İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

MOLEKÜLSEL DİZGELERDE ENİYİLEMELİ DENETİM, KARARLILIK VE GÜRBÜZLÜK, ETKİLEŞİM SÜRESİNE GÖRE AÇILIM: UYUMLU SALINICI'YA UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülin KAMAN

Anabilim Dalı	: BİLİŞİM
Programı	: HESAPLAMALI BİLİM VE MÜHENDİSLİK

NİSAN 2004

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

MOLEKÜLSEL DİZGELERDE ENİYİLEMELİ DENETİM, KARARLILIK VE GÜRBÜZLÜK, ETKİLEŞİM SÜRESİNE GÖRE AÇILIM: UYUMLU SALINICI'YA UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülin KAMAN

702011016

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**: 26 Nisan 2004**
Tezin Savunulduğu Tarih	**: 26 Mayıs 2004**

Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
Diğer Jüri Üyeleri	**: Prof. Dr. Ulviye BAŞER**
	Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA (M.Ü)

NİSAN 2004

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince bilimsel alanda desteğini esirgemeyen, akademik alanda gelişimime sürekli katkıda bulunan değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'a, sevgi, saygı ve güven çerçevesinde beni bu günlere getiren ve herzaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

NİSAN 2004 Tülin KAMAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Şekiller

SEMBOL LİSTESİ

H_0	zamandan bağımsız Hamilton işleci
H	dizgenin dış alan etkisi altındaki devinimini betimleyen Hamilton işleci
μ	dizgenin zamandan bağımsız ikikutuplaşma işlevi
$\widehat{O}$	Hermit türü işleç
$\widehat{O}'$	etkisi bastırılmak istenilen işleç
J	toplam amaç işlevsisi
ψ	dalga işlevi
λ	eşdüzey işlevi
$E(t)$	dış alan genliği
$\hbar$	Planck değişmezi
m	kütle
κ	yay değişmezi

ÖZET

Bu çalışmada bir boyutlu kuvantum uyumlu salınıcının eniyilemeli denetimiyle ilgilenilmektedir. Salınıcının dış alan genliği ile etkileşiminin var olduğu ve etkileşimin ikikutuplaşma bağlamında betimlenebileceği varsayılmaktadır. İkikutup işlevi doğrusal olarak seçilmektedir. Dizgenin başlangıç anındaki durumunun, yalıtılmış durumundaki birinci uyarılmış düzey olduğu öngörülmektedir. Bu öngörümün sonuçları çok etkilemediği de gözlenmektedir.

Eniyilemeli denetimde konum ve momentum işleçleri türünden doğrusal yapılı anlatımlar amaç ve yaptırım işleçleri olarak ele alınmıştır. Amaç işlecinin etkileşim zaman aralığının sonundaki beklenen değerinin erek(hedef) değer olarak öngörülen $\tilde{O}$ değerine erişmesi ya da olabildiğince yakınlaşması istenmektedir.

Denetim denkleminin zamanla değişen alan genliği için elde edilen integral denklem değişmez katsayılı dördüncü basamaktan doğrusal türevli ve sınır koşullu bir denkleme dönüştürülmüştür. Sıradan türevli bu denklemin sınır koşulları integral denklemden dönüşüm sırasında elde edilmiştir. Sınır değer sorununun elde edilen çözümlerinin kararlılığı ve gürbüzlüğü incelenmiştir. Kararlılık işlecinin çekirdeği oluşturulurken dalga ve eşdüzey işlevlerinin dış alan genliğindeki değişimlere olan bağımlılığını betimleyen duyarlılık işlevleri saptanmış ve kullanılmıştır.

Kararlılık çekirdeği ve kararlılık özdeğer kümesi için sınırlamalar çizilmiştir. Sınırlamalara dayanaraktan gürbüzlüğün tanımı verilmiştir.

SUMMARY

This work deals with quantum optimal control of one dimensional harmonic oscillator. The external controlling field is assumed to be sufficiently weak, therefore, characterizable by dipole polarizability only. The dipole function is taken as linear and the initial state of the system is considered to be the first excited state of the isolated harmonic oscillator.

Two operators, linearly depending on position and momentum are taken as objective and penalty operators. The objective operator whose expectation value is aimed to reach a prescribed target value at the final interaction instant and the penalty operator whose expectation value is to be suppressed during the interaction with the field are assumed to linearly depend on the position and the momentum operator.

Integral equation for the external field amplitude is converted to a linear constant coefficient ordinary differential equation which can be analytically solved. The necessary boundary conditions for the solution are obtained from the integral equation itself. Stability and robustness analysis are investigated for the soultions of boundary value problem. While constructing the kernel of the stability operator, sensitivity functions characterized the variations in wave and costate functions with respect to variation in external field amplitude are measured and used.

We have constructed bounds for the kernel and then for the spectrum. We have given quantitative definition of the robustness.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Çalışmada gözönüne alınan kuvantum dizgenin dinamiği Schrödinger denklemi tarafından betimlenmektedir. Dizge yalıtılmış durumda ise Schrödinger denklemi devinim ve gizilgüç erkinden oluşmaktadır. Dış alan dizge ile etkileştiğinde, yalıtılmış dizgenin devinimi dış alanın özelliklerine bağımlı olarak yalıtılmış durumdakinden sapma gösterecektir. Etkileşim sonlu zaman aralığında sürdürüldükçe, dizgenin üzerinde denetliyici işlevler gören işleçlerin beklenen değerleri yeni değerlere ulaşacaktır. Yeni değerler yalıtılmış dizge hareketinin bekleneninden farklı olacaktır. Uygun dış alan genliği seçimiyle, sözü edilen işleçlerin beklenen değerlerinin istenilen beklenen değerlere ulaştırılabilmesi olanaklıdır. Bu da, dış alanda esneklikler öngörülmesi ve bu esneklikleri, etkileşim sonunda dizgeyi istenilen yapıya eriştirecek ya da olabildiğince yaklaştıracak biçimde seçerek, yani dizge devinimini eniyilemeli denetleyerek saptamak olanaklıdır.

Bu çalışmada, dış alan genliği ile etkileşimin ikikutuplaşma[1] bağlamında betimlenebileceği varsayılmakta olup, dış alan genliği, etkileşim sırasında dizgenin dinamiğini denetim için kullanılmaktadır. Eniyilemeli denetim denklemleri; ileriye doğru evrimi kişiliklendiren dalga işlevinden (fonksiyon), geriye doğru evrimi kişiliklendiren eşdüzey işlevinden, bunlara eşlik eden sınır koşullarından, ileri-geri evrimleri birbine bağlayan denetim denkleminden ve erişim denkleminden oluşmaktadır.

1.2 Kuvantum Mekaniğinin Temelleri

Evrim, kökleşik devimbilimde (klasik mekanik) durumlar arasında tanımlı iken kuvantum mekaniğinde durumların olasılıkları arasında tanımlıdır.

Kuvantum mekaniğinin bilinen temel kuralları vardır. Birinci temel kural, dizgenin durumunun dalga işlevi ya da olasılık işlevi diye adlandırılan ve ψ simgesi ile gösterilen bir matematiksel büyüklükle betimleniyor olmasıdır. ψ işlevi hem zamana hem de dizgenin konumsal bağımsız değişkenlerine bağımlı olmalıdır.

$$\psi = \psi(x_1, \cdots, x_n, t) \tag{1.1}$$

İkinci temel kural, olasılık genliği olarak bilinen $\psi^*\psi$ büyüklüğünün tümlevinin bir olmasının gerekliliğidir.

$$\int_V dx_1 \cdots dx_n \psi^*(x_1, \cdots, x_n, t)\psi(x_1, \cdots, x_n, t) = 1 \tag{1.2}$$

Kuvantum mekaniğinin temel kurallarından bir diğeri ölçülebilen ya da gözlemlenebilen tüm dizge özelliklerinin bir işleç (operator) ile betimlenmesidir. Bu işleçlerin kendine eş olmaları gerekmektedir. Kendine eş işleçler[2] ile ilgili bilgi vermeden önce doğrusal işleçlere açıklık getirelim. Eğer $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ aynı alan (cisim, field), $\mathcal{F}$, üzerinde tanımlanmış iki doğrusal yöney uzayı (lineer vector space) ise $\mathcal{X}$'ten $\mathcal{Y}$'ye tanımlanan bir işlev, $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) \equiv \alpha_1 \mathcal{L}(x_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(x_2) \qquad (\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}) \wedge (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}) \tag{1.3}$$

koşulunu sağlıyorsa, $\mathcal{L}$ işlevine $\mathcal{X}$'ten $\mathcal{Y}$'ye "Doğrusal Dönüşüm (Linear Transformation), ya da "Doğrusal İşleç" (Linear Operator) denir. Burada $\mathcal{X}$ doğrusal yöney uzayına sözkonusu işlecin tanım bölgesi, $\mathcal{Y}$ doğrusal yöney uzayına ise değer bölgesi adı verilir. Eğer tanım ve değer bölgelerinde ayırdetme kaygısı yoksa işleci belirtirken vurgulanmalarına gerek duyulmaksızın "Doğrusal İşleç" de denebilir.

Doğrusal işlecin eş'inden sözetmek için işlecin aynı uzaydan aynı uzaya dönüşüm yapıyor olması gerekmektedir. Tanımlama,

$$(x_1, \mathcal{L}x_2) \equiv (\mathcal{L}^* x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} \tag{1.4}$$

özdeşliğiyle verilir. Böylece öngörülen $\mathcal{L}^*$ işlecinin varlığı ve eşsizliği kanıtlanabilir. Yukarıda $\mathcal{L}^*$ ile simgelenen bu işlecin var ve eşsiz olduğunu düşüneceğiz. Bu işlece $\mathcal{L}$ işlecinin "Eşi" (Adjoint) adı verilir.

Eğer $\mathcal{X}$'ten yine $\mathcal{X}$'e dönüşüm yapan bir $\mathcal{L}$ işleci gözönüne alınacak olursa ve bu işleç için

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \tag{1.5}$$

yazılabiliyorsa bu işlece "Kendine Eş" (Self–Adjoint) denir. Kuvantum dizgelerin devinimlerinin incelenmesinde bu terim yerine, Hermite adlı bilimcinin anısına, "Hermitian" adı da verilmektedir.

Kuvantum mekaniğinin diğer bir temel kuralı gözlemlenebilen bir büyüklüğün belli bir andaki değerinin, beklenen değer (expectation value) aracılığıyla betimlenebilmesidir. N bağımsız değişkene bağlı dalga işlevi ψ olmak üzere Q ile gösterilen bir işlecin beklenen değer tanımı aşağıdaki şekilde yapılır.

$$\langle Q \rangle = \int_V dx_1 \cdots dx_N \psi^* Q \psi \equiv \langle \psi | Q | \psi \rangle \tag{1.6}$$

Dizgenin devinimi (olasılığın zamanla değişimi), Hamiltonyen adı verilen bir işleç aracılığıyla tanımlanır. Bu işleç, klasik mekanikteki Hamilton işlevi içindeki konum ve momentum yerine sırasıyla konum ve konuma göre birinci türev işleçlerinin gelmesiyle üretilir.

Klasik mekanikteki Hamilton işlevi büyüklüğüne kuvantum mekaniğinde karşılık gelen Hamilton işleci,

$$H = H(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n, t), \tag{1.7}$$

p ve q 'lar

$$\hat{p}_j \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1 \cdots n \tag{1.8}$$

$$\hat{q}_j \equiv x_j \qquad j = 1 \cdots n \tag{1.9}$$

ile tanımlanan işleçlere denk olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\widehat{H} = H(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \cdots, x_n, t) \tag{1.10}$$

1.3 İşlevsi, İşlevde Değişim, İşlevsel Türev

Tek boyutlu kuvantum moleküler devinimlerin eniyilemesi ile ilgilendiğimiz için dizgeyi betimleyen Hamilton işleci

$$\widehat{H} = H(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t) \tag{1.11}$$

şeklinde ifade edilir. Dizgenin bir işlevler küme'sinden gerçel sayılar küme'sine bir dönüşüm tanımlayan amaç işlevsisi $\mathcal{J}$ ile ifade edilsin. Amaç işlevsisini aşağıdaki biçimde bir matematiksel anlatım ile tanımlamak olanaklıdır.

$$\mathcal{J} \equiv \int_0^T dt f(u(t), u'(t), t) \tag{1.12}$$

$u(t)$'nin yukarıdaki amaç işlevsisine göre eniyilenmiş yapısını verecek olan denklemlerin elde edilmesi için amaç işlevsisinin birinci basamak değişimini belirlemek ve onu sıfıra eşitlemek gerekir. Tümlevleme ile değişim alma işlemleri yerdeğiştirebilir nitelikte olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\delta\mathcal{J} = \int_0^T dt \delta f(u(t), u'(t), t) \tag{1.13}$$

Daha belirgin bir sonuç elde etmek için amaç işlevsisi çekirdeğinin birinci basamak değişiminin açık olarak yazılması gerekir. Değişim alma eyleminin türev alma eylemiyle eşdeğer sayılabilecek özellikleri bulunduğu akılda tutularak bu görev yerine getirilebilir. Elde edilen yapının (1.13) kullanılması $\delta u(t)$ ve $\delta u'(t)$ ile orantılı terimlerin toplamı biçiminde bir işlevin tümlevinin sıfırlanmasının gerektiğini gösterir. Ancak burada türevin değişimi ile işlevin değişimi birbirinden bağımsız değildir. Aslında, aşağıdaki ilişki geçerlidir.

$$\delta u'(t) = (\delta u(t))' \tag{1.14}$$

Bu nedenle değişim türevli terimlerin yalnızca değişim içeren terimler durumuna dönüştürülmesi gerekir. Bu amaca kesimsel tümlevleme (kısmi integrasyon) ile erişilebilir. Bu doğrultuda, $g(t)$ türevlenebilir ve tümlevlenebilir bir işlev olmak üzere

$$\int_0^T dtg(t)\delta u'(t) = g(T)\delta u(T) - g(0)\delta u(0) - \int_0^T dtg'(t)\delta u(t) \tag{1.15}$$

özdeşliğinden yararlanılabilir.

Verilen bir amaç işlevsisinin açık yapısı (1.13) denkleminde kullanılır ve ortaya çıkan tümlevlerde (1.15) özdeşliğinden yararlanılırsa tümlevli anlatımlarla tümlev dışı anlatımlarda $\delta u(t)$, $\delta u(T)$, ve $\delta u(0)$ değişimleri ile orantılı terimler bulunabilmektedir. Sıfırlanmanın, değişimler ne olursa olsun, gerçeklenmesi için bu değişimlerin her birinin katsayısının ayrı ayrı sıfıra eşit kılınması gerekir.

Böylelikle türevli denklem ve ona eşlik eden sınır koşulundan oluşan bir "Sınır Değer Sorununa "karşılık gelmektedir.

Amaç işlevsisinin sıfıra özdeşliği enküçükleme ve enbüyükleme sorunudur. İşlevsinin değişimi

$$\delta \mathcal{J} = \int_0^T dt \frac{\delta \mathcal{J}}{\delta u(t)} \delta u(t) \tag{1.16}$$

olup, $\frac{\delta \mathcal{J}}{\delta u(t)}$ terimine işlevsel türev (functional derivative) denmektedir.

1.4 Schrödinger Denkleminin İşleç Gösterilim Çözümü

Zamandan bağımsız Hamiltonyen, dizgenin toplam enerjisi, devinim erki (kinetik enerji) ve gizilgüç erkinin (potansiyel enerji) toplamı olup aşağıdaki şekilde bağıntılandırılmaktadır.

$$H_0 = H_0^{KE} + H_0^{G} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{1.17}$$

Fiziksel birimlerden arındırılmış değişkenlerle çalışabilmek içın değişken dönüşümü yapılması gerekmektedir. Aşağıda verilen ölçeklendirmelerin yapılması durumunda Planck değişmezi, kütle ve gizilgüç erkinde yer alan yay değişmezinden kurtulabilmek mümkün olmaktadır.

$$\frac{(mk)^{\frac{1}{4}}}{\hbar^{\frac{1}{2}}}x \quad \longrightarrow \quad x \tag{1.18}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \longrightarrow \quad t \tag{1.19}$$

Bu ölçeklendirilmelerin yapılması halinde zamandan bağımsız Hamilton işleç

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 \tag{1.20}$$

olmaktadır. H_0, Hamiltonyen işleci olmak üzere Schrödinger denklem

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H_0\psi, \tag{1.21}$$

olarak yazılabilir. Eşlik eden başlangıç koşulu $\psi(x,0)$ bilinmek koşuluyla (1.21) sırasayılı denklemin işleç gösterilimli çözümü elde edilebilir. Bu bağlamda,

$$\left(i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\right)_{t=0} = (H_0\psi)_{t=0} = H_0\,(\psi)_{t=0} = H_0\psi(\mathbf{x},0) \tag{1.22}$$

ve böylece dalga işlevinin t değişkenine göre birinci türevinin $t = 0$ anındaki değeri

$$\left(\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}H_0\psi(\mathbf{x},0) \tag{1.23}$$

yazılabilir. (1.21) denkleminin iki yanının zamana göre ikinci türevinin eşiti işleçler türünden

$$\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2} = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}(H_0\psi) = -\frac{i}{\hbar}H_0\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.24}$$

olup, $t = 0$ anındaki değeri

$$\left(\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}H_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^2\psi(\mathbf{x},0) \tag{1.25}$$

yukarıdaki şekildedir. Dalga işlevin zamana göre m.inci türevini aşağıdaki şekilde genelleyebiliriz.

$$\left(\frac{\partial^m\psi(t)}{\partial t^m}\right)_{t=0} = \left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^m\psi(\mathbf{x},0) \tag{1.26}$$

Kuvantum mekaniğinde olasılık işlevleri sürekli işlevler olarak düşünülür. Yalıtılmış dizge içersinde dalga işlevi $t = 0$ civarında seriye açılabilmektedir. MacLaurin açılımı gereği $\psi(\mathbf{x},t)$ işlevini şu şekilde yazabiliriz.

$$\psi(\mathbf{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^m\psi(t)}{\partial t^m}\right)_{t=0}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^n\psi(\mathbf{x},0) \tag{1.27}$$

Üstel bir işleçin seriye açılımını düsünecek olursak (1.27) sırasayılı eşitlikte çıkan yapıya benzer bir yapı ile karşılaşmış oluruz.

$$e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}H_0\right)^n \tag{1.28}$$

Schrödinger denkleminin çözümü için kullanılan evrim işleci H_0 olmak üzere dalga işlevinin işleç gösterilimi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\psi(\mathbf{x}, 0) \tag{1.29}$$

Ancak, bu açılım H_0' nın t'ye bağlı olmadığı varsayımı ile oluşturulmuştur. Hamilton işlecinin t'ye bağımlı olması durumunda yukarıda verilen Schrödinger denkleminin işleç gösterilim çözümü geçerli değildir.

1.5 Ket ve Bra Büyüklükleri Türünden Gösterilim

Dalgaketi ve dalgabrasının sağladığı denklemler sırasıyla

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid\psi(t)\rangle = H \mid\psi(t)\rangle \tag{1.30}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)\mid = \langle\psi(t)\mid H \tag{1.31}$$

şeklindedir. Dalgaketi ve dalgabrasının çözümü için eşlik eden başlangıç koşulları $\mid\psi(0)\rangle$ ve $\langle\psi(0)\mid$ dir. $\mathcal{U}(t)$ evrim işleçi, dalgaketi denkleminin çözümü için tanımlanırsa,

$$\mid\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t) \mid\psi(0)\rangle \tag{1.32}$$

$\mathcal{U}(t)$ evrim işlecinin sağladığı denklem ve eşlik eden başlangıç koşulu

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial t} = H\mathcal{U}(t) \qquad \mathcal{U}(0) = I \tag{1.33}$$

şeklindedir. $\mathcal{V}(t)$ evrim işleçi, dalgabrası denkleminin çözümü için tanımlanırsa,

$$\langle\psi(t)\mid = \langle\psi(0)\mid \mathcal{V}(t) \tag{1.34}$$

$\mathcal{V}(t)$ evrim işlecinin sağladığı denklem ve eşlik eden başlangıç koşulu

$$-i\hbar\frac{\partial\mathcal{V}(t)}{\partial t} = \mathcal{V}(t)H \qquad \mathcal{V}(0) = I \tag{1.35}$$

c seklindedir.(1.33) sırasayılı denklem soldan $\mathcal{V}(t)$ ile,

$$i\hbar\mathcal{V}(t)\frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial t} = \mathcal{V}(t)H\mathcal{U}(t) \tag{1.36}$$

(1.35) sırasayılı denklem sağdan $\mathcal{U}(t)$ ile çarpılırsa

$$-i\hbar\frac{\partial\mathcal{V}(t)}{\partial t}\mathcal{U}(t) = \mathcal{V}(t)H\mathcal{U}(t) \tag{1.37}$$

elde edilir. (1.36) ve (1.37) sırasayılı denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\partial \mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t)}{\partial t} = 0 \tag{1.38}$$

olmaktadır. Değişmez işlecin zamana bağlı türevi sıfıra eşit olacağından

$$\mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t) = C \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}(0)\mathcal{U}(0) = C = I \tag{1.39}$$

Böylece dalgabrasının evrimini betimleyen $\mathcal{V}(t)$ işleci,

$$\mathcal{V}(t) = e^{i\frac{t}{\hbar}H} \tag{1.40}$$

dalgaketinin evrimini betimleyen $\mathcal{U}(t)$ işlecinin

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \tag{1.41}$$

evriğidir. $\mathcal{U}(t)$ ve $\mathcal{V}(t)$ evrim işleçleri için

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.42}$$

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|\mathcal{U}(t)^\dagger \tag{1.43}$$

yazılabilir.

$$\mathcal{U}(t)^\dagger\mathcal{U}(t) = I \tag{1.44}$$

Burada kama(dagger) simgesi eş(adjoint) anlamındadır. Dolayısıyla, kaması evriğine eşit olan işleç birimsel (unitary) olacağından $\mathcal{U}(t)$ evrim işlecinin kendine eş olduğu ortaya çıkmaktadır.

BÖLÜM 2

ENİYİLEMELİ DENETİM ALTINDAKİ DEVİNİM DENKLEMLERİ'NİN ELDE EDİLİŞİ

Bu çalışmada uyumlu salınıcının eniyilemeli denetimi için önce zamandan bağımsız Hamilton işleci H_0 ile, başlangıç anındaki dalga işlevi $\tilde{\psi}$ ile, simgelenen bir dizge[3] gözönüne alınmaktadır. Bu dizgenin dış alan etkisi altındaki devinimini betimleyen Hamilton işleci aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$H = H_0 + E(t)\mu \tag{2.1}$$

Dizgenin zamandan bağımsız ikikutup işlevinin konum değişkenin bağımlılığı doğrusal olarak seçilmekte ve μ ile simgelenmektedir. Dizgenin başlangıç anındaki durumunun, yalıtılmış durumundaki birinci uyarılmış düzey olduğu öngörülmektedir.

Bir işlevler küme'sinden gerçel ya da karmaşık sayılar küme'sine bir dönüşüm tanımlayan işlevlere işlevsi denilmekte ve $\mathcal{J}$ ile betimlenen dizgenin amaç işlevsisi aşağıdaki $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_p^{(1)}, \mathcal{J}_p^{(2)}, \mathcal{J}_{c,d}$ terimleri ile tanımlanmaktadır. Burada işlevsi, ölçülebilirlik için, gerçel sayılar küme'sine dönüşüm olarak alınmaktadır.

$\widehat{O}$ işlecinin beklenen değeri ve $\tilde{O}$ ile simgelenen bir erek değeri amaç işlevsisinin amaç terimini oluşturmakta aşağıdaki şekilde kullanılmaktadır.

$$\mathcal{J}_o = \frac{1}{2}\left(\left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O}\right)^2 \tag{2.2}$$

Etkisi istenilmeyen bir $\widehat{O}'$ işlecinin beklenen değeri ve $W_p(t)$ ile simgelenen bir ağırlık işlevi, yaptırım terimlerinden beklenen değer bastırma ile ilgili olanın oluşturulmasında kullanılmaktadır.

$$\mathcal{J}_p^{(1)} = \frac{1}{2}\int_0^T dt W_p(t) \left\langle \psi(t) \left| \widehat{O}' \right| \psi(t) \right\rangle^2 \qquad W_p(t) > 0; \qquad t \in [\,0, T\,] \tag{2.3}$$

İkinci yaptırım terimi için $W_E(t)$ ile simgelenen ağırlık işlevi kullanılmaktadır.

$$\mathcal{J}_p^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^T dt W_E(t) E(t)^2 \qquad W_E(t) > 0; \qquad t \in [\,0, T\,] \tag{2.4}$$

Dizgenin kuvantum dinamiği aşağıdaki bağ terimiyle amaç işlevsisine girmektedir.

$$\mathcal{J}_{c,d} = \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \lambda(t) \right\rangle \quad (2.5)$$

Toplam amaç işlevsisi (functional), bu terimlerin toplamı olarak tanımlanmaktadır.

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_p^{(1)} + \mathcal{J}_p^{(2)} + \mathcal{J}_{c,d} \quad (2.6)$$

İşlev yapısında yapılan sonsuz küçük değişim varyasyon olarak tanımlanmakta olup, toplam amaç işlevsisinin birinci değisimi sıfırlanarak eniyilemeli denetim altındaki devinim denklemleri elde edilebilmektedir.

$$\delta\mathcal{J} = 0 \quad (2.7)$$

Amaç teriminin birinci değişimi

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J}_o &= \left(\left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O} \right) \delta \left(\left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O} \right) \\ &= \left(\left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O} \right) \left(\left\langle \delta\psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle + \left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \delta\psi(T) \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

İlk yaptırım teriminin birinci değişimi

$$\delta\mathcal{J}_p^{(1)} = \int_0^T dt W_p(t) \left\langle \psi(t) \left| \widehat{O}' \right| \psi(t) \right\rangle \left(\left\langle \delta\psi(t) \left| \widehat{O}' \right| \psi(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t) \left| \widehat{O}' \right| \delta\psi(t) \right\rangle \right)$$
$$W_p(t) > 0; \qquad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

İkinci yaptırım teriminin birinci değişimi

$$\delta\mathcal{J}_p^{(2)} = \int_0^T dt W_E(t) E(t) \delta E(t) \qquad W_E(t) > 0; \qquad t \in [0, T] \quad (2.10)$$

Dizgenin kuvantum dinamiğinin birinci değişimi

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J}_{c,d} &= \int_0^T dt \left\langle \delta\lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| -\mu\delta E(t) \right| \psi(t) \right\rangle \\ &+ \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \delta\psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \delta\psi(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \lambda(t) \right\rangle \\ &+ \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \left| -\mu\delta E(t) \right| \lambda(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \delta\lambda(t) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Kesimsel tümlevleme sonrası devinim kısıt teriminin birinci değişimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir.

$$\delta\mathcal{J}_{c,d} = \int_0^T dt \left\langle \delta\lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| -\mu\delta E(t) \right| \psi(t) \right\rangle$$
$$+ \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| -H(t) \right| \delta\psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \delta\psi(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \lambda(t) \right\rangle +$$
$$+ \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \left| -\mu\delta E(t) \right| \lambda(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \psi(t) \left| -H(t) \right| \delta\lambda(t) \right\rangle$$
$$+ \int_0^T dt \left\langle \delta\psi^*(t) \right| - i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \left| \lambda^*(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \delta\lambda^*(t) \right| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \left| \psi^*(t) \right\rangle$$
$$+ i\hbar \left\langle \lambda(T) | \delta\psi(T) \right\rangle - i\hbar \left\langle \psi(T) | \delta\lambda(T) \right\rangle$$
$$+ i\hbar \left\langle \psi(0) | \delta\lambda(0) \right\rangle - i\hbar \left\langle \lambda(0) | \delta\psi(0) \right\rangle \quad (2.12)$$

δJ; $\lambda(t), \psi(t)$, onların karmaşık eşlenikleri ve $E(t)$'nin birinci değişimlerinin doğrusal birleşimi olarak yazılabilmektedir. Doğrusal bağımsız değişim katsayıları sıfırlanarak, yalnızca ketlerle ilgili olanları belirtilen bralarla ilgili olanları da kolayca buradan çıkarılabilecek olan aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \left| \psi(t) \right\rangle = \left[H_0 + E(t)\mu \right] \left| \psi(t) \right\rangle \quad (2.13)$$

$$\left| \psi(0) \right\rangle = \left| \mathrm{in} \right\rangle \quad (2.14)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \left| \lambda(t) \right\rangle = \left[H_0 + E(t)\mu \right] \left| \lambda(t) \right\rangle - W_p(t) \left\langle \psi(t) \left| \widehat{O}' \right| \psi(t) \right\rangle \widehat{O}' \left| \psi(t) \right\rangle \quad (2.15)$$

$$\left| \lambda(T) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta\widehat{O} \left| \psi(T) \right\rangle \quad (2.16)$$

$$E(t) = \frac{2}{W_E(t)}\Re e \left(\left\langle \lambda(t) \left| \mu \right| \psi(t) \right\rangle \right) \quad (2.17)$$

Burada $\Re e$ gerçel kesimi göstermektedir.

η büyüklüğü, amaç teriminden üreyen ve erekten sapmayla ilgili olan terimde amaç işlecinin beklenen değerinin erekten sapmasını niteleme amaçlı olarak tanımlanmaktadır.

$$\left\langle \psi(T) \left| \widehat{O} \right| \psi(T) \right\rangle = \tilde{O} + \eta \quad (2.18)$$

BÖLÜM 3

SORUNUN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

3.1 Evrim İşlecinin Açık Yapısı

Bu bölümde amacımız; dalga ve eşdüzey işlevlerinin dış alan genliği, $E(t)$, ve η türünden çözümlerin elde edilmesidir. Bu amaçla, (2.13) and (2.14) eşitlikleri yeniden ele alındığında ve $U(t)$'nin dizgenin Evrim İşleci olduğu gözönünde tutulduğunda, dalga işlevinin çözümü için

$$|\,\psi(t)\rangle \equiv \mathcal{U}(t)\ |\,\mathrm{in}\rangle \tag{3.1}$$

öngörümü yapıldığında $\mathcal{U}(t)$ aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır.

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial t} = [\,H_0 + E(t)\mu\,]\,\mathcal{U}(t) \tag{3.2}$$

Evrim işlecinin başlangıç koşulu, (2.14) ve (3.1) sırasayılı eşitlikler yardımıyla, $\mathcal{I}$ birim işleci göstermek üzere,

$$\mathcal{U}(0) = \mathcal{I} \tag{3.3}$$

olarak yazılabilir.

Dalgaketinin Hermit türü eşleniği dalgabrası olduğundan

$$\langle\psi(t)\,|\ \equiv \langle\mathrm{in}\,|\ \mathcal{U}(t)^{\dagger} \tag{3.4}$$

yazılabilmekte ve (3.4) sırasayılı eşitlik

$$-i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}(t)^{\dagger}}{\partial t} = \mathcal{U}(t)^{\dagger}\,[\,H_0 + E(t)\mu\,] \tag{3.5}$$

$$\mathcal{U}(0)^{\dagger} = \mathcal{I} \tag{3.6}$$

denklem ve koşulunun yazılmasına olanak sağlamaktadır.

(3.2), (3.3), (3.5), ve(3.6) sırasayılı eşitlikler,

$$\mathcal{U}(t)^{\dagger}\mathcal{U}(t) = \mathcal{I} \tag{3.7}$$

olduğu anlamına gelmekte ve bu da $\mathcal{U}(t)$'nin birimsel (unitary) işleç olması gerektiğini anlatmaktdır. $\mathcal{U}(t)$, Hilbert uzayında dizgeyle ilgili büyüklüklerin zamanla değişimini betimleyen bir aşkın dönmeli (hyperrotational) evrim sağlamaktadır.

3.1.1 Evrim İşlecinin Saptırım Açılımı Yardımıyla Belirlenmesi

Şimdi (3.2) ve (3.3) sırasayılı eşitliklerin gerçek saptırım açılımı yoluyla çözülmesine çabalayabiliriz. Bu amaçla, daha sonra 1 olarak alınacak yapay saptırım değiştirgeni[5], ν, devreye sokularak (3.2) ve (3.3) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}(t,\nu)}{\partial t} = [\,H_0 + \nu E(t)\mu\,]\,\mathcal{U}(t,\nu) \tag{3.8}$$

$$\mathcal{U}(0,\nu) = \mathcal{I} \tag{3.9}$$

Burada incelemeleri kolaylaştırmak için $E(t)$ verilen bir büyüklük olarak düşünülmekte olup amacımız verilen $E(t)$ değerlerine bağlı $\mathcal{U}(t)$ yi elde etmek olarak belirlenmektedir.

(3.8) sırasayılı eşitliğin çözümü için bilinmeyen $\mathcal{U}(t,\nu)$ ν'nün eksi olmayan kuvvetleri türünden McLaurin serisine aşağıdaki şekilde açılabilmekte

$$\mathcal{U}(t,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\mathcal{U}_k(t) \tag{3.10}$$

ve açılımın bilinmeyen katsayıları aşağıdaki özyineleme aracılığıyla belirlenebilmektedir.

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}_k(t)}{\partial t} = H_0\mathcal{U}_k(t) + E(t)\mu\mathcal{U}_{k-1}(t), \qquad k \geq 1 \tag{3.11}$$

$$\mathcal{U}_k(0) = \delta_{k0}\mathcal{I}, \qquad k \geq 0 \tag{3.12}$$

Burada δ_{k0} Kroenecker'in delta simgesini göstermektedir. Son iki denklemin çözümü

$$\mathcal{O}_\mu(t) \equiv \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.13}$$

olmak üzere aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_k(t) \;&=\; \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\int_0^t dt_k\int_0^{t_k}dt_{k-1}\cdots\int_0^{t_2}dt_1\times\\ &\times\; E(t_k)\cdots E(t_1)\mathcal{O}_\mu(t_k)\cdots\mathcal{O}_\mu(t_1) \qquad k\geq 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

Daha fazla ilerleyebilmek için ikikutup işlevi, μ'nün tanımlanması gerekmektedir. Burada μ'nün doğrusal olduğu varsayılmakta ve yapısı aşağıda verilmektedir.

$$\mu \equiv \mu_0\mathcal{I} + \mu_1 x \tag{3.15}$$

Burada μ_0 ve μ_1 verilen değiştirgenler olup, x konuma karşılık gelmektedir. Bu tanımlama

$$\mathcal{O}_x(t) \equiv \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}x\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.16}$$

olmak üzere $\mathcal{O}_\mu(t)$ nin aşağıdaki biçimde yazılmasına olanak vermektedir.

$$\mathcal{O}_\mu(t) = \mu_0 \mathcal{I} + \mu_1 \mathcal{O}_x(t) \tag{3.17}$$

$\mathcal{O}_\mu(t)$ and $\mathcal{O}_x(t)$ işleçleri sırasıyla ikikutup işlevi ve konumun zamanla yayılmasını betimlendirmektedir. Bu nedenden dolayı μ ve x alt indisleri bu anlatımlarda kullanılmaktadır.

Sırayla $\mathcal{O}_x(t)$ ve $\mathcal{O}_\mu(t)$ nin açık yapılarını elde edebilmek için Hamiltonyen'in açık yapısına gereksinim duyulmaktadır. Uyumlu salınıcının kütlesi m nin, kuvvet sabiti κ nın pozitif olduğu varsayılmakta olup bir boyutlu uyumlu salınıcının Hamiltonyeni aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$H_0 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{2}x^2 \tag{3.18}$$

(3.16) sırasayılı eşitliğin her iki yanının zamana göre türevi

$$\dot{\mathcal{O}}_x(t) \equiv \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left\{H_0, x\right\}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \equiv \mathcal{O}_p(t) \tag{3.19}$$

olup, nokta simgesi zamana göre türevi göstermekte ve aşağıdaki şekilde tanımlanan Poisson Simgelemesi (Poisson Bracket) kullanılmaktadır.

$$\left\{H_0, x\right\} \equiv \frac{i}{\hbar}\left(H_0 x - x H_0\right) \tag{3.20}$$

Bu büyüklük H_0'nin açık yapısı ele alınırsa

$$\left\{H_0, x\right\} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.21}$$

olarak yazılabilmektedir. (3.21) sırasayılı eşitlik (3.19)'da yerine yazılırsa $\mathcal{O}_p(t)$ eşiti aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\mathcal{O}_p(t) = \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left(-i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.22}$$

Bu büyüklüğün zamana göre türevi

$$\dot{\mathcal{O}}_p(t) \equiv \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left\{H_0, -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} = -\frac{\kappa}{m}\mathcal{O}_x(t) \tag{3.23}$$

olacaktır. Buradan ikinci basamaktan sabit katsayılı ve işleç değerli bilinmeyeni olan türevli denklem elde edilmektedir.

$$\frac{d^2\mathcal{O}_x(t)}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}\mathcal{O}_x(t) = 0 \tag{3.24}$$

Yukarıdaki denkleme eşlik eden sınır koşulları , $\mathcal{O}_x(0)$ ve $\mathcal{O}_p(0)$ 'dan aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\mathcal{O}_x(0) = x, \qquad \dot{\mathcal{O}}_x(0) = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.25}$$

Bu denklemlerin çözümü, $\mathcal{O}_x(t)$ nin aşağıdaki açık yapısını vermektedir.

$$\mathcal{O}_x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) x + \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)\left(-i\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa m}}\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.26}$$

(3.17) sırasayılı eşitlikte $\mathcal{O}_x(t)$ yerine açık yapısı yazıldığında, p

$$p \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.27}$$

olmak üzere, $\mathcal{O}_\mu(t)$ açık yapısı

$$\mathcal{O}_\mu(t) = \mu_0\mathcal{I} + \mu_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) x + \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) p \tag{3.28}$$

olarak elde edilir. $\mathcal{U}_k(t)$ işleçlerinin açık yapısını elde etmek için yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılmaktadır.

$$\mathcal{U}_0(t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.29}$$

(3.14) sırasayılı eşitlik yardımıyla $\mathcal{U}_1(t)$ nin eşiti aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathcal{U}_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\int_0^t dt_1 E(t_1)\mathcal{O}_\mu(t_1) \tag{3.30}$$

(3.28) eşitlikte verilen $\mathcal{O}_\mu(t_1)$ açık yapısı yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\int_0^t dt_1 E(t_1)\left[\mu_0\mathcal{I} + \mu_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p\right] \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\left[\,\alpha_1(t)x + \alpha_2(t)p + \alpha_3(t)\mathcal{I}\,\right]\end{aligned} \tag{3.31}$$

yazılabilir. Yine (3.14) sırasayılı eşitlik yardımıyla $\mathcal{U}_2(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_2(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\int_0^t dt_2\int_0^{t_2} dt_1 E(t_2)E(t_1)\mathcal{O}_\mu(t_2)\mathcal{O}_\mu(t_1) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\int_0^t dt_2\frac{d}{dt_2}\left(\int_0^{t_2} dt_1 E(t_1)\mathcal{O}_\mu(t_1)\right)^2\end{aligned} \tag{3.32}$$

yazılabilir. Buradan, $\mathcal{U}_2(t)$ işlecinin açık yapısı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_2(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\Bigg[&\frac{1}{2}\alpha_1(t)^2x^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(t)^2p^2 + \\ &+\frac{1}{2}\alpha_3(t)^2\mathcal{I} + +\alpha_1(t)\alpha_2(t)xp + \alpha_1(t)\alpha_3(t)x + \\ &+\alpha_2(t)\alpha_3(t)p - i\hbar\int_0^t d\tau\dot{a}_2(\tau)\alpha_1(\tau)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.33}$$

$\mathcal{U}_1(t)$ ve $\mathcal{U}_2(t)$ nin açık yapısında kullanılan $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ ve $\alpha_3(t)$

$$\alpha_1(t) \equiv \mu_1 \int_0^t d\tau E(\tau) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \tag{3.34}$$

$$\alpha_2(t) \equiv \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}} \int_0^t d\tau E(\tau) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \tag{3.35}$$

$$\alpha_3(t) \equiv \mu_0 \int_0^t d\tau E(\tau) \tag{3.36}$$

özdeşlikleriyle tanımlanmaktadır. $V_k(t)$ aşağıdaki eşitlikte olduğu gibi tanımlandığında

$$\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_3(t)\mathcal{I}}\mathrm{e}^{i\frac{\nu^2}{\hbar}\int_0^t d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I}} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k V_k(t) \tag{3.37}$$

$$\mathcal{U}_k(t) = V_k(t), \qquad k = 0, 1, 2 \tag{3.38}$$

yazılabilir.

Simgesel programlama dili, Mupad[6], yardımıyla (3.38) nin geçerliliğini $k = 10$'a kadar değerleri için geçerli olduğunu göstermek mümkündür. Kuşkusuz, bu tüm k değerleri için geçerli olacağı demek değildir. Ama, (3.37)'nın sol yanındaki anlatımın $\mathcal{U}(t, \nu)$'nun sağladığı denklemin çözümü olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{U}(t, \nu) = \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{-i\frac{\nu}{\hbar}\alpha_3(t)\mathcal{I}}\mathrm{e}^{i\frac{\nu^2}{\hbar}\int_0^t d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I}} \tag{3.39}$$

yazmak mümkündür.

Saptırım (Perturbation) açılımı yardımıyla dizgenin evrim işlecini oluşturmak mümkündür. Bir kesme yaklaştırımı yapılmayıp tüm saptırım açılımı kullanıldığından bu bir saptırım yaklaştırımı değildir. Elde edilen açılım yakınsaksa kesin çözümdür. $\nu = 1$ alınmasıyla dizgenin evrim işleci için aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir.

$$\mathcal{U}(t) = \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_3(t)\mathcal{I}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I}} \tag{3.40}$$

3.1.2 Evrim İşlecinin Çarpanlara Ayrılması

Evrim işlecinin çarpanlara ayrılma yöntemiyle belirlenebilmesi için öncelikle yapılması gereken dönüşüm

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathcal{U}_1(t) \tag{3.41}$$

şeklindedir. (3.41) sırasayılı eşitlik (3.2) eşitliğinde kullanılırsa $\mathcal{U}_1(t)$ işleci için yeni bir denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial \mathcal{U}_1(t)}{\partial t} &= E(t)e^{i\frac{t}{\hbar}H_0}\mu e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathcal{U}_1(t) \\ &= E(t)\mathcal{O}_\mu(t)\mathcal{U}_1(t) \end{aligned} \tag{3.42}$$

$\mathcal{U}_1(t)$ işlecinin sağladığı denklemin çözümü için $\mathcal{O}_\mu(t)$ nin eşiti yerine yazılırsa

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}_1(t)}{\partial t} = E(t)\left[\mu_0\mathcal{I} + \mu_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p\right]\mathcal{U}_1(t) \quad (3.43)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü için

$$\mathcal{U}_1(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}U_2(t), \quad (3.44)$$

dönüşümü yapılarak, $\mathcal{U}_2(t)$ işleci için aşağıdaki denklem elde edilebilir.

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}_2(t)}{\partial t} = \left(E(t)\mu_0 + E(t)\frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}pe^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\right)\mathcal{U}_2(t) \quad (3.45)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}pe^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} = p - \alpha_1(t)\mathcal{I} \quad (3.46)$$

(3.46), (3.45) sırasayılı eşitlikte yerine yazıldığı zaman

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}_2(t)}{\partial t} = \left(E(t)\mu_0\mathcal{I} + E(t)d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I} + E(t)d\alpha_2(t)p\right)\mathcal{U}_2(t) \quad (3.47)$$

sonucuna varılır. Bu denklemin çözümü için

$$\mathcal{U}_2(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathcal{U}_3(t), \quad (3.48)$$

dönüşümü yapıldığında

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}_3(t)}{\partial t} = \left(E(t)\mu_0\mathcal{I} - E(t)d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I}\right)\mathcal{U}_3(t) \quad (3.49)$$

denklemine ve buradan da

$$\mathcal{U}_3(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t d\tau(E(\tau)\mu_0\mathcal{I} - E(\tau)d\alpha_2(\tau)\alpha_1(\tau))\mathcal{I}} \quad (3.50)$$

çözümüne ulaşılır. Evrim işleci, sonsuz boyutlu uzayda sonsuz sayıda açısal bileşeni olan bir dönmeye karşılık gelir. Yapılan tüm dönmeler bu tür açılarla kişiliklendirilmektedir. Amaç, mümkün olduğunca ilk aşamada dönme işlemini yapmak ve kapanması gereken açıları kapamaktır. Evrim işlecinin çarpanlara ayrılmasında kullanılan tüm işleçler birimsel işleç olacak şekilde seçilmiştir. Toplam dört evrim işleci dönmeler için kullanmış olup, yapılan tüm dönmeler sonucunda açı kapanmaktadır. $U(t)$ evrim işlecinin ilk çarpanı toplam enerjiyi, ikinci çarpanı konumu, üçüncü çarpanı momentumu betimlemektedir.

$$\mathcal{U}(t) = \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_3(t)\mathcal{I}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\alpha_2(t)\alpha_1(t)\mathcal{I}} \quad (3.51)$$

3.2 Denetim ve Erişim Denklemlerinin Elde Edilişi

Bu bölümde amacımız; $E(t)$ ve η nın bilinmeyen olarak gözüktüğü denklemlerin elde edilmesidir. Bu denklemlerinin elde edilebilmesi için $\widehat{\mathcal{O}}$ ve $\widehat{\mathcal{O}}'$ işleçlerinin açık yapılarına gereksinimimiz vardır. İşlem kolaylığı için bu işleçler, konum ve momentum türünden doğrusal alınmaktadır.

$$\widehat{\mathcal{O}} \equiv a_0\mathcal{I} + a_1 x + a_2 p, \qquad \widehat{\mathcal{O}}' \equiv b_0\mathcal{I} + b_1 x + b_2 p \tag{3.52}$$

İlerleyebilmek için dalgabrası ve dalgaketi boyunca $\widehat{\mathcal{O}}'$ nin beklenen değerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu, aşağıdaki işleçlerin açık yapılarının bulunması ile ilintilidir.

$$Q_x(t) \equiv \mathcal{U}(t)^\dagger x \mathcal{U}(t), \qquad Q_p(t) \equiv \mathcal{U}(t)^\dagger p \mathcal{U}(t), \tag{3.53}$$

İşleçlerin değişim ilişkileri üzerinde özenli bir inceleme,

$$Q_x(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{i\frac{t}{\hbar}H_0} x \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} \tag{3.54}$$

$$Q_p(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{i\frac{t}{\hbar}H_0} p \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} \tag{3.55}$$

olduğunu gözönüne sermektedir. Öte yandan,

$$\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} p \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\left(-\alpha_1(t)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}\mathcal{I} + \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x}p\right) = p - \alpha_1(t)\mathcal{I} \tag{3.56}$$

$$\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} x \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} = x + \alpha_2(t)\mathcal{I} \tag{3.57}$$

eşitlikleri $Q_x(t)$ ve $Q_p(t)$ açık yapısının yazımı için yardımcı olacaktır. $Q_x(t)$'nin belirlenmesi için sırasıyla aşağıdaki belirlemeler gerçekleştirilmektedir

$$Q_x^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{i\frac{t}{\hbar}H_0} x \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0} = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} Q_x^{(2)}(t) &= \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} Q_x^{(1)}(t)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} \\ &= \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} p \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)x} \\ &= \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p - \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)} Q_x^{(1)}(t)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_1(t)}\alpha_1(t)\mathcal{I} \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} Q_x(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} Q_x^{(2)}(t)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha_2(t)p} &= \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p + \\ &+ \left[\alpha_2(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - \frac{\alpha_1(t)}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)\right]\mathcal{I} \end{aligned} \tag{3.60}$$

$Q_p(t)$'nin belirlenmesi için benzer işlemler yapılırsa

$$Q_p(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p - \sqrt{\kappa m}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x$$
$$-\left[\alpha_1(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \sqrt{\kappa m}\alpha_2(t)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)\right]\mathcal{I} \tag{3.61}$$

elde edilmektedir.

Denetim denkleminin elde edilebilmesi için eşdüzeybrasının açık yapısına gereksinim vardır. Eşdüzeybrasının belirlenebilmesi için (2.15), (2.16) denklemleri ele alınmakta ve aşağıdaki dönüşüm yapılmaktadır.

$$|\,\lambda(t)\rangle \equiv \mathcal{U}(t)\ |\,\overline{\lambda}(t)\rangle \tag{3.62}$$

Bu dönüşüm sonrası (2.15) ve (2.16) eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\ |\,\overline{\lambda}(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}W_p(t)\left\langle \text{in}\left|U(t)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(t)\right|\text{in}\right\rangle U(t)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(t)\ |\,\text{in}\rangle \tag{3.63}$$

$$|\,\overline{\lambda}(T)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta U(T)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}U(T)\ |\,\text{in}\rangle \tag{3.64}$$

$[\,t, T\,]$ aralığında integre edildiğinde bu denklem

$$|\,\overline{\lambda}(t)\rangle = |\,\overline{\lambda}(T)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\left\langle \text{in}\left|U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\right|\text{in}\right\rangle U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\ |\,\text{in}\rangle \tag{3.65}$$

yapısına bürünmektedir. Bu denklemin evrim işleçleri türünden anlatımı aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$|\,\lambda(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta U(t)U(T)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}U(T)\ |\,\text{in}\rangle$$
$$-\frac{i}{\hbar}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\left\langle \text{in}\left|U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\right|\text{in}\right\rangle U(t)U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\ |\,\text{in}\rangle \tag{3.66}$$

Bu eşitliğin karmaşık eşleniği denetim denkleminde yerine yazılırsa

$$2\Re e\left(\langle\lambda(t)\,|\mu|\,\psi(t)\rangle\right) = \eta\left\langle \text{in}\left|\left\{U(T)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(T), U(t)^\dagger\mu U(t)\right\}\right|\text{in}\right\rangle$$
$$+\int_t^T d\tau W_p(\tau)\left\langle \text{in}\left|U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\right|\text{in}\right\rangle\left\langle \text{in}\left|\left\{U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau), U(t)^\dagger\mu U(t)\right\}\right|\text{in}\right\rangle \tag{3.67}$$

elde edilmekte ve dış alan genliğinin ağırlık işlevi ile çarpımının evrim işleçleri türünden eşiti aşağıda verilmektedir.

$$W_E(t)E(t) = \eta\left\langle \text{in}\left|\left\{U(T)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}U(T), U(t)^\dagger\mu U(t)\right\}\right|\text{in}\right\rangle$$
$$+\int_t^T d\tau W_p(\tau)\left\langle \text{in}\left|U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\right|\text{in}\right\rangle \times$$
$$\times\left\langle \text{in}\left|\left\{U(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau), U(t)^\dagger\mu U(t)\right\}\right|\text{in}\right\rangle \tag{3.68}$$

$\widehat{\mathcal{O}}$,$\widehat{\mathcal{O}}'$, ve μ işleçleri için

$$U(T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}U(T) = a_0\mathcal{I} + a_1Q_x(T) + a_2Q_p(T) \tag{3.69}$$

$$U(\tau)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau) = b_0\mathcal{I} + b_1Q_x(\tau) + b_2Q_p(\tau) \tag{3.70}$$

$$U(t)^{\dagger}\mu U(t) = \mu_0\mathcal{I} + \mu_1Q_x(t) \tag{3.71}$$

yazabilmekteyiz. (3.69) ve (3.71)'in Poisson Simgelemesi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}\left\{U(T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}U(T), U(t)^{\dagger}\mu U(t)\right\} &= a_1\mu_1\left\{Q_x(T), Q_x(t)\right\} + a_2\mu_1\left\{Q_p(T), Q_x(t)\right\} \\ &= \frac{a_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}(T-t)\right)\mathcal{I} + a_2\mu_1\cos\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}(T-t)\right)\mathcal{I}\end{aligned} \tag{3.72}$$

(3.70) ve (3.71) nün Poisson Simgelemesi eşiti de aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}\left\{U(\tau)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau), U(t)^{\dagger}\mu U(t)\right\} &= b_1\mu_1\left\{Q_x(\tau), Q_x(t)\right\} + b_2\mu_1\left\{Q_p(\tau), Q_x(t)\right\} \\ &= \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}(\tau-t)\right)\mathcal{I} + b_2\mu_1\cos\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}(\tau-t)\right)\mathcal{I}\end{aligned} \tag{3.73}$$

Başlangıç ket ve bra'sındaki simetriden dolayı konumun ve momentumun beklenen değerlerinin etkileşimin başlangıcındaki değerleri yokolmaktadır.

$$\langle \text{in}\,|x|\,\text{in}\rangle = 0, \qquad \langle \text{in}\,|p|\,\text{in}\rangle = 0 \tag{3.74}$$

Dolayısıyla $Q_x(t)$ ve $Q_p(t)$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilmektedir.

$$\langle \text{in}\,|Q_x(t)|\,\text{in}\rangle = \alpha_2(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - \frac{\alpha_1(t)}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right), \tag{3.75}$$

$$\langle \text{in}\,|Q_p(t)|\,\text{in}\rangle = -\alpha_1(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - \sqrt{\kappa m}\,\alpha_2(t)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{3.76}$$

$\widehat{\mathcal{O}}'$ işlecinin beklenen değerinin belirlenmesi için yukarıdaki eşitliklerden yararlanılmakta ve

$$\begin{aligned}\left\langle \text{in}\left|U(\tau)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\right|\text{in}\right\rangle &= b_0 + b_1\langle \text{in}\,|Q_x(t)|\,\text{in}\rangle + b_2\langle \text{in}\,|Q_p(t)|\,\text{in}\rangle \\ &= b_0 + b_1\alpha_2(\tau)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) - \frac{b_1\alpha_1(\tau)}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \\ &\quad -b_2\alpha_1(\tau)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) - b_2\sqrt{\kappa m}\,\alpha_2(\tau)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \\ &= b_0 - \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\int_0^{\tau} d\tau_1 E(\tau_1)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-\tau_1)\right) \\ &\quad -\mu_1 b_2\int_0^{\tau} d\tau_1 E(\tau_1)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-\tau_1)\right)\end{aligned} \tag{3.77}$$

sonucuna varılmaktadır. İleri ve geri evrimi birbirine bağlayan eşitliği yazabilmek için zamana bağlı $E_s(t)$ işlevi

$$E_s(t) \equiv \int_0^t d\tau_1 E(\tau_1) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau_1)\right), \qquad (3.78)$$

olarak tanımlanmaktadır. Yukarıda yapılan bu tanımlama ve hesaplamalar yardımıyla (3.68) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} W_E(t)E(t) = \eta \frac{a_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)\right) + \eta a_2\mu_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)\right) + \\ + \int_t^T d\tau W_p(\tau)\left[b_0 - \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(\tau) - b_2\mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(\tau)\right] \times \\ \times \left[b_2\mu_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-t)\right) + \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-t)\right)\right] \end{aligned} \qquad (3.79)$$

şeklinde elde edilmektedir. Buradan, daha sonra kullanılacak sınır koşulu aşağıdaki eşitlikte olduğu gibi elde edilmektedir.

$$W_E(T)E(T) = \eta a_2\mu_1 \qquad (3.80)$$

$t = T$ anındaki diğer bir sınır koşulunun elde edilebilmesi için (3.79) sırasayılı eşitliğin her iki yanının t ye göre türevi alınmakta ve

$$\begin{aligned} W_E'(t)E(t) + W_E(t)E'(t) = \\ -\eta\frac{a_1\mu_1}{m} cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)\right) + \eta a_2\mu_1\sqrt{\frac{\kappa}{m}} sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)\right) - \\ -b_2\mu_1 W_p(t)\left[b_0 - \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(t) - b_2\mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(t)\right] \\ + \int_t^T d\tau W_p(\tau)\left[b_0 - \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(\tau) - b_2\mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(\tau)\right] \times \\ \times \left[b_2\mu_1\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-t)\right) - \frac{b_1\mu_1}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(\tau-t)\right)\right] \end{aligned} \qquad (3.81)$$

$$\begin{aligned} W_E'(T)E(T) + W_E(T)E'(T) = -\eta\frac{a_1\mu_1}{m} - b_0b_2\mu_1W_p(T) + \\ + \frac{b_1b_2\mu_1^2}{\sqrt{\kappa m}}W_p(T)E_s(T) + b_2^2\mu_1^2\sqrt{\frac{m}{\kappa}}W_p(T)E_s'(T) \end{aligned} \qquad (3.82)$$

elde edilmektedir. Dış alan genliği $E(t)$ nin, bilinen bileşenler ve bilinmeyen η ya bağlı çözümünün (3.79) integral denkleminden elde edilmesi gerekmektedir. Bu çözüm η bilinmeyenini değiştirgen olarak içermekte olup, çözüm için başka bir bağımsız denkleme gereksinim vardır. Bu denklem, (2.18) sırasayılı eşitlikten yararlanarak aşağıdaki şekilde daha açık bir yapıda yazılabilmektedir.

$$\left\langle \text{in} \middle| U(T)^\dagger \widehat{O} U(T) \middle| \text{in} \right\rangle = \tilde{O} + \eta \qquad (3.83)$$

(3.69) sırasayılı anlatımdan yararlanarak yukarıdaki eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\langle \text{in} | a_0 \mathcal{I} + a_1 Q_x(T) + a_2 Q_p(T) | \text{in} \rangle = \tilde{O} + \eta \tag{3.84}$$

$Q_x(T)$ ve $Q_p(T)$'nin açık yapısından ve $\langle \text{in} |x| \text{in} \rangle = 0$ ve

$$\left\langle \text{in} \left| -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right| \text{in} \right\rangle = 0$$

sonuçlarından yararlanarak erişim denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} a_0 + \left(\frac{a_1 \mu_1}{\sqrt{\kappa m}} E_s(T) - a_2 \mu_1 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} E_s'(T) \right) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T \right) \\ - \left(\frac{a_1 \mu_1}{\kappa} E_s'(T) + a_2 \mu_1 E_s(T) \right) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T \right) = \tilde{O} + \eta \end{aligned} \tag{3.85}$$

Burada $E_s(T)$, (3.79) sırasayılı eşitlikten η ya bağlı olarak hesaplanabildiğinden bilinen olarak düşünülmektedir.

(3.79) ve (3.85) denklemleri sırasıyla Denetim ve Erişim denklemleridir. Denetim denklemi, $E(t)$'yi η'ya ve bilinen bileşenlere bağlı olarak elde etmek için kullanılmaktadır. Elde edilen çözüm, (3.85) denklemde yerine konulduğunda η bilinmeyeni hesaplanabilmektedır. Bu çözüm denetim altındaki dizgeye bağımlı olarak eşsiz ya da birden çok sayıda bağımsız işlev olarak ortaya çıkabilir. Bir sonraki bölümde denetim ve erişim denklemlerinin çözümüyle ilgilenilecektir.

3.3 Denetim Denkleminin Çözümü

(3.79) sırasayılı eşitliğin her iki yanının t ye göre iki kez türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(W_E(t)E(t)\right) &= -\eta a_1 \mu_1 \frac{\kappa}{m\sqrt{m}} sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} (T-t) \right) \\ &- \eta a_2 \mu_1 \frac{\kappa}{m} cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} (T-t) \right) \\ &- b_2 \mu_1 \frac{dW_p(t)}{dt} \left[b_0 - \frac{b_1 \mu_1}{\sqrt{\kappa m}} E_s(t) - b_2 \mu_1 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} E_s'(t) \right] \\ &- b_2 \mu_1 W_p(t) \left[-\frac{b_1 \mu_1}{\sqrt{\kappa m}} E_s'(t) - b_2 \mu_1 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} E_s''(t) \right] \\ &+ \frac{b_1 \mu_1}{m} W_p(t) \left[b_0 - \frac{b_1 \mu_1}{\sqrt{\kappa m}} E_s(t) - b_2 \mu_1 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} E_s'(t) \right] \\ &+ \int_t^T d\tau W_p(\tau) \left[b_0 - \frac{b_1 \mu_1}{\sqrt{\kappa m}} E_s(\tau) - b_2 \mu_1 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} E_s'(\tau) \right] \times \\ &\times \left[-b_2 \mu_1 \frac{\kappa}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} (\tau - t) \right) - \frac{b_1 \mu_1}{m} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} (\tau - t) \right) \right] \end{aligned} \tag{3.86}$$

elde edilir. (3.79) eşitliğin her iki yanın $\frac{\kappa}{m}$ ile çarpılır ve (3.86) eşitliğinin her iki yanı ile taraf tarafa toplanırsa ve $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$w_1(t) \equiv -b_2^2\mu_1^2\frac{dW_p(t)}{dt}\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \tag{3.87}$$

$$w_2(t) \equiv \left(\frac{b_2^2\mu_1^2\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}} + \frac{b_1^2\mu_1^2}{m\sqrt{\kappa m}}\right)W_p(t) - \frac{b_1b_2\mu_1^2}{\sqrt{\kappa m}}\frac{dW_p(t)}{dt} \tag{3.88}$$

$$w_3(t) \equiv b_0b_2\mu_1\frac{dW_p(t)}{dt} - \frac{b_0b_1\mu_1}{m}W_p(t) \tag{3.89}$$

ve buradan da aşağıdaki şekilde türevli denklem elde edilir.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)W_E(t)E(t) - b_2^2\mu_1^2W_p(t)E(t) +$$
$$+w_1(t)E_s'(t) + w_2(t)E_s(t) + w_3(t) = 0 \tag{3.90}$$

(3.90) sırasayılı eşitlik $E(t)$ nin türevlerini ve integrallerini içermektedir. Salt türevli denklemler ile çalışmak daha yeğlenir bir durumdur. Dolayısıyla, $E_s(t)$'nin yapısından üretilebilen,

$$E(t) \equiv \sqrt{\frac{m}{\kappa}}\left(E_s''(t) + \frac{\kappa}{m}E_s(t)\right) \tag{3.91}$$

özdeşliği kullanarak, (3.90) sırasayılı eşitliğin aşağıdaki biçimde bir türevli denklem yapısına dönüştürülmesi mümkündür.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)W_E(t)\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)E_s(t) -$$
$$-b_2^2\mu_1^2W_p(t)\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)E_s(t) + w_1(t)E_s'(t) + w_2(t)E_s(t) + w_3(t) = 0 \tag{3.92}$$

Bu, dördüncü basamaktan doğrusal, homojen olmayan sıradan türevli bir denklemdir. Bu denklemin çözümü dört başlangıç veya sınır koşulunu sağlayacak şekilde dört belirsiz değiştirgen içerir. (3.78) sırasayılı eşitlik yardımıyla hem işlevin kendisinin hem de türevinin $t = 0$ anındaki başlangıç koşullarının elde edilişi oldukça kolay olup, aşağıdaki şekilde sonlandırılabilir.

$$E_s(0) = 0, \qquad E_s'(0) = 0 \tag{3.93}$$

(3.92) sırasayılı eşitlik dördüncü basamaktan olduğundan başlangıç veya sınır koşullarından biri $E_s(t)$ nin en çok üçüncü basamaktan türevini içermek zorundadır. Özenli ve biraz da ayrıntılı bir araştırma $t = 0$ anı için başka bir koşul bulunmasının mümkün olmadığını göstermektedir. Bu da, $t = T$ son andaki kontrolün yapılması gerektiğini göstermektedir. (3.80) ve (3.82) sırasayılı denklemler bu amaçla kullanılabilmektedir. (3.91) özdeşliğinden yararlanılması durumunda,

$$W_E(T)\left(E_s''(T)+\frac{\kappa}{m}E_s(T)\right)=\eta a_2\mu_1\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}} \tag{3.94}$$

ve

$$W_E'(T)\left(E_s''(T)+E_s(T)\right)+W_E(T)\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\left(E_s'''(T)+\frac{\kappa}{m}E_s'(T)\right)=$$
$$=-\eta\frac{a_1\mu_1}{m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}-b_0b_2\mu_1\sqrt{\frac{\kappa}{m}}W_p(T)+\frac{b_1b_2\mu_1^2}{m}W_p(T)E_s(T)+b_2^2\mu_1^2W_p(T)E_s'(T) \tag{3.95}$$

yazılabilmektedir.

(3.92), (3.94) ve (3.95) dördüncü basamaktan doğrusal bir sınır değer sorunu tanımlamaktadır. Zamana göre değişim gösteren $W_E(t)$ ve $W_p(t)$ nin davranışına bağlı olarak türevli denklemin analitik çözümü bulunabilir ya da salt sayısal çözümle yetinilmek zorunda kalınabilir. Doğrusal sıradan türevli denklemler kuramına dayanarak, birbirinden doğrusal bağımsız bu işlevleri $E_j(t)$, $(j=1,2,3,4)$ ile gösterirsek (3.92) sırasayılı denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$E_s(t)=c_1E_1(t)+c_2E_2(t)+c_3E_3(t)+c_4E_4(t) \tag{3.96}$$

Elemanları aşağıdaki şekilde açık yapıda verilen dörde dörtlük bir matris

$$\begin{aligned}
A_{1j} &\equiv E_j(0), \qquad 1\le j\le 4\\
A_{2j} &\equiv E_j'(0), \qquad 1\le j\le 4\\
A_{3j} &\equiv W_E(T)\left(E_j''(T)+\frac{\kappa}{m}E_j(T)\right), \qquad 1\le j\le 4\\
A_{4j} &\equiv W_E'(T)\left(E_j''(T)+\frac{\kappa}{m}E_j(T)\right)+W_E(T)\left(E_j'''(T)+\frac{\kappa}{m}E_j'(T)\right)-\\
&- \frac{b_1b_2\mu_1^2}{m}W_p(T)E_j(T)-b_2^2\mu_1^2W_p(T)E_j'(T), \qquad 1\le j\le 4
\end{aligned} \tag{3.97}$$

ve iki vektör

$$\mathbf{c}^T\equiv[\,c_1,c_2,c_3,c_4\,] \tag{3.98}$$

$$\mathbf{r}^T\equiv\left[0,0,\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}\eta a_2\mu_1,-\eta\frac{a_1\mu_1\sqrt{\kappa}}{m\sqrt{m}}-b_0b_2\mu_1\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}W_p(T)\right] \tag{3.99}$$

tanımlayarak, sınır koşulları karşılığı olarak aşağıdaki cebirsel eşitlik elde edilebilmektedir.

$$\mathbf{Ac}=\mathbf{r} \tag{3.100}$$

μ_1'in, a_1 ve a_2 den en az birinin sıfıra eşit olmaması durumunda sorunun fiziksel anlamı varolmaktadır. Dolayısıyla, $\mathbf{r}$ vektörünün sıfıra eşit olmadığı varsayılmaktadır. Sonra, (3.100) sırasayılı eşitliğin çözümünün tüm T değerleri için var ve eşsiz olduğunu ileri sürebiliriz. $\mathbf{e}_j$'nin Euclid birim vektörü olması durumunda yani j–inci elemanı 1 diğer elemanları 0 olarak tanımlansa

$$c_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}, \qquad 1 \leq j \leq 4 \tag{3.101}$$

yazılabilmektedir. (3.101) sırasayılı eşitlik denetim denkleminin çözümünü sonlandırmaktadır. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{r}$'nin eklenmesi ile oluşan genişletilmiş katsayılar matrisinin ranklarının T değerleri için farklı olması halinde çözümün var olmadığı söylenebilir. Rankların eşit olması halinde, rankın değerine bağlı olarak belirsiz değiştirgen içermesine karşın, denklemin çözümü vardır. Burada rank'ın 4 olması durumla ilgilenmekteyiz. Sonuç olarak, (3.91) denklemden $E_s(t)$ ve $E(t)$ nin eşsiz olarak elde edebileceğimizi ileri sürebiliriz.

3.4 Erişim Denkleminin Çözümü

$\mathbf{r}$ vektörü η'li ve η'sız terimi olarak iki parçaya ayrılabilir.

$$\mathbf{r} = \eta\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0 \tag{3.102}$$

$\mathbf{r}_1$ ve $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}_1^T \equiv \left[0, 0, a_2\mu_1\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{m}}, -\frac{a_1\mu_1\sqrt{\kappa}}{m\sqrt{m}}\right] \tag{3.103}$$

$$\mathbf{r}_0^T \equiv \left[0, 0, 0, -b_0b_2\mu_1\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}W_p(T)\right] \tag{3.104}$$

olduğundan (3.101) sırasayılı eşitliği aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$c_j = \eta c_j^{(1)} + c_j^{(0)}, \qquad 1 \leq j \leq 4 \tag{3.105}$$

$$c_j^{(k)} = \frac{1}{det\mathbf{A}}\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}_a\mathbf{r}_k; \qquad k = 0, 1; \qquad 1 \leq j \leq 4 \tag{3.106}$$

Burada $\mathbf{A}_a$, $\mathbf{A}$ matrisinin adjugate (işaretli minörler matrisinin devriği) matrisidir. $E_s^{(0)}(t)$ ve $E_s^{(1)}(t)$, η'dan bağımsız olup, $E_s(t)$ nin eşiti bu terimler türünden aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$E_s(t) = \eta E_s^{(1)}(t) + E_s^{(0)}(t) \tag{3.107}$$

η dan bağımsız terimler daha açık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$E_s^{(k)}(t) \equiv \sum_{j=1}^{4} c_j^{(k)} E_j(t), \qquad k = 0, 1 \tag{3.108}$$

(3.85) sırasayılı erişim denklemini aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$a_0\left(det\mathbf{A}\right) + d_0(T) + \eta(T)d_1(T) = \tilde{O}\left(det\mathbf{A}\right) + \eta(T)\left(det\mathbf{A}\right) \qquad (3.109)$$

Yukarıdaki eşitlikte kullanılan $d_k(T)$ aşağıdaki özdeşliklerle tanımlanmaktadır.

$$d_k(T) \equiv \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}_a \mathbf{r}_k D_j(T); \qquad k = 0,1; \qquad 1 \le j \le 4 \qquad (3.110)$$

$$\begin{aligned} D_j(T) \equiv & \left(\frac{a_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_j(T) - a_2\mu_1\sqrt{\frac{\kappa}{m}}E_j'(T)\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\right) \\ & - \left(\frac{a_1\mu_1}{\kappa}E_j'(T) + a_2\mu_1 E_j(T)\right)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\right) \\ & \qquad 1 \le j \le 4 \end{aligned} \qquad (3.111)$$

(3.109) sırasayılı denklemden $\eta(T)$ çekilecek olursa

$$\eta(T) = \frac{\tilde{O}\left(det\mathbf{A}\right) - d_0(T) - a_0\left(det\mathbf{A}\right)}{d_1(T) - \left(det\mathbf{A}\right)} \qquad (3.112)$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağ yanı T ye bağlı iki işlevin oranı durumundadır. Payda sıfırdan farklı iken payı sıfırlayan T değerleri (gerçel olarak varsa) kesin erişimi yani en iyi durumu verir. Diğer yandan, pay sıfırdan farklı iken paydayı yok eden T değerleri de bulunabilir. Eğer varsa, bu değerler erek değerinden sonsuz sapma olarak ortaya çıkmakta ve en kötü duruma karşılık gelmektedirler.

3.5 Açıklayıcı Uygulama

Açıklayıcı bir uygulama olması açısından aşağıdaki en basit durum ele alınabilir.

$$\mu \equiv x, \qquad \widehat{\mathcal{O}} \equiv x, \qquad \widehat{\mathcal{O}}' \equiv -i\frac{\partial}{\partial x} \qquad (3.113)$$

İşleçleri doğrusal olarak ifade ederken kullanılan tüm değişmezlerin eşitlikleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \mu_0 \equiv 0,\ \mu_1 \equiv 1; \\ a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ a_2 \equiv 0; \\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 0,\ b_2 \equiv 1 \end{aligned} \qquad (3.114)$$

İncelemeleri daha da kolaylaştırmak adına aşağıdaki tanımlamalar da yapılmaktadır.

$$\kappa \equiv 1, \quad m = 1, \quad W_E(t) \equiv 1, \quad W_p(t) \equiv 1 \qquad (3.115)$$

κ ve m'nin 1 alınması fiziksel boyutsuz koordinatların kullanılmakta olduğu anlamına gelmektedir. Bütün bu tanımlamalar;

$$w_1(t) \equiv 0, \qquad w_2(t) \equiv 1, \qquad w_3(t) \equiv 0 \tag{3.116}$$

ve türevli denklemin

$$\frac{d^4E_s(t)}{dt^4} + \frac{d^2E_s(t)}{dt^2} + E_s(t) = 0 \tag{3.117}$$

eşlik eden sınır koşullarının

$$\begin{aligned} E_s(0) &= 0, \\ E_s'(0) &= 0, \\ E_s''(T) + E_s(T) &= 0, \\ E_s'''(T) &= \eta \end{aligned} \tag{3.118}$$

yazılmasına olanak sağlamaktadır.

(3.117) türevli denkleminin birbirinden bağımsız çözümleri karakteristik denklemin kökleri yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} E_1(t) &\equiv \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ E_2(t) &\equiv \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ E_3(t) &\equiv \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ E_4(t) &\equiv \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned} \tag{3.119}$$

A matrisinin açık olarak yazılabilmesi için

$$E_5(T) \equiv \frac{1}{2}E_1(T) - \frac{\sqrt{3}}{2}E_2(T), \tag{3.120}$$

$$E_6(T) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}E_1(T) - \frac{1}{2}E_2(T), \tag{3.121}$$

$$E_7(T) \equiv \frac{1}{2}E_3(T) - \frac{\sqrt{3}}{2}E_4(T), \tag{3.122}$$

$$E_8(T) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}E_3(T) - \frac{1}{2}E_4(T) \tag{3.123}$$

tanımları da yapılarak

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ E_5(T) & E_6(T) & E_7(T) & E_8(T) \\ \\ -E_1(T) & -E_2(T) & E_3(T) & E_4(T) \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

özdeşliğine ulaşılabilir.

$\mathbf{r}$ sağ yan vektörünün $\mathbf{r}_0$ ve $\mathbf{r}_1$ bileşenlerinin açık yapıları bu durum için

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{r}_1^T = [\,0, 0, 0, 1\,] \tag{3.125}$$

olup, bu eşitlikler dış alan genliğinin aşağıdaki şekilde yazılmasına yardımcı olmaktadır.

$$E(t) = \eta(T)\frac{E_{num}(t,T)}{E_{den}(T)} \tag{3.126}$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan $E_{num}(t,T)$ ve $E_{den}(T)$ nin açık anlatımları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} E_{num}(t,T) \;&\equiv\; \cosh\left(\frac{T+t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}(T-t)}{2}\right) \\ &-\; \sinh\left(\frac{T-t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}(T+t)}{2}\right) \\ &-\; \sqrt{3}\cosh\left(\frac{T+t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}(T-t)}{2}\right) \\ &-\; \sqrt{3}\cosh\left(\frac{T-t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}(T-t)}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$E_{den}(T) \equiv \frac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{T} + \mathrm{e}^{-T}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}T}{2}\right) + 2 \tag{3.128}$$

Erişim denkleminin yazılabilmesi için öncelikle

$$d_0(T) \;\equiv\; 0 \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned} d_1(T) \;&\equiv\; \sin(T) - \frac{3}{2}\sinh(T)\cos(T) + \\ &+\; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\sin((\sqrt{3}+1)T) + \\ &+\; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin((\sqrt{3}-1)T) \end{aligned} \tag{3.130}$$

açık anlatımları ve sonunda da

$$\eta(T) = \frac{\tilde{O} E_{den}(T)}{d_1(T) - E_{den}(T)} \tag{3.131}$$

anlatımı elde edilmektedir.

Kolaylıkla, T nin negatif olmayan değerleri için

$$E_{den}(T) = 0 \tag{3.132}$$

eşitliğin sağlanmadığı gösterilebilir. Bu, hiçbir etkileşim süresi için erek değer $\tilde{\mathcal{O}}$'ya erişim olmadığı anlamına gelmektedir.

Diğer yandan,

$$d_1(T) - E_{den}(T) = 0 \tag{3.133}$$

eşitliği sonsuz sayıda T değerler kümesi için sağlanmaktadır.

BÖLÜM 4

ÇÖZÜMÜN KARARLILIK ve GÜRBÜZLÜĞÜ'NÜN İNCELENMESİ

Bu bölümde amaç; dalga ve eşdüzey işlevlerinin dış alan genliğinin değişimine bağlılığından yararlanarak eniyileme çözümlerinin kararlılık (stability) ve gürbüzlüğünü (robustness) [7] incelemektir. Bu amaçla dalga ve eşdüzey işlevlerinin dış alan genliğine olan bağımlılığı ilgili eniyileme denklemlerini sağlayacak biçimde ele alındığında amaç işlevsisinin yapısı , ikinci basamak değişim içeren terimlerinin yokolması nedeniyle, olabildiğince yalınlaşmaktadır. Böylece elde edilen yapı aşağıda verilmektedir.

$$\overline{\delta^2 \mathcal{J}} = \int_0^T dt W_E(t) \delta E(t)^2 - 2 \int_0^T dt \delta E(t) \Big(\overline{\langle \delta\lambda(t) \,|} \mu \,|\, \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) \,|\, \mu \overline{|\, \delta\lambda(t) \rangle}$$
$$+ \langle \lambda(t) \,|\, \mu \overline{|\, \delta\psi(t) \rangle} + \overline{\langle \delta\psi(t) \,|} \mu \,|\, \lambda(t) \rangle \Big) \tag{4.1}$$

Amaç işlevsisinin ikinci değişiminde kullanılan üst çizgi, dalga ve eşdüzey işlevlerinin dinamik denklemleri kullanılarak bu işlevlerin değişimlerinin $E(t)$ nin birinci değişimi türünden yazıldığında elde edilen denklemdir. Diğer bir deyişle,

$$\overline{\langle \delta\psi(t) \,|} \equiv \int_0^T d\tau \left\langle \frac{\delta\psi(t)}{\delta E(\tau)} \right| \delta E(\tau); \tag{4.2}$$

$$\overline{|\, \delta\psi(t) \rangle} \equiv \int_0^T d\tau \left| \frac{\delta\psi(t)}{\delta E(\tau)} \right\rangle \delta E(\tau); \tag{4.3}$$

$$\overline{\langle \delta\lambda(t) \,|} \equiv \int_0^T d\tau \left\langle \frac{\delta\lambda(t)}{\delta E(\tau)} \right| \delta E(\tau); \tag{4.4}$$

$$\overline{|\, \delta\lambda(t) \rangle} \equiv \int_0^T d\tau \left| \frac{\delta\lambda(t)}{\delta E(\tau)} \right\rangle \delta E(\tau) \tag{4.5}$$

tanımlamaları ,

$$\langle S_\psi(t,\tau) \,| = \left\langle \frac{\delta\psi(t)}{\delta E(\tau)} \right| \tag{4.6}$$

$$|\, S_\psi(t,\tau) \rangle = \left| \frac{\delta\psi(t)}{\delta E(\tau)} \right\rangle \tag{4.7}$$

$$\langle S_\lambda(t,\tau) \,| = \left\langle \frac{\delta\lambda(t)}{\delta E(\tau)} \right| \tag{4.8}$$

$$|\, S_\lambda(t,\tau) \rangle = \left| \frac{\delta\lambda(t)}{\delta E(\tau)} \right\rangle \tag{4.9}$$

işlevsel türevler tanımlamaları yardımıyla yeniden yazılabilmektedir.

$$\overline{\langle \delta\psi(t)\,|} \;\equiv\; \int_0^T d\tau\, \langle S_\psi(t,\tau)\,|\, \delta E(\tau), \tag{4.10}$$

$$\overline{|\, \delta\psi(t)\rangle} \;\equiv\; \int_0^T d\tau\, |\, S_\psi(t,\tau)\rangle\, \delta E(\tau); \tag{4.11}$$

$$\overline{\langle \delta\lambda(t)\,|} \;\equiv\; \int_0^T d\tau\, \langle S_\lambda(t,\tau)\,|\, \delta E(\tau), \tag{4.12}$$

$$\overline{|\, \delta\lambda(t)\rangle} \;\equiv\; \int_0^T d\tau\, |\, S_\lambda(t,\tau)\rangle\, \delta E(\tau) \tag{4.13}$$

Bu özdeşliklerin kullanımıyla (4.1) sırasayılı eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\overline{\delta^2 \mathcal{J}} = \int_0^T dt W_E(t)\delta E(t)^2 -$$
$$-2\int_0^T dt\delta E(t)\int_0^T d\tau \left(\langle S_\lambda(t,\tau)\,|\,\mu\,|\,\psi(t)\rangle + \langle \psi(t)\,|\,\mu\,|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle \right.$$
$$\left. + \langle \lambda(t)\,|\,\mu\,|\,S_\psi(t,\tau)\rangle + \langle S_\psi(t,\tau)\,|\,\mu\,|\,\lambda(t)\rangle \right) \delta E(\tau) \tag{4.14}$$

$\mathcal{S}$ ve $\mathcal{I}$ sırasıyla kararlılık ve birim işleçleri simgelemek üzere açık olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\mathcal{I} f(t) \equiv \int_0^T d\tau \delta(t-\tau) f(\tau) \tag{4.15}$$

$$\mathcal{S} f(t) \equiv \int_0^T d\tau K(t,\tau) f(\tau) \tag{4.16}$$

Burada $f(t)$, $[\,0, T\,]$ aralığında zamana göre karesi integre edilebilir işlevler uzayında tanımlı bir işlevdir.

Sorunumuzun simetrik kararlılık işleci

$$\begin{aligned} K(t,\tau) \;\equiv\; & W_E(t)^{-\frac{1}{2}} W_E(\tau)^{-\frac{1}{2}} \Big(\langle S_\lambda(t,\tau)\,|\,\mu\,\overline{|\,\psi(t)\rangle} \\ & + \overline{\langle \psi(t)\,|}\,\mu\,|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle + \overline{\langle \lambda(t)\,|}\,\mu\,|\,S_\psi(t,\tau)\rangle \\ & + \langle S_\psi(t,\tau)\,|\,\mu\,\overline{|\,\lambda(t)\rangle} + \langle S_\lambda(\tau,t)\,|\,\mu\,\overline{|\,\psi(\tau)\rangle} \\ & + \overline{\langle \psi(\tau)\,|}\,\mu\,|\,S_\lambda(\tau,t)\rangle + \overline{\langle \lambda(\tau)\,|}\,\mu\,|\,S_\psi(\tau,t)\rangle \\ & + \langle S_\psi(\tau,t)\,|\,\mu\,\overline{|\,\lambda(\tau)\rangle} \Big) \end{aligned} \tag{4.17}$$

olmak üzere (4.14) eşitliği aşağıdaki eşitlikle verilir duruma dönüştürülebilir.

$$\overline{\delta^2 \mathcal{J}} = \int_0^T dt \delta E(t) W_E(t)^{\frac{1}{2}} \left[\mathcal{I} - \mathcal{S} \right] W_E(\tau)^{\frac{1}{2}} \delta E(\tau) \tag{4.18}$$

Böylece amaç işlevsisinin ikinci değişiminin eniyilemeyi sağlayan $\delta E(t) W_E(t)^{\frac{1}{2}}$ işlevleri için değeri $\mathcal{I} - \mathcal{S}$ işlecinin beklenen değeri olarak ortaya çıkar. Bu beklenen değer, aynı zamanda, çekirdeği $\mathcal{I}-\mathcal{S}$ işleci olan bir kuvadratik form olarak da yorumlanabilir.

$\mathcal{S}$ kararlılık işlecinin [8] özdeğerleri ikinci değişimin alacağı değeri saptayan en önemli bileşenler konumuna gelmektedir.

Burada ilk olarak daha açık bir şekilde kararlılık işlecinin çekirdeğinin elde edilişi üzerinde durulacaktır. İkinci olarak kararlılık işlecininin özdeğer sorununun dördüncü dereceden işlecin sınır değer sorununa dönüştürülmesi incelenecektir. Üçüncü olarak; kararlılık işleç spekturum incelenecek ve gürbüzlük tanımı verilecektir.

4.1 Kararlılık Çekirdeğinin Açık Yapısı

Dış alan genliği $E(t)$ ve erişim değiştirgeni η yı içeren kararlılık işlecinin çekirdeği $K(t,\tau)$ için açık bir anlatım elde etmek olanaklıdır. Bu amaçla dalgaketi, eşdüzeyketi ve dizgenin evrim işleci aşağıdaki şekilde yeniden yazılmaktadır. Burada çizgi, eniyileme sonucu elde edilen çözüm olduğunu göstermek için kullanılmaktadır.

$$\overline{|\,\psi(t)\rangle} \equiv \mathcal{U}(t)\ |\,\text{in}\rangle \tag{4.19}$$

$$\overline{|\,\lambda(t)\rangle} = -\frac{i}{\hbar}\eta\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\,\text{in}\rangle$$
$$-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\,\text{in}\rangle\,\langle\text{in}\,|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\,\text{in}\rangle \tag{4.20}$$

Eniyilemeli denetim sonrası yeni işleçler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) \equiv \mathcal{U}(t)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}(t) \tag{4.21}$$

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t) \equiv \mathcal{U}(t)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(t) \tag{4.22}$$

Dizgenin evrim işlecinin,$\mathcal{U}(t)$, açık yapısı bir önceki bölümde elde edilmiştir.

$$\gamma_1(t) \equiv \mu_1\int_0^t d\tau E(\tau)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \tag{4.23}$$

$$\gamma_2(t) \equiv \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\tau\right) \tag{4.24}$$

$$\gamma_3(t) \equiv \mu_0\int_0^t d\tau E(\tau) \tag{4.25}$$

olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\mathcal{U}(t) = \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\gamma_1(t)x}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\gamma_2(t)p}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\gamma_3(t)\mathcal{I}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\gamma_2(t)\gamma_1(t)\mathcal{I}} \tag{4.26}$$

$E(t)$ ye bağlı (4.26) sırasayılı eşitlikteki evrim işlecinin birinci değişimi aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\delta\mathcal{U}(t) = \int_0^T d\tau \frac{\delta U(t)}{\delta E(\tau)} \delta E(\tau) = \int_0^T d\tau S_U(t,\tau)\delta E(\tau) \tag{4.27}$$

Dalgaketi için yazılan (4.19) eşitliğinden yararlanarak

$$\mid S_\psi(t,\tau)\rangle = S_U(t,\tau) \mid \mathrm{in}\rangle \,. \tag{4.28}$$

yazılabileceğini göstermek olanaklıdır.

Eşdüzey işlevinin duyarlılık katsayı keti, (4.20) sırasayılı eşitliğin her iki yanının birinci değişimi alınarak belirlenebilir. Bunun kolay hesaplanabilmesi için bağımsız işleçlerin birinci değişimi ile ilgilenmek gerekir. Öncelikle erişim değiştirgeninin birinci değişimi alınacak olursa

$$\delta\eta \equiv \int_0^T d\tau \frac{\delta\eta}{\delta E(\tau)} \delta E(\tau) \equiv \int_0^T d\tau S_\eta(\tau)\delta E(\tau) \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada $S_\eta(\tau)$, η'nın duyarlılık katsayısına (sensitivity coefficient) karşılık gelmektedir. Erişim denkleminin her iki yanının birinci değişimi alınarak bu terim belirlenebilir. Böylece

$$S_\eta(\tau) \equiv \langle \mathrm{in} \mid \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} \mid \mathrm{in}\rangle \tag{4.30}$$

sonucuna varılır. Burada küme imleri Poisson Simgelemelerine karşılık gelmektedir ve

$$Q_\mu(t) \equiv \mathcal{U}(t)^\dagger \mu \mathcal{U}(t) \tag{4.31}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Aynı işlem (4.21), (4.22), ve (4.31) sırasayılı eşitliklere uygulandığı zaman, aşağıdaki denklikler yazılabilir.

$$\delta Q_\mu(t) \equiv \int_0^T d\tau H_U(t-\tau)\delta E(\tau) \left\{ Q_\mu(\tau), Q_\mu(t) \right\} \tag{4.32}$$

$$\delta Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) \equiv \int_0^T d\tau H_U(t-\tau)\delta E(\tau) \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) \right\} \tag{4.33}$$

$$\delta Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t) \equiv \int_0^T d\tau H_U(t-\tau)\delta E(\tau) \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t) \right\} \tag{4.34}$$

Daha da ilerleyebilmek için $S_U(t,\tau)$ açık olarak elde edilmelidir. Bu amaçla evrim işleci için geçerli olan (3.2) sırasayılı denklemden yararlanmak olanaklıdır.

(3.2) sırasayılı eşitliğin her iki yanının birinci değişimi alınır

$$i\hbar \frac{\partial \delta\mathcal{U}(t)}{\partial t} = \left[H_0 + E(t)\mu \right] \delta\mathcal{U}(t) + \delta E(t)\mu\mathcal{U}(t), \tag{4.35}$$

evrim işlecinin birinci değişimi yerine (4.27) sırasayılı eşitlikte verilen ifade yazılır

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int_0^T d\tau S_U(t,\tau)\delta E(\tau) = \int_0^T d\tau\,[\,H_0 + E(t)\mu\,]\,S_U(t,\tau)\delta E(\tau) + \mu\int_0^T d\tau\delta(t-\tau)\mathcal{U}(t)\delta E(\tau), \qquad (4.36)$$

ve eşitliğin her iki yanında düzenleme yapılırsa

$$i\hbar\frac{\partial S_U(t,\tau)}{\partial t} = [\,H_0 + E(t)\mu\,]\,S_U(t,\tau) + \mu\delta(t-\tau)\mathcal{U}(t) \qquad (4.37)$$

elde edilir. Bu denkleme eşlik eden başlangıç koşulu aşağıda belirtildiği biçimdedir.

$$S_U(0,\tau) = 0 \qquad (4.38)$$

Değişkenin eksi olduğu yerde 0, artı olduğu yerde 1, sıfır olduğu yerde $\frac{1}{2}$ olan Heaviside birim basamak işlevi [9], $H_U(t-\tau)$, ile simgelenmek üzere çözüm aşağıda verilmektedir.

$$S_U(t,\tau) \equiv -\frac{i}{\hbar}H_U(t-\tau)\mathcal{U}(t)Q_\mu(\tau) \qquad (4.39)$$

Bütün bu işlemlerden sonra eşdüzey işlevinin duyarlılık katsayısını elde etmek için (4.20) eşitliğinin her iki yanının birinci değişimi alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle = &-\frac{i}{\hbar}S_\eta(\tau)\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\;|\,\mathrm{in}\rangle - \frac{i}{\hbar}\eta S_U(t,\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\;|\,\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\eta U(t)H_U(T-\tau)\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\;|\,\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)S_U(t,\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\;|\,\mathrm{in}\rangle\,\langle\mathrm{in}\,|\;Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\;|\,\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\mathcal{U}(t)H_U(t_1-\tau)\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\;|\,\mathrm{in}\rangle\,\langle\mathrm{in}\,|\;Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\;|\,\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\;|\,\mathrm{in}\rangle\,\langle\mathrm{in}\,|\;H_U(t_1-\tau)\left\{\,Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\;|\,\mathrm{in}\rangle
\end{aligned} \qquad (4.40)$$

(4.30), (4.39) sırasayılı denklikler yukarıda yerine yazılırsa, $Q_\mu(t)$, $Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t)$ ve $Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t)$ türünden bir denklem elde edilmektedir. τ, $[\,0,T\,]$ aralığında tanımlı olduğundan ve bu aralık için $H_U(T-\tau) = 1$ olacağından eşdüzey işlevinin duyarlılık katsayısı denkleminin son hali aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
|\, S_\lambda(t,\tau)\rangle = &-\frac{\eta}{\hbar^2} H_U(t-\tau)\mathcal{U}(t)Q_\mu(\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-i\frac{\eta}{\hbar}\mathcal{U}(t)\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{1}{\hbar^2}H_U(t-\tau)\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\mathcal{U}(t)Q_\mu(\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)H_U(t_1-\tau)\mathcal{U}(t)\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)H_U(t_1-\tau)\mathcal{U}(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Verilen Q_1 ve Q_2 gibi iki işlecin Poisson Simgelemesi

$$
\{Q_1,Q_2\} \equiv \frac{i}{\hbar}\left(Q_1Q_2 - Q_2Q_1\right) \tag{4.42}
$$

olduğuna göre yukarıdaki denklemde yer alan Poisson Simgelemelerinin her biri belirlenebilecek demektir. Kararlılık çekirdeğinin her bir bileşenin aşağıdaki şekilde yazılabileceğini kanıtlamak olanaklıdır.

$$
\begin{aligned}
\langle S_\psi(t,\tau)\,|\,\mu\ |\,\lambda(t)\rangle &= \frac{\eta}{\hbar^2}H_U(t-\tau)\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(\tau)Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&+ \frac{1}{\hbar^2}H_U(t-\tau)\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \times \\
&\times\ \langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(\tau)Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\ \mu\,|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle = &-\frac{i}{\hbar}\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{\eta}{\hbar^2}H_U(t-\tau)\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)Q_\mu(\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-i\frac{\eta}{\hbar}\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{1}{\hbar^2}H_U(t-\tau)\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \times \\
&\times\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)Q_\mu(\tau)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)H_U(t_1-\tau)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \times \\
&\times\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle \\
&-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1)H_U(t_1-\tau)\langle \mathrm{in}|\ Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle \times \\
&\times\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_\psi(t,\tau)\,|\,\mu\,|\,\lambda(t)\rangle + \langle\psi(t)\,|\,\mu\,|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle = \\
-\frac{i}{\hbar}\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle\,\langle \mathrm{in}|\,Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\,|\mathrm{in}\rangle \\
+i\frac{\eta}{\hbar}H_U(t-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,\{Q_\mu(t), Q_\mu(\tau)\}\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\,|\mathrm{in}\rangle \\
-i\frac{\eta}{\hbar}\langle \mathrm{in}|\,Q_\mu(t)\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
+\frac{i}{\hbar}H_U(t-\tau)\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\,\langle \mathrm{in}|\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\times\,\langle \mathrm{in}|\,\{Q_\mu(t), Q_\mu(\tau)\}\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1) H_U(t_1-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\langle \mathrm{in}|\,Q_\mu(t)\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\frac{i}{\hbar}\int_t^T dt_1 W_p(t_1) H_U(t_1-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,Q_\mu(t)Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\times\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

$Q_\mu(t)$, $Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t)$ ve $Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)$ işleçler Hermit türü işleçlerdir. Ket'in Hermit türü eşleniği brasıdır. İki Hermit türü işlecin Poisson Simgelemesi yine Hermit türüdür. Bütün bunlar, aşağıdaki daha kapsamlı eşitlikleri yazabilmekte olduğumuz anlamına gelmektedir.

$$
\begin{aligned}
\overline{K}(t,\tau) \equiv \langle S_\psi(t,\tau)\,|\,\mu\,|\,\lambda(t)\rangle + \langle\psi(t)\,|\,\mu\,|\,S_\lambda(t,\tau)\rangle \\
+ \langle S_\lambda(t,\tau)\,|\,\mu\,|\,\psi(t)\rangle + \langle\lambda(t)\,|\,\mu\,|\,S_\psi(t,\tau)\rangle
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{K}(t,\tau) = \eta H_U(t-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T), \{Q_\mu(\tau), Q_\mu(t)\}\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\eta\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(t), \left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
+H_U(t-\tau)\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\,\langle \mathrm{in}|\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\times\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1), \{Q_\mu(\tau), Q_\mu(t)\}\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\int_t^T dt_1 W_p(t_1) H_U(t_1-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\times\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(t), \left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\right\}\,|\mathrm{in}\rangle \\
-\int_t^T dt_1 W_p(t_1) H_U(t_1-\tau)\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle\,\times \\
\times\,\langle \mathrm{in}|\,\left\{Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\,|\mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Heaviside işlecinin yapısından dolayı bu iki bileşenli işlevin parçalı bir doğası vardır. Bundan dolayı Heaviside'ın birim işlevini içermeyecek şekilde parçalı olarak ifade etmek daha uygundur. $0 \leq \tau \leq t \leq T$ olması ile $\overline{K}(t,\tau)$ eşiti aşağıdaki şekildedir.

$$
\begin{aligned}
\overline{K}(t,\tau) = \eta \langle \text{in} | \left\{ Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T), \{Q_\mu(\tau), Q_\mu(t)\} \right\} | \text{in} \rangle \\
- \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} | \text{in} \rangle \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} | \text{in} \rangle \\
-\eta \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} \right\} | \text{in} \rangle \\
+ \int_t^T dt_1 W_p(t_1) \langle \text{in} | \, Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \, | \text{in} \rangle \\
\times \langle \text{in} | \left\{ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1), \{Q_\mu(\tau), Q_\mu(t)\} \right\} | \text{in} \rangle \\
- \int_t^T dt_1 W_p(t_1) \langle \text{in} | \, Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \, | \text{in} \rangle \\
\times \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} \right\} | \text{in} \rangle \\
- \int_t^T dt_1 W_p(t_1) \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} | \text{in} \rangle \\
\times \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} | \text{in} \rangle
\end{aligned}
$$

$0 \leq t \leq \tau \leq T$ olması ile $\overline{K}(t,\tau)$ eşiti aşağıdaki şekildedir.

$$
\begin{aligned}
\overline{K}(t,\tau) = -\eta \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} \right\} | \text{in} \rangle \\
- \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} | \text{in} \rangle \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T) \right\} | \text{in} \rangle \\
- \int_\tau^T dt_1 W_p(t_1) \langle \text{in} | \, Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \, | \text{in} \rangle \\
\times \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} \right\} | \text{in} \rangle \\
- \int_\tau^T dt_1 W_p(t_1) \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} | \text{in} \rangle \\
\times \langle \text{in} | \left\{ Q_\mu(t), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1) \right\} | \text{in} \rangle
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Burada Heaviside birim basamak işlevinin açık yapısı kullanılmaktadır. t yerine τ, τ yerine t yazılması ile (4.48) eşitliğin toplamından kararlılık çekirdeği simetrikleştirilmektedir. Bu durum,

$$
\begin{aligned}
K_1(t,\tau) \equiv& \\
\eta \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T),\{Q_\mu(\tau),Q_\mu(t)\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(t),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-\eta \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(t),\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
+\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle& \\
\times \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1),\{Q_\mu(t),Q_\mu(\tau)\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle& \\
\times \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(t),\left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-2\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
\times \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(t),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-\eta \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),\left\{Q_\mu(t),Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\right\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle& \\
-\int_t^T dt_1 W_p(t_1)\langle \mathrm{in}|\ Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\ |\mathrm{in}\rangle& \\
\times \langle \mathrm{in}|\ \left\{Q_\mu(\tau),\left\{Q_\mu(t),Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\}\right\}\ |\mathrm{in}\rangle&
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

olmak üzere kararlılık çekirdeğinin aşağıdaki şekilde ifade edilmesine izin vermektedir.

$$
K(t,\tau) \equiv \left(\overline{K}(t,\tau)+\overline{K}(\tau,t)\right) =
$$

$$
\begin{cases}
W_E(t)^{-\frac{1}{2}} W_E(\tau)^{-\frac{1}{2}} K_1(t,\tau), & 0 \le \tau \le t \\
W_E(t)^{-\frac{1}{2}} W_E(\tau)^{-\frac{1}{2}} K_1(\tau,t), & t \le \tau \le T
\end{cases}
\tag{4.50}
$$

Dizgeyi oluşturan büyüklüklerin açık yapısı bilinmediğinden $Q_\mu(t)$, $Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t)$ ve $Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t)$ işleçlerinin açık yapılarını belirlemek olanaksızdır. İkikutuplaşma işlevi ile, amaç ve yaptırım işleçleri, konum ve momentum işleçleri türünden doğrusal olan bir uyumlu salınıcı ele alındığında aşağıdaki tanımlamalar geçerli olacaktır.

$$
H_0 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{2}x^2 \tag{4.51}
$$

$$
\mu \equiv \mu_0 \mathcal{I} + \mu_1 x \tag{4.52}
$$

$$
\widehat{\mathcal{O}} \equiv a_0 \mathcal{I} + a_1 x + a_2 p \tag{4.53}
$$

$$
\widehat{\mathcal{O}}' \equiv b_0 \mathcal{I} + b_1 x + b_2 p \tag{4.54}
$$

Burada x ve p konum ve momentum işleçlerini betimleyen m, κ, μ_0, μ_1, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 birer değişmez olarak ele alınmaktadır. Bu tanımlamalar $Q_\mu(t)$, $Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t)$, and $Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t)$ işleçlerinin aşağıdaki açık yapılarına ulaşmamızı sağlamaktadır.

$$Q_\mu(t) = \mu_0\mathcal{I} + \mu_1 Q_x(t) \tag{4.55}$$

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) = a_0\mathcal{I} + a_1 Q_x(t) + a_2 Q_p(t) \tag{4.56}$$

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t) = b_0\mathcal{I} + b_1 Q_x(t) + b_2 Q_p(t) \tag{4.57}$$

Yukarıdaki eşitliklerde yer alan $Q_x(t)$ ve $Q_p(t)$ nin eşitleri

$$Q_x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p - \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(t)\mathcal{I} \tag{4.58}$$

$$Q_p(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)p - \sqrt{\kappa m}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)x - \mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(t)\mathcal{I} \tag{4.59}$$

$$E_s(t) \equiv \int_0^t dt_1 E(t_1)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-t_1)\right) \tag{4.60}$$

(4.58) ve (4.59) eşitliklerinden yararlanıldığında,

$$m_0(t) \equiv \mu_0 - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\kappa m}}E_s(t) \tag{4.61}$$

$$m_1(t) \equiv \mu_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.62}$$

$$m_2(t) \equiv \frac{\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.63}$$

$$\alpha_0(t) \equiv a_0 - \frac{a_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(t) - a_2\mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(t) \tag{4.64}$$

$$\alpha_1(t) \equiv a_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - a_2\sqrt{\kappa m}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.65}$$

$$\alpha_2(t) \equiv a_2\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \frac{a_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.66}$$

$$\beta_0(t) \equiv b_0 - \frac{b_1\mu_1}{\sqrt{\kappa m}}E_s(t) - b_2\mu_1\sqrt{\frac{m}{\kappa}}E_s'(t) \tag{4.67}$$

$$\beta_1(t) \equiv b_1\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) - b_2\sqrt{\kappa m}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.68}$$

$$\beta_2(t) \equiv b_2\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + \frac{b_1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \tag{4.69}$$

olmak üzere, $Q_\mu(t)$, $Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t)$ ve $Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t)$ işleçlerinin açık anlatımları aşağıda verilmektedir.

$$Q_\mu(t) = m_0(t)\mathcal{I} + m_1(t)x + m_2(t)p \tag{4.70}$$

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(t) = \alpha_0(t)\mathcal{I} + \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)p \tag{4.71}$$

$$Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t) = \beta_0(t)\mathcal{I} + \beta_1(t)x + \beta_2(t)p \tag{4.72}$$

Bütün bu bağıntılar bize Poisson Simgelemelerinin aşağıdaki açık anlatımlarını yazmamızda yardımcı olmaktadır.

$$\{Q_\mu(t), Q_\mu(\tau)\} = [\, m_2(t)m_1(\tau) - m_1(t)m_2(\tau)\,]\,\mathcal{I} \tag{4.73}$$

$$\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}}(T)\,\right\} = [\, m_2(\tau)\alpha_1(T) - m_1(\tau)\alpha_2(T)\,]\,\mathcal{I} \tag{4.74}$$

$$\left\{Q_\mu(\tau), Q_{\widehat{\mathcal{O}}'}(t_1)\right\} = [\, m_2(\tau)\beta_1(t_1) - m_1(\tau)\beta_2(t_1)\,]\,\mathcal{I} \tag{4.75}$$

Yukarıda Poisson Simgelemelerinin eşiti ve farklı değişkenler için değerleri birim işlecinin bir katıdır. Birim işlecin bir başka işleç ile Poisson Simgelemesi sıfır olduğu bilindiğine göre (4.49) sırasayılı eşitlikte yer alan içiçe iki katlı Poisson Simgelemelerin değeri iç kısımda yer alan Poisson Simgelemesinin değeri birim işlecin bir katı olacağından sıfırı verecektir. (4.49) sırasayılı denklemde yer alan tüm bu terimler düşeceğinden denklem, aşağıda yazıldığı gibi yalın bir duruma gelmektedir.

$$\begin{aligned} K_1(t,\tau) = &-[\, m_2(t)\alpha_1(t_1) - m_1(t)\alpha_2(t_1)\,] \\ &\times [\, m_2(\tau)\alpha_1(t_1) - m_1(\tau)\alpha_2(t_1)\,] \\ -2\int_t^T &dt_1 W_p(t_1)\,[\, m_2(t)\beta_1(t_1) - m_1(t)\beta_2(t_1)\,] \\ &\times [\, m_2(\tau)\beta_1(t_1) - m_1(\tau)\beta_2(t_1)\,] \end{aligned} \tag{4.76}$$

Kararlılık çekirdeğini trigonometrik işlevler türünden yazabilmek için

$$a_1 = \rho_1 \sin(\phi_1)\,, \tag{4.77}$$

$$a_2\sqrt{\kappa m} = \rho_1 \cos(\phi_1)\,, \tag{4.78}$$

$$b_1 = \rho_2 \sin(\phi_2)\,, \tag{4.79}$$

$$b_2\sqrt{\kappa m} = \rho_2 \cos(\phi_2)\,, \tag{4.80}$$

eşitlikleriyle, yeni büyüklükler, ρ_1, ϕ_1, ρ_2, ϕ_2, tanımlanırsa

$$m_2(t)\alpha_1(T) - m_1(t)\alpha_2(T) = -\frac{\mu_1\rho_1}{\sqrt{\kappa m}}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t) - \phi_1\right), \tag{4.81}$$

$$m_2(t)\beta_1(t_1) - m_1(t)\beta_2(t_1) = -\frac{\mu_1\rho_2}{\sqrt{\kappa m}}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-t) - \phi_2\right), \tag{4.82}$$

olacağından

$$\begin{aligned} K_1(t,\tau) = &-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t) - \phi_1\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau) - \phi_1\right) \\ -\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\int_t^T &dt_1 W_p(t_1)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-t) - \phi_2\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-\tau) - \phi_2\right) \end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilebilmektedir.

Görüldüğü üzere kararlılık işleçinin çekirdeği dış alan genliği $E(t)$'ye bağlı değildir. Bir kararlılık işlecinin özdeğer sorunu dördüncü basamaktan doğrusal sıradan türevli işlecin sınır değer sorununa dönüştürülmesi ile bir sonraki altbölümde ilgilenilmektedir.

4.2 Kararlılık İşlecinin Özdeğer Sorunu'nun Türevli Denklem Yapısına Dönüştürülmesi

Artık kararlılık işlecinin özdeğer sorunu ile ilgilenebiliriz. $W_E(t)^{\frac{1}{2}}$ işlevi çekilerek bilinmeyen bir özdeğer işlevi ölçeklenmektedir. $\overline{\mathcal{S}}$, s, $\varphi(t)$ sırasıyla ölçeklenmiş işlece, özdeğer ve özişleve karşılık gelmektedir. Bir özdeğer sorunu olarak

$$\overline{\mathcal{S}}\varphi(t)=\int_0^t d\tau K_1(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_t^T d\tau K_1(\tau,t)\varphi(\tau)=sW_E(t)\varphi(t) \qquad (4.84)$$

denklemi yazılabilmektedir. Bu eşitlik integral denklem[10] yapısındadır. Bir integral denklem türevli denkleme dönüştürülebiliyorsa, çoğu kez çözüme ulaşabilmek açısından bu dönüştürüm istenir. Bu amaçla, (4.84) sırasayılı eşitliğin her iki yanının t'ye göre türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_0^t d\tau\frac{\partial K_1(t,\tau)}{\partial t}\varphi(\tau)+\int_t^T d\tau\frac{\partial K_1(\tau,t)}{\partial t}\varphi(\tau)=s\left(W_E(t)\varphi(t)\right)' \qquad (4.85)$$

Üs simge değişkenine göre türevi göstermektedir. Burada

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1(t,\tau)}{\partial t}&=-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)-\phi_1\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau)-\phi_1\right)\\&\quad+\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)W_p(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\\&-\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\int_t^T dt_1W_p(t_1)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-t)-\phi_2\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-\tau)-\phi_2\right)\end{aligned} \qquad (4.86)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1(\tau,t)}{\partial t}&=-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-t)-\phi_1\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau)-\phi_1\right)\\&-\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\int_\tau^T dt_1W_p(t_1)\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-t)-\phi_2\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1-\tau)-\phi_2\right)\end{aligned} \qquad (4.87)$$

eşitlikleri geçerlidir. (4.85) sırasayılı denklemin her iki yanının t'ye göre türevi

$$\begin{aligned}&\int_0^t d\tau\frac{\partial^2 K_1(t,\tau)}{\partial t^2}\varphi(\tau)+\int_t^T d\tau\frac{\partial^2 K_1(\tau,t)}{\partial t^2}\varphi(\tau)\\&=s\left(W_E(t)\varphi(t)\right)''-\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos\left(\phi_2\right)^2W_p(t)\varphi(t)\end{aligned} \qquad (4.88)$$

denklemini vermektedir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)K_1(t,\tau) &= \\
&= \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)\left(W_p(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\right)' \\
&\quad -\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin(\phi_2)W_p(t)\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)
\end{aligned} \tag{4.89}$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)K_1(\tau,t)=0 \tag{4.90}$$

denklemleri (4.84) sırasayılı eşitliğin aşağıdaki şekilde yazılmasını sağlamaktadır.

$$\begin{aligned}
s\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)(W_E(t)\varphi(t)) &= \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)^2W_p(t)\varphi(t)+ \\
\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)&\left(W_p(t)\int_0^t d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\varphi(\tau)\right)' \\
-\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin(\phi_2)W_p(t)&\int_0^t d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\varphi(\tau).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Yeni bir işlev tanımlayarak, yani

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t d\tau\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)\right)\varphi(\tau) \tag{4.92}$$

yazarak aşağıdaki eşitlikler elde edilebilmektedir.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)\Phi(t)=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\varphi(t) \tag{4.93}$$

$$\int_0^t d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\varphi(\tau)=\sin(\phi_2)\Phi(t)+\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\cos(\phi_2)\Phi'(t) \tag{4.94}$$

$$\int_0^t d\tau\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)-\phi_2\right)\varphi(\tau)=\cos(\phi_2)\Phi(t)-\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\sin(\phi_2)\Phi'(t) \tag{4.95}$$

Bütün bu bağıntılar

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\rho_2,\phi_2) &\equiv \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{m^2}\cos(2\phi_2) \\
\sigma_2(\rho_2,\phi_2) &\equiv \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin(\phi_2)\cos(\phi_2) \\
\sigma_3(\rho_2,\phi_2) &\equiv \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)^2.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

olmak üzere (4.91) sırasayılı eşitliğin aşağıdaki şekilde yazılmasını sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} s\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)W_E(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\kappa}{m}\mathcal{I}\right)\Phi(t) = \\ =\sigma_1(\rho_2,\phi_2)W_p(t)\Phi(t)+\sigma_2(\rho_2,\phi_2)W_p'(t)\Phi(t) \\ +\sigma_3(\rho_2,\phi_2)W_p'(t)\Phi'(t)+2\sigma_3(\rho_2,\phi_2)W_p(t)\Phi''(t) \end{aligned} \tag{4.97}$$

(4.97) dördüncü basamaktan doğrusal sıradan türevli bir denklemdir. s'in yani özdeğerin birim olmayan bir işlecin önünde görünmesinden dolayı özdeğer sorunu işleçle ağırlıklandırılmış bir özdeğer sorunudur. Analitik çözümün olup olmaması $W_E(t)$, $W_p(t)$ ağırlık işlevlerinin yapısına bağlıdır. Türevli bir işlecin özdeğer sorunu söz konusu olduğunda sınır koşullarına gereksinim vardır. $\Phi(t)$'nin integral tanımından kolaylıkla $t=0$ anında işlevin kendisi ve türevi için

$$\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}\equiv\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\int_0^t d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t-\tau)\right)\varphi(\tau) \tag{4.98}$$

için özdeşliğinden yararlanarak aşağıdaki koşulları elde etmek olanaklıdır.

$$\Phi(0)=0, \qquad \Phi'(0)=0. \tag{4.99}$$

(4.84) sırasayılı denklemde t yerine T yazarak ve (4.83) sırasayılı denklem kullanılarak aşağıdaki sınır koşulu elde edilmektedir.

$$-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\cos(\phi_1)\int_0^T d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau)-\phi_1\right)\varphi(\tau)=sW_E(T)\varphi(T) \tag{4.100}$$

(4.100) sırasayılı denklemin $\Phi(t)$'nin kendisi, birinci türevi ve ikinci türevi türünden eşiti (4.94) sırasayılı denklemde ϕ_2 yerine ϕ_1 yazılması ile elde edilmektedir.

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_2(\rho_1,\phi_1)\Phi(T)+\sigma_3(\rho_1,\phi_1)\Phi'(T)\right)=sW_E(T)\left(\Phi''(T)+\frac{\kappa}{m}\Phi(T)\right) \tag{4.101}$$

$t=T$ anındaki diğer bir koşulun bulunabilmesi için (4.85) sırasayılı denklemde de t yerine T yazılmaktadır. Bu ve (4.86) nin $t=T$ anındaki değeri aşağıdaki eşitliğin yazılmasını sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin(\phi_1)\int_0^T d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau)-\phi_1\right)\varphi(\tau) \\ +\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\cos(\phi_2)W_p(T)\int_0^T d\tau\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T-\tau)-\phi_2\right)\varphi(\tau) \\ =s\left(W_E'(T)\varphi(T)+W_E(T)\varphi'(T)\right) \end{aligned} \tag{4.102}$$

Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left[\,\sigma_1(\rho_1,0)-\sigma_1(\rho_1,\phi_1)\,\right]\Phi(T)+\frac{\sigma_2(\rho_1,\phi_1)}{2}\Phi'(T) \\ +\sigma_2(\rho_2,\phi_2)W_p(T)\Phi(T)+\sigma_3(\rho_2,\phi_2)W_p(T)\Phi'(T) \\ =sW_E'(T)\left(\Phi''(T)+\frac{\kappa}{m}\Phi(T)\right)+sW_E(T)\left(\Phi'''(T)+\frac{\kappa}{m}\Phi'(T)\right) \end{aligned} \tag{4.103}$$

yazılabilmektedir.

İki nokta sınır değer sorununa eşlik eden dört sınır koşulundan ikisi etkileşim başında verilirken diğer ikisi son anda tanımlanmaktadır. Sınır koşulları olağandışı olarak özdeğer değiştirgenini içermektedir. Bu gibi durumlarda sorun bilinen olağanlara göre farklılaşmaktadır.

Bu özdeğer sorununun çözümü için önce özdeğere bağımlı olan ve içinde başka belirsiz değiştirgen içermeyen dört tane doğrusal bağımsız çözüm üretmek gerekir. Sonra bu çözümlerden dört belirsiz katsayı üzerinden bir doğrusal birleşim oluşturup, sınır koşullarını sağlatacak biçimde 4 cebirsel denklem elde edilmeli ve çözülerek belirsiz katsayılar belirlenmelidir.

Bu bölümde, bir önceki bölümde olduğu gibi denklemin çözümü ile ilgili incelemelere değinilmemektedir. Kararlılık işlecinin spektrumunun alt ve üst sınırlama yapısının elde edilmesi ile ilgilenilmektedir.

4.3 Kararlılık ve Gürbüzlük

Kararlılık çekirdeğinin simetrik olmasından dolayı kararlılık işlecinin spekturumu, özdeğer karmaşık uzayının gerçel ekseni üzerinde bulunmaktadır. Diğer yandan göz önününe alınan dizge üzerinde kararlılık işlecinin çekirdeği üstten ve/veya alttan sonlu sınırlandırılabilir ya da sınırlandırılamayabilir. Üst ve alt sınırlamaların sonlu değerli olması durumunda kararlılık işlecinin spektrumu sonlu bir aralıkta bulunmak zorundadır. Sınırlama incelemesi bir işlecin tüm spektrumunun belirlenmesinden daha kolaydır. Parçalı spektrum belirlenmesi gerekmedikçe sınırlama incelemesi yeğlenmektedir. Burada, kararlılık işlecinin spektrumunun üst ve alt sınırlamalarının yorumlanması üzerinde de durulmaktadır. Buradan yola çıkarak; Cauchy–Schwartz eşitsizliği ve kötümserce integral aralığı büyütme yoluyla

$$
\begin{aligned}
-\pi_1(t)\pi_1(\tau) \leq \int_t^T & dt_1 W_p(t_1) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1 - t) - \phi_2\right) \\
& \times \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1 - \tau) - \phi_2\right) \leq \pi_1(t)\pi_1(\tau)
\end{aligned}
\tag{4.104}
$$

eşitsizlikleri elde edilebilmektedir. Burada $\pi_1(t)$ nin açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$
\pi_1(t) \equiv \left(\int_0^T dt_1 W_p(t_1) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(t_1 - t) - \phi_2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.105}
$$

$\pi_2(t)$ ise

$$
\pi_2(t) \equiv \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}(T - t) - \phi_1\right) \tag{4.106}
$$

olarak tanımlandığında (4.83) ve (4.50) denklemleri ile kararlılık çekirdeği için

$$K_L(t,\tau) \equiv -\left[\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\pi_1(t)\pi_1(\tau)+\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\pi_2(t)\pi_2(\tau)\right] \quad (4.107)$$

$$K_U(t,\tau) \equiv \left[\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\pi_1(t)\pi_1(\tau)-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\pi_2(t)\pi_2(\tau)\right] \quad (4.108)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir.

$$K_L(t,\tau) \le W_E(t)^{\frac{1}{2}}W_E(\tau)^{\frac{1}{2}}K(t,\tau) \le K_U(t,\tau) \quad (4.109)$$

Bu sonuçlar uyumlu salınıcı için kararlılık çekirdeğinin sonlu aralık ile sınırlandığını göstermektedir. Bu sınırlama uyumlu salınıcıya özgü değildir. Zamanda salınan herhangi bir kuvantum dizge için bu sonuç çıkartılabilir.

Kararlılık işlecinin özdeğer bölgesi ile çekirdek sınırlamaları arasında bağlantı kurabilmek için

$$R(f(t)) \equiv \frac{\int_0^T dtW_E(t)^{\frac{1}{2}}f(t)\overline{\mathcal{S}}W_E(t)^{\frac{1}{2}}f(t)}{\int_0^T dtW_E(t)f(t)^2} \quad (4.110)$$

şeklinde bir işlevsi tanımlanabilir. Burada $f(t)$, zamana göre karesi integre edilebilir işlevler uzayında tanımlı herhangi bir işlevdir. Bu işlevsi, Rayleigh oranı olarak bilinmektedir. $f(t)$ nin kararlılık işlecinin bir özişlevi ile eşleşmesi durumunda $R(f(t))$ bu işlevsiye karşılık gelen özdeğeri verecektir. Bu değer kararlılık işlecinin özdeğerlerinden birine karşılık gelmekte olup özdeğerler aralığından dışarı asla çıkamayacaktır. Bu nedenden, bu işlevin üst ve alt sınırlamalarını belirlemeye çalışmanın bir anlamı vardır. Böylece kararlılık işlecinin spektrumunun sınırlamaları çizilmektedir. s_U (üst) ve s_L (alt) kararlılık işleç spektrumunun sınırlamaları olmak üzere

$$s_L(T) \le R(f(t)) \le s_U(T) \quad (4.111)$$

varsayımı yapılabilmektedir.

Eğer (4.104)'daki integral ve işleçli yapı çekirdekler türünden açık olarak yazılıp Cauchy–Schwartz eşitsizliği gerektiği kadar kullanılır ve sonuçta çekirdek üzerindeki sınırlamalardan yararlanılırsa

$$s_L(T) \equiv -\left(\int_0^T dtW_E(t)F_L(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.112)$$

$$s_U(T) \equiv \left(\int_0^T dtW_E(t)F_U(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.113)$$

$$F_L(T) \equiv \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\pi_1(t)+\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\pi_2(t) \quad (4.114)$$

$$F_U(T) \equiv \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\pi_1(t)-\frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\pi_2(t) \quad (4.115)$$

yazılabilir. Buradan dizgenin kararlılı olabilmesi için

$$s_U(T) \leq 1 \tag{4.116}$$

olması gerekmektiği yargısına varılır.

Sınırlama çizerken bazı genişlemelerden dolayı yukarıdaki koşul oldukça kötümser bir koşuldur. Bu koşul kararlılık için yeterli bir koşuldur. Yukarıdaki eşitlik aynı zamanda T ye bağlı olduğundan, dizge tüm etkileşim zamanı değerleri için kararlı olmayabilecektir. s_U nun tanımında kullanılan integraller eliptik integraller olmadığı sürece açık olarak hesaplamak mümkün değildir. (4.116) sırasayılı koşulu daha esnek yapıda ifade edbilmek için aşağıdaki eşitsizlik kullanılabilir.

$$\left(\int_0^T dtW_E(t)F_U(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\overline{\pi}_1(T) + \frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\overline{\pi}_2(T) \tag{4.117}$$

$\overline{\pi}_j(T)$'nin açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$\overline{\pi}_j(T) \equiv \left(\int_0^T dtW_E(t)\pi_j(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad j = 1, 2 \tag{4.118}$$

Böylece,

$$\frac{2\mu_1^2\rho_2^2}{\kappa m}\overline{\pi}_1(T) + \frac{\mu_1^2\rho_1^2}{\kappa m}\overline{\pi}_2(T) \leq 1 \tag{4.119}$$

şeklinde hem daha esnek hem de daha kolya kullanılabilen bir koşul elde edilmektedir. (4.118) sırasayılı eşitlikte yer alan iki T bağımlı işlevin açık anlatımları $W_E(t)$ açıkça belirtilmediği sürece elde edilememektedir. $W_E(t)$ açık olarak verilse de bu işlevlerin açık yapıları kolayca elde edilemeyebilir. Bu nedenden, $W_E(t)$ nin W_E ile betimlenen bir değişmez olduğu ele alınarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_1(T)^2 = & \frac{T^2}{2}W_EW_P + \frac{1}{4}\frac{m}{\kappa}W_EW_P\cos(2\phi_2) \\ & -\frac{1}{8}\frac{m}{\kappa}W_EW_P\cos\left(2\phi_2 - 2T\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\right) \\ & -\frac{1}{8}\frac{m}{\kappa}W_EW_P\cos\left(2\phi_2 + 2T\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\right)\end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_2(T)^2 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}W_E\sin(2\phi_1) + \frac{1}{2}TW_E \\ &- \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}W_E\sin\left(2\phi_1 - 2T\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\end{aligned} \tag{4.121}$$

Bu durumda aşağıdaki yorumlamalar yapılabilir. Bu işlevlerin salınan davranışları etkileşim süresine bağlı olarak, T anında (4.119) koşulunu oluşturmaktadır. İlk olarak, (4.119) sırasayılı eşitliğin tüm T anları için sağlandığı düşünülürse zamanda evrensel kararlılıktan söz edebiliriz. İkinci olarak; koşul bazı T değerleri için kısmen sağlanmaktaysa bu diğer T değerleri için kararlılık konusunda kestirimde bulunamayacağımız anlamına gelmektedir. Üçüncü olarak; koşulun hiçbir T değeri için sağlanmaması durumunda dizgenin kararlığı hakkında hiçbir şey söyleyemeyecek olmamız söz konusudur. Koşulun tekrar yapılandırılması ile kesin incelemelerle ikinci ve üçüncü durumlar daha bilgilendirici durumlara dönüştürülebilir. Ancak, burada bu ayrıntıya girmeyeceğiz.

Gürbüzlüğün ölçülebilmesi için kararlılık işlecinin spekturumunun üst ve alt sınırlamaları , $s_U(T)$ ve $s_L(T)$ kullanılabilir. $r_B(T)$ ve $r_W(T)$, gürbüzlük değiştirgenleri olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$r_B(T) \equiv 1 - s_U(T), \tag{4.122}$$

$$r_W(T) \equiv 1 - s_L(T), \tag{4.123}$$

Etkileşim süresine bağlı $r_B(T)$ ve $r_W(T)$ sırasıyla en iyi ve en kötü gürbüzlük değerlerine karşılık gelmektedir. Gürbüzlüğü araştırmak için zamana göre karesi integre edilebilir işlevlerin tüm uzayı göz önünde bulundurulmaktadır. Daha açık olmak için, spekturumda üst ve alt sınırlamalar yerine kararlılık işlecinin enbüyük ve enküçük özdeğerlerini alabiliriz. Diğer yandan, gürbüzlüğü daha kısıtlı olarak ele alabilmek için Rayleigh oranlarında yer alan işlevlerin uzayını daraltabiliriz. $E(t)$ nin değişiminin ilgili uzayın bir altuzayından seçilmesi kısıtlaması gürbüzlük alt ve üst sınırını birbirine yaklaştırabilecektir.

BÖLÜM 5

ETKİLEŞİM SÜRESİNE GÖRE AÇILIM

Bu bölümde, eniyileme denetimli kuvantum dizgelerin devinim denklemlerinden elde edilen denetim ve erişim denklemlerinin çözümü için yeni bir yaklaştırım verilmektedir. Böl–yönet türünde bu yaklaştırımı temelinde sonlu zaman aralığını ölçeklemek yatmaktadır. Tüm dizge büyüklük ve değiştirgenleri T ye göre ölçeklendirilmektedir. Tüm bilinen ve bilinmeyen bileşenler, etkileşim süresi türünden kuvvet serisine açılmaktadır. Olası tekillikler gözönünde tutularak gerektiğinde etkileşim süresinin bazı eksi kuvvetleri de devreye alınmaktadır. Açılımlar büyüklüklerce sağlanılması gereken denklemlerde ilgili büyüklüklerin yerlerine yerleştirilmekte, ortaya çıkan serisel yapıda terimler artan kuvvetler biçiminde, ve sıfıra eşitlik yapısında, yeniden düzenlenmekte, ve bağımsız kuvvetlerden her birinin katsayısı , ayrı ayrı olarak, sıfıra eşitlenmektedir. Böylece özyineli yapıda denklemler elde edilmektedir. Bu özyineli denklemlerden istenilen sonlu sayıda açılım katsayısı elde etmek ilke olarak olanaklıdır. Bu amaçla, simgesel ya da sayısal tabanlı türlü yazılımlar kullanılabilir. Öncelikli amacımız yöntemi kurmak olduğu için bu doğrultuda bir çaba gösterilmemektedir. Etkileşim süresine göre açılımın verimini göstermek için basit bir uygulama da bu bölümde verilmektedir.

Bu bölümde sırasıyla zaman aralığının ve ilgili bileşenlerin ölçeklenmesine, etkileşim süre değiştirgenine göre açılımın katsayılarının yinelemeli denklemlerinin elde edilişine ve açılımın ne kadar iyi sonuç verdiğini gösteren bir uygulamaya yer verilmektedir.

5.1 Zamana Göre Ölçekleme

Kuvantum eniyilemeli denetim sorununun çözümündeki zaman aralık uzunluğu dizgenin dış alanla etkileşmesinde önemli bir etken konumundadır. Bu etkinin daha gözlenebilir olabilmesi için, zaman aralık uzunluğunu etkileşim zaman değiştirgeni olarak nitelendirmek ve zamanla bu değişkeni ayırdedecek yapı kurmak gerekmektedir. Bu zaman değişkeninde, değişim aralığını $[\ 0, T\ ]$'den $[\ 0, 1\ ]$'e değiştirecek biçimde ölçekleme yaparak sağlanabilir. Bu ölçekleme

Schrödinger denklemini ve ona eşlik eden sınır koşulunu aşağıdaki şekilde değiştirmektedir.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi(t,T)\rangle = [\,TH_0 + TE(t,T)\mu\,]\,|\,\psi(t,T)\rangle\,, \qquad t\in[\,0,1\,] \tag{5.1}$$

$$|\,\psi(0,T)\rangle = \,|\,\mathrm{in}\rangle \tag{5.2}$$

Burada, etkileçim süresi T'ye bağımlılık ikinci argüman olarak gösterilmektedir. Eşdüzeyket denkleminin ve ona eşlik eden sınır koşulunun, ölçekleme sonrası , yapıları ise aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\lambda(t,T)\rangle &= [\,TH_0 + TE(t,T)\mu\,]\,|\,\lambda(t,T)\rangle \\ -TW_p(t,T)\left\langle\psi(t,T)\left|\widehat{O}'\right|\psi(t,T)\right\rangle \widehat{O}'\,|\,\psi(t,T)\rangle\,, &\qquad t\in[\,0,1\,] \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$|\,\lambda(1,T)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta(T)\widehat{O}\,|\,\psi(1,T)\rangle \tag{5.4}$$

Denetim ve erişim denklemleri, zamana göre ölçekleme sonrasında aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$W_E(t,T)E(t,T) = 2\Re e\left(\langle\lambda(t,T)\,|\mu|\,\psi(t,T)\rangle\right), \qquad t\in[\,0,1\,] \tag{5.5}$$

$$\langle\psi(1,T)|\,\widehat{O}\,|\psi(1,T)\rangle = \tilde{O} + \eta(T) \tag{5.6}$$

Daha da ilerleyebilmek için denetim denklemlerinde görünen birkaç büyüklüğün de T'ye göre davranışlarını belirginleştirmemiz gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_p^{(1)} = \frac{T}{2}\int_0^1 dtW_p(t,T)\left\langle\psi(t,T)\left|\widehat{O}'\right|\psi(t,T)\right\rangle^2; \\ W_p(t,T)>0, \quad t\in[\,0,1\,] \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\mathcal{J}_p^{(2)} = \frac{T}{2}\int_0^1 dtW_E(t,T)E(t,T)^2; \qquad W_E(t,T)>0, \qquad t\in[\,0,1\,] \tag{5.8}$$

(5.1) sırasayılı denklem $E(t,T)$'nin hiçbir uyumsuzluk yaratmadan sınırsız artımına olanak sağlayabilmektedir. Bundan dolayı $T\to 0$ limit noktasında $TE(t,T)$ sıfır olmayan işlevsel bir değer üretebilir. Bu durum ve (5.8) sırasayılı denklem T sıfıra giderken $W_E(t,T)$'nin küçülüp sıfıra gideceği anlamına gelir. Öte yandan (5.7)'deki beklenen değerin sonlu olmasının gerekliliği $\mathcal{J}_p^{(1)}$ katkısının $T\to 0$ için küçülüp sıfıra gitmesini engellemek için $W_p(t,T)$'nin $T=0$'da, en azından basit kutup yapısında, bir tekilliğinin olmasını gerektirmektedir. Bütün bu bulgular ve sonuçlar etkileşim süresine göre açılım için bir sonraki altbölümde kullanılacaktır.

5.2 Etkileşim Süresine Göre Kuvvet Serisi

Denetim ve erişim denklemlerinden dalga ve eşdüzey işlevlerinin yok edilebilmesi için dizgenin evrim işlecini kullanmak yerinde olur. Dolayısıyla,

$$|\,\psi(t,T)\rangle \equiv \mathcal{U}(t,T)\;|\,\text{in}\rangle\,, \qquad t\in[\,0,1\,] \tag{5.9}$$

yazılabilmekte ve dizgenin evrim işleci olan $\mathcal{U}(t,T)$ aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır.

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}(t,T)}{\partial t} = [\,TH_0+TE(t)\mu\,]\mathcal{U}(t,T), \qquad \mathcal{U}(0,T)=\mathcal{I} \tag{5.10}$$

Eşdüzey işlevini evrim işleci türünden belirleyebilmek de olanaklıdır.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\;|\,\lambda(t,T)\rangle &= [\,TH_0+TE(t,T)\mu\,]\;|\,\lambda(t,T)\rangle - \\ & TW_P(t,T)\left\langle\psi(t,T)\left|\widehat{O}'\right|\psi(t,T)\right\rangle\widehat{O}'\;|\,\psi(t)\rangle \end{aligned} \tag{5.11}$$

eşitliğinde

$$|\,\lambda(t,T)\rangle \equiv \mathcal{U}(t,T)\;\left|\,\overline{\lambda}(t,T)\right\rangle, \tag{5.12}$$

yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\;\left|\,\overline{\lambda}(t,T)\right\rangle = \frac{i}{\hbar}TW_p(t,T)\left\langle\text{in}\left|U(t,T)^{\dagger}\widehat{O}'U(t,T)\right|\text{in}\right\rangle U(t,T)^{\dagger}\widehat{O}'U(t,T)\;|\,\text{in}\rangle \tag{5.13}$$

ve sınır koşulu olarak da

$$\left|\,\overline{\lambda}(1,T)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta(T)U(1,T)^{\dagger}\widehat{O}U(1,T)\;|\,\text{in}\rangle \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.13) sırasayılı denklem $[\,t,1\,]$ aralığında integre edildiğinde

$$\begin{aligned} &\left|\,\overline{\lambda}(t,T)\right\rangle = \left|\,\overline{\lambda}(1,T)\right\rangle - \\ -\frac{i}{\hbar}T\int_t^1 d\tau W_p(\tau,T)&\left\langle\text{in}\left|U(\tau,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau,T)\right|\text{in}\right\rangle U(\tau,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'U(\tau)\;|\,\text{in}\rangle \end{aligned} \tag{5.15}$$

ve

$$\begin{aligned} |\,\lambda(t,T)\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\eta(T)\mathcal{U}(t,T)\mathcal{U}(1,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}(1,T)\;|\,\text{in}\rangle \\ -\frac{iT}{\hbar}\int_t^1 d\tau W_p(\tau,T)&\left\langle\text{in}\left|\mathcal{U}(\tau,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(t,T)\mathcal{U}(\tau,T)\right|\text{in}\right\rangle\times \\ &\times\mathcal{U}(\tau,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(\tau,T)\;|\,\text{in}\rangle \end{aligned} \tag{5.16}$$

sonucuna ulaşılabilir. Burada daha önceden olduğu gibi kama(dagger) simgesi eş(adjoint) anlamına gelmektedir. (5.16) ve (5.9) eşitlikleri yardımıyla denetim denklemi için aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} W_E(t,T)E(t,T) = \eta(T)&\left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{U}(1,T)^\dagger \widehat{\mathcal{O}} \mathcal{U}(1,T), \mathcal{U}(t,T)^\dagger \mu \mathcal{U}(t,T) \right\} \right| \text{in} \right\rangle \\ &+T \int_t^1 d\tau W_p(\tau,T) \left\langle \text{in} \left| \mathcal{U}(\tau,T)^\dagger \widehat{\mathcal{O}}' \mathcal{U}(\tau,T) \right| \text{in} \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{U}(\tau,T)^\dagger \widehat{\mathcal{O}}' \mathcal{U}(\tau,T), \mathcal{U}(t,T)^\dagger \mu \mathcal{U}(t,T) \right\} \right| \text{in} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

(2.18) sırasayılı eşitlik etkileşim süresine göre ölçeklendiği ve evrim işleci kullanıldığı zaman erişim denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\left\langle \text{in} \left| \mathcal{U}(1,T)^\dagger \widehat{\mathcal{O}} \mathcal{U}(1,T) \right| \text{in} \right\rangle = \tilde{O} + \eta(T) \quad (5.18)$$

Etkileşim zaman değiştirgeni içinde açılımların yapısını kurabiliriz. Dalga işlevinin sonlulukla sınırlandırılmış olması evrim işlecinin de sonlulukla sınırlandırılmış olması demektir. Bu durum evrim işleci açılımında T nin eksi olmayan kuvvetlerini kullanmaya zorlar.

$$\mathcal{U}(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathcal{U}_k(t) \quad (5.19)$$

Dış alan genliğinin davranışları ile ilgili sonuçlar ve amaç işlevselindeki yaptırım terimlerinin T nin sıfırdaki değerleri çerçevesinde ağırlıklar dış alan genliğinin

$$E(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k-1} E_k(t) \quad (5.20)$$

olarak yazılmasına izin vermektedir. Zamansal katsayı işlevleri $E_k(t)$, denetim ve erişim denklemlerinden hesaplanabilmektedir. Ağırlık işlevlerinin serisel açılımları daha önceki yorumlarının ışığında

$$W_E(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} W_k^{(E)}(t) \quad (5.21)$$

$$W_p(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k-1} W_k^{(p)}(t) \quad (5.22)$$

olarak yazılabilmektedir. Ağırlık işlevleri verilen büyüklükler olduğundan buradaki $W_k^{(E)}(t)$ ve $W_k^{(p)}(t)$ büyüklükleri belirlenebilmektedir. $\eta(T)$ erişim değiştirgeninin tanımından dolayı $T = 0$ yakınlarında tekilliği yoktur. Serisel açılımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\eta(T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \eta_k \quad (5.23)$$

(5.19) sırasayılı denklemdeki açılımın sağ yanı , (5.10) sırasayılı denklemde verilen evrim işlecinin türevli denkleminde ve başlangıç koşulunda kullanılır ve T nin artan kuvvetleri türünden düzenlenirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \frac{\partial \mathcal{U}_k(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{\infty} T^k H_0 \mathcal{U}_{k-1}(t) - \frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{\infty} T^k \sum_{k_1=0}^{k} E_{k_1}(t)\mu\mathcal{U}_{k-k_1}(t) \qquad (5.24)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanında bulunan T'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşit olmak zorunda olduğundan

$$\frac{d\mathcal{U}_k(t)}{dt} + \frac{i}{\hbar}E_0(t)\mu\mathcal{U}_k(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_{k_1=1}^{k}\left[\,\delta_{k_1\,1}H_0 + E_{k_1}(t)\mu\,\right]\mathcal{U}_{k-k_1}(t),$$
$$0 \le k < \infty \qquad (5.25)$$

yazılabilmektedir. Yukarıdaki eşitliğe eşlik eden sınır koşulları aşağıda verilmektedir.

$$\mathcal{U}_k(0) = \delta_{k\,0} I \qquad 0 \le k < \infty \qquad (5.26)$$

Bu işlecin çözümü için benzer şekilde

$$\mathcal{U}_k(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E_0(\tau)\mu}\overline{\mathcal{U}}_k(t) \qquad 0 \le k < \infty \qquad (5.27)$$

dönüşümü yapılmakta ve aşağıdaki çözüme ulaşılmaktadır.

$$\mathcal{U}_k(t) = \delta_{k0}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E_0(\tau)\mu}\mathcal{I}$$
$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^t d\tau E_0(\tau)\mu}\sum_{k_1=1}^{k}\left[\,\delta_{k_1\,1}H_0 + E_{k_1}(t_1)\mu\,\right]\mathcal{U}_{k-k_1}(t_1),$$
$$0 \le k < \infty \qquad (5.28)$$

Denetim denkleminin etkileşim süresine bağlı en genel serisel açılımını elde edebilmek için serisel toplamların çarpımları yeni ara bilinmeyenler olarak nitelendirilip ele alınmıştır. Dış alan genliğinin, ağırlık işlevlerinin, evrim işlecinin, erişim değiştirgeninin serisel açılım denklemleri denetim denkleminde yazıldığında ve toplamlar üzerinde T nin artan kuvvetleri üzerinde düzenleme yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\sum_{j=0}^{k} W_j^{(E)}(t)E_{k-j}(t) =$$
$$\sum_{j=0}^{k}\eta_j\sum_{j_1=0}^{k-j}\sum_{j_2=0}^{j_1}\sum_{j_3=0}^{k-j-j_1}\left\langle \mathrm{in}\left|\left\{\mathcal{U}_{j_2}(1)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}_{j_1-j_2}(1), \mathcal{U}_{j_3}(t)^\dagger\mu\mathcal{U}_{k-j-j_1-j_3}(t)\right\}\right|\mathrm{in}\right\rangle +$$
$$+\sum_{j=0}^{k}\sum_{j_1=0}^{k-j}\sum_{i_1=0}^{j_1}\sum_{j_2=0}^{k-j-j_1}\sum_{j_3=0}^{j_2}\sum_{j_4=0}^{k-j-j_1-j_2}\int_t^1 d\tau W_j^{(P)}(\tau)\left\langle \mathrm{in}\left|\mathcal{U}_{i_1}(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}_{j_1-i_1}(\tau)\right|\mathrm{in}\right\rangle \times$$
$$\times\left\langle \mathrm{in}\left|\left\{U_{j_3}(\tau)^\dagger\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}_{j_2-j_3}(\tau), U_{j_4}(t)^\dagger\mu\mathcal{U}_{k-j-j_1-j_2-j_4}(t)\right\}\right|\mathrm{in}\right\rangle \qquad (5.29)$$

Eğer

$$\mathcal{P}^{(\mu)}(t,T) \equiv \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\mu\mathcal{U}(t,T) \tag{5.30}$$

$$\mathcal{P}^{(O)}(t,T) \equiv \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}(t,T) \tag{5.31}$$

$$\mathcal{P}^{(O')}(t,T) \equiv \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(t,T) \tag{5.32}$$

özdeşlikleriyle üç yeni işleç tanımlanır ve her birinin etkileşim süre değiştirgeni T'ye serisel açılımı yapılırsa

$$\mathcal{P}^{(\mu)}(t,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathcal{P}_k^{(\mu)}(t), \tag{5.33}$$

$$\mathcal{P}^{(O)}(t,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathcal{P}_k^{(O)}(t), \tag{5.34}$$

$$\mathcal{P}^{(O')}(t,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathcal{P}_k^{(O')}(t), \tag{5.35}$$

yazılabilir. Açılım katsayıları evrim işlecinin açılım katsayıları ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirilmektedir.

$$\mathcal{P}_k^{(\mu)}(t) \equiv \sum_{j=0}^{k} \mathcal{U}_j(t)^{\dagger}\mu\mathcal{U}_{k-j}(t), \qquad 0 \le k \le \infty; \tag{5.36}$$

$$\mathcal{P}_k^{(O)}(t) \equiv \sum_{j=0}^{k} \mathcal{U}_j(t)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}_{k-j}(t), \qquad 0 \le k \le \infty; \tag{5.37}$$

$$\mathcal{P}_k^{(O')}(t) \equiv \sum_{j=0}^{k} \mathcal{U}_j(t)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}_{k-j}(t), \qquad 0 \le k \le \infty \tag{5.38}$$

Özyineli denklemleri

$$B^{(1)}(t,T) \equiv \left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{U}(1,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}\mathcal{U}(1,T), \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\mu\mathcal{U}(t,T) \right\} \right| \text{in} \right\rangle \tag{5.39}$$

$$B^{(2)}(t,\tau,T) \equiv \left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{U}(\tau,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(\tau,T), \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\mu\mathcal{U}(t,T) \right\} \right| \text{in} \right\rangle \tag{5.40}$$

$$B^{(3)}(t,\tau,T) \equiv \left\langle \text{in} \left| \mathcal{U}(t,T)^{\dagger}\widehat{\mathcal{O}}'\mathcal{U}(t,T) \right| \text{in} \right\rangle B^{(2)}(t,\tau,T) \tag{5.41}$$

tanımlamalarıyla daha kolay işlenebilir duruma getirmek olanaklıdır. Bu tanımların etkileşim süre değiştirgenin kuvvetleri türünden açılımı ve bu açılımın katsayıları aşağıdaki şekildedir.

$$B^{(1)}(t,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_k^{(1)}(t), \tag{5.42}$$

$$B^{(2)}(t,\tau,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_k^{(2)}(t,\tau), \tag{5.43}$$

$$B^{(3)}(t,\tau,T) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_k^{(3)}(t,\tau), \tag{5.44}$$

$$B_k^{(1)}(t) \equiv \sum_{j=0}^{k} \left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{P}_j^{(O)}(1), \mathcal{P}_{k-j}^{(\mu)}(t) \right\} \right| \text{in} \right\rangle, \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.45}$$

$$B_k^{(2)}(t,\tau) \equiv \sum_{j=0}^{k} \left\langle \text{in} \left| \left\{ \mathcal{P}_j^{(O')}(\tau), \mathcal{P}_{k-j}^{(\mu)}(t) \right\} \right| \text{in} \right\rangle, \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.46}$$

$$B_k^{(3)}(t,\tau) \equiv \sum_{j=0}^{k} \left\langle \text{in} \left| \mathcal{P}_j^{(O')}(\tau) \right| \text{in} \right\rangle B_{k-j}^{(2)}(t,\tau), \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.47}$$

Diğer yandan, (5.19) sırasayılı eşitlikten (5.23) sırasayılı eşitliğe kadar verilen serisel açılımlar (5.3) de yerine yazılır, T nin artan kuvvetleri türünden düzenlemeler yapılarak ve eşitliğin her iki yanında T'nin aynı kuvvet katsayıları eşitlenerek aşağıdaki özyinemeli ilişki elde edilmektedir.

$$\sum_{j=0}^{k} W_j^{(E)}(t) E_{k-j}(t) = \sum_{j=0}^{k} \eta_j B_{k-j}^{(1)}(t) + \sum_{j=0}^{k} \int_t^1 d\tau W_j^{(p)}(\tau) B_{k-j}^{(3)}(t,\tau), \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.48}$$

Benzer şekilde erişim denklemi için de aşağıdaki özyineli eşitlik elde edilmektedir.

$$\eta_k = \left\langle \text{in} \left| \sum_{j=0}^{k} \mathcal{U}_j(1)^\dagger \widehat{\mathcal{O}} \mathcal{U}_{k-j}(1) \right| \text{in} \right\rangle - \delta_{k0} \tilde{O}, \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.49}$$

Yukarıda yapılan tanımlamaları kullanarak erişim denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedır.

$$\eta_k = \left\langle \text{in} \left| \mathcal{P}_k^{(O)}(1) \right| \text{in} \right\rangle - \delta_{k0} \tilde{O}, \qquad 0 \leq k < \infty \tag{5.50}$$

Elde edilen özyineli denetim ve erişim denklemlerinin çözümü ve $E_j(t)$ ile η_j ($j = 0, 1, 2, ...$) bileşenleri için genel bir yapı kurulması konusunda burada herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Doğrusal ikikutuplaşma işleci ve doğrusal denetim işlecleri altında tek boyutlu uyumlu salınıcı açıklayıcı olması açısından bir sonraki bölümde ele alınmaktadır.

5.3 Tek Boyutlu Kuvantum Uyumlu Salınıcı'ya Uygulama

Zayıf bir alan ile denetlenen ve ikikutuplaşması verilen tek boyutlu bir kuvantum uyumlu salınıcı ele alalım. Dizgenin denetim işleçleri aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\mu \equiv x, \qquad \widehat{\mathcal{O}} \equiv x, \qquad \widehat{\mathcal{O}}' \equiv p \equiv \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{5.51}$$

Bu kuvantum dizgenin eniyilemeli denetimi analitik olarak çözümlenebildiğinden bu dizge üzerinde odaklanılmaktadır. Analitik çözüm, etkileşim süresi açılımında kesme yaparak oluşturulan yaklaştırımın ne kadar başarılı olabildiği doğrultusunda fikir vermektedir. Burada öncelikle bu örnek sorunun çözümü irdelenmektedir. Aşağıda konum işlecinin yayılımını betimleyen işleci tanımlayarak işe başlanabilir.

$$Q(t,T) = \mathcal{U}(t,T)^{\dagger} x \mathcal{U}(t,T). \tag{5.52}$$

Bu eşitliğin t ye göre türevi alınır ve (5.10) sırasayılı eşitlik ve bu eşitlikte yer alan ifadenin eşiti kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$Q_t(t,T) = T\mathcal{U}(t,T)^{\dagger} \left\{H_0 + E(t,T)\mu, x\right\} \mathcal{U}(t,T) \tag{5.53}$$

Burada t altindisi t'ye göre birinci dereceden göretürevi (kısmi türevi) ifade etmektedir. Tek boyutlu kuvantum uyumlu salınıcının yalıtılmış durumdaki Hamiltonyeni aşağıda verilmektedir.

$$H_0 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{2}x^2 \tag{5.54}$$

Artı değişmezler olan κ ve m sırasıyla esnek kuvvet sabitine ve salınıcının kütlesine karşılık gelmektedir. p momentum işleci olmak üzere

$$Q_t(t,T) = \frac{T}{m}\mathcal{U}(t,T)^{\dagger} p \mathcal{U}(t,T) \tag{5.55}$$

yazılabileceği kolayca gösterilebilir. (5.55) sırasayılı eşitliğin her iki yanının t'ye göre türevi alınırsa Poisson Simgelemeleri türünden

$$Q_{tt}(t,T) = \frac{T^2}{m}\mathcal{U}(t,T)^{\dagger} \left\{H_0 + E(t,T)\mu, p\right\} \mathcal{U}(t,T) \tag{5.56}$$

elde edilir. Burada tt altindisi t'ye göre ikinci türev anlamına gelmektedir. Bu eşitliğin Poisson Simgelemeleri yeniden yazılacak olursa:

$$\left\{H_0 + E(t,T)\mu, p\right\} = \frac{\kappa}{2}\left\{x^2, p\right\} + E(t,T)\left\{x, p\right\} = -\kappa x - E(t,T)\mathcal{I} \tag{5.57}$$

Poisson Simgelemesinin eşiti yerine yazılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki ikinci basamaktan doğrusal göretürevli denkleme ulaşılabilir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{m}T^2\mathcal{I}\right) Q(t,T) = -\frac{T^2}{m}E(t,T)\mathcal{I} \tag{5.58}$$

Göretürevli denkleme eşlik edecek sınır koşulları kolayca görüleceği üzere aşağıdaki şekildedir.

$$Q(0,T) = x, \qquad Q_t(0,T) = \frac{T}{m}p \tag{5.59}$$

(5.58) ve (5.59) sırasayılı eşitlikler çözüm için aşağıdaki varsayımın yapılabilmesine olanak sağlamaktadır.

$$Q(t,T) = \overline{Q}_I(t,T)\mathcal{I} + \overline{Q}_x(t,T)x + \overline{Q}_p(t,T)p \tag{5.60}$$

$\overline{Q}_I(t,T)$, $\overline{Q}_x(t,T)$, ve $\overline{Q}_p(t,T)$ bu an için bilinmeyen işlevlerdir. Bu varsayımın (5.58) ve (5.59) eşitliklerinde yazılmasıyla her bir işlevin göretürevli denklemi ve eşlik eden koşulları elde edilebilir. Böylece

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{m}T^2\mathcal{I}\right) Q_I(t,T) &= -\frac{T^2}{m}E(t,T),\\ Q_I(0,T) = 0, \qquad \left(\frac{\partial Q_I(t,T)}{\partial t}\right)_{t=0} &= 0\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{m}T^2\mathcal{I}\right) Q_x(t,T) = 0 \tag{5.62}$$

$$Q_x(0,T) = 1, \qquad \left(\frac{\partial Q_x(t,T)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{5.63}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{m}T^2\mathcal{I}\right) Q_p(t,T) = 0 \tag{5.64}$$

$$Q_p(0,T) = 0, \qquad \left(\frac{\partial Q_p(t,T)}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{T}{m} \tag{5.65}$$

yazılabilir. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} Q_x(t,T) &= \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}Tt\right),\\ Q_p(t,T) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}Tt\right),\\ Q_I(t,T) &= -\frac{T}{\sqrt{\kappa m}}\int_0^t d\tau \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\,(t-\tau)\right) E(\tau,T)\end{aligned} \tag{5.66}$$

Yukarıdaki eşitliklerden yararlanarak konum işlecinin yayılımını betimleyen işlecin trigonometrik işleç türünden eşiti aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} Q(t,T) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}Tt\right)x + \frac{1}{\sqrt{\kappa m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}Tt\right)p\\ -\frac{T}{\sqrt{\kappa m}}\int_0^t d\tau \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\,(t-\tau)\right) E(\tau,T)\mathcal{I}\end{aligned} \tag{5.67}$$

Denetim ve erişim denklemlerinin açık yapısını kurmadan önce ağırlık işlevlerini tanımlamamız gerekmektedir. Kolaylık olması açısından W_E ve W_P t'den bağımsız seçilmekte ve ağırlık işlevlerinin etkileşim süresine göre açılımlarının yalnızca ilk terimlerden oluştuğu varsayılmaktadır.

$$W_E(t,T) \equiv T\overline{W}_E, \qquad W_p(t,T) \equiv \frac{\overline{W}_p}{T} \tag{5.68}$$

Tanımlanan dizge için (5.17) sırasayılı denetim denklemi Poisson Simgelemeleri türünden aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$T\overline{W}_E E(t,T) = \eta(T) \langle \text{in} \,|\{Q(1,T), Q(t,T)\}|\, \text{in}\rangle$$
$$+\frac{m^2\overline{W}_p}{T^2}\int_t^1 d\tau \, \langle \text{in}\,|Q_\tau(\tau,T)|\,\text{in}\rangle \, \langle \text{in}\,|\{Q_\tau(\tau,T), Q(t,T)\}|\,\text{in}\rangle \qquad (5.69)$$

Denetim denkleminde yer alan Poisson Simgelemeleri

$$\{Q(1,T), Q(t,T)\} = \frac{1}{\sqrt{\kappa m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(1-t)\right)\mathcal{I}, \qquad (5.70)$$

$$\{Q_\tau(\tau,T), Q(t,T)\} = \frac{T}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(t-\tau)\right)\mathcal{I} \qquad (5.71)$$

olarak belirlenmektedirler. Konum işlecinin yayılımını betimleyen $Q_\tau(\tau,T)$ işlecinin beklenen değeri

$$\langle \text{in}\,|Q_\tau(\tau,T)|\,\text{in}\rangle = -\frac{T^2}{m}\int_0^\tau d\tau_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(\tau-\tau_1)\right) E(\tau_1,T) \qquad (5.72)$$

olarak elde edilmektedir. (5.69) sırasayılı denetim denkleminde hesaplanan konum ve momentum işleçlerinin beklenen değerleri yok olacağından (5.69) sırasayılı denklemin eşiti yeniden yazılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilmektedir.

$$T\overline{W}_E E(t,T) = \frac{\eta(T)}{\sqrt{\kappa m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(1-t)\right)$$
$$-T\overline{W}_P \int_t^1 d\tau \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(t-\tau)\right)\int_0^\tau d\tau_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(\tau-\tau_1)\right) E(\tau_1,T) \qquad (5.73)$$

Bu integral denklemin çözümünden $E(t,T)$ dış alan genliği erişim değiştirgeni $\eta(T)$ türünden elde edilebilir. Daha sonra, bu elde edilen anlatım erişim denklemine yerleştirilerek erişim değiştirgenini içeren cebirsel bir denklem üretilebilir ve çözülerek $\eta(T)$ saptanabilir. Saptanan bu değer $E(t,T)$'nin $\eta(T)$ türünden anlatımında kullanılarak $E(t,T)$ belirlenebilir. Yukarıda üretilen integral denklem yerine türevli denklemle çalışmak istenirse gerekli dönüştürme işleminin varolması gerekir. Burada salt integral denklemin yapısından dolayı bu dönüştürmenin gerçekleştirilebilmesi mümkündür. Türevli denklemlere geçiş için öncelikle aşağıdaki tanımlamanın yapılmasında yarar bulunmaktadır.

$$\overline{E}(t,T) \equiv \int_0^t d\tau \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(t-\tau)\right) E(\tau,T) \qquad (5.74)$$

Bu tanım (5.73) sırasayılı eşitlikte kullanıldığında

$$T\overline{W}_E E(t,T) = \frac{\eta(T)}{\sqrt{\kappa m}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(1-t)\right)$$
$$-\overline{W}_P \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \int_t^1 d\tau \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} T\,(t-\tau)\right) \overline{E}_\tau(\tau,T) \qquad (5.75)$$

elde edilir. τ altindisi τ'a göre türevi simgelenmektedir. $\overline{E}(t,T)$'nın τ'ya göre türevi

$$\overline{E}_{tt}(t,T) \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{m}}TE(t,T) - T^2\frac{\kappa}{m}\int_0^t d\tau \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\,(t-\tau)\right)E(\tau,T) \quad (5.76)$$

ile (5.74) sırasayılı eşitlik ele alındığında aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + T^2\frac{\kappa}{m}\right)\overline{E}(t,T) = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}TE(t,T) \quad (5.77)$$

(5.75) sırasayılı eşitlik (5.77) eşitlik yardımıyla yeniden yazılacak olursa tümlev işlecinin yokolmadığı yeni bir denklem üretilebilir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + T^2\frac{\kappa}{m}\right)\overline{E}(t,T) = \frac{\eta(T)}{m\overline{W}_E}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\,(1-t)\right)$$
$$-\frac{\overline{W}_P}{\overline{W}_E}\int_t^1 d\tau \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}T\,(t-\tau)\right)\overline{E}_\tau(\tau,T) \quad (5.78)$$

Buradan, birtakım türev işlemleri sonrasında dördüncü basamaktan doğrusal ve değişmez katsayılı aşağıda verilen türevli denklem elde edilebilir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + T^2\frac{\kappa}{m}\right)^2\overline{E}(t,T) = \frac{\overline{W}_p}{\overline{W}_E}\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{E}(t,T) \quad (5.79)$$

Bu türevli denklemin çözümü için başlangıç ve sınır koşullarına gereksinim bulunmaktadır. W_E değişmezi sıfıra gitmedikçe (5.78) sırasayılı denklemden yararlanarak sınır koşullarından biri aşağıdaki şekilde üretilebilir.

$$\overline{E}_{tt}(1,T) + T^2\frac{\kappa}{m}\overline{E}(1,T) = 0 \quad (5.80)$$

Burada tt altindisi t ye göre ikinci basamaktan türeve karşılık gelmektedir. (5.78) sırasayılı eşitliğin her iki yanının t ye göre türevi alınır ve $t = 1$ yerleştirilirse aşağıdaki koşul elde edilir.

$$\overline{E}_{ttt}(1,T) + T^2\frac{\kappa}{m}\overline{E}_t(1,T) = -\frac{T\sqrt{\kappa}\eta(T)}{m^{\frac{3}{2}}\overline{W}_E} + \frac{\overline{W}_p}{\overline{W}_E}\overline{E}_t(1,T) \quad (5.81)$$

Burada ttt altindisi t'ye göre üçüncü basamaktan türevi simgelemektedir. (5.78) sırasayılı denklemin her iki yanının t'ye göre daha yüksek basamaktan türevlerinin alınması $\overline{E}(t,T)$ nin üçüncü basamaktan daha yüksek türev değerlerine götürmektedir. Sınır koşullarında gözüken türevlerin basamakları türevli denklemin basamağından küçük olmalıdır. Dolayısıyla bu eşitlikten başka koşul üretilmez. Diğer iki koşul $t = 0$ anından elde edilmelidir. (5.74) sırasayılı eşitliğin ve t'ye göre birinci basamaktan türevinden aşağıdaki koşullar üretilebilir.

$$\overline{E}(0,T) = 0, \qquad \overline{E}_t(0,T) = 0 \quad (5.82)$$

(5.79), (5.80), (5.81) ve (5.82) denklemleri bir iki noktalı sınır değer sorunu tanımlamaktadır. Dördüncü basamaktan türevli denklemin genel çözümü için

$$\nu_j(T) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)i^j + \left(\frac{1-i}{2}\right)(-i)^j\right]\sqrt{\frac{\overline{W}_p}{\overline{W}_E}} \times \\ \times \left(1 + (-1)^{j-1}\sqrt{1 - \frac{4\kappa\overline{W}_E}{m\overline{W}_P}T^2}\right), \\ 1 \le j \le 4 \tag{5.83}$$

olmak üzere

$$\overline{E}(t,T) = \sum_{j=1}^{4} a_j(T)\mathrm{e}^{\nu_j(T)t} \tag{5.84}$$

öngörüm yapılabilir.

$a_j(T)$ katsayıları , $\overline{E}(t,T)$ sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmelidir. Bu amaçla aşağıdaki tanımlamalardan yararlanılabilir.

$$E_j(T) \equiv \left(\nu_j(T)^2 + T^2\frac{\kappa}{m}\right)\mathrm{e}^{\nu_j(T)}, \qquad 1 \le j \le 4$$
$$E_{j+4}(T) \equiv \left(\nu_j(T)^2 + T^2\frac{\kappa}{m} - \frac{\overline{W}_p}{\overline{W}_E}\right)\nu_j(T)\mathrm{e}^{\nu_j(T)}, \qquad 1 \le j \le 4 \tag{5.85}$$

$$\mathbf{A}(T) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ E_1(T) & E_2(T) & E_3(T) & E_4(T) \\ E_5(T) & E_6(T) & E_7(T) & E_8(T) \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

$$\mathbf{a}(T)^T \equiv [\, a_1(T), a_2(T), a_3(T), a_4(T)\,] \tag{5.87}$$

$$\mathbf{r}^T = [\,0, 0, 0, 1\,] \tag{5.88}$$

Matris cebiri kullanımıyla aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{a}(T) = -\frac{T\sqrt{\kappa}}{m^{\frac{3}{2}}\overline{W}_E}\eta(T)\mathbf{r} \tag{5.89}$$

$$\mathbf{a}(T) = -\frac{T\sqrt{\kappa}}{m^{\frac{3}{2}}\overline{W}_E}\eta(T)\mathbf{A}(T)^{-1}\mathbf{r} \tag{5.90}$$

(5.90) eşitliği, $\mathbf{e}_j$ j'inci kartezyen yöneyi simgelemek üzere, $\overline{E}(t,T)$'nin, erişim değiştirgenine bağlı anlatımı için aşağıdaki sonuca götürür.

$$\overline{E}(t,T) = -\frac{T\sqrt{\kappa}}{m^{\frac{3}{2}}\overline{W}_E}\eta(T)\sum_{j=1}^{4}\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}(T)^{-1}\mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)t} \tag{5.91}$$

Şimdi erişim denklemini ele alabiliriz. Amaç işleci, $\widehat{\mathcal{O}}$, doğrusal konum işleci olarak alınmasıyla (5.18) sırasayılı eşitlikte verilen beklenen değer hesabından ve yukarıda verilen matris ve yöney tanımlamalarından yararlanarak erişim değiştirgeni için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\eta(T) = \frac{T}{m^2 \overline{W}_E} \eta(T) \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)} - \widetilde{O} \tag{5.92}$$

(5.92) sırasayılı denklemden erişim değiştirgeni çekilerek aşağıdaki sonuca varılabilir.

$$\eta(T) = -\left(1 - \frac{T^2}{m^2 \overline{W}_E} \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)}\right)^{-1} \widetilde{O} \tag{5.93}$$

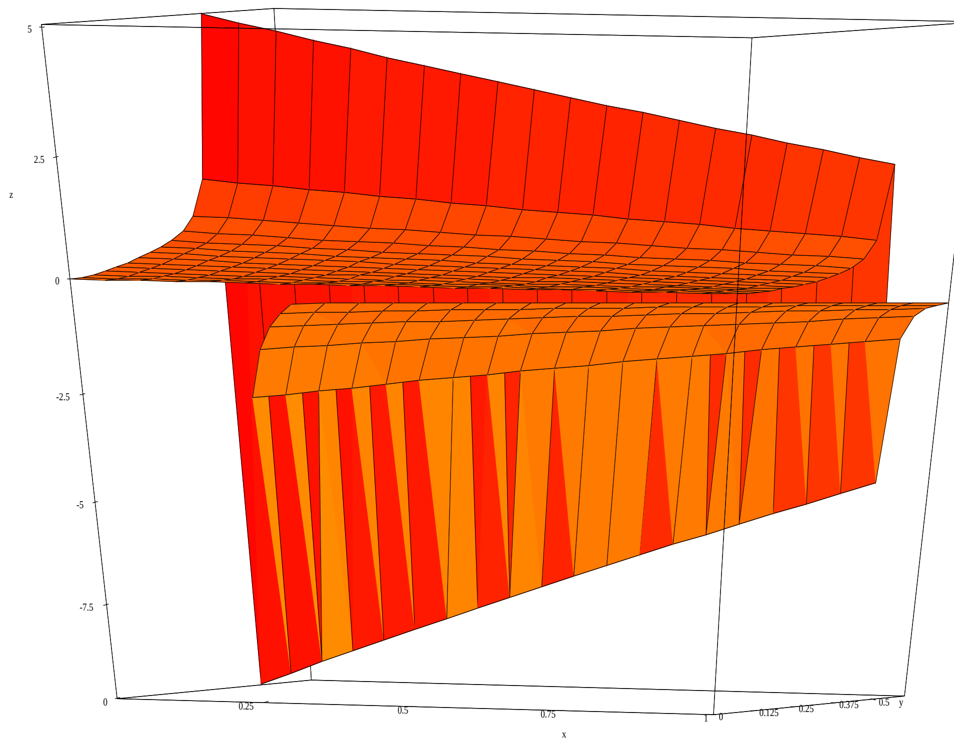
Bu anlatım dış alan genliğinde $\eta(T)$ için kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{E}(t,T) = \frac{T\sqrt{\kappa}}{m^{\frac{3}{2}} \overline{W}_E} \widetilde{O} \left(1 - \frac{T^2}{m^2 \overline{W}_E} \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)}\right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)t} \end{aligned} \tag{5.94}$$

ve sonuçta

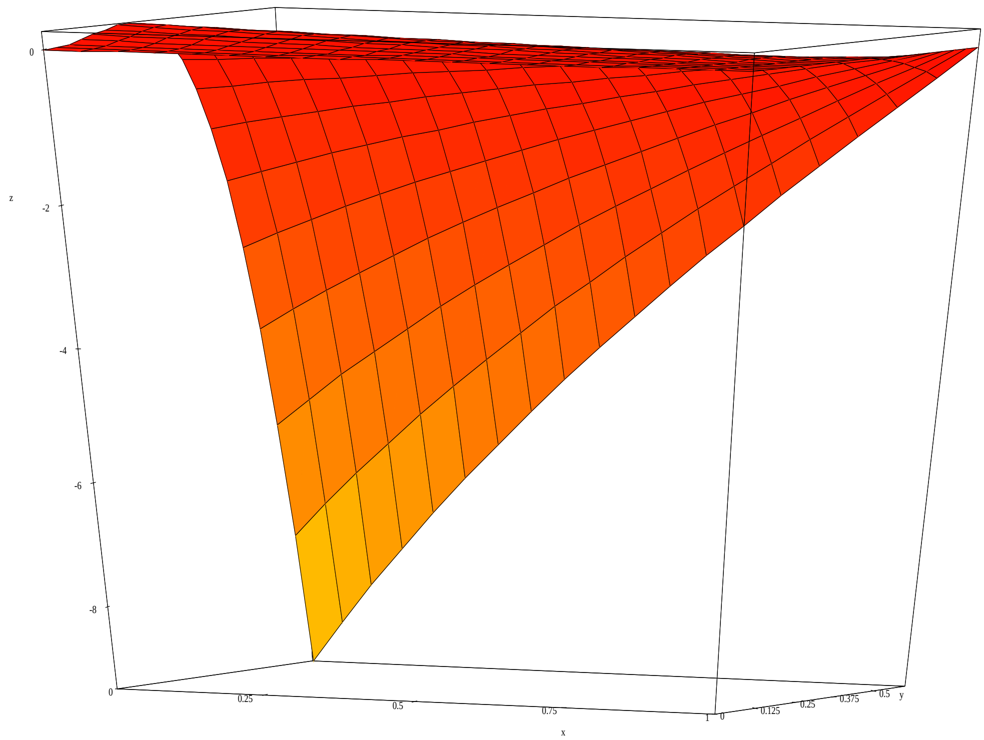
$$\begin{aligned} E(t,T) = \frac{T}{m \overline{W}_E} \widetilde{O} \left(1 - \frac{T^2}{m^2 \overline{W}_E} \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r}\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)}\right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j=1}^{4} \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}(T)^{-1} \mathbf{r} \left(\nu_j(T)^2 + \frac{\kappa}{m} T^2\right)\ \mathrm{e}^{\nu_j(T)t} \end{aligned} \tag{5.95}$$

açık anlatım elde edilir. Böylece sorun, yani verilen dizge için $E(t,T)$ ve $\eta(T)$ anlatımlarının belirlenme işlemi, analitik bir anlatımla sonlandırılmış, diğer bir deyişle, kesin çözüm elde edilmiş bulunmaktadır.



Şekil 5.1: Etkileşim Süresine Göre Açılımda Esas Çözümü

Dış alan genliği $E(t,T)$'nin, (5.95) sırasayılı denklemden elde edilen esas çözümü kullanılarak çizilen grafik. Burada t ve T sırasıyla $[\,0,1\,]$, $[\,0,0.6\,]$ aralıklarında değişim göstermektedir.



Şekil 5.2: Etkileşim Süresine Göre Açılımda Yaklaştırımı

Dış alan genliği $E(t,T)$'nin, (5.95) sırasayılı denklemden elde edilen çözümünden yalnızca ilk iki terimi ele alınarak çizilen grafik. Burada t ve T sırasıyla $[\,0,1\,]$, $[\,0,0.6\,]$ aralıklarında değişim göstermektedir.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu çalışmada bir boyutlu kuvantum uyumlu salınıcının doğrusal ikikutuplaşma işlevi altında eniyilemeli denetimiyle ilgilenilmiştir. $\widehat{\mathcal{O}}$ ve $\widehat{\mathcal{O}}'$ konum ve momentum işleçlerinin doğrusal olduğu işleçler olarak ele alınmıştır. Bu işleçler eniyilemeli denetimde amaç ve yaptırım terimlerinde tanımlanmaktadır. Bu dizge için oluşturulan amaç işlevsisinin birinci değişimini sıfırlayarak elde edilen denklemler, her ne kadar, dalga işlevi ile eşdüzey işlevini içeriyorsa da, salt konum ve momentum işleçlerinin beklenen değerleriyle ilgilenerek ve eşdüzey işlevi ile dalga işlevi arasında bir anlamda geçiş sağlayan zamana bağımlı bilinmeyenler tanımlayarak kökleşik (klasik) bir eniyileme sorunuyla ilintilendirilebilir. Ancak böyle bir durumda dalga işlevini belirlemek için ayrıca ve kapsamlı işlemler yapmak gerekir. Burada böyle bir eyleme geçilmemiştir. Bunun yerine bilinmeyenler üzerinde açık işlemler yeğlenmiştir. Burada yapmış olduğumuz incelemeler, denetim denkleminin zamanla değişen alan genliği $E(t)$ integral denklemlere dönüştüğünü göstermektedir. Ayrıca, bu integral denklemin dördüncü basamaktan doğrusal ve sıradan türevli bir denklemin sınır değer sorununa dönüştürülebildiği gösterilmiştir. Sınır değer sorununun başlangıç ve son ana ait iki koşulu olması, çözüm için gerekli olan toplam dört koşul gereksinimini gidermektedir. Dizgenin var olan değerlerine bağlı olarak bu denklemin çözümünün analitik olarak belirlenip belirlenemeyeceği çalışmada irdelenmiş ve doğrusal sıradan türevli denklem katsayılarının zamana bağlı olmaması durumunda analitik sonuç üretilebileceği gösterilmiştir. Zamana bağlı katsayılar durumu burada incelenmemekle birlikte, çözümün yapısını etkileyip bazı tekil davranışlar yaratabilecek izlenimi vermekte olduğu saptanmıştır. $W_E(t)$ ve $W_p(t)$ ağırlık işlevlerinin değişmez alınması ile denklem değişmez katsayılı türevli denklem olmaktadır. Yapılan çalışmaların daha açıklayıcı olması açısından yukarıda belirtildiği gibi türevli denklemin analitik çözümü elde edilebilmiştir.

Serisel açılımlardan yararlanarak sınır değer sorununun çözümü irdelendiğinde yeni bulgular elde edilmiştir.

Amaç ve yaptırım işleçlerinin yapısında değişiklik yapıldığında yani doğrusal olmayan şekilde alındığında indirgenen denklemde doğrusallığın bozulduğu gözlenmiştir. Bu durumda sorunun varolandan daha karmaşık bir hal aldığı görülmektedir.

Diğer bir önemli konu elde edilen çözümlerin kararlılığı ve gürbüzlüğünün incelenmesi ile ilgilidir. Tek boyutlu uyumlu salınıcının denetimi sonrası kararlılık ve gürbüzlük incelemelerinde ilgi çekici bulgular elde edilmiştir. Yapılan çalışma ile ilgili sonuçlar aşağıda sıralanmaktadır.

İlk olarak, Poisson Simgelemeleri yardımıyla kararlılık çekirdeğinin olabildiğince yalın açık yapısı elde edilmiştır. Kurulan bu yapı olabildiğince genel tutularak elde edildiğinden kurulan yapının yalnızca uyumlu salınıcıya özgü bir yapı olmadığını vurgulamak gerekir.

Tek boyutlu uyumlu salınıcı ele alındığında amaç ve yaptırım işleçlerinin yapıları kararlılık çekirdeğinin birçok teriminin yok olmasına neden olmaktadır. Poisson Simgelemesinin indirgeyici doğasından dolayı kararlılık çekirdeğinde birçok terim düşmekte ve çekirdek daha yalın olarak yazılabilmektedir.

Kararlılık işlecinin özdeğer sorunu, doğrusal, dördüncü basamaktan türevli işlecin sınır değer sorununa dönüştürülmüştür. Türevli işlecin basamağı , bu işlecin yapısı ve eşlik eden sınır koşulları uyumlu salınıcıya özgü olmasına karşın bu dönüştürme işleminin genelleştirilebileceği açıkça görülmektedir.

Amacımız yukarıda söz edilen türevli denklemin çözümünü bulmak olmadığı için denklemin çözümü ile ilgilenilmemiştir. Bu çalışmada asıl yapılmak istenen niteleyici durumları ortaya çıkarmaktır. Türevli işleçlerin sınır değer sorunu kuramı gereği denklemin yapısı oldukça ilginçtir. Çünkü sınır koşulları özdeğer değiştirgenini bilinmeyen olarak bünyesinde barındırmaktadır.

Kararlılık çekirdeği ve kararlılık spektrumu için sınırlamalar çizilmiştir. Çıkan sınırlamalar kötümser olmasına karşın daha ayrıntılı ve incelikle uygulama ile daha tıkız sınırlamalar elde edileceği anlaşılmaktadır.

Sınırlamalara dayanaraktan gürbüzlüğün tanımı verilmiştir. Daha akla yatkın ve belki de daha kullanışlı tanımlamalar elde etmek mümkün gözükmekte olmakla birlikte bu kadarlık eylemle yetinilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] L. J. Curtis, *Atomic Structure and Lifetimes* (Cambridge University Press, New York, 2003).

[2] M. Demiralp, *Eniyileme, Kararlılık ve Gürbüzlük Ders Notları* , (demiralp@be.itu.edu.tr).

[3] M. Demiralp and H. Rabitz, Phys. Rev. A, **47**, 809, (1993).

[4] T. Kaman and M. Demiralp, Optimal Control of One Dimensional Harmonic Oscillator Under a Linear Dipole Function, Through Linear Control Operators: Analytical Solution of the Problem (yayınlanma sürecindedir).

[5] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, Berlin, 1976).

[6] MuPAD, *http://www.mupad.com/*

[7] T. Kaman and M. Demiralp, Optimal Control of One Dimensional Harmonic Oscillator Under a Linear Dipole Function, Through Linear Control Operators: Stability and Robustness of the Solution (yayınlanma sürecindedir).

[8] M. Demiralp and H. Rabitz, Phys. Rev. A, **57**, 2420-2425 (1998).

[9] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications,* (Dover, New York, 1987).

[10] F. G. Tricomi, *Integral Equations*, (Dover, New York, 1985).

EKLER A

Denetim Denkleminin Çözümü için Simgesel Mupad Programı Etkileşim Süresine Göre Açılımda Esas Çözümü

Bu program Linux ortamında MuPAD Simgesel Programla dili ile yazılmıştır.

```
assume(WP,Type::Positive):
assume(WE,Type::Positive):

E1 := t -> E^(t/2)*cos(sqrt(3)*t/2)
E2 := t -> E^(t/2)*sin(sqrt(3)*t/2)
E3 := t -> E^(-t/2)*cos(sqrt(3)*t/2)
E4 := t -> E^(-t/2)*sin(sqrt(3)*t/2)

et1 := matrix(1,4,[1,0,0,0])
et2 := matrix(1,4,[0,1,0,0])
et3 := matrix(1,4,[0,0,1,0])
et4 := matrix(1,4,[0,0,0,1])

r1 := matrix(4,1,[0,0,0,1])

simplify(subs(diff(E1(t), t $ 1),t=0))

A:=matrix(4,4,
 [
  [
   simplify(subs(E1(t),t=0)),
   simplify(subs(E2(t),t=0)),
   simplify(subs(E3(t),t=0)),
   simplify(subs(E4(t),t=0))
  ],
  [
   simplify(subs(diff(E1(t), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E2(t), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E3(t), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E4(t), t $ 1),t=0))
  ],
```

```
  [
   simplify(subs(diff(E1(t), t $ 2)+E1(t),t=T)),
   simplify(subs(diff(E2(t), t $ 2)+E2(t),t=T)),
   simplify(subs(diff(E3(t), t $ 2)+E3(t),t=T)),
   simplify(subs(diff(E4(t), t $ 2)+E4(t),t=T))
  ],
  [
   simplify(subs(diff(E1(t), t $ 3),t=T)),
   simplify(subs(diff(E2(t), t $ 3),t=T)),
   simplify(subs(diff(E3(t), t $ 3),t=T)),
   simplify(subs(diff(E4(t), t $ 3),t=T))
  ]
 ]
)
d:=expand(simplify(linalg::det(A)))
c1num:=expand(simplify(op(d*et1*A^(-1)*r1,1)))
c2num:=expand(simplify(op(d*et2*A^(-1)*r1,1)))
c3num:=expand(simplify(op(d*et3*A^(-1)*r1,1)))
c4num:=expand(simplify(op(d*et4*A^(-1)*r1,1)))
Esnum := t -> c1num*E1(t)+c2num*E2(t)+c3num*E3(t)+c4num*E4(t)
simplify(Esnum(t))
Enum := t -> diff(Esnum(t), t $ 2)+Esnum(t)
simplify(Enum(t))
D1:=E1(T)*cos(T)-subs(diff(E1(t), t $ 1),t=T)*sin(T)
D2:=E2(T)*cos(T)-subs(diff(E2(t), t $ 1),t=T)*sin(T)
D3:=E3(T)*cos(T)-subs(diff(E3(t), t $ 1),t=T)*sin(T)
D4:=E4(T)*cos(T)-subs(diff(E4(t), t $ 1),t=T)*sin(T)
d1:=simplify(c1num*D1+c2num*D2+c3num*D3+c4num*D4)
quit;
```

EKLER B

Denetim Denkleminin Çözümü için Simgesel Mupad Programı Etkileşim Süresine Göre Açılımda Yaklaştırımı

Bu program Linux ortamında Mupad Simgesel Programla dili ile yazılmıştır.

```
reset():

assume(WP, Type::Positive):

assume(WE, Type::Positive):

k:=m:=WP:=WE:=1:

v1:=(-(1/2))*(((1+I)/2)*I^1+((1-I)/2)*(-I)^1)*(WP/WE)*(1+(-1)^(1-1)
     *(1-((4*k*WE)/(m*WP))*T^2)):
v2:=(-(1/2))*(((1+I)/2)*I^2+((1-I)/2)*(-I)^2)*(WP/WE)*(1+(-1)^(2-1)
     *(1-((4*k*WE)/(m*WP))*T^2)):
v3:=(-(1/2))*(((1+I)/2)*I^3+((1-I)/2)*(-I)^3)*(WP/WE)*(1+(-1)^(3-1)
     *(1-((4*k*WE)/(m*WP))*T^2)):
v4:=(-(1/2))*(((1+I)/2)*I^4+((1-I)/2)*(-I)^4)*(WP/WE)*(1+(-1)^(4-1)
     *(1-((4*k*WE)/(m*WP))*T^2)):

E1 :=proc(t,T) begin E^(v1*t) end_proc:
E2 :=proc(t,T) begin E^(v2*t) end_proc:
E3 :=proc(t,T) begin E^(v3*t) end_proc:
E4 :=proc(t,T) begin E^(v4*t) end_proc:

et1 := matrix(1,4,[1,0,0,0]):
et2 := matrix(1,4,[0,1,0,0]):
et3 := matrix(1,4,[0,0,1,0]):
et4 := matrix(1,4,[0,0,0,1]):

r1 := matrix(4,1,[0,0,0,1]):

simplify(subs(diff(E1(t,T), t $ 1),t=0)):
```

```
A:= proc(T)
 begin
 matrix(4,4,
 [
  [
   simplify(subs(E1(t,T),t=0)),
   simplify(subs(E2(t,T),t=0)),
   simplify(subs(E3(t,T),t=0)),
   simplify(subs(E4(t,T),t=0))
  ],
  [
   simplify(subs(diff(E1(t,T), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E2(t,T), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E3(t,T), t $ 1),t=0)),
   simplify(subs(diff(E4(t,T), t $ 1),t=0))
  ],
  [
   simplify(subs(diff(E1(t,T), t $ 2)+T^2*(k/m)*E1(t,T),t=1)),
   simplify(subs(diff(E2(t,T), t $ 2)+T^2*(k/m)*E2(t,T),t=1)),
   simplify(subs(diff(E3(t,T), t $ 2)+T^2*(k/m)*E3(t,T),t=1)),
   simplify(subs(diff(E4(t,T), t $ 2)+T^2*(k/m)*E4(t,T),t=1))
  ],
  [
   simplify(subs(diff(E1(t,T), t $ 3)+(T^2*(k/m)-(WP/WE))
             *diff(E1(t,T), t $ 1),t=1)),
   simplify(subs(diff(E2(t,T), t $ 3)+(T^2*(k/m)-(WP/WE))
             *diff(E2(t,T), t $ 1),t=1)),
   simplify(subs(diff(E3(t,T), t $ 3)+(T^2*(k/m)-(WP/WE))
             *diff(E3(t,T), t $ 1),t=1)),
   simplify(subs(diff(E4(t,T), t $ 3)+(T^2*(k/m)-(WP/WE))
             *diff(E4(t,T), t $ 1),t=1))
  ]
 ]
)
 end_proc:

Ad:=expand(simplify(linalg::adjoint(A(T))))

d:= expand(simplify(linalg::det(A(T)))):

a1num:= expand(simplify(op(T^2*d*et1*A(T)^(-1)*r1,1))):
a2num:= expand(simplify(op(T^2*d*et2*A(T)^(-1)*r1,1))):
a3num:= expand(simplify(op(T^2*d*et3*A(T)^(-1)*r1,1))):
a4num:= expand(simplify(op(T^2*d*et4*A(T)^(-1)*r1,1))):
```

```
barEnum :=  proc(t,T)
 begin
 (-(T*sqrt(k)*eta)/(m^(3/2)*WE))*((a1num*E1(t,T)+a2num*E2(t,T)
                            +a3num*E3(t,T)+a4num*E4(t,T))/T^2)
 end_proc:

eta:=-tilde0/(1-(T/sqrt(k*m))*(barEnum(1,T)/eta)):

Enum := proc(t,T)
 begin
 simplify((sqrt(m/k)*(1/T))*(diff(barEnum(t,T), t $ 2)
            +(k/m)*(T^2)*barEnum(t,T)))
 end_proc:

seri:=series(series(Enum(t,T),T),t):
seriE1:=coeff(seri,0);
seriE2:=coeff(seri,1);
seriE3:=coeff(seri,2);
seriE4:=coeff(seri,3);
seriE5:=coeff(seri,4);
appr:=seriE1+seriE2*T+seriE3*T^2+seriE4*T^3+seriE5*T^4;

assume(T, Type::Positive):

enum:=simplify(Enum(t,T)^2):

I1:=eval(subs(int(enum,t),t=0));
I2:=eval(subs(int(enum,t),t=1));
payda:=I2-I1;

appr2:=simplify((Enum-appr)^2):

I3:=eval(subs(int(appr2,t),t=0));
I4:=eval(subs(int(appr2,t),t=1));
pay:=I4-I3;

sigma:=proc(T)
begin
simplify(pay/payda);
end_proc:

sigma(T);

quit:
```

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Niğde'de doğdu. Orta ve lise eğitimini Beyoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamladı . 1997 – 2001 yılları arasında, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimi aldı . 2002 yılında İTÜ Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Yüksek Lisans programına başladı. Halen bu programda eğitimini sürdürmekte ve araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.