n \times (n+l)}$$

matrisinin erişilebilirlik (reachability) koşulunu sağlaması için tam ranka ($\text{rank}[\mathbf{K}(s^*)]$) sahip olması gerekir. Önerme 3.1 gereği $(s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ matrisi sadeleştirilemez biçimdedir dolayısı ile $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$, $\mathbf{K}(s)$ matrisinin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan sol MFD sidir. Yani $\delta_F[\mathbf{K}(s)] = n$ ‘dir. $\mathbf{Z}(s)$ matrisi

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{F}(s)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$, $\mathbf{K}(s)$ matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlan sağ MFD olmak üzere $\mathbf{Z}(s)$ matrisine ilişkin bir sağ MFD

$$\mathbf{Z}(s) = [\mathbf{C}\mathbf{P}_R(s)]\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısı ile $\delta_F[\mathbf{Z}(s)] \leq \delta_F[\mathbf{K}(s)] = n$ olduğundan $\mathbf{Z}(s)$ matrisine ilişkin çarpım mertebesi $\delta_F[\mathbf{F}(s)]$ en fazla n inci mertebeden olur. $\mathbf{Z}(s)$ ve $\mathbf{G}(s)$ matrislerine ilişkin çarpım mertebeleri birbirine eşittir ve $\mathbf{G}(s)$ matrisinin McMillan derecesi ile sınırlandırılmıştır. Şöyle ki $\delta_F[\mathbf{G}(s)] \leq \delta_M[\mathbf{G}(s)]$ dir.

$\delta_F[\mathbf{G}(s)]$ ve $\delta_M[\mathbf{G}(s)]$ 'in birbirine eşit olması için ancak ve ancak $\delta_F[\mathbf{G}(s)] \geq \delta_M[\mathbf{G}(s)]$ ifadesi sağlanmalıdır. $\mathbf{G}(s)$ matrisinin çarpım mertebesi $\det \mathbf{Q}_R(s)$ in mertebesine eşit olduğundan $\det \mathbf{Q}_R(s)$ in mertebesinin $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin elemanları ile nasıl değiştiği bilinmelidir.

Tanım 3.10

$\mathbf{Q}_R(s)$, $(\ell \times \ell)$ boyutlu tekil olmayan reel bir polinom matrisidir. $1 \leq j \leq \ell$ için $\delta_j[\mathbf{Q}_R(s)]$, j inci sütuna ilişkin dereceyi göstermektedir. Yani $\delta_j[\mathbf{Q}_R(s)]$, $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin j inci sütununda bulunan en büyük dereceden polinomun mertebesidir. Bunun yanı sıra $\mathbf{Q}_{RH}(s)$ matrisi (i, j) inci elemanı, $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin (i, j) inci elemanı içinde bulunan polinom ifadesinde $s^{\delta_j[\mathbf{Q}_R(s)]}$ nin katsayısından meydana gelen (mxm) boyutlu reel bir matristir.

$\mathbf{Q}_R(s)$ matrisi tekil olmayan bir matris olduğundan sahip olacağı tüm sütun mertebeleri sıfırdan farklı birer tam sayıdır. $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin determinanı ifadesi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısı ile $\det \mathbf{Q}_R(s)$ ifadesinin mertebesi $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin sütun mertebeleri toplamı ile sınırlanmış olur. Eğer $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisinin sütun mertebeleri $\delta_1, \dots, \delta_m$ ise $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisi determinant açılımı ifadesinde $s^{(\delta_1 + \dots + \delta_m)}$ teriminin katsayısı $\det \mathbf{Q}_{RH}$ ifadesine eşittir. Diğer bir ifadeyle $\det \mathbf{Q}_{RH} \neq 0$ yani yüksek mertebeli katsayı matrisinin tersi mevcut ise $\det \mathbf{Q}_R(s)$ sütun mertebesi ile aynı mertebeye sahip olur. Böylece $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin durum boyutu (state dimension) $\delta_F[\mathbf{G}(s)]$, $\mathbf{Q}_R(s)$ tersi alınabilen yüksek mertebeden bir katsayı matrisi olmak üzere yine aynı transfer fonksiyonu matrisine ilişkin $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$ sağ MFD si ile ilişkilendirilmiş olur. $\hat{\mathbf{P}}_R(s)\hat{\mathbf{Q}}_R^{-1}(s)$ en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan herhangi bir sağ MFD ve $\mathbf{V}(s)$

$$\mathbf{P}_R(s) = \hat{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{V}(s) \quad , \quad \mathbf{Q}_R(s) = \hat{\mathbf{Q}}_R(s)\mathbf{V}(s)$$

ifadelerini sağlayan unimodular bir matris olmak üzere tersi alınabilir bir $\mathbf{Q}_{RH}$ matrisi için $\mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s)$ şeklinde tanımlı başka bir en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan sağ MFD tanımlanabilir.

Önerme 3.3

$\hat{\mathbf{Q}}_R(s)$, $(\ell \times \ell)$ boyutlu tekil olmayan bir polinom matrisi olmak üzere unimodular bir $\mathbf{V}(s)$ matrisinin mevcut olabilmesi için

- i. $\mathbf{Q}_R(s) = \hat{\mathbf{Q}}_R(s)\mathbf{V}(s)$ matrisi yüksek mertebeli tersi alınabilir bir $\mathbf{Q}_{RH}$ matrisine sahip olmalı, ve
- ii. $\{\delta_j(\mathbf{Q}_R(s))\}$ sütun mertebesi

$$\delta_1(\mathbf{Q}_R(s)) \geq \delta_2(\mathbf{Q}_R(s)) \geq \dots \geq \delta_m(\mathbf{Q}_R(s)) \quad (3.27)$$

şeklinde azalan bir yapıda olması gerekir.

Kanıt

$\hat{\mathbf{Q}}_{RH}$ tersi alınabilir bir matris olmak üzere $\mathbf{V}(s)$, $\hat{\mathbf{Q}}_R(s)\Pi$ matrisi sütunları (3.27) ifadesi ile verilen azalan mertebeli yapıya sahip olacak şekilde tanımlı bir Π değişim

(permutation) matrisi olsun. Eğer $\hat{\mathbf{Q}}_{RH}$ tersi alınamayan bir matris ise $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ifadesini sağlayan bir $\mathbf{w} \in \mathfrak{R}^m$ vektörü tanımlanmalıdır. En genel anlamda $\mathbf{w}$ vektörünün sıfırdan farklı ilk elemanı 1 dir ve k 'inci elemandır. Benzer şekilde $\mathbf{E}(s)$, $(\ell \times \ell)$ boyutlu bir polinom matrisi olsun. $\mathbf{E}(s)$ matrisinin k 'inci sütunu haricindeki sütunları $\mathbf{I}_{\ell \times \ell}$ matrisinin sütunları ile aynıdır. k 'inci sütununa ilişkin elemanları ise $\mathbf{E}(s)_{i,k}$, k sütunundaki elemanları göstermek üzere

- $i < k$ ise 0 ve
- $i > k$ ise δ_j , $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi$ matrisine ilişkin sütun mertebesini göstermek üzere $\mathbf{w}_i s^{\delta_k - \delta_i}$

dir. $\det \mathbf{E}(s) = 1$ olduğundan $\mathbf{E}(s)$ matrisi unimodular bir matristir. Dolayısı ile $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{E}(s)$ ve $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi$ matrislerinin yalnızca k 'inci sütunları farklıdır, bunun haricindeki bütün sütunları birbirinin eşittir. $\mathbf{E}(s)$ matrisinin uygun biçimde seçimi aynı zamanda $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{E}(s)$ matrisinin k 'inci sütununa ilişkin sütun mertebesinin $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi$ matrisinin k 'inci sütununa ilişkin sütun mertebesinden küçük olacağını garantiler.

Eğer $\hat{\mathbf{Q}}_{RH}$ tekil bir matris ise $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{E}(s)$ matrisinin, elemanları toplamı $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)$ matrisi sütun mertebesi dizisi elemanları toplamından küçük olan bir sütun mertebesi dizisine sahip olacağı unimodular bir $\Pi\mathbf{E}(s)$ matrisi tanımlamak için $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) = \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{E}(s)$ matrisinden tekil olmayan bir yüksek mertebeli bir katsayı matrisi $\hat{\mathbf{Q}}_{RH}$ elde edilemediğinden, $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\Pi\mathbf{E}(s)$ matrisi üzerinde değişim ve düşürme (reduction) işlemine koşul sağlanıncaya kadar devam edilir. Sütun mertebeleri toplamı sonsuza kadar azaltılamayacağından, düşürme işlemi sonlu sayıda adımda gerçekleştirilmelidir. Bu işlemler sonucunda, sütun mertebesi, $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s)$ matrisi sütun mertebesi (3.27) ifadesini sağlayacak yapıda, tersi alınabilir yüksek mertebeden bir katsayı matrisine sahip

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) = \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)\mathbf{V}(s)$$

ifadesini sağlayan unimodular bir $\mathbf{V}(s)$ matrisi elde edilebilir. Dolayısı ile

$$\delta_F [\mathbf{G}(s)] = \text{mertebe}[\det \mathbf{Q}_R(s)] = \delta_1 [\mathbf{Q}_R(s)] + \dots + \delta_m [\mathbf{Q}_R(s)]$$

ifadesini sağlayan tersi alınabilir bir $\mathbf{Q}_{RH}$ matrisi tanımlamaya imkan tanıyan aynı zamanda

$$\mathbf{P}_R(s) = \hat{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{V}(s) \quad , \quad \mathbf{Q}_R(s) = \hat{\mathbf{Q}}_R(s)\mathbf{V}(s)$$

ifadelerini sağlayan $\mathbf{G}(s) = \mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$ şeklinde tanımlı herhangi bir sağ MFD seçilebilir. Aynı zamanda $\mathbf{Q}_R(s)$ matrisine ilişkin sütun mertebesi dizisi de (3.27) ifadesini sağlar.

$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin bir gerçekelemeyi göstermek üzere $\delta_F[G(s)] \geq \delta_M[G(s)]$ olduğundan her iki mertebeye birbirine eşittir. Burada $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{D}$ ve $\tilde{\mathbf{P}}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}$, $\mathbf{Z}(s)$ matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçekelemeye sahip sağ MFD dir.

$$\tilde{\mathbf{P}}_R(s)_{i,j} = \sum_{k=1}^m \mathbf{Z}(s)_{i,k} \mathbf{Q}_R(s)_{i,k}$$

şeklinde tanımlı olduğundan ve $\mathbf{Z}(s)$ matrisi kesin nedensel biçimde olduğundan $\tilde{\mathbf{P}}_R(s)_{i,j}$ in mertebesi tüm i ve j değerleri için kesinlikle δ_j den küçüktür. Eğer $\delta_j < 0$ ise o halde tüm $1 \leq i \leq p$ değerleri için $\tilde{\mathbf{P}}_R(s)_{i,j} = 0$ dır.

$\mathbf{s}_k$, $k > 0$ değeri için k 'ıncı sütun vektörünü göstermek üzere

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \dots & s^{k-1} \end{bmatrix}^T$$

$\mathbf{S}$, $(\delta_F \times \ell)$ boyutlu bir matris olsun. δ_F , δ_j sütun mertebelerinin toplamlarına eşit olduğundan $\mathbf{S}$ matrisinin j 'inci sütununu $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{j-1}$ şeklindedir. Elemanların yerleşimi $j:1,2,\dots,j-1$ için üstten her bir j değerine karşılık gelen değer kadar (δ_j) sıfır en üstte, sıfırlardan itibaren $\mathbf{s}_{\delta_j}$ vektörü ve geri kalan kısma yine sıfır yerleştirilir.

$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu en küçük mertebeden gerçeklemeyi sağlayan bir matris olduğundan

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{C}\mathbf{S}$$

ifadesi gereği $(m \times \delta_F)$ boyutlu bir $\mathbf{C}$ matrisi mevcut olmalıdır. Burada $\mathbf{C}$ matrisi, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi için öngörülen $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ gerçeklemesinde yer alan $\mathbf{C}$ matrisi ile aynıdır. Şöyle ki $\mathbf{Z}(s)$ matrisi

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{P}_{\mathbf{R}}(s)\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^{-1}(s) = \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^{-1}(s)\mathbf{B} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}_{\delta_F} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.28)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (28) ifadesi gereği $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri

$$s\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^{-1}(s) = (s\mathbf{I}_{\delta_F} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.29)$$

$$s\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) \quad (3.30)$$

$\mathbf{Q}_{\mathbf{RH}}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s)$ matrisine ilişkin tersi alınabilir yüksek mertebeden katsayı matrisini göstermek üzere

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{Q}_{\mathbf{RH}} \begin{bmatrix} s^{\delta_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s^{\delta_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s^{\delta_m} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) \quad (3.31)$$

ifadesi yazılabilir. $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s)$ matrisi, $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{R}}(s)$ matrisine ilişkin elemanların mertebeleri hususunda yazılan tüm sınırlamalara sahiptir. $\mathbf{M}(s)$, $(\ell \times \delta_F)$ boyutlu reel bir matris olmak üzere $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{M}\mathbf{S}$ ifadesi yazılabilir. $\mathbf{\Lambda}(s)$, (3.31) ifadesinin sağında yer alan diyagonal bir matris olmak üzere $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri eğer

$$s\mathbf{S} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{RH}}\mathbf{G})\mathbf{S} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{RH}}\mathbf{\Lambda}(s) \quad (3.32)$$

ifadesi mevcut ise sağlanır.

$\tilde{\mathbf{B}}$, $(\delta_F \times \ell)$ boyutlu $\delta_j = 0$ için j inci sütunu sıfıra eşit, $\delta_j \neq 0$ için ise yalnızca $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_j$ inci konumda 1 değerine sahip reel bir matris olmak üzere

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{Q}_{RH}^{-1}$$

ifadesi yazılabilir. i nin $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_j$ değerini aldığı bazı j değerlerinde $\mathbf{BQ}_{RH} \mathbf{G}(s)$ matrisinin i inci satırı $\mathbf{G}(s)$ matrisinin j inci sütununa eşit olup i nin diğer değerlerinde $\mathbf{BQ}_{RH} \mathbf{G}(s)$ matrisinin i inci satırı sıfır değerini alır.

Eğer bazı j değerlerinde i $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_j$ değerini alıyor ise $\mathbf{A}$ matrisinin i inci satırı, $\mathbf{BQ}_{RH} \mathbf{G}(s)$ matrisinin i inci satırının negatif işaretlisidir. i , $\mathbf{A}$ matrisine ilişkin satır numarasını göstermek üzere $\mathbf{A}$ matrisini $(i, i+1)$ inci elemanı 1 değerini alıp geri kalan elemanlar sıfıra eşittir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix}$$

(3.28) ifadesinde de açıkça görüleceği üzere $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ nin $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonuna ilişkin bir gerçeklemeyi göstermesi için $\mathbf{A}$ matrisi $(\delta_F \times \delta_F)$ boyutlu olmalıdır.

Tüm özellikler sol MFD $(\mathbf{G}(s) = \mathbf{Q}_L^{-1}(s) \mathbf{P}_L(s))$, ancak analizi gerçekleştirirken satır mertebesi ve $\mathbf{Q}_L(s)$ matrisine ilişkin yüksek mertebe katsayı matrisi hesaplanır. Bunun yanı sıra yapılacak analizin doğruluğu $\mathbf{G}^T(s)$ yeni transfer fonksiyonuna ilişkin $\mathbf{P}_L^T(s) (\mathbf{Q}_L^T(s))^{-1}$ sağ MFD si yapılarak anlaşılabilir.

3.2.3 Smith-McMillan Biçimi

$\mathbf{G}(s)$, $(m \times \ell)$ boyutlu normal rankı r olan rasyonel bir transfer fonksiyonu matrisi, $d(s)$ polinomu $\mathbf{G}(s)$ 'in sıfırdan farklı tüm katsayılarının en küçük ortak böleni ve $\mathbf{N}(s)$ $(m \times \ell)$ boyutlu bir polinom matrisi olmak üzere, $\mathbf{G}(s)$ matrisi

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{d(s)} \mathbf{N}(s) \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\text{rank}(\mathbf{N}(s)) = \text{rank}(\mathbf{G}(s)) = r \quad (3.34)$$

dir. Eğer $\mathbf{N}(s)$ polinom matrisinin Smith formu $\mathbf{S}(s)$ ise

$$\mathbf{S}(s) = \mathbf{L}(s) \mathbf{N}(s) \mathbf{R}(s) \quad (3.35)$$

yada

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s) \mathbf{S}(s) \mathbf{R}^{-1}(s) \quad (3.36)$$

ifadeleri yazılabilir. Dolayısıyla rasyonel $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisinin Smith-McMillan biçimi

$$\mathbf{M}(s)_{(m \times \ell)} = \frac{1}{d(s)} \mathbf{S}(s) \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{S}(s)$ ile $d(s)$ arasında olabilecek tüm sadeleştirmeler gerçekleştirildikten sonra $\mathbf{G}(s)$ matrisinin Smith-McMillan biçimi

$$\mathbf{M}(s)_{(m \times \ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^*(s)_{(r \times r)} & \mathbf{0}_{r \times (\ell-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times \ell} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (\ell-r)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

biçimine getirilebilir. Burada $\mathbf{M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \right\}$ şeklinde tanımlıdır. Smith biçiminde yazılan $\mathbf{S}^*(s)$ matrisi için geçerli olan

$\varepsilon_i(s) | \varepsilon_j(s)$ ifadesiyle tanımlanan ilişki Smith-McMillan biçiminde yazılan $\mathbf{M}(s)$ matrisi içinde geçerlidir. Şöyle ki, $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \Big| \frac{\varepsilon_j(s)}{\psi_j(s)}$ 'dir. Bu durumda $j > i$ olmak üzere her $\varepsilon_j(s)$, $\varepsilon_i(s)$ 'e kalansız olarak bölünür yani;

$$\varepsilon_1(s) | \varepsilon_2(s) | \dots | \varepsilon_r(s)$$

ve benzer şekilde her $\psi_i(s)$, $\psi_j(s)$ 'e kalansız olarak bölünür. Diğer bir değişle

$$\psi_r(s) | \psi_{r-1}(s) | \dots | \psi_1(s)$$

ilişkisi geçerlidir. Denklem (3.37) 'da ki $\mathbf{M}(s)$ matrisi elemanlarının pay ve paydası arasındaki tüm sadeleştirmelerin gerçekleştiğini düşünürsek, denklem (3.33),(3.35) ve (3.37) 'dan

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{L}(s) \mathbf{G}(s) \mathbf{R}(s) \quad (3.39)$$

ya da

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s) \mathbf{M}(s) \mathbf{R}^{-1}(s) \quad (3.40)$$

ifadeleri elde edilir. $\mathbf{M}(s)$ matrisi

$$\mathbf{M}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{W}(s)} \quad (3.41)$$

ya da

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{Z}(s) [\mathbf{W}(s)]^{-1} \quad (3.42)$$

şeklinde

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{W}(s) &= \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_r, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (3.43)$$

ifadeleri ile tanımlı iki matrisin oranı biçiminde yazılabilir. (3.42) ifadesi, (3.40) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{Z}(s)[\mathbf{D}(s)]^{-1}\mathbf{R}^{-1}(s) = \left[\mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{Z}(s)\right]\left[\left(\mathbf{R}^{-1}(s)\right)^{-1}\mathbf{D}(s)\right]^{-1} \\ \mathbf{G}(s) &= \mathbf{P}_R(s)\mathbf{Q}_R^{-1}(s) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{L}^{-1}(s)[\mathbf{D}(s)]^{-1}\mathbf{Z}(s)\mathbf{R}^{-1}(s) = \left[\mathbf{D}(s)(\mathbf{L}^{-1}(s))^{-1}\right]^{-1}\left[\mathbf{Z}(s)\mathbf{R}^{-1}(s)\right] \\ \mathbf{G}(s) &= \mathbf{Q}_L^{-1}(s)\mathbf{P}_L(s) \end{aligned} \quad (3.45)$$

sağ ve sol MFD ifadeleri elde edilebilir. Eğer (3.13) denklemi açık biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s)_{(m \times \ell)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1(s)_{(m \times r)} & \mathbf{L}_2(s)_{m \times (m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^*(s)_{(r \times r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(s)_{(r \times \ell)} \\ \mathbf{R}_2(s)_{(\ell-r) \times r} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}_1(s)\mathbf{M}^*(s)\mathbf{R}_1(s) \end{aligned} \quad (3.46)$$

ve ayrıca $\mathbf{M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \right\}$ şeklinde tanımlı olduğundan denklem (3.46) gereği

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{L}_1(s) \left[\text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \right\} \right] \mathbf{R}_1(s) \\ &= \sum_{i=1}^r \ell_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} r_i^T(s) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\ell_i(s)$, $\mathbf{L}_1(s)$ matrisinin sütun elemanlarını $\{\ell_i(s) | i=1,2,\dots,r\}$ ve $r_i^T(s)$ ise $\mathbf{R}_1(s)$ matrisinin satır elemanlarını $\{r_i^T(s) | i=1,2,\dots,r\}$ ifade eder. Nedensel $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sisteminde $(\mathbf{D}(s)=0)$ herhangi bir $\mathbf{u}(s)$ giriş işaretine karşılık elde edilecek $\mathbf{y}(s)$ çıkış işaretine ilişkin ifade (3.1) ilişkisinden

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{i=1}^r \ell_i(s) \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} r_i^T(s) \mathbf{u}(s) \quad (3.47)$$

olarak elde edilir. Eğer δ_{ij} , birim darbe (Kronecker Delta) işaretini ifade ederse, $\alpha(s)$ sıfırdan farklı olmak üzere sisteme $r_j^T \mathbf{u}(s) = \delta_{ij} \alpha(s)$ şartını sağlayan bir giriş işareti uygulandığı takdirde belirli frekans değerlerinde $\mathbf{y}(s)$ çıkış işareti için iki durum söz konusudur. Bu durumlardan ilki $\varepsilon_i(s) = 0$ olması ve dolayısı ile $\mathbf{y}(s) = \mathbf{0}$ olması, diğer durum ise $\psi_i(s) = 0$ olması, dolayısı ile $\mathbf{y}(s)$ çıkış işaretinin sonsuz değerini almasına karşı düşer.

Buradan elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

Tanım 3.11

$\{\psi_i(s) \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ polinom kümesinin elemanlarına $\mathbf{G}(s)$ matrisinin kutupları denir ve genellikle

$$p(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_r) \quad (3.48)$$

biçiminde gösterilir. $p(s)$, $\mathbf{G}(s)$ matrisinin kutup yada karakteristik polinomu olarak isimlendirilir. $p(s)$ kutup polinomu aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$p(s) = \prod_{i=1}^r \psi_i(s) \quad (3.49)$$

Tanım 3.12

$\{\varepsilon_i(s) \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ polinom kümesinin elemanlarına $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sıfırları denir ve sıfır polinomu biçiminde yazılabilir

$$z(s) = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_r) \quad (3.50)$$

$z(s)$ sıfır polinomu

$$z(s) = \prod_{i=1}^r \varepsilon_i(s) \quad (3.51)$$

biçiminde de yazılabilir.

Önerme 3.4 [9]

$m \times \ell$ boyutlu $\mathbf{G}(s)$, $m \times \ell$ boyutlu tam veya yarı nedensel biçimde tanımlı rasyonel bir transfer fonksiyonu matrisi ve $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}(s))$, $\mathbf{G}(s)$ matrisine ilişkin en küçük mertebeden gerçeklemeyi gösterir. $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ başlangıç durumlarını ifade etmek üzere

$$u(t) = \begin{cases} u_0 e^{zt} & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

biçimde tanımlı bir $u(t)$ giriş işareti için $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisinden elde edilecek çıkış işareti $u_0 \in \mathbb{C}^m$ ve $z \in \mathbb{C} - \{\lambda_i(\mathbf{A})\}$ olmak üzere

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{x}_0 - (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} u_0) + \mathbf{G}(z) u_0 e^{zt}$$

yazılabilir. Dolayısı ile $\mathbf{x}_0 = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} u_0$ başlangıç durum için çıkışta görülebilecek durum yalnızca z olacaktır, yani

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(z) u_0 e^{zt}$$

olacaktır. Sistem sıfırlarının, sıfırdan farklı bir $u(t)$ giriş işareti için çıkış işaretini sıfırladığı bilinir. Şu halde sistem

$$u(t) = k e^{zt}$$

giriş işareti uygulanması halinde çıkış işareti

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(z) k e^{zt}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, “ $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi ifadesinde $s = z$ yazılarak karmaşık aktarım matrisi bulunabilir” [10].

Teorem 3.2 [11]

Nedensel biçimde verilen bir $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sistemi için, $\mathbf{g}$ karmaşık elemanlardan oluşan bir vektör, $1(t)$; Heaviside birim basamak fonksiyonu ve $(\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0))$; başlangıç durum vektörünü göstermek üzere sisteme uygulanan $\mathbf{u}(t)$ giriş işareti

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g} e^{zt} 1(t)$$

şeklinde verilmiş olsun.

$$\mathbf{y}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{g}, z) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0$$

ifadesini sağlayan bir $z, \mathbf{x}_0$ ve $\mathbf{g}$ 'nin varlığı için geçer ve yeter koşul

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

eşitliğini sağlayan bir çözümün varlığıdır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{g} e^{zt}$$

şeklinde verilen lineer bir sisteme ve giriş işaretine Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \mathbf{x}(s) + \frac{\mathbf{B} \mathbf{g}}{s - z}$$

ve

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}(s)(s - z) = s\mathbf{I} \mathbf{x}_0(s + z) + \mathbf{B} \mathbf{g}$$

şeklinde düzenlenirse, (3.52) ifadesi gereği $(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}_0 = \mathbf{B} \mathbf{g}$ olduğundan,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})(s - z) \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 [(s - z)\mathbf{I} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})] = \mathbf{X}(0)(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{s-z} \mathbf{x}_0 \quad \text{yada} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{zt} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

durum dönüşümü ifadesi elde edilir. Bu ilişki durum uzayında doğrusal bir yörüngeyi tanımlar.

Teorem 3.3 [11]

(3.1) ifadesi ile tanımlı nedensel olmayan bir $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}(s))$ sisteminde

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \left\{ \mathbf{D}_k \frac{d^k}{dt^k} + \mathbf{D}_{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} + \dots + \mathbf{D}_0 \right\} \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmış olsun. Eğer sisteme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g} e^{zt} \mathbf{l}(t)$$

biçiminde bir giriş işareti uygulanırsa çıkış işaretinin

$$\mathbf{y}(t) = \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{g}, z) \equiv \mathbf{0} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

koşulunu sağlayan bir $z, \mathbf{x}_0$ ve $\mathbf{g}$ 'nin mevcut olabilmesi için yeter ve gerek koşul

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Bu teorem bir öncekine benzer şekilde kanıtlanır.

Tanım 3.13

(3.4) ifadesinde tanımlandığı gibi; polinomlardan meydana gelen herhangi bir $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin $\mathbf{S}(s)$ Smith biçimli polinom matrisinin $\mathbf{S}^*(s)$ ile tanımlı diyagonal elemanlarının her birine $\mathbf{G}(s)$ matrisinin sabit polinomu veya sabit çarpanı denir.

Tanım 3.14

Eğer $D_j(s)$, $G(s)$ matrisinin sıfırdan farklı j . mertebeden bütün minörlerinin monik en büyük ortak bir böleni ise, $\{D_j(s): j=1,2,\dots,r\}$ ve $\{D_0=1\}$ polinomlarına $G(s)$ matrisinin determinantsal bölenleri denir. j . minörüne ilişkin en büyük ortak bölen

$$s_j(s) = \frac{D_j(s)}{D_{j-1}(s)}$$

ifadesiyle tanımlanır. Dolayısıyla, determinantsal bölenlerden yararlanılarak, $G(s)$ matrisi herhangi bir basit satır ve/veya sütun işlemi yapılmaksızın ya da Smith biçimine dönüştürülmeksizin $s_j(s)$ sabit çarpanları belirlenebilir.

Tanım 3.15

$G(s)$ matrisinin sabit polinomlarının $\Re[s]$ ’de tanımlı en küçük monik çarpanları

$$s_j(s) = (s - \lambda_1)^{e_{j1}} (s - \lambda_2)^{e_{j2}} \dots (s - \lambda_k)^{e_{jk}} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r$$

biçiminde ayrılırsa $\{e_{ji} : i = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, r\}$ negatiften farklı tam sayılar ve her bir $(s - \lambda_i)$, $s_j(s)$ sabit polinomunun farklı lineer çarpanlarını göstermek üzere $(s - \lambda_i)^{e_{ji}}$ ’nın sıfırdan farklı olası tüm değerlerine $G(s)$ matrisinin basit bölenleri denir. Ancak

“ $\{s_j(s): j = 1, 2, \dots, r\}$ sabit polinomlarının en küçük monik çarpanlarından bazılarının e_{jk} üs ifadesinin sıfır değerini alabileceği unutulmamalıdır” [14].

$m \geq \ell$ olacak şekilde $m \times \ell$ boyutlu bir $P(s)$ sistem matrisini göz önünde bulunduralım. z , $P(s)$ matrisinin sabit polinomlarından birisine ait bir sıfır olmak üzere

$$P(s) \begin{bmatrix} x_0 \\ g \end{bmatrix} = 0$$

ifadesini sağlayan sıfırdan farklı bir $[x_0 \ g]^T$ vektörünün mevcut olması, $P(s)$ matrisinde s yerine z değerinin yazılması halinde $P(s)$ matrisinin sütun rankı kaybetmesi yeter koşuldur.

Teorem 3.4 [13]

En az birinci mertebeden karmaşık katsayılardan oluşan her hangi bir $p(x)$ polinom matrisi karmaşık sayılar kümesinde tanımlı en az bir tane z sıfırına sahiptir. Diğer bir değişle z , $p(x)$ polinomunun bir köküdür. Dolayısıyla eğer z , $p(x)$ polinomunun bir sıfırı ise $p(x)$ polinomu $(x - z)$ 'e kalansız olarak bölünür. $q(x)$, $p(x)/(x - z)$ işleminden elde edilen bölümü göstermek üzere

$$p(x) = (x - z)q(x)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $q(x)$ polinomun mertebesi, $p(x)$ polinomunun mertebesinden bir düşüktür.

Tanım 3.16

$A_{n \times n} \in \mathbb{C}$ ve $\sigma(A)$, A matrisinin öz değerlerinden meydana gelen bir küme olmak üzere herhangi bir $\lambda \in \sigma(A)$ öz değeri için

$$A x = \lambda x$$

koşulunu sağlayan tüm $x \in \mathbb{C}^n$ vektörlerine A matrisinin λ öz değerine karşı düşen bir öz uzayı bulunur. Öz uzayın sıfırdan farklı elemanları A matrisinin λ öz değerine karşılık düşen öz vektörlerdir.

Teorem 3.5

$A_{n \times n} \in \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı bir matris olsun. A matrisinin diyagonal biçime getirilebilmesi için yeter ve gerek koşul A matrisinin öz vektörlerinden meydana gelen n tane lineer birbirinden bağımsız vektörün varlığıdır.

Tanım 3.17

$A_{n \times n} \in \mathbb{C}$ matrisinde λ öz değerine karşı gelen öz uzayın boyutuna λ öz değerinin geometrik çokluğu denir. λ öz değerine karşı gelen karakteristik polinomun sıfırlarına λ öz değerinin cebrik çokluğu denir.

Geometrik çokluk, λ öz değerine karşı gelen lineer birbirinden bağımsız öz vektörlerin sayısını belirler.

Tanım 3.18

$A_{n \times n} \in \mathbb{C}$ biçiminde tanımlı bir matris olmak üzere; A matrisinin lineer birbirinden bağımsız öz vektörlerinin sayısı n ise bu yapıdaki matrislere yarı basit (semisimple, nondefective) matris denir. Bağımsız öz vektörlerinin sayısı n den küçük olan matrislere yarı basit olmayan (not semisimple, defective) matris denir. Diğer bir deyişle geometrik çokluk sayısı cebrik çokluk sayısına eşit olan matrislere yarı basit matris, düşük olanlara ise yarı basit olmayan matris denir.

Tanım 3.19

$P(s)_{(n+m) \times (n+\ell)}$, sistem matrisi olmak üzere $rank(P(s)) = r$ ($n \leq r \leq \min[(n+m), (n+\ell)]$) 'dir. $\{A, B, C, D\}$ ile tanımlı bir sistemin monik en büyük ortak bölenlerine o sistemin sıfır polinomu denir ve $z_p(s)$ ile gösterilir.

3.2.4 Değişmez Sıfırlar

$P(s)$ sistem matrisinin, değişmez polinomlarının sıfırlarına, sistemin değişmez sıfırları denir. Diğer bir deyişle; $P(s)$ matrisinin en büyük mertebeye sahip tüm minörlerinin monik en büyük ortak bölenlerinden oluşan polinoma $z_1(s)$ sabit sıfır polinomu denir.

Genellikle sistem sıfırları kümesi, değişmez sıfırlar kümesini kapsar. $P(s)_{(n+m) \times (n+\ell)}$ sistem matrisi için eğer $m = \ell$ ve $\det P(s) \neq 0$ ise bu durumda sistem sıfırları kümesi değişmez sıfırlar kümesine eşittir.

Basit yapıli sistemler açısından sistemin sabit sıfırları, $\{z_i\}$ sabit sıfırları, çıkış işaretinin sıfırlandığı birbirinden bağımsız mlerin oluşturduğu m kümesi ile birebir örtüşür. Yani diğer bir değişle $\{z_i\}$ sabit sıfır sayısı kadar bağımsız m vardır.

Fiziksel açıdan sabit sıfırlar, $\{z_i\}$ sabit sıfırının bulunduğu karmaşık frekansta sistem çıkışını sıfır yapacak giriş ve çıkış birleşimlerinin seçilmesi probleminin mne karşılık düşer.

3.2.5 Aktarım Sıfırları

Bilindiği zere $G(s)$ transfer fonksiyonu matrisi yalnızca tam kontrol edilebilir ve tam gözlemlenebilir alt sistemi temsil ettiğinden $P(s)$ sistem matrisi, $G(s)$ transfer fonksiyonu matrisinden sistem davranışına ilişkin daha fazla bilgi içerir.

Dolayısıyla $P(s)$ ve $G(s)$ matrisleri arasında göze çarpan bu fark doğrudan bu matrisler aracılığıyla tanımlanan sıfırlarda da farklılığa neden olur. şöyle ki $P(s)$ matrisi kullanılarak elde edilen sıfırların oluşturduğu küme, $G(s)$ matrisi kullanılarak elde edilen sıfırların oluşturduğu kümeyi kapsar. şayet sistem tam kontrol edilebilir ve tam gözlemlenebilir ise bu durumda her iki matris için elde edilen sıfırların oluşturduğu kümeler birbirine eşittir.

Skaler bir $G(s)$ transfer fonksiyonu için sisteme ilişkin değişmez ve aktarım sıfırları birbirine eşittir.

Tanım 3.20

$G(s)$ transfer fonksiyonu matrisi kullanılarak elde edilen sıfırlara iletim sıfırları denir.

Tanım 3.21

$G(s)$, $n \times n$ boyutlu bir transfer fonksiyonu matrisi olsun. $\det G(s) \neq 0$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$, $G(s)$ 'in herhangi bir sıfırı olmamak üzere, eğer $\det G(z_0) = 0$ ise z_0 , $G(s)$ transfer fonksiyonu matrisinin bir aktarım sıfırırır.

Davison ve Wang (1974) tarafından yapılan diğ er bir iletim sıfırı tanımına g ore;
Smith biçiminde yazılan bir $\mathbf{P}(s)$ sistem matrisi

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{L}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{P}^*(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{R}(s)$$

 eklinde tanımlamış olalım. Burada

$$\mathbf{P}^*(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{\ell+n}(s) \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla sistem matrisine ilişkin sabit sıfır polinomu $z_1(s)$

$$z_1(s) = f_1(s) f_2(s) \dots f_{n+\ell}(s)$$

 eklindedir. Yani sistem sabit sıfırları $z_1(s)$ sabit sıfır polinomunun sıfırlarıdır. Sistemin aktarım sıfırları ise en y uksek mertebeli sabit polinomun ($f_{\ell+n}(s)$) k okleridir. Dolayısıyla aktarım sıfırları k umesi, değişmez sıfırlar k umesinin bir alt k umesidir.

Sistemin tam kontrol edilebilir veya tam g ozlemlenebilir olmadığı durumda bazı karmaşık frekans değerleri halen değişmez sıfırlar k umesi içinde yer almasına rağmen artık aktarım sıfırları k umesi içerisinde yer almaz. Bu durumdaki karmaşık frekans değerlerine ayırım sıfırları adı verilir.

Teorem 3.6

$\mathbf{G}(s)$ reel rasyonel bir transfer fonksiyonu matrisi ve $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ bu $\mathbf{G}(s)$ matrisine karşılık gelen en k uc k mertebeden bir gerçekleme olmak üzere, eğer $z \in \mathbb{C}$ minimal gerçeklemenin değişmez bir sıfırıysa z aynı zamanda $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisinin de bir aktarım sıfırıdır.

3.2.6 Ayrım Sıfırları

Ayrım sıfırları tanımı Rosenbrock (1970) tarafından sistem giriş ve/veya çıkışları ile etkilenemeyen durumların serbest niteliğini tanımlamak üzere kullanılmıştır.

3.2.6.1 Giriş Ayrım Sıfırı

Sistem girişleri tarafından etkilenemeyen durumların serbest niteliğini tanımlar.

$\{\varepsilon_i(s): i=1,2,\dots,n\}$ sabit çarpanlara sahip Smith biçiminde tanımlı $[s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}]_{n \times (n+\ell)}$ biçimde bir matris düşünelim. Matrise ilişkin sabit çarpanların çarpımı, kökleri $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ matrisleri ile tanımlı sistemin giriş ayrım sıfırlarına karşılık gelen bir polinomdur. Bu polinom aynı zamanda $[s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}]_{n \times (n+\ell)}$ matrisinin sıfırdan farklı en büyük mertebeden (n . mertebeden) minörlerinin monik en büyük ortak bölenlerinin çarpımına eşittir. Bu tanım doğrultusunda sistemin giriş ayrım sıfırları $\mathbf{A}$ matrisinin öz değerleridir ve ayrıca $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ sisteminin sıfırlarıdır.

H karmaşık eşlenik evrim işlemini temsil eder ve $\mathbf{v}^H$, $\mathbf{A}$ matrisinin sol öz vektörüdür. z sistemin bir giriş ayrım sıfırı olmak üzere $\text{rank}[z\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}] < n$ olduğundan $\mathbf{v}_{1 \times n}^H \neq \mathbf{0}$ vektörü mevcuttur. Yani

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^H [z\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^H \mathbf{B} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ya da

$$\mathbf{v}^H [z\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}] = \mathbf{0}$$

giriş ayrım sıfırları, $\mathbf{P}_i(s)$ matrisinin satır rankı kaybetmesi hadisesiyle ilişkilendirilecek olursa

$$\mathbf{P}_i(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}] \quad (3.54)$$

ya da

$$\bar{\mathbf{P}}_i(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad -\mathbf{B}]$$

yazılabilir. Dolayısıyla giriş ayrım sıfırları, $P_i(s)$ matrisine ilişkin sabit polinomların da sıfırlarıdır. Eğer sistem girişlerinin sayısı çıkışları sayısından fazla ise sistem sabit sıfırlarının bazıları aynı zamanda giriş ayrım sıfırıdır. Bu durum bazı sistem durumlarının kontrol edilemediği anlamına gelir.

“ n , A matrisinin mertebesini göstermek üzere, eğer denklem (3.54) ile Smith biçiminde tanımlanan $P_i(s)$ matrisi $[I_{n \times n} \ 0]$ biçimindeyse sistem herhangi bir giriş ayrım sıfırına sahip değildir” [14].

Eğer $P_i(s)$ matrisi Smith biçiminde değilse, $(sI - A)$ ve B matrislerini soldan ortak bölen unimodular bir $R(s)$ matrisi bulunabilir. Böylelikle $(sI - A)$ ve B matrisleri $R(s)$ matrisine aralarında asallık meydana gelinceye kadar soldan bölme işlemi yapılarak kontrol edilemeyen kısım ayrıştırılır.

3.2.6.2 Çıkış Ayrım Sıfırı

$\{\varepsilon_j(s) : j = 1, 2, \dots, n\}$ sabit çarpanlara sahip Smith biçiminde tanımlı $[sI - A \ C]^T_{(n+m) \times n}$ biçimde bir matris düşünelim. Matrise ilişkin sabit çarpanların çarpımı, kökleri $\{A, B, C, D\}$ matrisleri ile tanımlı sistemin çıkış ayrım sıfırlarına karşılık gelen bir polinomdur. Bu polinom aynı zamanda $[sI - A \ C]^T_{(n+m) \times n}$ matrisinin sıfırdan farklı en büyük n . mertebeden minörlerinin monik en büyük ortak bölenlerinin çarpımına eşittir.

$\omega \in \mathbb{C}^n$, A ’nın bir öz vektörü ve z uygun bir çıkış ayrım sıfırı olmak üzere;

$$\begin{aligned} (zI - A)\omega &= 0 \\ C\omega &= 0 \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix} \omega = 0$$

çıkış ayrım sıfırları $P_0(s)$ matrisinin sütun rankı kaybetmesi ile ilişkilendirilecek olunursa

$$\mathbf{P}_0(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, çıkış ayırım sıfırları; $\mathbf{P}_0(s)$ matrisine ilişkin sabit polinomların sıfırları olarak da tanımlanabilir. Şayet sistemin çıkışlarının sayısı girişlerinin sayısından fazla ise bu durumda sisteme ilişkin bazı sabit sıfırların aynı zamanda çıkış ayırım sıfırı olur. Bu durum bazı sistem modlarının gözlemlenemediği anlamına gelir.

“ n , $\mathbf{A}$ matrisinin mertebesini göstermek üzere eğer Smith biçimindeki (3.55) denklemi ile tanımlanan $\mathbf{P}_0(s)$ matrisi $[\mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{0}]^T$ biçiminde ise sistem herhangi bir çıkış ayırım sıfırına sahip değildir” [14].

Eğer $\mathbf{P}_0(s)$ matrisi Smith biçiminde değilse $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ve $\mathbf{C}$ matrislerini sağdan ortak bölen unimodular bir $\mathbf{Q}(s)$ matrisi bulunabilir. Böylece $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri $\mathbf{Q}(s)$ matrisine aralarında asallık sağlanıncaya kadar sağdan bölünerek gözlemlenemeyen kısım ayrıştırılabilir.

3.2.6.3 Giriş – Çıkış Ayırım Sıfırı

Denklem (3.55) ‘ün tanımladığı $\mathbf{P}_0(s)$ ve Denklem (3.54)’ün tanımladığı $\mathbf{P}_i(s)$ matrislerinin birlikte sağlayan $s = z$ karmaşık frekans değerlerine giriş – çıkış ayırım sıfırları denir. Bu durumda z_i sıfırları sistemin hem kontrol edilemeyen hem de gözlemlenemeyen durumlarına karşı düşer.

Tanım 3.22

Sisteme ilişkin giriş ayırım sıfırlarının sayısı $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ kontrol edilebilirlik matrisindeki rank eksikliği kadardır. Benzer şekilde, sisteme ilişkin çıkış ayırım sıfırlarının sayısı $[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T]$ gözlenebilirlik matrisinde meydana gelen rank eksikliği kadardır.

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ve $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ denklemleriyle tanımlı bir sistem ve $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ ifadesiyle verilen transfer fonksiyonu matrisine ilişkin tanımlar özetlenirse:

$P(s)$ sistem matrisi kare ve tekil olmayan bir matris ise sisteme ilişkin sıfırlar sistemin sabit sıfırlarına eşittir. Aynı zamanda $\{A, B, C, D\}$ matrisleri ile tanımlı sistem tam kontrol edilebilir ve tam gözlemlenebilir ise sistem sıfırları, sabit sıfırlar ve aktarım sıfırları kümeleri birbirine eşittir.

Giriş ayırım sıfırları kümesi, A matrisinin kontrol edilemeyen öz değerlerinin oluşturduğu kümeye eşittir. Benzer şekilde; çıkış ayırım sıfırları kümesi, A matrisinin gözlemlenemeyen öz değerlerinin oluşturduğu kümeye eşittir. Giriş – çıkış ayırım sıfırları kümesi ise A matrisinin hem gözlemlenemeyen hem de kontrol edilemeyen öz değerlerinin oluşturduğu kümeye karşı gelir.

4. SIFIRLARIN TANIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

$\mathcal{S}(A,B,C)$ biçiminde tanımlı nedensel bir sistem matrisi

$$\mathbf{P}(s)_{(m+n) \times (m+n)} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A}_{n \times n} & -\mathbf{B}_{n \times m} \\ \mathbf{C}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$\det \mathbf{P}(s) = |\mathbf{P}(s)| = z(s) \quad (4.2)$$

dir. Buna göre sisteme ilişkin sıfırlar $z(s)$ polinomunun kökleridir.

Sıfırların değişmezliğini incelemek üzere sisteme ilişkin polinom matrisinin normal rankını değiştirmeyen elementer blok satır ve sütun işlemleri kural tablosu

- Herhangi iki blok satır/sütun yer değiştirilebilir
- Herhangi bir blok satır/sütun tekil olmayan bir matrisle sağdan/soldan çarpılabilir
- Herhangi bir blok satır/sütun, kendisi ile herhangi bir sabit /polinom matrisi ve diğer bir blok satır/sütun matrisinin sağdan/soldan çarpımının toplamı şeklinde yeniden yazılabilir

şeklinde tanımlanabilir. Bir blok satır/sütun, bir veya daha fazla satır/sütun 'dan meydana gelir.

4.1 Sıfırların Değişmezliği

Sıfırların değişmezlik özelliği dört ana başlık altında incelenebilir.

4.1.1 Durum Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

şeklinde tanımlı bir sistem ve bu sisteme ilişkin sistem matrisi $\mathbf{P}(s)$

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

$\mathbf{N}_{n \times n}$ tekil olmayan bir dönüşüm matrisi olmak üzere $\mathbf{x}(t)$, durum vektörüne $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{N}\mathbf{x}(t)$ ifadesi ile tanımlı bir dönüşüm uygulanması halinde (4.3) ile tanımlı sistem, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{N}\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

haline dönüşür. (4.5) ile tanımlı sistem için Rosenbrock sistem matrisi

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \hat{\mathbf{A}} & -\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} & -\mathbf{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\tag{4.6}$$

şeklindedir. (4.6) ifadesi ile tanımlı sistem matrisine elementer blok satır/sütun işlemleri uygulanarak (4.5) ifadesi ile tanımlı yeni sisteme ilişkin rank ifadesi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(s) &= \text{rank} \left[\left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{N}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{N} \mid \begin{bmatrix} -\mathbf{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right] = \text{rank} \left[\begin{bmatrix} s\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{A} & -\mathbf{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] \\ &= \text{rank} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1}(s\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{A}) & -\mathbf{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] = \text{rank} \left[\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right]\end{aligned}\tag{4.7}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.4) ve (4.7) ifadelerinin aynı rank ifadelerine sahip olduğu görülür. Dolayısı ile (4.3) ve (4.5) sistemleri için yazılan sistem matrislerinin aynı $s = z$ karmaşık frekans değerlerinde rank kaybettiği söylenebilir. Yani diğer bir deyişle her iki sisteme ilişkin sıfırlardan meydana gelen kümeler birbirine eşittir.

Sonuç olarak durum vektörüne tekil olmayan bir dönüşüm uygulanması halinde sistem sıfırları herhangi bir değişikliğe uğramaz.

4.1.2 Giriş Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali

(4.3) ifadesi ile verilen bir sisteme, $\mathbf{M}_{\ell \times \ell}$ tekil olmayan bir dönüşüm matrisi olmak üzere $\mathbf{u}(t)$, giriş vektörüne $\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N} \mathbf{u}(t)$ ifadesi ile tanımlı bir dönüşüm uygulanması halinde sistem, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1}$ yeni giriş matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

haline dönüşür. Elde edilen yeni sisteme ilişkin Rosenbrock sistem matrisi rank ifadesi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(s) &= \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} \left[s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} \mid \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{M} \right] \\ &= \text{rank} [\mathbf{P}(s)]\end{aligned}\tag{4.9}$$

şeklindedir. Dolayısıyla (4.9) ifadesinden de görüleceği üzere giriş vektörüne tekil olmayan bir dönüşüm uygulanması sistemin sıfırlarında herhangi bir değişikliğe neden olmaz.

4.1.3 Çıkış Vektörüne Tekil Olmayan Bir Dönüşüm Uygulanması Hali

(4.3) ifadesi ile verilen bir sisteme, $\mathbf{T}_{m \times m}$ tekil olmayan bir dönüşüm matrisi olmak üzere $\mathbf{y}(t)$ çıkış vektörüne $\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{T} \mathbf{y}(t)$ ifadesi ile tanımlı bir dönüşüm uygulanması halinde sistem, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{T} \mathbf{C}$ yeni giriş matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{4.10}$$

haline dönüşür. Elde edilen yeni sisteme ilişkin Rosenbrock sistem matrisi rank ifadesi

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{TC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{TC} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} [\mathbf{P}(s)] \quad (4.11)$$

şeklindedir. Dolayısıyla (4.11) ifadesinden de görüleceği üzere çıkış vektörüne tekil olmayan bir dönüşüm uygulanması sistemin sıfırlarında herhangi bir değişikliğe neden olmaz.

4.1.4 Statik Çıkış ve Durum Geri Beslemesi Yapılması Hali

(4.3) ifadesi ile verilen bir sisteme, $\mathbf{v}(t)$ referans giriş işaretini göstermek üzere

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (4.12)$$

ifadesi ile tanımlı statik bir durum geri beslemesi yapılması halinde kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{Bv}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

biçimine dönüşür. (4.13) ifadesi tanımlı kapalı çevrim sistem için sistem matrisi rank ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_c(s) &= \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \left(s\mathbf{I}_{n \times n} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \right) & -\left(\begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{K} \right) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} [\mathbf{P}(s)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde bulunur. Aynı durumu statik çıkış geri beslemesine genişletmek için (4.12) ifadesine benzer olarak sisteme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_y \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (4.15)$$

ifadesi ile tanımlı bir geri besleme uygulanması halinde sistem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_y \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{Bv}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

biçimine dönüşür. Dolayısı ile (4.13) sistemi için elde ettiğimiz sistem matrisi rank ifadesinde $\mathbf{K}$ yerine $\mathbf{K}_y \mathbf{C}$ yazılarak (4.14) ifadesi ile verilen rank eşitliği statik çıkış geri beslemesi için de geçerli olur. Buradan statik durum ve çıkış geri beslemesi altında sistem sıfırlarının herhangi bir değişikliğe uğramadığı açıkça görülmektedir.

4.2 Sistem Sıfırlarına İlişkin Doğrultular

Eğer $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi $s = z$ değerinde bir sıfıra sahip ise $\mathbf{u}_z^H \mathbf{u}_z = 1$ ifadesinin sağlayan

$$\mathbf{G}(z)\mathbf{u}_z = 0 \quad , \quad \mathbf{G}(s)\mathbf{u}_z \neq 0 \quad \forall s \neq z$$

sıfırdan farklı bir $\mathbf{u}_z$ giriş sıfır doğrultusu vektörü ve $\mathbf{y}_z^H \mathbf{y}_z = 1$ ifadesini sağlayan

$$\mathbf{y}_z^H \mathbf{G}(z) = 0 \quad , \quad \mathbf{y}_z^H \mathbf{G}(s) \neq 0 \quad \forall s \neq z$$

sıfırdan farklı bir $\mathbf{y}_z$ çıkış sıfır doğrultusu vektörleri tanımlanabilir.

Giriş ve çıkış sıfır doğrultuları $\mathbf{G}(z)$ matrisi sağ ve sol sıfır uzayına (null space 'ine) karşı düşen taban (base) vektörlerdir. Her iki yöndeki (sağ ve sol) sıfır uzayları, $s = z$ tekil değerinin giriş ve çıkışta meydana getirdiği tekil doğrultuları gösterir. Tam normal ranka sahip bir $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi için z çoğulluğu, boyutu bire eşit her iki sıfır uzayından birine eşit olacaktır. Genel durumda m çoğullama değeri için m $s = z$ karmaşık frekans değeri ile m tane giriş ve m tane çıkış ilişkilendirilebilir.

Giriş çıkış sıfır doğrultuları, sıfırların hesaplanması hususunda genelleştirilmiş öz değerler kuramından yararlanmak için durum giriş (state input) ve durum çıkış (state output) doğrultularına genişletilebilir. Dolayısı ile $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisi için sistem sıfırları (z_i), sıfır giriş ($\mathbf{u}_z$), durum sıfır giriş doğrultuları $\mathbf{x}_{z,i} \in \mathbb{C}^{n_s}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{z,i} \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ve benzer şekilde sistem sıfırları (z_i), sıfır çıkış (y_z), durum sıfır çıkış doğrultuları

$$\mathbf{y}_{z,i} \in \mathbb{C}^{n_x}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{z,o}^H & \mathbf{y}_z^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

genelleştirilmiş öz değerler kuramından hesaplanabilir. Eğer (4.18) ifadesinin transpozu alınır

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T - s\mathbf{I} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{z,o} \\ \bar{\mathbf{y}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısı ile $\mathbf{G}^T(s)$ ifadesinin giriş doğrultusu $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin çıkış doğrultusunun eşleniğine eşittir.

Sıfır doğrultularının hesaplanmasında kullanılan diğer bir yöntem ise tekil değer çarpımıdır (Singular Value Decomposition, SVD). Şöyle ki $\mathbf{G}(z)$ transfer fonksiyonu matrisine ilişkin SVD ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z) &= \mathbf{U}_z \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{V}_z^H = \sum_{i=1}^r u_i \lambda_i v_i^H \\ &= u_1 \lambda_1 v_1^H + u_2 \lambda_2 v_2^H + \dots + u_r \lambda_r v_r^H \end{aligned}$$

Eğer sistemin rankı r ve sıfırın sahip olduğu geometrik çoğulluğu bir ise $\mathbf{V}_z$ ve $\mathbf{U}_z$ matrislerinin sütunları, $s = z$ karmaşık tekil frekans değerine karşılık gelecek sıfır doğrultularını verir. $\mathbf{V}_z$ ve $\mathbf{U}_z$ matrislerinin r tane sütuna sahip oldukları durumda, giriş sıfır doğrultusu $\mathbf{u}_z = \mathbf{v}_r$ ve çıkış sıfır doğrultusu $\mathbf{y}_z = \mathbf{u}_r$ olarak bulunur.

Eğer $\mathbf{G}(s)$ tam normal ranka sahip olmayan bir matris ve sıfıra ilişkin çoğulluk birden büyük ise sıfıra eşit öz değer sayısı birden fazla olacağından sıfır doğrultularının hesaplanması zorlaşacaktır.

Sıfır doğrultularının SVD ile hesaplanabilmesi için sıfırların yerleri bilinmelidir. Ancak genelleştirilmiş öz değer kuramı hem sıfırların hem de doğrultularının hesaplanmasını olanaklı kılar.

Şayet bir sıfır ve kutup aynı koordinatlar üzerinde yer alıyor ancak doğrultuları birbirinden farklı ise o noktada herhangi bir kutup sıfır sadeleşmesi gerçekleşmez. Bu durumda $G(z)$ ifadesinin elde edilmesi hadisesinde nümerik problemlerden ötürü SVD doğru sonuç vermez. Çünkü $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ matrisi tekil bir matris olacağından $G(z) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ ifadesi doğru olarak hesaplanamaz.

Çıkış sayısı giriş sayısından fazla olan sistemlerde, sistem çıkışına bir $\mathbf{F}$ matrisi eklenerek çıkış ifadesi

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{x}$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu duruma kareye indirgeme denir. Yine aynı özellikteki sistemlerde girişe bir $\mathbf{K}$ matrisi ile ek girişler ilave edilebilir. Bu duruma ise kareye yükseltme denir. Buna göre

Karesel olmayan bir sisteme ilişkin sabit sıfırlar ve sıfır doğrultuları her zaman için kareye indirgenmiş bir sistemin sabit sıfırları ve sıfır doğrultularıdır. Ancak aksi geçerli değildir.

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{F}\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = 0$$

Kareye yükseltilmiş bir sisteme ilişkin sıfırlar ve durum sıfır doğrultuları gerçek sisteminkilerle aynıdır. Ancak giriş sıfır doğrultusu kareye yükseltme işlemi ile düzenlenmelidir. Öyle ki

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{K}\mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = 0$$

Durum sıfır doğrultuları birbirlerinden lineer bağımsızdır. (Karcianas N. , 1975)

Durum sıfır doğrultuları, $\mathbf{C}$ matrisi çekirdeğinde yer alan bir $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ alt uzayı tanımlar. (Morse, Wonham, 1971).

$\mathbf{C}$ matrisi çekirdeğinde yer alan en büyük boyuta sahip $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ alt uzayı boyutu, durum sıfır doğrultuları sayısına eşittir.

$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ istemine ilişkin sıfır ve sıfır doğrultuları, $\mathcal{S}(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t, \mathbf{C}^t)$ sistemine ilişkin sıfır ve sıfır doğrultularına eşittir.

$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sistemine ilişkin sıfır ve sıfır doğrultuları çıkış geri beslemesi yapılması halinde sabittir. Şöyle ki

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_y\mathbf{C}) & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

4.3 Kareye İndirgeme ve Kareye Yükseltgeme

(4.3) ifadesi ile verilen bir sistemde çıkış sayısı giriş sayısından büyük olsun ($m > \ell$), bu durumda mevcut sistemden eşit sayıda giriş ve çıkışa sahip yeni bir sistem türetmek üzere çıkışa farklı çıkış işaretlerinin birleşimlerinden meydana gelen

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{y}(t) = \mathbf{LC}\mathbf{x}(t)$$

ifadesi ile tanımlı yeni bir çıkış üretmeye imkan tanıyacak $(\ell \times m)$ boyutlu bir $\mathbf{L}$ matrisi eklenebilir. Benzer şekilde giriş sayısı çıkış sayısından büyük sistemlerde mevcut girişlere ilave girişler eklemek için girişe $(\ell \times m)$ boyutlu bir $\mathbf{D}$ matrisi olmak üzere

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(t)$$

ifadesi ile tanımlı bir besleme yapılarak sistem kareye yükseltgenebilir.

Önerme 3.5

Çıkış sayısı giriş sayısından büyük sistemlerde, kareye indirgenmiş yeni sisteme ilişkin sıfırlardan meydana gelen küme, mevcut sistemin sıfırlarından meydana gelen kümeyi kapsar. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani sistem sıfırları kümesi kareye indirgenmiş sisteme ilişkin sıfırları kümesini kapsamaz.

Kanıt

$\mathbf{L}$ matrisinin

$$\mathbf{L}_{\ell \times m} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2] \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlı olsun ve kolaylık sağlaması için $\mathbf{L}$ matrisinin

$$\mathbf{L}_{\ell \times m} = [\mathbf{L}_{1(\ell \times m)} \quad \mathbf{0}]$$

olduğu kabul edilsin. Dolayısı ile

$$\mathbf{C}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1(\ell \times n)} \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

için $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1$ olması halinde kareye indirgenmiş sisteme ilişkin sistem matrisi

$$\mathbf{P}_k(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan kareye indirgenmiş sistemin sıfırlarının $\mathbf{P}_k(s)$ sistem matrisinin en büyük mertebeden minörlerinin en büyük ortak bölenleridir.

Daha genel bir sonuç elde etmek için çıkış matrisi (4.21) ifadesi ile tanımlı olsun. Bu durumda kareye indirgenmiş sisteme ilişkin sistem matrisi

$$\mathbf{P}_{k(n+m) \times (n+\ell)}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

şeklinde olacaktır. Kareye indirgenmiş sistemin sıfırları (4.23) ifadesi ile tanımlı $\mathbf{P}_k(s)$ matrisinin en büyük mertebeden minörünün en büyük ortak bölenleridir. Dolayısı ile (4.23) ifadesinden bulunacak sıfırların meydana getirdiği kümenin (4.22) ifadesinden elde edilenlerin oluşturduğu kümeyi kapsadığı açıktır.

En genel durum için yani $\mathbf{L}$ matrisinin (4.20) ifadesi ile tanımlı olduğu durum göz önüne alındığı durumda $\text{rank } \mathbf{L}_1 = \ell$ yani

$$\mathbf{L}\mathbf{T} = [\mathbf{I}_{\ell \times \ell} \quad \mathbf{0}]$$

koşulunu sağlayacak şekilde

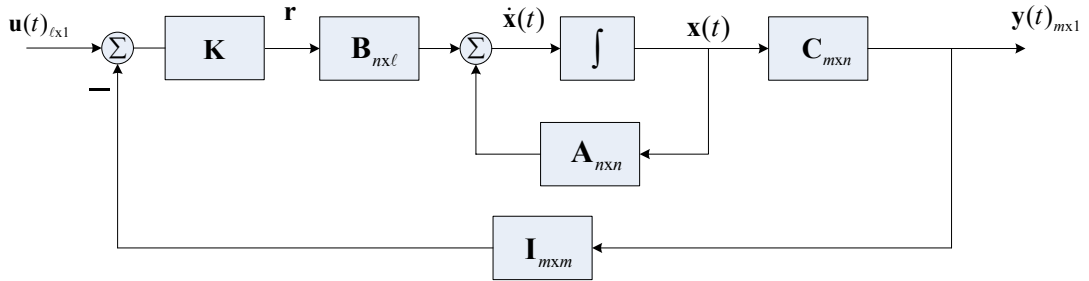
$$\mathbf{T}_{mxm}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{-1} & -\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(m-\ell) \times (m-\ell)} \end{bmatrix}$$

ifadesi ile tanımlı bir matris tanımlı olsun. Bu durumda daha önce elde edilen sonuçlar ((4.22) ve (4.23)) çerçevesinde $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{LTC})$ sistemine ilişkin sıfırlardan meydana gelen kümenin, $\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sistemine ilişkin sıfırlardan meydana gelen kümeyi kapsar.

Önerme 3.6

Önerme 3.5. 'de elde edilen sonuç, giriş sayısının çıkış sayısından büyük olduğu sistemlerde, kareye yükseltgenen sistemler içinde geçerlidir. Yani kareye yükseltgenen yeni sisteme ilişkin sıfırların meydana getirdiği küme, mevcut sistemin sıfırlarından meydana gelen kümeyi kapsar. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani sistem sıfırları kümesi kareye yükseltgenmiş sisteme ilişkin sıfırları kümesini kapsamaz.

4.4 Yüksek Genlikli Çıkış Geri Beslemesi Altında İletim Sıfırları Davranışı



Şekil 4.4: Yüksek genlikli çıkış geri beslemesi için blok tablo

Standart bir çok giriş çok çıkışlı sistem Şekil 4.4 'de görüldüğü gibidir. Kapalı çevrim sistemin karakteristik frekanslarına ilişkin asimptotik davranışları incelemek üzere sisteme

$$\mathbf{K} = k \mathbf{I} \quad , \quad k \rightarrow \infty \quad (4.24)$$

şeklinde bir geri besleme kazanç matrisi tanımlansın.

Sistem değişmez sıfırlarının geri beslemeden etkilenmediği bilindiğinden, sistem sıfır polinomunu hem açık çevrim hem de kapalı çevrim durum için $z(s)$ ile gösterelim. Burada $p_o(s)$; sistemin açık çevrim karakteristik polinomunu, $p_c(s)$; sistemin kapalı çevrim karakteristik polinomunu ve $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ transfer fonksiyonu matrisini göstermek üzere

$$|\mathbf{I} + k\mathbf{G}(s)| = \frac{p_c(s)}{p_o(s)} \quad (4.25)$$

determinant ifadesini kısımlara ayırmak için Schur teoremi kullanılırsa (Bkz. Ek – A)

$$\begin{aligned} z(s) &= \begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \\ &= |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}| \\ &= p_o(s) |\mathbf{G}(s)| \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$|\mathbf{G}(s)| = \frac{z(s)}{p_o(s)} \quad (4.26)$$

(4.25) denklemiyle verilen fark çevrimi (return difference) determinanı ifadesi skaler fonksiyonların temel özelliklerinden yararlanılarak (bkz. Ek – B)

$$|\mathbf{I} + k\mathbf{G}(s)| = 1 + \text{trace}(k\mathbf{G}(s)) + \dots + \det(k\mathbf{G}(s)) \quad (4.27)$$

şeklinde ifade yazılabilir. Elde edilen ifade aynı zamanda (4.25) denkleminde de eşittir.

$$1 + \text{trace}(k\mathbf{G}(s)) + \dots + \det(k\mathbf{G}(s)) = \frac{p_c(s)}{p_o(s)} \quad (4.28)$$

Bu nedenden dolayı (4.28) ifadesinden, k sonsuza doğru gittikçe

$$\left. \frac{p_c(s)}{p_o(s)} \right|_{k \rightarrow \infty} \cong |k\mathbf{G}(s)| = k^m |\mathbf{G}(s)| \quad (4.29)$$

elde edilir ve (4.26) ile

$$\left. \frac{p_c(s)}{p_o(s)} \right|_{k \rightarrow \infty} = \frac{k^m z(s)}{p_o(s)}$$

bulunur. Buna göre m adet kapalı çevrim karakteristik frekansı keyfi olarak istenildiği kadar büyük seçilebilirken geriye kalan $(n - m)$ adet frekans

$$z(s) = 0$$

polinomunun köklerine, yani sisteme ilişkin iletim sıfırlarına olabildiğince yakın kalmaktadır. Dolayısıyla k sonsuza giderken yalnızca sınırlı sayıda karakteristik frekans değeri sonlu bir değer alır.

5. SIFIR YERLEŞTİRME

“q uncu mertebeden dinamik bir çıkış geri beslemeli kontrolör, sisteme kapalı çevrimde kontrolörün kutuplarından meydana gelen q adet ilave sıfır ekler” [23].

Geri besleme ancak sisteme ilişkin öz değerleri deęiőtirebilir. Dolayısı ile hedeflenen dinamik davranış geri besleme ile elde edilebilir. Diğer bir değişle sisteme ilişkin kapalı çevrim kararlılığı ve dinamik davranışı büyük ölçüde kapalı çevrim kutupları tarafından belirlenir. Ancak sistem dinamik davranışında önemli ölçüde etkin diğer bir faktör ise sistem sıfırlarıdır. İkinci bölümde yapılan incelemede bunu desteklemektedir.

Transfer fonksiyona ilişkin sıfırların yerleri statik durum geri beslemesi veya n kontrolör eklenmesi durumlarında değiştirilemez. Dinamik geri besleme altında bir çözümün varlığından söz edilebilir ancak bu çözüm çok özel durumlarda geçerlidir, genelleőtirilemez. Problemin bir çözüme sahip olması halinde bu doğrudan dinamik çıkış geri beslemesi tabanlı model eşleme problemine dönüşür.

Teorem 5.1 [24]

$G(s)$, transfer matrisine sahip

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

ifadesi ile tanımlı bir sistem ve $\tilde{G}(s)$ transfer matrisine sahip

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{x}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

model sistemini eşleme problemi için ancak

- i. $G(s)$ ve $\begin{bmatrix} G(s) & \tilde{G}(s) \end{bmatrix}$ ifadeleri aynı sonsuz sıfır yapısına sahip ise ve
- ii. $\tilde{G}(s)$ ve $\begin{bmatrix} G(s) & \tilde{G}(s) \end{bmatrix}$ ifadeleri sonlu ve sonsuz tüm sıfırlar için aynı yapıya sahip ise

bir çözümün varlığından söz edilebilir. Dolayısı ile ancak çok özel yapıdaki sistem ve modeller için bir çözümün bulunacağı açıktır.

Buradan sistem sıfırlarının değiştirilemeyeceği istenmeyen sıfır etkisinin ancak bir kutupla silinerek veya sisteme daha baskın bir sıfır eklenerek giderilebileceği sonucu ortaya çıkar.

Eğer sistemin iç yapısına müdahale edilebiliyor ise sisteme sanal girişler eklenerek (kareye yükseltme) yeni giriş matrisi veya sistem çıkışının farklı bileşenlerinden yeni bir çıkış matrisi türetilerek mevcut sisteme yeni sıfırlar eklenebilir. Bu aynı zamanda sistem mevcut öz değerlerinin hedeflenen sistem davranışı sağlaması için tasarlanacak olan kontrolör ile de gerçekleştirilebilir. Ancak daha önce bahsedildiği gibi statik durum geri beslemesi ile bu işlem gerçekleştirilemez. Bu nedenle statik durum geri beslemesi çıkış geri beslemesine dönüştürülerek bazı serbest parametrelerin oluşması sağlanır. Böylelikle çok girişli çok çıkışlı sistemlerde istenen giriş çıkış kombinasyonu arasındaki transfer fonksiyonuna istenen sistem sıfırın atanması mümkün olur.

Bu amaca yönelik olarak hedeflenen öz değerlerin ve bunun yanı sıra sisteme ek olarak bir sıfır yerleştirmek için durum geri beslemesi tabanlı çıkış geri beslemesine indirgenmiş genelleştirilmiş iz düşün yöntemi kullanılabilir. Öncelikle genelleştirilmiş iz düşün yaklaşımını inceleyelim

5.1 Genelleştirilmiş İz Düşüm Yaklaşımı

K durum geri besleme matrisi parametreleri ile kapalı çevrim kutupları arasındaki iz düşün ifadesi oldukça karmaşık lineer olmayan ifadeler içerir ve kutup atama işleminin gerçekleştirilebilmesi için bu ifadelerin çözülmesi gerekir. Durum geri besleme matrisini elde etmek üzere pek çok yöntem mevcuttur (Closing to loop twice, CSF etc.). Ancak bu yöntemler kutup atama işlemini gerçekleştirmek üzere

lineer olmayan iz düşüm ifadelerini çok sayıda bağımsız değişkenden meydana gelen lineer denklemlere dönüştürürler. Dolayısı ile bu durumda üst parametreye yuvarlama gerekebilir ve bunun sonucunda da bazı serbestlik dereceleri kaybolur.

Genelleştirilmiş iz düşüm yaklaşımı temelinde, durum geri beslemeli kutup atama probleminde ortaya çıkan durum geri besleme matrisi elemanlarını meydana getiren lineer olmayan n adet denklemin aynı satırdaki elemanlarının birbirleri ile lineer bağımlı olması prensibine dayanır. Dolayısı ile problemi çözmek durum geri besleme matrisinin her hangi bir satırı için diğer satırlara ilişkin elemanlar serbest parametre olarak seçilerek mümkün hale gelir.

n tane durum, ℓ tane girişten meydana gelen (R) ifadesi ile tanımlı bir sistem için hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını sağlamak üzere tasarlanan tam ranka sahip $(n \times \ell)$ boyutlu bir $\mathbf{K}$ durum geri besleme matrisi $\mathbf{e}_i$; $\mathbf{I}_{\ell \times \ell}$ matrisinin i inci sütununu ve $\mathbf{k}_i^T$; $\mathbf{K}$ matrisinin i inci satırını göstermek üzere

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{e}_i \mathbf{k}_i^T$$

ℓ tane birim ranka sahip matrisin toplamı şeklinde yazılabilir.

Keyfi bir giriş seçilmesi halinde (j 'inci giriş) $\mathbf{K}$ durum geri besleme matrisi, $\bar{\mathbf{K}}_j$ j inci satırı sıfırlardan meydana gelen geri besleme matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{i \neq j} \mathbf{e}_i \mathbf{k}_i^T + \mathbf{e}_j \mathbf{k}_j^T \\ &= \bar{\mathbf{K}}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{k}_j^T \end{aligned}$$

şekline yazılabilir. Dolayısı ile kutup atama problemi,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer zamanla değişmeyen bir sistem ve

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

durum geri beslemesi için

$$eig[\mathbf{A} - \mathbf{BK}]$$

biçiminden

$$eig[\mathbf{A} - \mathbf{BK}_j - \mathbf{B}\mathbf{e}_j\mathbf{k}_j^T]$$

(ya da

$$eig[\bar{\mathbf{A}}_j - \boldsymbol{\beta}_j\mathbf{k}_j^T] \quad (5.1)$$

şeklinde yeniden düzenlenirse) $\mathbf{k}_j$ 'nin bulunması problemine dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_j &= \mathbf{A} - \mathbf{BK}_j \\ \boldsymbol{\beta}_j &= \mathbf{B}\mathbf{e}_j \end{aligned}$$

dir. Diğer bir değişle (5.1) ifadesi aynı zamanda tek giriş tek çıkışlı $(\bar{\mathbf{A}}_j, \boldsymbol{\beta}_j)$ sistemi için durum geri beslemeli kutup atama problemine denktir.

Hedeflenen kapalı çevrim sisteme ilişkin karakteristik denklem

$$P_c(s) = s^n + \alpha_{(n-1)}s^{n-1} + \alpha_{(n-2)}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

ve $(\bar{\mathbf{A}}_j, \boldsymbol{\beta}_j)$ indirgenmiş sistemin karakteristik denklem

$$\bar{P}(s) = |s\mathbf{I}_{n \times n} - \bar{\mathbf{A}}_j| = s^n + a_{(n-1)}s^{n-1} + a_{(n-2)}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0$$

ifadeleri ile verilmiş olsun, dolayısı ile $\boldsymbol{\delta}_j$, $\mathbf{X}_j$ ve $\boldsymbol{\Phi}_j$ matrisleri sırası ile

$$\boldsymbol{\delta}_j = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} - a_{j(n-1)} \\ \alpha_{n-2} - a_{j(n-2)} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_{j(1)} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j(n-1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j(n-2)} & a_{j(n-1)} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{j(1)} & a_{j(2)} & a_{j(3)} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\Phi_j = [\beta_j \quad \bar{\mathbf{A}}_j \beta_j \quad \bar{\mathbf{A}}_j^2 \beta_j \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}_j^{(n-1)} \beta_j] \quad (5.4)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\mathbf{k}_j$ durum geri besleme kutup atama matrisi

$$\mathbf{k}_j = [\Phi_j']^{-1} \mathbf{X}_j^{-1} \delta_j \quad (5.5)$$

ifadesiyle bulunur. Ancak burada dikkat edilmesi gereken husus her zaman için (5.1) ifadesi ile verilen kutup atama probleminin çözümünü sağlayan bir $\bar{\mathbf{K}}_j$ matrisinin bulunabilirliği veya seçilen her $\bar{\mathbf{K}}_j$ için bunun geçerliliğidir.

Genelleştirilmiş iz düşün yaklaşımı kullanılarak sıfır yerleştirmeyi Örnek 5.1. üzerinde inceleyelim.

Örnek 5.1

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

durum uzayı denklemleri ile tanımlı sistemin kapalı çevrim baskın kutuplarını $s_{1,2} = -1 \pm j$ ve $s_3 = -4$ yapacak $\mathbf{K}_y$ çıkış geri besleme matrisini bulunuz.

Sisteme ilişkin kapalı çevrim transfer matrisi

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{6s-6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{-s^2+s}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{s+5}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Transfer matrisi ifadesinden görüleceği gibi sistem yalnızca ikinci giriş ve çıkışa ilişkin transfer fonksiyonunda herhangi bir sıfıra sahip değildir. Dolayısı ile sıfır yerleştirmeyi gerçekleştirmek üzere bu transfer fonksiyonu alınabilir.

Sıfır yerleştirme işlemini gerçekleştirmek için sisteme ilişkin iki baskın kutup ($s_{1,2} = -1 \pm j$) aynen alınıp üçüncü reel kutup ise serbest bırakılarak ($s = p$) hedeflenen karakteristik denklem

$$P_c(s) = s^3 + (p+2)s^2 + (2p+1)s + 2p$$

şeklinde elde edilir. İz düşümü alınmış yeni sisteme ilişkin karakteristik denklem ise

$$\bar{P}(s) = s^3 + (6-k_1)s^2 + (11-6k_1)s + 6-11k_1+6k_2$$

biçiminde yazılabilir. Buradan δ_j , $\mathbf{X}_j$ ve Φ_j matrisleri

$$\delta_j = \begin{bmatrix} 4-k_1-p \\ 9-6k_1-2p \\ 6-11k_1+6k_2-2p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-k_1 & 1 & 0 \\ 11-6k_1 & 6-11k_1+k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1-k_2 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile $\mathbf{k}_j$, (5.5) ifadesi gereği

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{j1} = & -2668 + 12998k_1 - 17000k_1^2 + 2640k_1^3 - 4672k_2 + 11765k_1k_2 - 2000k_1^2k_2 + 11k_1^3k_2 \\ & - 924k_2^2 + 160k_1k_2^2 - k_1^2k_2^2 + 1037p - 2584k_1p + 429k_1^2p + 259k_2p - 105k_1k_2p \\ & + 11k_1^2k_2p + 6k_2^2p - k_1k_2^2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{j2} = & 627 - 2600k_1 + 2640k_1^2 + 1060k_2 - 1940k_1k_2 + 11k_1^2k_2 + 154k_2^2 - k_1k_2^2 - 244p \\ & + 429k_1p - 45k_2p + 11k_1k_2p - k_2^2p \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_j^T = \begin{bmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ -100 + 240k_1 - 154k_2 + k_1k_2 + 39p + k_2p \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. $\bar{\mathbf{K}}_j$ matrisi, ikinci giriş esas alındığından

$$\bar{\mathbf{K}}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve dolayısı ile $\mathbf{K}_y$ çıkış geri besleme matrisi

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_j & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{j1} & k_{j2} & -100 + 240k_1 - 154k_2 + k_1k_2 + 39p + k_2p \\ k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan $\mathbf{K}_y$ matrisini (2x2) boyutlu hale getirmek için birinci satır üçüncü sütundaki k_1, k_2 ve p 'ye bağımlı polinom k_1 'e göre çözülür ve elde edilen değer $\mathbf{K}_y$ matrisinde yerine yazılır. Yani,

$$k_1 = \frac{100 + 154k_2 - 39p - k_2p}{240 + k_2}$$

ve

$$\mathbf{K}_{y1} = \frac{-724800 + 898040k_2 - 134236k_2^2 + 5322k_2^3 + 73920p - 56122k_2p + 6560k_2^2p - 36k_2^3p + 2340p^2 - 1890k_2p^2 - 50k_2^2p^2}{240 + k_2}$$

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{y1} & \frac{480 - 573k_2 + 36k_2^2 - 60p + 50k_2p}{240 + k_2} & 0 \\ \frac{100 + 154k_2 - 39p - k_2p}{240 + k_2} & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısı ile kapalı çevrim sisteme ilişkin karakteristik matris ($\mathbf{A}_c$)

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{y(2 \times 2)}\mathbf{C}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c(1,1)} & \frac{\mathbf{A}_{c(1,2)}}{(240+k_2)^2} & \frac{\mathbf{A}_{c(1,3)}}{(240+k_2)^2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -6-k_2 & \frac{-2740-405k_2-k_2^2+39p+k_2p}{240+k_2} & \frac{-1340+148k_2-39p-k_2p}{240+k_2} \end{bmatrix}$$

$$A_{c(1,1)} = \frac{-480+573k_2-36k_2^2+60p-50k_2p}{240+k_2}$$

$$A_{c(1,2)} = 667200 - 760520k_2 + 126170k_2^2 - 5358k_2^3 - 59520p + 44182k_2p \\ - 6610k_2^2 + 36k_2^3p - 2340p^2 + 1890k_2p^2 + 40k_2^2p^2$$

$$A_{c(1,3)} = -724800 + 898040k_2 - 134236k_2^2 + 5322k_2^3 + 73920p - 56122k_2p \\ + 6560k_2^2p - 36k_2^3p + 2340p^2 - 1890k_2p^2 - 50k_2^2p^2$$

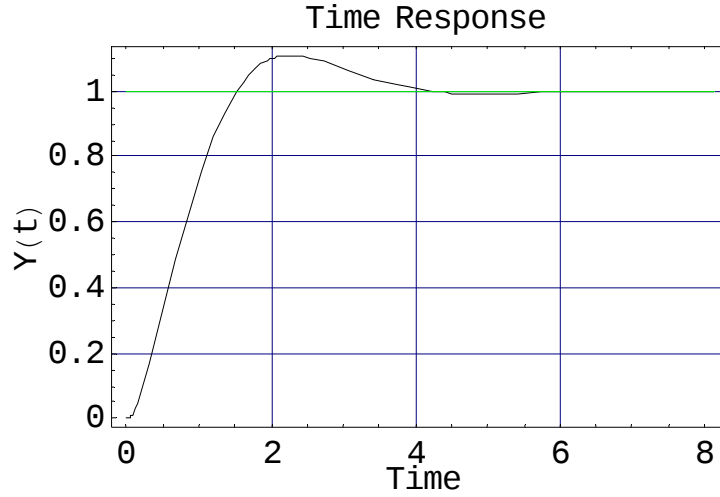
şeklindedir. $\mathcal{S}(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sistemine ilişkin transfer matrisi yazılıp ikinci giriş ikinci çıkışa ilişkin transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırları bulunup reel kutup için istenen değer ($p = 4$) yerine yazılır. Buradan transfer fonksiyonuna ilişkin sıfır

$$z = \frac{449280 - 642832k_2 + 108797k_2^2 - 5178k_2^3}{334080 - 643792k_2 + 108795k_2^2 - 5178k_2^3}$$

olarak bulunur. Böylece istenen sıfır değerini ($z = -2$) sağlayacak k_2 değeri 0.647578 bulunur. Elde edilen k_2 ve p değerleri çıkış geri besleme matrisinde yerine yazılarak

$$\mathbf{K}_{y(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.0563081 \\ 0.170941 & 0.647578 \end{bmatrix}$$

bulunur. Kapalı çevrim sisteme ilişkin kutup ve sıfırlar incelendiğinde hedeflenen değerlerin sağlandığı görülür. Kapalı çevrim sisteme ilişkin zaman cevabı Şekil 5.1 'de görüldüğü gibidir.



Şekil 5.1: Sıfır ataması gerçekleştirilmiş hal için ikinci giriş ikinci çıkışa ilişkin zaman cevabı

Teorem 5.2 [25]

$\mathbf{K} \in \mathfrak{R}$ de tanımlı $(\ell_1 \times n)$ boyutlu bir geri besleme matrisi ve $\mathbf{B}_{n \times \ell} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1(n \times \ell_1)} & \mathbf{B}_{2(n \times \ell_2)} \end{bmatrix}$ olmak üzere $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}, \mathbf{B}_2)$, ancak ve ancak $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrol edilebilir ise kontrol edilebilirdir.

Bu teorem kısaca şu şekilde izah edilebilir; eğer $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ sistemi kontrol edilebilir değil ise $\mathbf{B}_2$ girişi ile kontrol edilemeyen sisteme ilişkin bir mod vardır ve bu mod herhangi bir geri besleme işlemi ile kontrol edilemez. Dolayısı ile bu mod $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}, \mathbf{B}_2)$ sisteminin de kontrol edilemeyen bir modudur. Öte yandan, eğer $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ sistemi kontrol edilebilir ise sistemde $\mathbf{B}_2$ girişi ile kontrol edilemeyen modların bulunması halinde bile, bu modlar diğer girişler kullanılarak sisteme ilişkin serbest sıfırlardan uzağa taşınabilir. Dolayısı ile bu modlar diğer girişlerce kontrol edilebilir.

5.2 Çıkış Geri Beslemesi İle Kutup Yerleştirme

$\mathbf{K}_o$ çıkış geri besleme matrisi ve $\mathbf{K}$ durum geri besleme matrisi olmak üzere çıkış geri beslemesi problemi

$$\mathbf{BK}_o \mathbf{C} = \mathbf{BK} \quad (5.6)$$

ifadesini sağlayan bir $\mathbf{K}_0$ çıkış geri besleme matrisi bulma problemi olarak düşünülebilir.

Teorem – 5.3 [25]

$\mathbf{BK}_0\mathbf{C} = \mathbf{BK}$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{K}_0$ çözümünün olabilmesi için yeter ve gerek şart

$$\mathbf{BB}^p\mathbf{BKC}^p\mathbf{C} = \mathbf{BK} \quad (5.7)$$

ifadesinin sağlamasıdır. Eşitliğin sağlaması halinde $\mathbf{K}_0$, çıkış geri besleme matrisi ve $\mathbf{H}$, uygun boyutlu keyfi bir matris olmak üzere

$$\mathbf{BKC}^p\mathbf{C} = \mathbf{BK} \quad (5.8)$$

tutarlılık koşulu altında çıkış geri besleme matrisi

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}^p\mathbf{BKC}^p + \mathbf{H} - \mathbf{B}^p\mathbf{BHCC}^p \quad (5.9)$$

şeklindedir.

Eğer $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ tam ranka sahip matrisler ise $\mathbf{BB}^p = \mathbf{I}_{m \times m}$ ve $\mathbf{CC}^p = \mathbf{I}_{\ell \times \ell}$ olur. Dolayısı ile (5.9) ifadesi

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{KC}^p \quad (5.10)$$

biçimine dönüşür. (5.10) ifadesinden de görüleceği üzere $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ tam ranka sahip olduklarından, çıkış geri beslemesi probleminde serbestlik doğrudan $\mathbf{K}$ matrisine endekslidir. Ancak (5.8) ifadesi ile verilen tutarlılık koşulu tüm durum geri besleme matrisleri için sağlanmayabilir. Dolayısı ile tutarlılık koşulunun sağlandığı durum geri besleme matrislerinin bulunması problemi ortaya çıkar. Ancak bu problemin çözümü oldukça zordur. Problemi daha detaylı biçimde incelemek için $\mathbf{C}$ matrisi, $\mathbf{C}_1$ ($m \times m$) boyutlu $\mathfrak{R}$ 'de tanımlı bir matris olmak üzere $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$ biçiminde yazılır ve $\mathbf{T}_p$

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlı Patel (1974) dönüşüm matrisini göstermek üzere $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sistemi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_p^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_p \quad (5.12)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_p^{-1} \mathbf{B} \quad (5.13)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_p = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{m \times m} \quad \mathbf{0}] \quad (5.14)$$

$(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ sistemi biçimine dönüştürülebilir. $\mathbf{P}_1$, $(n \times m)$ boyutlu ve $\mathbf{P}_2$, $n \times (n-m)$ boyutlu matrisler olmak üzere

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2] = \mathbf{B} \mathbf{K} \quad (5.15)$$

şeklinde bir $\mathbf{P}$ matrisi tanımlanması halinde, çözümün mümkün olabilmesi için gerekli koşul (5.8) ifadesi ile tanımlı tutarlılık koşulu altında

$$\mathbf{P} \mathbf{C}^p \mathbf{C} = \mathbf{P} \quad (5.16)$$

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_{m \times m} \quad \mathbf{0}] = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2] \quad (5.17)$$

(5.16) ve (5.17) ifadeleri gereğince

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

olmasıdır. Buradan

$$\mathbf{B} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

ifadesi yazılabilir. Başlangıçta $\mathbf{B}$ matrisinin tam ranka sahip olduğu kabulü yapıldığından ancak $\mathbf{K}$ durum geri besleme matrisinin $(n-m)$ adet sütununun sıfır olması halinde (5.18) ifadesi sağlanır. Dolayısı ile tutarlılık koşulu

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

biçimine dönüşür ve buradan $\mathbf{K}_0$ çıkış geri besleme matrisi

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

şeklinde yazılabilir.

5.2.1 Genelleştirilmiş İz Düşüm Yaklaşımı

Yukarıda yapılan durum geri beslemesinin çıkış geri beslemesine dönüştürülmesi doğrudan genelleştirilmiş iz düşüm yaklaşımına uygulanabilir. Şöyle ki genelleştirilmiş iz düşümü yaklaşımında zaten serbest parametreler elde edilebildiğinden (5.19) denklemi ile tanımlı tutarlılık ifadesini daha da basitleştirmek mümkündür. $\mathbf{K}$ durum geri besleme matrisi

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{k}_j^T$$

$$\mathbf{k}_j = [\Phi_j^T]^{-1} \mathbf{X}_j^{-1} \delta_j$$

biçiminde yeniden yazılır ise (5.19) denklemi ile verilen tutarlılık koşulunun ancak ve ancak $\bar{\mathbf{K}}_j$ matrisinin son $(n-m)$ adet sütununun sıfır olması halinde sağlanacağı görülür. Yani

$$\mathbf{k}_j^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

elde edilen yeni tutarlılık koşulu çıkış geri beslemesi ile tam kutup atama problemine ilişkin çözümün bulunmasını kolaylaştırır. Bu koşul gereğince $(n-m)$ adet lineer olmayan sembolik ifadenin çözülmesi gerekir.

Sabit çıkış geri beslemeli kutup atama probleminde bazı durumlarda çözüm bulunamayabilir. Şayet böyle bir çözüm bulunsa dahi çözümü bulmak oldukça zor olabilir veya bulunan çözüm tasarım için gereken yeterli serbestliği sağlamayabilir. Bu gibi durumlarda geri besleme yolu üzerinde dinamik kontrolör kullanılması gerekir.

5.3 Dinamik Çıkış Geri Beslemesi

“Dinamik çıkış geri beslemeli kutup atama problemi, sabit çıkış geri beslemeli kutup atama problemine denk olacak şekilde yeniden düzenlenebilir” [25].

Tanım 5.1.

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+q}\}$ hedeflenen kapalı çevrim sisteme ilişkin öz değerlerin meydana getirdiği bir küme ve $\mathbf{G}(s)$, n inci mertebeden bir sistem olmak üzere mevcut sistem kapalı çevrim kutuplarını

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{F}(s)\mathbf{y}(s) \quad (5.22)$$

şeklinde tanımlı bir geri besleme ile hedeflenen kapalı çevrim sistem kutupları kümesine eşitleyecek q uncu mertebeden bir $\mathbf{F}(s)$ kontrolörü bulunabilir.

$\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyonu ile tanımlı sistem durum uzayında

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

ifadesiyle tanımlı olsun. Bu durumda; $\mathbf{F}(s)$ transfer fonksiyonu ile tanımlı kontrolör durum uzayında

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_F(t) &= \mathbf{A}_F\mathbf{x}_F(t) + \mathbf{B}_F\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_F\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_F(t) &= \mathbf{C}_F\mathbf{x}_F(t) + \mathbf{D}_F\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_F\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlanabilir. Dolayısı ile kapalı çevrim durum vektörü

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan kapalı çevrim sistem, durum uzayında

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{q \times q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{q \times q} & \mathbf{B}_F \mathbf{D} (\mathbf{I} + \mathbf{D}_F \mathbf{D})^{-1} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I} + \mathbf{D}_F \mathbf{D})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_F \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{q \times q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{q \times q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{q \times q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

ve

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_F \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

şeklinde (5.25) ifadesi (5.26) ve (5.27) ifadeleriyle verilen tanımlar doğrultusunda

$$\hat{\mathbf{A}}_c = \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{D}})^{-1} \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{C}} \quad (5.28)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $q = 0$ olması halinde (5.28) ifadesi

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B} (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C} \quad (5.29)$$

haline dönüşür. Yani diğer bir deyişle sabit durum geri beslemeli kontrol yapısına dönüşür.

(5.28) ve (5.29) ifadeleri arasında yapısal bir benzerlik mevcuttur. Dolayısı ile, buradan dinamik geri besleme tabanlı kutup atama problemi $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$ aday sistemi üzerinden çıkış geri beslemeli kutup atama problemine dönüştürülebilir.

Ancak bazı durumlarda dinamik geri beslemeli kontrol yapısı ile tanımlı sistem ile çıkış geri beslemeli kontrolör yapısına dönüştürülmek üzere oluşturulan aday sistem arasında yapısal farklılıklar meydana gelebilir. Şöyle ki; (5.26) ifadesi ile tanımlı aday sistem ile (5.27) ifadesi ile verilen aday sisteme karşılık gelen çıkış geri beslemesi göz önüne alındığı takdirde dinamik çıkış geri beslemeli kontrol yapısı ile elde edilecek serbestlik derecesinin $(\ell + q)(m + q)$ olması beklenir. Ancak bu yapı ile elde

edilebilecek serbestlik derecesi beklenen değerin altında yani $\ell m + q(\ell + m - 1)$ 'dir. Bu durum daha üst bir parametreye yuvarlamadan (overparametization) kaynaklanmaktadır.

“Kontrolörün kontrol edilebilir kanonik yapıda olduğu durumda üst parametreye yuvarlamanın meydana gelmesinin önüne geçilebilir” [25].

Tek girişli

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{n \times 1} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{m \times n} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{5.30}$$

sistemi için kapalı çevrim sistem kutuplarını, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+q}\}$ kümesi ile tanımlı karmaşık değerlere getirecek q uncu mertebeden $\mathbf{F}_D(s)$ dinamik kontrolörü tasarlamak üzere sisteme ilişkin transfer matrisi

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{g}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\tag{5.31}$$

ya da $P(s)$ sisteme ilişkin karakteristik polinomu göstermek üzere

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{P(s)} \mathbf{N}_{m \times n} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}\tag{5.32}$$

$$P(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0\tag{5.33}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{T}_c$, kontrol edilebilir standart biçime dönüşüm matrisini göstermek üzere

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{T}_c\tag{5.34}$$

şeklindedir.

$$P_F(s)$$

$$P_F(s) = \left| s \mathbf{I}_{q \times q} - \mathbf{A}_F \right| = s^q + \sigma_{q-1} s^{q-1} + \dots + \sigma_1 s + \sigma_0 \quad (5.35)$$

şeklinde tanımlı kontrolöre ilişkin karakteristik polinom olmak üzere, $\mathbf{F}_d(s)$ kontrolörü,

$$\mathbf{F}_d(s)^T = \frac{1}{P_F(s)} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{M} \quad (5.36)$$

ifadesi ile verilmiş olsun. Kapalı çevrim sisteme ilişkin karakteristik polinom

$$\begin{aligned} P_c(s) &= s^{n+q} + \alpha_{n+q-1} s^{n+q-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \\ &= P(s) P_F(s) (1 + \mathbf{F}_d^T(s) \mathbf{G}(s)) \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$= P(s) s^q + \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^q \end{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{N} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{m}_i$; $\mathbf{M}$ matrisine ilişkin i inci sütunu, $\mathbf{n}_i^T$ ise $\mathbf{N}$ matrisine ilişkin i 'inci satırı göstermek üzere

$$\begin{aligned} P_c(s) &= P(s) s^q + \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ s^{n-1} \\ s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{q-1} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^{\ell} \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^q \end{bmatrix} \mathbf{m}_i \mathbf{n}_i^T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısı ile sisteme ilişkin kapalı çevrim ve açık çevrim karakteristik polinomları farkı

$$P_c(s) - P(s)s^q = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & s^{q-1} \\ s & s^2 & \ddots & s^q \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s^n & s^{n+1} & \cdots & s^{n+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{q-1} \end{bmatrix} \\ + \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{n}_i^T \begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & s^{q-1} \\ s & s^2 & \ddots & s^q \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s^n & s^{n+1} & \cdots & s^{n+q} \end{bmatrix} \mathbf{m}_i$$

δ ; $\delta(s) = P_c(s) - P(s)s^q$ fark polinomunun katsayılarından meydana gelen

$$\delta^T = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_{q-1} & | & \alpha_q - a_0 & \cdots & \alpha_{q+n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

fark vektörü, $\mathbf{Z}$; $(n+q) \times (q+(q+1)m)$ boyutlu

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & | & n_{11} & 0 & \cdots & 0 & | & & | & n_{m1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & | & n_{12} & n_{11} & \ddots & \vdots & | & & | & n_{m2} & n_{m1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & | & & | & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_0 & | & \vdots & \ddots & \ddots & n_{11} & | & & | & \vdots & \ddots & \ddots & n_{m1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & | & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \cdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ddots & \vdots & | & n_{1n} & \ddots & \ddots & \vdots & | & & | & n_{mn} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & | & 0 & n_{1n} & \ddots & \vdots & | & & | & 0 & n_{mn} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & | & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & & | & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & \cdots & 0 & n_{1n} & | & & | & 0 & \cdots & 0 & n_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

şeklinde tanımlı bir matris ve $\mathbf{F}_D$; kontrolör parametrelerinden meydana gelen

$$\mathbf{F}_D^T = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \cdots & \sigma_{q-1} & | & m_{01} & m_{11} & \cdots & m_{q1} & | & \cdots & \cdots & | & m_{0\ell} & m_{1m} & \cdots & m_{qm} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı bir vektör olmak üzere

$$\delta = \mathbf{Z} \mathbf{F}_D \quad (5.40)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{Z}^p \delta \quad (5.41)$$

ifadesi ile kontrolör parametreleri hesaplanabilir.

Ancak tasarlanan dinamik kontrolör sistemin, ileri besleme yolunda büyük mertebeden dinamiklere sahip olmasına neden olabilir. Bu noktadan hareketle sisteme ilişkin tüm kutupları atamak yerine yalnızca dinamik davranış üzerinde baskın olan kutupların atanması çıkış geri beslemesi probleminin çözümünü oldukça kolaylaştırır. Bu yapıya kısaca kısmi kutup atama denir.

5.4 Kısmi Kutup Yerleştirme Durumu

Genelleştirilmiş iz düşün yaklaşımın nasıl çıkış geri beslemeli kutup atama problemine genişletilebiliyorsa, aynı durum kısmi kutup atama içinde geçerlidir. $\bar{\mathbf{K}}_j$; j inci satırı sıfır olan sabit çıkış geri besleme matrisi ve $\mathbf{F}_{Dj}^T(s)$; $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_j\mathbf{C}, \boldsymbol{\beta}_j, \mathbf{C})$ sözde tek girişli sistem için tasarlanan dinamik kontrolör olmak üzere $\mathbf{F}(s)$ çıkış geri besleme kontrolörü

$$\mathbf{F}(s) = \bar{\mathbf{K}}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{F}_{Dj}^T(s)$$

şeklinde yazılabilir. Sözde tek girişli sistem için tasarlanacak dinamik kontrolörü bulmak üzere diydik metodu kullanılabilir. Şöyle ki

$\mathbf{f}_0$; birden fazla girişe sahip sistemleri tek girişli hale getirmek üzere tanımlanan bir vektör ve $\mathbf{F}_D^T(s)$; $(\mathbf{A}, \mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{f}_0, \mathbf{C})$ sözde tek girişli sistemi için tasarlanan bir dinamik kontrolör olmak üzere, durum geri beslemesi halinde geri besleme kontrolörü

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{f}_0 \mathbf{F}_D^T(s)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{n \times 1} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{m \times n} \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı bir sistem için

$$p \leq \min [n + q, ((m + 1)(q + 1) - 1)]$$

olmak üzere $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının sağlanabilmesi için q uncu mertebeden bir $\mathbf{F}_D^T(s)$ kontrolörü tasarlanmalıdır.

$P_c(s)$ kapalı çevrim karakteristik polinomu, $P_a(s)$ gerçekleştirilebilir ve $P_r(s)$ artan kısım olmak üzere iki polinomun çarpımı biçiminde yazılır ise

$$\begin{aligned} P_a(s) &= \prod_{i=1}^p (s - \eta_i) \\ &= s^p + \sum_{i=1}^p d_{p-i} s^{p-i} \end{aligned}$$

$$P_r(s) = \frac{P_c(s)}{P_a(s)} = s^t + \sum_{i=1}^t e_{t-i} s^{t-i}, \quad t = n + q - p$$

$$\begin{aligned} P_c(s) &= P_a(s)P_r(s) \\ &= P_a(s)s^t + \sum_{i=1}^t P_a(s)e_{t-i} s^{t-i} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Dolayısı ile $\delta(s)$ fark polinomu

$$\begin{aligned} \delta(s) &= P_c(s) - P(s)s^q \\ &= P_a(s)s^t - P(s)s^q + \sum_{i=1}^t P_a(s)e_{t-i} s^{t-i} \end{aligned} \quad (5.42)$$

şeklinde yazılabilir. (5.42) ifadesinden δ fark vektörü, δ_o ; $P_a(s)s^t - P(s)s^q$ ifadesinin katsayılarından meydana gelen bir vektör, e ; bilinmeyen katsayılardan meydana gelen bir vektör ve $\mathbf{D}_p$; $P_a(s)s^{t-i}$ ifadesinin katsayılarından (δ_i) meydana gelen

$$\mathbf{D}_p = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_t]$$

bir vektör olmak üzere

$$\delta = \delta_o + D_p e \quad (5.43)$$

şeklinde yazılabilir. (5.40) ve (5.43) ifadelerinden

$$\delta_o + D_p e = ZF \quad (5.44)$$

yazılabilir. F matrisi, F_1 ; $(m+1)(q+1)-(p+1)$ adet elemandan meydana gelecek şekilde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde ve Z matrisi de F 'in boyutları ile uyuşacak şekilde

$$Z = [Z_1 \quad Z_2]$$

iki kısma ayrılır ise (5.44) ifadesi

$$\delta_o + D_p e = [Z_1 \quad Z_2] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\delta_o - Z_1 F_1 = Z_2 F_2 - D_p e \quad (5.45)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $\hat{\delta} = \delta_o - Z_1 F_1$ olmak üzere (5.45) ifadesi

$$\hat{\delta} = [Z_1 \quad Z_2] \begin{bmatrix} F_2 \\ e \end{bmatrix}$$

ya da kısaca

$$\hat{\delta} = \hat{X} \hat{F} \quad (5.46)$$

biçimine gelir.

Örnek 5.2

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ifadesi ile tanımlı sistemin kapalı çevrim baskın kutuplarını $s_{1,2} = -2 \pm j2$ ve $s_3 = p$ ($p < 0$ ve $p \in \Re$) yapacak dinamik kontrolörü bulunuz.

Hedeflenen performans kriterlerini sağlayacak bir dinamik kontrolörü tasarlamak üzere sistem doğrudan ele alındığında bu örnek için yapılan işlemler sonucunda önlenemez biçimde s düzleminde sanal eksen boyunca ve hatta sağ yarı s de sıfırların olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısı ile baskın kutuplar istenildiği gibi atanmasına rağmen kontrolsüz bir biçimde sıfırların yerleşimi hedeflenen sistem performansının elde edilebilirliğinin önüne geçmektedir. Bu nedenle dinamik kontrolör, burada sistem sıfırlarını hedeflenen performansı destekleyici etki gösterecek şekilde yerleştirmek üzere kullanılabilir.

Hedeflenen kapalı çevrim baskın kutupları kutup atama yapılarak yerleştirilir ve geriye kalan üçüncü kutup ise dinamik geri kontrolörle sistem sıfırlarının yerleştirmek üzere serbest bırakılır.

Kapalı çevrim baskın kutuplarını hedeflenen yerlerine taşımak üzere sisteme uygulanacak durum geri besleme matrisi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Durum geri besleme uygulanmış sistemin kapalı çevrim sistem kutupları

$$s_{1,2} = -2 \pm 2j \quad , \quad s_3 = 3$$

halini alır. Bu durumda sistem

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

şekline dönüşür. Dolayısı ile sisteme ilişkin üçüncü kutbun yanı sıra sistem kapalı çevrim sıfırlarını da yerleştirmek üzere dinamik kontrolör yapısı oluşturulabilir.

Sistemin karakteristik polinomu

$$P(s) = s^3 + 7s^2 + 20s + 24$$

ve hedeflenen kapalı çevrim karakteristik polinomu

$$P_c(s) = s^6 + (24 + 6p)s^5 + (288 + 144p + 5p^2)s^4 + (960 + 1728p + 120p^2)s^3 + (1600 + 5760p + 1440p^2)s^2 + (9600p + 4800p^2)s + 8000p^2$$

şeklinde yazılır. Buradan (5.38) ifadesi

$$\delta(s) = (17 + 6p)s^5 + (268 + 144p + 5p^2)s^4 + (936 + 1728p + 120p^2)s^3 + (1600 + 5760p + 1440p^2)s^2 + (9600p + 4800p^2)s + 8000p^2$$

veya

$$\delta = \begin{bmatrix} 8000p^2 \\ 9600p + 4800p^2 \\ 1600 + 5760p + 1440p^2 \\ 936 + 1728p + 120p^2 \\ 268 + 144p + 5p^2 \\ 17 + 6p \end{bmatrix}$$

ve (5.39) ifadesi ile tanımlı $\mathbf{Z}$ matrisi

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 20 & 24 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 20 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

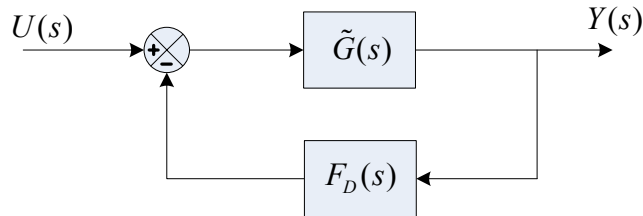
şeklinde yazılır. (5.41) ifadesi gereğince kontrolör katsayılarından meydana gelen matris

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} -82.2619 + 164.524p + 287.308p^2 \\ 149 + 102p + 5p^2 \\ 17 + 6p \\ 1974.29 - 3948.57p + 1104.62p^2 \\ -1930.76 + 3861.52p - 1066.15p^2 \\ -1212.17 + 2424.33p - 671.154p^2 \\ -364.738 + 729.476p - 202.308p^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısı ile $F_D(s)$ dinamik kontrolörü

$$F_D(s) = \frac{1}{s^3 + \mathbf{F}_D(3,1)s^2 + \mathbf{F}_D(2,1)s + \mathbf{F}_D(1,1)} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_D(4,1) \\ \mathbf{F}_D(5,1) \\ \mathbf{F}_D(6,1) \\ \mathbf{F}_D(7,1) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen dinamik kontrolör sisteme Şekil 5.2 deki yapı ile bağlanır.



Şekil 5.2: Dinamik kontrolör eklenmesi halinde kapalı çevrim sistem blok şeması

Burada ikinci giriş ikinci çıkışa ilişkin transfer fonksiyonunun pay ve paydası serbest bırakılan p değişkeninin birer polinomlarıdır. Şöyle ki;

$$T(s)_{Pay} = s^5 + (6p + 21)s^4 + (225 + 126p + 5p^2)s^3 + (862.952 + 1474.1p + 1189.23p^2)s^2 - 658.095 + 1316.19p + 2298.46p^2$$

$$T(s)_{Payda} = s^7 + (6p + 25)s^6 + (-47.7381 + 879.476p - 197.308p^2)s^5 + (-953.381 + 6514.76p - 1153.08p^2)s^4 + (-4435.43 + 24358.9p - 2910.77p^2)s^3 + (-7454.47 + 43068.9p - 984.615p^2)s^2 + (-3277.71 + 32155.4p + 14596.9p^2)s + 10529.5 - 21059.1p + 27224.6p^2$$

Dolayısı ile kapalı çevrim sistem sıfırlarının yerlerinin p serbest parametresi ile değiştiği söylenebilir. Sisteme ilişkin sıfır polinomu ve kutup polinomları belirli bir aralıkta p 'nin farklı değerleri için elde edilip karmaşık s düzleminde işaretlenmesi halinde öyle bir p değeri bulunur ki bu p değerinde sistemin baskın sıfırları, kapalı çevrim karmaşık katlı baskın kutupları ile aynı değeri alır. Böylece hem kapalı çevrimde sistemin katlı karmaşık eşlenik kutuplara sahip olmasının önüne geçilmiş olur hem de sistem sıfırlarının kapalı çevrim sistem performansı üzerindeki etkisi en aza indirilmiş olur. Kapalı çevrim transfer fonksiyonu pay polinomu (sıfır polinomu) beşinci dereceden bir polinom olduğundan tüm sıfırlarının etkilerinin, kapalı çevrim sistem davranışından elendiğini söyleyemeyiz. Ancak sadeleşme gerçekleştikten sonra elde kalan yeni sıfır polinomunun kökleri merkezden ve kapalı çevrim baskın kutuplarından oldukça uzakta olduğundan etkileri ihmal edilebilir.

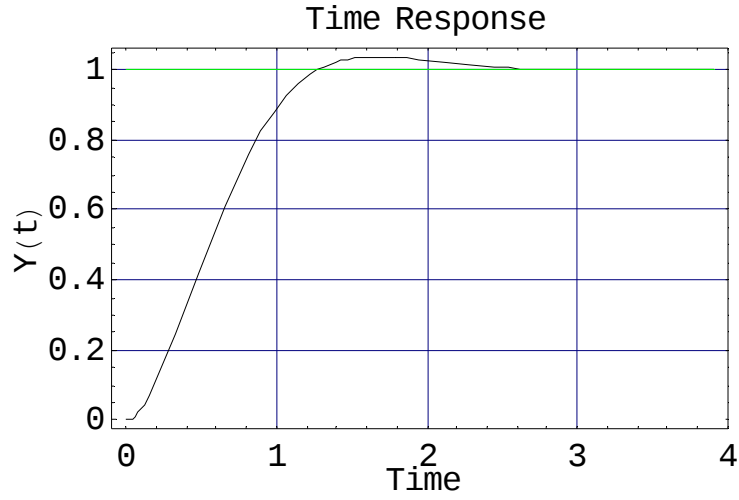
Bu örnek için sıfır etkisini en aza indirecek değer $p = 2.75$ 'dir. $p = 2.75$ değerini alması halinde sadeleşmenin gerçekleşmediği durum için kapalı çevrim sistem sıfırları

$$z_{1,2,3,4,5} = \begin{bmatrix} -2 \pm 2j \\ -10.5879 \pm 9.70742j \\ -12.3242 \end{bmatrix}$$

ve kapalı çevrim sistem kutupları

$$s_{1,2,3,4,5,6,7} = \begin{bmatrix} -2 \pm 2j \\ -2 \pm 2j \\ -5.98078 \\ -13.7596 \pm 14.9923j \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Dinamik kontrolör eklenmiş durumda kapalı çevrim sisteme ilişkin zaman cevabı Şekil 5.3 ‘deki gibidir.



Şekil 5.3: Dinamik kontrolör eklenmesi halinde kapalı çevrim sistem cevabı

5.5 Alternatif Bir Yöntem

İki giriş, iki çıkışlı üçüncü mertebeden sistemlerde kutup atama işlemini gerçekleştirmek üzere

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

şeklinde tanımlı bir çıkış geri besleme matrisi tanımlanabilir. $\mathbf{K}_y$ matrisinin elemanları, sisteme ilişkin üç kutbu hedeflenen kutup bölgelerine taşıyacak şekilde seçilebilirler. Ancak bu durumda herhangi bir sıfır ataması yapılamaz.

Sisteme ilişkin kutuplardan biri serbest bırakılması, (5.47) ifadesi ile tanımlı çıkış geri besleme matrisinde de bir parametrenin serbest kalmasına sebep olur. $\mathbf{G}(s)$ sistem transfer matrisinin her bir elemanı, farklı giriş ve çıkış kombinasyonlarını arasındaki transfer fonksiyonlarından meydana geldiğinden elde edilen bu iki serbest parametreden biri kullanılarak $\mathbf{G}(s)$ transfer matrisinin istenen elemanına bir sıfır yerleştirilebilir. Geriye kalan diğer serbest parametre ile de sisteme ilişkin atanmayan kutup belirli bir bölge ile sınırlandırılabilir. Böylece her iki serbest parametre için

elde edilecek ortak çözüm ile de yalnızca sistemin bir veya daha fazla giriş – çıkış çifti arasındaki transfer fonksiyonuna istenen eleman sıfırları yerleştirilmiş olmakla kalmaz bunun yanı sıra sisteme ilişkin reel kutbun belirlenen sınırlar içinde kalması garantilenmiş olur.

Bu yöntemi Örnek 5.3 ile inceleyelim.

Örnek 5.3

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

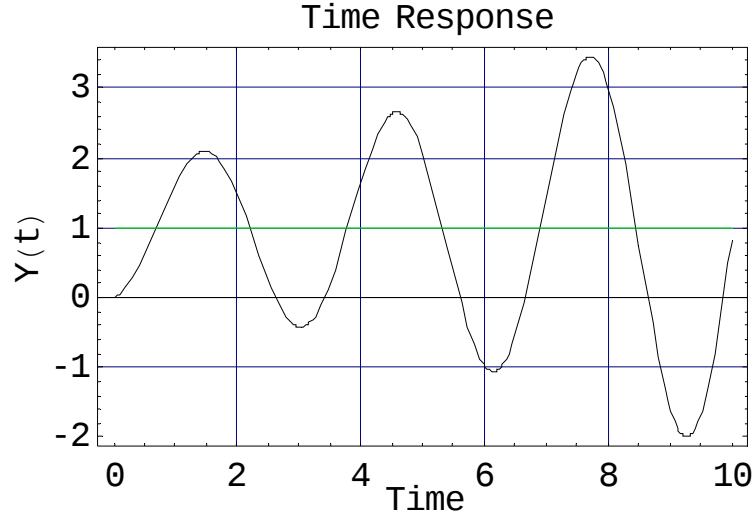
durum uzayı denklemleri ile tanımlı sistemin kapalı çevrim baskın kutuplarını

$s_{1,2} = -2 \pm j \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $s_3 \leq -4$ yapacak $\mathbf{K}_y$ çıkış geri besleme matrisini bulunuz.

Sisteme ilişkin kapalı çevrim transfer matrisi

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{5s^2 + 50s + 13}{s^3 + 4s + 1} & \frac{5s^2 - 52s - 12}{s^3 + 4s + 1} \\ \frac{s^2 - 17s + 2}{s^3 + 4s + 1} & \frac{-s^2 + 16s + 11}{s^3 + 4s + 1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan sisteme ilişkin kapalı çevrim kutuplarının $s_1 = -0.246266$ ve $s_{2,3} = 0.123133 \pm j2.01134$ oldukları görülür. Kontrol edilmemiş sisteme ilişkin zaman cevabı Şekil 5.4 ‘deki gibidir.



Şekil 5.4: Kontrolsüz hal için birinci giriş birinci çıkışa ilişkin zaman cevabı

Hedeflenen baskın kutupları atamak üzere $\mathbf{K}_y$ çıkış geri besleme matrisi

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısı ile buradan sisteme ilişkin kapalı çevrim sistem k_{11}, k_{12}, k_{21} ve k_{22} parametrelerine bağımlı olarak

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) \quad , \quad \mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_y \mathbf{C} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 2 + 3k_{12} - 3(3k_{11} - k_{21}) - k_{22} & -1 - 3k_{12} + k_{22} & 2 + 4(3k_{11} - k_{21}) - 2(3k_{12} - k_{22}) \\ 2 + 2k_{12} - 3(2k_{11} + 2k_{21}) + 2k_{22} & -1 - 2k_{12} - 2k_{22} & 1 + 4(2k_{11} + 2k_{21}) - 2(2k_{12} + 2k_{22}) \\ -3 + k_{12} - 3(k_{11} - 2k_{21}) - 2k_{22} & 1 - k_{12} + 2k_{22} & -1 + 4(k_{11} - 2k_{21}) - 2(k_{12} - 2k_{22}) \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Kutuplardan baskın olan ikisi kesin olarak bilinip, reel olan üçüncü için yalnızca bir sınır değeri verildiğinden üçüncü reel kutup $s = p$ olarak alınabilir. Böylece sistemden bir adet serbest parametreye elde edilmiş olur. Sistemde bir tane kutup serbest bırakıldığından $\mathbf{K}_y$ çıkış matrisinden de bir ilave bir serbest parametre elde edilir.

Hedeflenen sisteme ilişkin karakteristik denklem $P_c(s)$

$$P_c(s) = s^3 + (4 + p)s^2 + \left(\frac{16}{3} + 4p\right)s + \frac{16p}{3}$$

ve (5.48) ifadesi ile verilen kapalı çevrim sisteme ilişkin karakteristik denklem $P_s(s)$

$$\begin{aligned} P_s(s) = & s^3 + (5k_{11} + k_{12} + 5k_{21} - k_{22})s^2 \\ & + (4 + 50k_{11} - 17k_{12} - 52k_{21} + 10k_{12}k_{21} + 16k_{22} - 10k_{11}k_{22})s \\ & + 1 + 13k_{11} + 2k_{12} - 12k_{21} - 167k_{12}k_{21} + 11k_{22} + 167k_{11}k_{22} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, $P_c(s)$ ve $P_s(s)$ polinomları birbirlerine eşitlenerek k_{11}, k_{12} ve k_{21} parametreleri k_{22} ve p serbest parametreleri cinsinden elde edilir. Elde edilen bu değerler kapalı çevrim transfer matrisinde yerine yazılarak kutup atama işlemi gerçekleştirilmiş olunur.

Serbest bırakılan $s = p$ deki kutbun $p \leq -4$ koşulunu sağlayıp, aynı zamanda kapalı çevrim kutupları ile aynı reel kısma sahip bir sıfır atamayı gerçekleştirmek için gerekli çıkış geri besleme matrisini bulabilmek için Hurwitz kararlılık kriterinden yararlanılabilir.

Hurwitz kararlılık kriteri temelde karakteristik polinom katsayı işaretlerinden sistemin sağ yarı s düzlemindeki kutuplarının sayısını gösterir ve sistemin kararlılığı hakkında bilgi sahibi olunmasını sağlar. Ziegler Nickhols gibi bazı kontrolör tasarım yöntemleri sistemi kararlı yapacak kontrolör parametrelerini bulmak için Hurwitz kriterini kullanır. $G(s)$ transfer matrisi elemanları rasyonel polinomlardan meydana geldiğinden ve pay polinomlarının her biri s in bir fonksiyonu olduklarından eğer pay polinom ifadelerinde s yerine $s - 4$ yazılırsa böylelikle üçüncü kutup için belirlenen sınır değer bulunması problemi bir Hurwitz kararlılık problemine dönüştürülmüş olur.

$G_N(s - 4)$ pay polinomları ifadeleri için Hurwitz tabloları oluşturularak hangi giriş çıkış kombinasyonları için sıfır atama işleminin gerçekleştirilebileceği bulunmuş olur. Problem için Hurwitz koşulunu sağlayan tek polinom birinci giriş ve birinci çıkış arasındaki ifadedir. Yani diğer bir değişle $G(s)$ transfer matrisinin birinci satır ve birinci sütununda yer alan transfer fonksiyonudur. Elde edilen koşul değer ise

$$\frac{107}{207} < k_{22} < 1$$

dir. Dolayısı ile k_{22} 'nin belirlenen aralık içerisinde seçilmesi halinde sistem kapalı çevrim kutupları istenen yerlere yerleştirilip bunun yanı sıra serbest kutbunda -4 ün solunda yer alması sağlanmış olur.

Diğer serbest parametre ile sıfır atamayı gerçekleştirmek üzere üçüncü kutup için kesin bir yer tayini yapıp ($p = 4$) transfer fonksiyonunu sıfır yapan k_{22} ye bağımlı çözümler bulunup bu çözümler atanmak istenen sıfır değerine eşitlenip buradan k_{22} değeri bulunur. Daha önce k_{11}, k_{12} ve k_{21} , k_{22} ve p cinsinden yazıldıklarından hesaplanan k_{22} ve p değerleri yerlerine yazılarak diğer bağlı parametrelerde bulunmuş olur. $p = 4$ seçilmesi ve birinci giriş birinci çıkış arasına kapalı çevrim baskın kutupları ile aynı reel kısma sahip olacak şekilde bir sıfır ataması yapılması halinde

$$k_{22} = 0.358289$$

ve

$$k_{11} = 1.00716$$

$$k_{12} = 0.556892$$

$$k_{21} = 0.553116$$

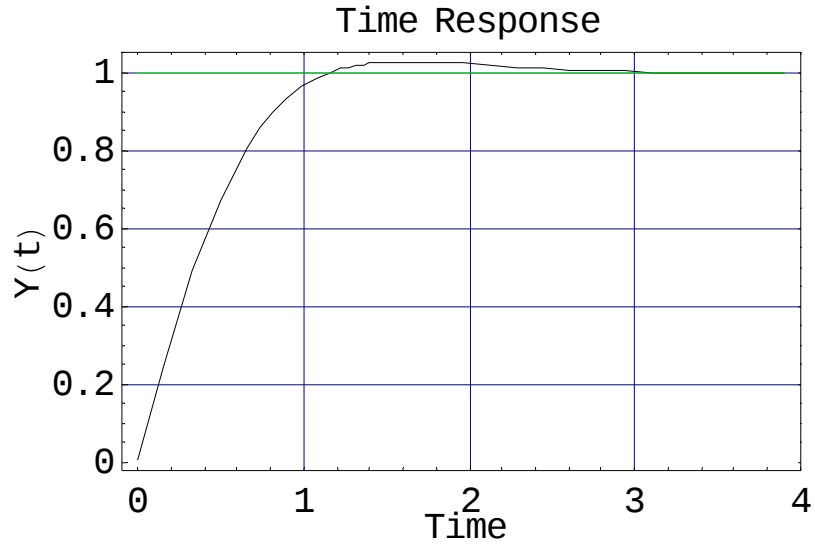
dolayısı ile $\mathbf{K}_y$ çıkış geri besleme matrisi

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} 1.00716 & 0.556892 \\ 0.553116 & 0.358289 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.48) kapalı çevrim sisteme ilişkin $\mathbf{G}_c(s)$ transfer matrisi

$$\mathbf{G}_c(s) = \frac{3}{3s^3 + 24s^2 + 64s + 64} \begin{bmatrix} 5s^2 + 46.4171s + 72.8343 & 5s^2 - 46.4111s - 105.001 \\ s^2 - 11.4688s - 90.3703 & -s^2 + 5.92836s + 179.196 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $G_c(s)$ transfer matrisinin ilk elemanının köklerine bakıldığı takdirde istenen sıfırın atanmış olduğu görülür. Sistemin K_y çıkış geri beslemesi ile kontrol edildiği durum için çıkış basamak cevabı Şekil 5.5 deki gibidir.



Şekil 5.5: Sıfır ataması gerçekleştirilmiş hal için birinci giriş birinci çıkışa ilişkin zaman cevabı

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bölüm 2 de elde edilen sonuçlar göstermektedir ki, sistem davranışını belirlemede sistem kapalı çevrim kutuplarının yanı sıra sistem sıfırları da büyük etkiye sahiptir. Şöyle ki hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını istenen yerlere götürmek üzere kontrolör tasarlanırken, kapalı çevrim sistem sıfırlarının etkileri göz ardı edilmesi halinde kapalı çevrim sistemin beklenenden oldukça farklı davranış sergilediği ve hatta sistemin kontrolsüz halinden çok daha kötü davranış sergileyebileceği yapılan örneklerle gözlenmiştir. Bunun yanı sıra sistem sıfırlarının kontrolörün ileri besleme yolu mu yoksa geri besleme yolu üzerine mi yerleştirmesinin, hedeflenen sistem performansını sağlayacağının belirlenmesinde etken rol oynadığı görülmüştür.

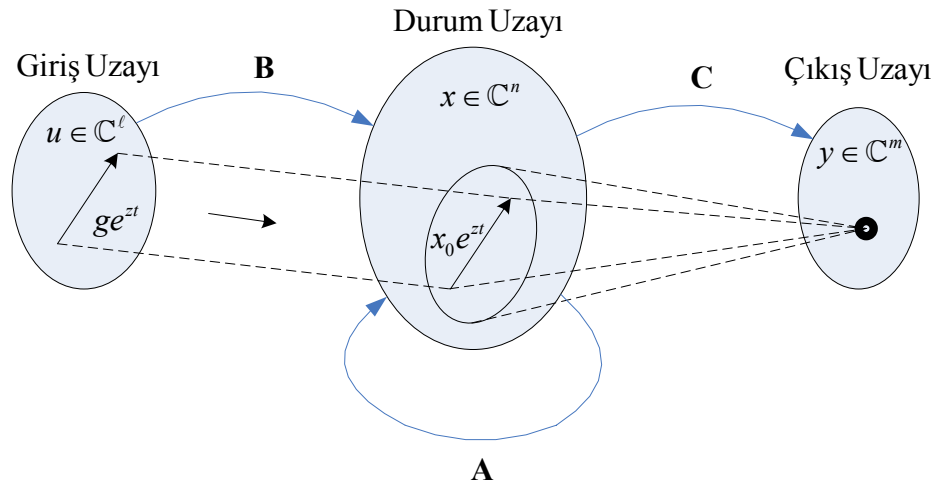
Tek giriş tek çıkışlı sonlu bir sıfıra sahip lineer zamanla değişmeyen sistemler için zaman tanım bölgesi performans kriterleri yeniden düzenlenmiş, sıfırların, sıfır etkileri ihmal edilerek oluşturulan performans kriterleri üzerinde ne gibi değişikliklere sebebiyet verdikleri nedenleri ile birlikte kapsamlı olarak incelenmiş, sistemin hedeflenen kapalı çevrim performans kriterlerini sağlaması için sıfır yerleştirme işleminin nasıl yapılacağı konusunda bir ön hazırlık yapılmıştır.

Tek giriş tek çıkışlı sistemlerde kapalı çevrim sıfırlarının yerleştirilmesine yönelik analitik bir yöntem incelenmiş, bu yöntemle sonlu bir sıfıra sahip ikinci mertebeden sistemlerin zaman cevabını, yalnızca kutuplardan meydana gelen ikinci mertebeden sistemlere yaklaştırarak sıfır etkisini en az düşürecek şekilde nasıl bir sıfır yerleştirmede bulunulabileceği irdelenmiştir. Bu kapsam doğrultusunda sistem kapalı çevrim sıfırlarının sistem davranışı üzerinde etkisi sistem kapalı çevrim sıfırının merkeze olan uzaklığı yanı sıra kapalı çevrim baskın kutuplarına olan uzaklığa da bağlı olduğu ve şayet bu iki değer birbirine oranı ne kadar küçük ise sıfırların kapalı çevrim sistem davranışında o kadar az etkiye sahip olacağı görüşmüştür. Dolayısı ile sıfırları merkezden olabildiğince uzağa yerleştirmek en iyi sonucu verecektir. Ancak ikinci mertebeden büyük sistemlerde ilave kutup ve/veya sıfırlar

geleceğinden sıfır yerleştirmesi belirli sınırlar içerisinde mümkün hale gelir. Bu durumda, yapılabilecek diğer alternatifler sönüm oranı değeri ve hedeflenen aşım değerine bağlı olarak ya sistem sıfırını, kapalı çevrim baskın kutupları ile aynı reel kısma sahip olacak şekilde seçmek ya da büyük sönüm oranları için merkezle kapalı çevrim baskın kutuplarına eşit uzaklıkta seçmek olacaktır.

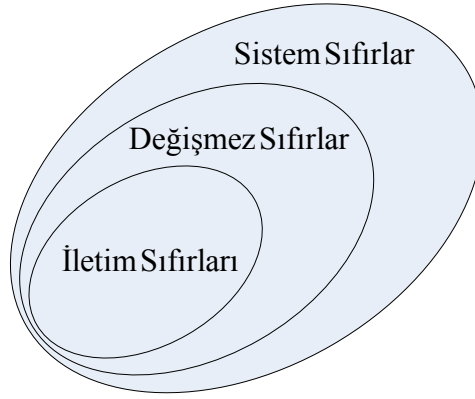
Genel olarak, ikinci bölüm boyunca mevcut sistemin herhangi bir sıfıra sahip olmadığı, hedeflenen performans kriterlerinin sağlanması için sisteme eklenen kontrolörden gelen sıfırların nasıl ikame edilmesi gerektiği üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde ise sistemin kendi içerisinde sıfır/sıfırlara sahip olması durumu incelenmiştir. Şöyle ki, bu bölümde yalnızca tek giriş tek çıkışlı sistemlerle sınırlı kalınmayıp incelemeye çok giriş çok çıkışlı sistemlerde dâhil edilmiş, bunun sonucu olarak da tek giriş tek çıkışlı sistemlerin aksine farklı sıfır yapıları ile karşılaşmıştır. Bu yapılar tek giriş tek çıkışlı sistemleri de içine alacak şekilde; sistem sıfırları, değişmez sıfırlar, aktarım sıfırları ve ayırım sıfırları olmak üzere 4 ana grupta toplanmıştır.

Tek giriş tek çıkışlı sistemlerde gözlemlenen sıfırların aslında iletim sıfırları oldukları ve giriş işaretinden bağımsız olarak sıfırın bulunduğu karmaşık frekans değerinde sistem çıkışını sıfırladığı gözlemlenmiştir.



Şekil 6.1: Çıkışı sıfırlama problemini gösteren bir şema

En genel hal için farklı sıfır tiplerinin birbirleri ile olan ilişkileri Şekil 6.2 deki gibidir.



Şekil 6.2: Farklı sıfırlar tipleri arasındaki ilişkiyi gösteren blok şema

Buna göre Rosenbrock sistem matrisi ile tanımlanan sıfırlar, transfer fonksiyonu kullanılarak elde edilen sıfırlardan farklıdır. Tam kontrol edilebilir ve tam gözlemlenebilir sistemlerde her iki ifade kullanılarak elde edilecek sıfırlar birbirine eşittir. Benzer şekilde tam kontrol edilebilir ve tam gözlemlenebilir sistemlerde aktarım sıfırları ile değişmez sıfırlar birbirine eşittir. Sistemde kontrol edilemeyen ve/veya gözlemlenemeyen durumların bulunması halinde bazı sıfırlar değişmez sıfırlar kümesinde yer almasına karşın artık aktarım sıfırları kümesinde yer almazlar işte bu sıfırlara ayrım sıfırları denir. Ayrım sıfırları da durumların kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirliklerine göre giriş ayrım, çıkış ayrım ve giriş-çıkış ayrım sıfırları olarak alt sınıflara ayrılırlar.

Üçüncü bölümü destekleyici olarak dördüncü bölümde sıfırlara ilişkin özellikler incelenmişti. Üçüncü ve dördüncü bölümün yapılmasındaki amaç gerek tek giriş tek çıkışlı sistemlerde olsun gerekse çok giriş çok çıkışlı sistemlerde sistemde bulunan istenmeyen sıfır dinamiklerinin giderilmesine yönelik bir çalışmanın yapılabilirliğinin araştırılması ve şayet böyle bir imkân varsa gerçekleştirmek için ne yapılabileceğinin anlaşılmasıdır. Ancak bu bölümler sonunda elde edilen sonuçlar sistemin kendi yapısında bulunan sıfır dinamiklerinin değiştirilemez olduğunu göstermektedir. Şöyle ki mevcut sistemde giriş, çıkış ve durum vektörlerine tekil olmayan matrislerle çeşitli dönüşümler uygulanmış, bunun yanı sıra sisteme statik durum ve çıkış geri beslemeleri yapılmasına karşın sistem sıfırlarında herhangi bir

değişikliğe sebep olunamamıştır. Ayrıca, dördüncü bölümde sıfırlara dair özellikler kapsamında incelenen kareye indirgeme ve kareye yükseltme işlemleri ile de mevcut sistem sıfırları değiştirilememiş ancak bu sıfırlara yeni sıfırlar ilave edilebileceği görülmüştür.

Beşinci bölümde ise dinamik geri besleme tabanlı model eşleme problemi ile sıfırların etkilerinin giderilebilirliği üzerinde durulmuştur. Ancak Model eşleme problemi ile bir çözümün elde edilebilirliği belirli koşullara bağlı olduğundan yalnızca çok özel yapıdaki sistemler için bir çözümün varlığından söz edilebileceği sonucu elde edilmiştir. Model eşleme problemi genele yayılamaz. Son olarak bu bölümün sonunda, tıpkı ikinci bölümde yapılan tasarım gibi, sisteme kontrolörden gelen ve transfer fonksiyonu matrisinin elemanları üzerinde görünüm sıfırların nasıl yerleştirilebileceği sorusu çözülmeye çalışılmıştır. Bunun için gerekli alt yapının oluşturulmasına yönelik durum geri beslemesi tabanlı kutup atama yöntemlerinden genelleştirilmiş iz düşüm yöntemi ele alınmış, daha sonra bu yöntem çıkış geri beslemesine indirgenerek bazı serbest parametrelerin oluşması sağlanmıştır. Böylece elde edilen bu serbest parametrelerle eleman sıfırlarının istenen yerlere yerleştirilmesi mümkün hale gelmiştir. Ancak bazı durumlarda çıkış geri beslemesine indirgenmiş genelleştirilmiş iz düşüm yaklaşımı ile hedeflenen performansın sağlanamadığı durumlar meydana çıkmaktadır. Bu durumların üstesinden gelmek için genelleştirilmiş iz düşüm yaklaşımı ile yapılan çıkış geri beslemesi dinamik bir kontrolörle güçlendirilmelidir.

Dinamik kontrolörün en büyük dezavantajı sistem dinamiğini yükseltmesidir. Bu nedenle sistem dinamiğinin yükselmesinin önüne geçmek için genelleştirilmiş iz düşüm yaklaşımı ile kısmi kutup atama ve dinamik kontrolör yapıları kullanılarak sıfır atamanın nasıl gerçekleştirileceği üzerinde durulmuş, yöntemler birer örnekle açıklanmıştır. Bunun yanı sıra bu yöntemlere benzer olarak hesaplamada çok daha kolaylık sağlayan alternatif bir yöntem üzerinde durulmuş ve sıfır atama işlemi bir örnek üzerinde uygulanmış sıfır yerleştirme işlemi gerçekleştirilmiştir. Ancak sistemin mevcut sıfırlarının değişmediği unutulmamalıdır. Bu yöntemlerle sadece belirli bir giriş ve belirli bir çıkış çifti arasındaki transfer fonksiyonuna hedeflenen kutupların yanı sıra bir de sıfır yerleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **JONES, J.C. Peyton, ATHERTON D.P.**, 1997. Towards a Better Interpretation of Root Locus Diagrams, *4th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, İstanbul, Temmuz 14-16, p295 – 300.
- [2] **JONES, J.C. Peyton, ATHERTON D.P.**, 1997. Root Locus Diagrams and the Effect of Zeros on System Response, *International Journal of Electrical Engineering Education 4th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, Vol 34, No 1 , p46 – 67.
- [3] **VAN DE VEGTE, J.**, 1994, Feedback Control Systems 3rd Edition, Prentice – Hall, ISBN 0 – 13 – 191503 – 7.
- [4] **ACKERMANN, J.**, 1993, Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters, Springer – Verlag, ISBN 3 – 540 – 19843 – 1
- [5] **PANOS, A.**, 1997, Linear Systems, McGRAW – Hill Inc. Electrical and Computer Engineering Series, ISBN 0 – 07 – 041433 – 5.
- [6] **DELCHAMPS, D. F.**, 1996, Polynomial and Matrix Fraction Descriptions, *Control HandBook*, p 481 – 493, CRC Pres Inc., ISBN 0 – 8493 – 8570 – 9.
- [7] **GOODWIN, G. C., GRAEBE, S. F., SALGADO, M. E.**, 2000, Control System Design, Prentice – Hall, ISBN 0 – 1395 – 8653 – 9
- [8] **KHAILATH, T.**,1980, Linear Systems, Prentice – Hall Inc. Englewood Cliffs, ISBN 0 – 13 – 536961 – 4, syf 390.
- [9] **ZHOU, K., DOYLE, J., GLOVER, K.**, 1996, Robust and Optimal Control, Prentice – Hall Inc., ISBN 0 – 13 – 456567 – 3.
- [10] **DESOER, C.A., SCHULMAN, J.D.**, 1974,Zeros and Poles of Matrix Transfer Functions and Their Dynamical Interpretation, *IEEE Transaction on Circuit and Systems*, Vol 21, No 1, p 3 – 8.
- [11] **MACFARLANE, A.G.J., KARCANIAS, N.**, 1976, Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: a survey of algebraic, geometric and complex variable theory, *International Journal of Control*, Vol 24, No 1, p33-74

- [12] **SCHRADER, C.B., SAIN, M.K.**, 1989, Research on System Zeros: a survey, *International Journal of Control*, Vol 50, No 4, p 1407 – 1433.
- [13] **HORN, R.A., JOHNSON, C.R.**, 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press, ISBN 0 – 521305861
- [14] **ROSENBROCK, H.H.**, 1970, State Space and Multivariable Theory, Nelson, ISBN 17 – 781002 – 5.
- [15] **SKOGESTAD, S., POSTLETHEWAITE, I.**, 2005, Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, Wiley Interscience, ISBN 0470011688.
- [16] **HAVRE, K.**, 1998. Studies on Controllability Analysis and Control Structure Design, *Doktora Tezi*, N.T.N.U., Department of Chemical Engineering, Trondheim, ISBN 82 – 471 – 0193 – 9.
- [17] **DOUGLES, J., ATHANS. M.**, 1996, Multivariable Poles, Zeros, and Pole – Zero Cancellations, *Control HandBook*, p 445 – 450, CRC Press, ISBN 0 – 8493 – 8570 – 9
- [18] **GANTMACHER, F.R.**, 1960, The Theory of Matrices Vol – I, pp 45–46, American Mathematical Society, ISBN 0 – 8284 – 0131 – 9.
- [19] **BELLMAN, R.**, 1997, Introduction to Matrix Analysis, SIAM Classics In Applied Mathematics Series, McGraw–Hill, ISBN 0 – 89871 – 399 – 4.
- [20] **KOUVARITAKIS, B., MACFARLANE, A.G.J.**, 1976, Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros Part – 1. Square Systems, *International Journal of Control*, vol 23, no 2, p 149 – 166
- [21] **KOUVARITAKIS, B., MACFARLANE, A.G.J.**, 1976, Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros Part – 1. Non – Square Systems, *International Journal of Control*, vol 23, no 2, p 167 – 181
- [22] **SMAGINA, Y. M.**, 2006, System Zeros, *eprint arXiv:math/0605092*, May 3
- [23] **PATEL, R. V.**, 1978, On Transmission Zeros and Dynamic Output Feedback, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol 23, No 4, p741 – 742.
- [24] **KUČERA, V.**, 1991, Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems, Prentice – Hall, ISBN 0 – 13 – 033085 – X
- [25] **SÖYLEMEZ, M.T.**, 1999. Pole Assignment for uncertain systems, UMIST Control Systems Centre Research Studies. ISBN 0 – 86380 – 246 – X

EKLER

Ek – A [18]

A ve **D** kare matrisler olmak üzere Δ determinant ifadesi dört parçaya ayrılarak

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \quad (\text{A,1})$$

şeklinde yazılabilir. Burada $|\mathbf{A}| \neq 0$ olduğundan, (A,1) ifadesinde birinci satır soldan $-\mathbf{CA}^{-1}$ ile çarpılarak ikinci satıra eklenirse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}| \quad (\text{A,2})$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, $|\mathbf{D}| \neq 0$ olmak üzere eğer ikinci satır $-\mathbf{BD}^{-1}$ ile soldan çarpılıp birinci satıra eklenirse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}| |\mathbf{D}| \quad (\text{A,3})$$

ifadesi elde edilir.

Eğer **A, B, C, D** matrislerinin her biri n inci mertebeden kare matrislerse (A,2) ve (A,3) ifadelerinden Schur teoremi, hesaplanacak $2n$ inci mertebeden determinant ifadesini n inci mertebeden bir determinant ifadesine dönüştürür:

$$\Delta = |\mathbf{AD} - \mathbf{ACA}^{-1}\mathbf{B}|, \quad (|\mathbf{A}| \neq 0) \quad (\text{A,4})$$

$$\Delta = |\mathbf{AD} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{CD}|, \quad (|\mathbf{D}| \neq 0) \quad (\text{A,5})$$

Eğer $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri değişme özelliğine sahip iseler yani $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$ ise (A,4) ifadesi

$$\Delta = |\mathbf{AD} - \mathbf{CB}|, \quad (|\mathbf{A}| \neq 0)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrisleri değişme özelliğine sahip iseler yani $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ ise, (4,ii) ifadesinden

$$\Delta = |\mathbf{AD} - \mathbf{BC}|, \quad (|\mathbf{D}| \neq 0)$$

elde edilir.

Ek – B

$\mathcal{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ biçiminde tanımlı bir sisteme ilişkin karakteristik polinom ifadesi

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^N - s_1 \lambda^{N-1} + s_2 \lambda^{N-2} + \dots + (-1)^N s_N$$

şeklinde ifade edilebilir. Şu halde karakteristik polinomun s_i katsayıları ile λ_i kökleri arasındaki

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \text{trace}(\mathbf{A}) \\ s_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + \dots \\ s_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_3 a_4 + \dots \\ &\vdots \\ s_N &= \prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N \end{aligned}$$

ilişkileri yazılabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Faik GÜVEN, 31 Mayıs 1982 tarihinde ELAZIĞ ‘da doğdu. Haziran 1999 yılında Elazığ Balakgazi lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl Ekim ayında Elazığ Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümüne girmeye hak kazandı. Haziran 2004 tarihinde Lisans öğrenimini tamamlayarak aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Ana Bilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği programında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.