



DÜZGÜN KALINLIKLI ELASTİK İKİ TABAKAYLA KAPLI BİR YARIM UZAYDA DOĞRUSAL OLMAYAN YÜZEY SH DALGALARININ YAYILMASI

Ekin Deliktaş¹, Mevlüt Teymür²

^{1,2}İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

Nonlinear self modulation of shear horizontal (SH) waves in an elastic half space covered by two layers of uniform thickness is considered. Half space and the layers are assumed to be homogeneous, isotropic, elastic and having different mechanical properties. In the analysis it is assumed that between the linear shear velocities of the top layer c_1 , the bottom layer, c_2 , and the half space, c_3 , the inequality $c_2 < c_1 < c_3$ is valid. If the phase velocity c of the wave satisfies either the condition $c_2 < c_1 < c < c_3$ or the one $c_2 < c < c_1 < c_3$, a surface SH wave exists. In this study, the problem is examined under these two conditions. By employing a perturbation method, it is shown that nonlinear modulation of SH waves is governed asymptotically by a nonlinear Schrödinger equation. It is remarked that the existence of the envelope solitary waves depends on the nonlinear constitution of the low velocity internal layer as well as the thickness ratio of two layers.

ÖZET

Bu çalışmada düzgün kalınlıklı iki tabakayla kaplı elastik bir yarım uzayda, doğrusal olmayan yüzey SH dalgalarının yayılması incelenmiştir. Yarım uzay ve tabakaların, homojen, izotrop, sıkışmaz elastik ve birbirinden farklı malzemelerden oluştuğu kabul edilmiştir. Sırasıyla üst tabaka, ara tabaka ve yarı sonsuz uzaya ait doğrusal kayma hızları c_1, c_2, c_3 olmak üzere, bu hızların $c_2 < c_1 < c_3$ eşitsizliğini sağladığı kabul edilerek analiz gerçekleştirilmiştir. Faz hızı c olmak üzere, $c_2 < c_1 < c < c_3$ ya da $c_2 < c < c_1 < c_3$ olması halinde SH tipi yüzey dalgaları yayılabilmektedir. Problem, bu iki koşul altında incelenmiş ve bir pertürbasyon açılımı kullanılarak doğrusal olmayan dalga modülasyonunun asimptotik olarak doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Zarf soliton tipi dalgaların varlığının, doğrusal kayma hızı daha yavaş olan ara tabakanın doğrusal olmayan malzeme özelliklerine ve tabakaların kalınlıkları oranına bağlı olduğu gösterilmiştir.

GİRİŞ

Elastik dalga yayılımı, sismoloji, malzemelerin tahribatsız muayenesi, elektronik sinyal işleme cihazları teknolojisi gibi alanlardaki önemli uygulamaları nedeniyle birçok araştırmacının konusunu oluşturmaktadır. Özel bir dalga türü olan enine polarize olmuş dalgalar, literatürde kısaca SH (Love) ile gösterilir. Jeffreys [1]'deki çalışmasında, ilk olarak yer kabuğunun kıtasal kısımlarının kalınlığını hesaplamak amacı ile kayadan oluşan bir yarım uzay üzerinde bir granit tabakanın bulunduğu varsayımı ile bu granit tabakanın kalınlığını hesaplamıştır. Stoneley ve Tillotson, [2]'deki çalışmalarında bu sonucu, hesaplamalarda granit tabakanın altında bir bazalt tabakanın olduğunun dikkate alınmamasından dolayı yetersiz bulmuş ve en üst tabakanın granit, ara tabakanın bazalt ve yarı sonsuz uzayın da tabakalardan daha yoğun kaya olduğunu kabul ederek iki tabakalı bir model geliştirmişlerdir. Aynı çalışmada Love (SH) tipi yüzey

dalgalarının, bu dalgaların faz hızının, $c_1 < c_2 \leq c < c_3$ ya da $c_1 < c \leq c_2 < c_3$ koşullarından birini sağlaması halinde var olacaklarını göstermişlerdir. Var, [3]'teki çalışmasında bu eşitsizliklerin sağlandığı iki tabakalı bir yarım uzayda lineer olmayan dalga yayılımı problemini incelemiştir. Stoneley [4], yine jeofizik tabanlı bir problemle ilgili olarak, ara tabakanın hızının üst tabakanınkinden daha düşük olması durumunda yani, $c_2 < c_1 < c_3$ için, faz hızının $c_2 < c_1 < c < c_3$ ya da $c_2 < c < c_1 < c_3$ koşullarından birini sağlaması halinde SH tipi yüzey dalgalarının yayılacaklarını ortaya çıkarmıştır. Bahsedilen çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada, faz hızının $c_2 < c_1 < c < c_3$ ve $c_2 < c < c_1 < c_3$ eşitsizliklerini sağladığı varsayımı ile doğrusal kayma hızı daha yavaş olan ara tabakayı meydana getiren malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin SH (Love) dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre maddesel ve uzaysal koordinatları sırasıyla (X_1, X_2, X_3) ve (x_1, x_2, x_3) olsun. Başlangıç konumunda $h_1, h_2 > 0$ olmak üzere,

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) | 0 < X_2 < h_1, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (1)$$

ve

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) | -h_2 < X_2 < 0, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2)$$

bölgelerini dolduran homojen iki tabakanın,

$$P_3 = \{(X_1, X_2, X_3) | -\infty < X_2 < -h_2, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (3)$$

bölgesini dolduran ve tabakalardan farklı bir elastik malzemeden oluşan yarım uzayın kapladığı ortam ele alınacaktır. $X_2 = 0$ ve $X_2 = -h_2$ ara yüzeyleri boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu, $X_2 = h_1$ serbest yüzeyi üzerinde gerilmelerin sıfır olduğu ve $X_2 \rightarrow -\infty$ için yer değiştirmenin sıfıra gittiği kabul edilecektir. İki tabakalı yarım uzayda X_1 eksenini boyunca yayılan SH dalgaları aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u^{(r)}(X, Y, t) \quad r = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Burada, $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ sırasıyla, P_1, P_2 tabakalarındaki ve P_3 yarım uzayındaki noktaların X_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonlarıdır. Bir alan büyüklüğü üzerindeki parantez içindeki indis, büyüklüğün hangi bölgeye ait olduğunu temsil etmektedir. Harekete etki eden kütle kuvvetlerinin bulunmadığı varsayımı ile referans konumundaki hareket denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$T_{K\beta, K}^{(r)} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad T_{K3, K}^{(r)} = \rho^{(r)} \ddot{u}^{(r)}, \quad r = 1, 2, 3; \quad (5)$$

Burada $T_{KL}^{(r)}$ birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünü, virgülden sonraki alt indis karşı geldiği maddesel veya uzaysal koordinata göre kısmi türevi ve büyüklüğün üzerindeki bir nokta zamana göre kısmi türevi göstermektedir. $\det x_{k, K} = 1$ olduğundan, (4) ile tanımlanan şekil değiştirme izokoriktir ve yoğunluklar $\rho^{(r)}, r = 1, 2, 3$, hareket boyunca sabit kalır.

Tabakaların ve yarım uzayın doğrusal olmayan, homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik malzemelerden oluştuğu ve gerilme potansiyeli fonksiyonunun Green şekil değiştirme tansörü $C_{KL} = x_{k, K} x_{k, L}$ 'nin sadece birinci invaryantının bir fonksiyonu, yani $\Sigma^{(r)} = \Sigma^{(r)}(I^{(r)})$ olduğu kabul edilecektir. Bunlar neo-Heoken malzemeler olarak adlandırılmaktadır. Bu tür malzemeler için [5]'te verilen gerilme bünye bağıntıları üzerindeki benzer kısıtlamalar altında (5)'deki ilk iki denklem özdeş olarak sağlanır ve (4) ile tanımlanan dalga hareketi, harekete etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duymadan yaratılabilir.

Bu çalışmada küçük ama sonlu genlikli dalga yayılması problemi inceleneceği için, gerilme potansiyeli fonksiyonu [5]'teki gibi Taylor serisine açılır ve üçüncü mertebeden daha yüksek

doğrusal olmayan terimler ihmal edilip (X_1, X_2, X_3) ve (x_1, x_2, x_3) yerine sırasıyla (X, Y, Z) ve (x, y, z) yazılırsa, hareket denklemlerinin ve sınır koşullarının yaklaşık formları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} - c_r^2 \left(\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial Y^2} \right) = n_r \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} K(u^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} K(u^{(r)}) \right) \right\} \quad (6)$$

$$Y = h_1 \text{ de } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0 \quad (7)$$

$$Y = 0 \text{ da } u^{(1)} = u^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} K(u^{(2)}) - \beta_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} K(u^{(1)}) \quad (8)$$

$$Y = -h_2 \text{ de } u^{(2)} = u^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y} K(u^{(3)}) - \beta_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} K(u^{(2)}) \quad (9)$$

$$Y \rightarrow -\infty \text{ için } u^{(3)} \rightarrow 0 \quad (10)$$

$$K(u^{(r)}) = \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} \right)^2 \quad r = 1, 2, 3$$

Burada parantez içindeki üst indisler, büyüklüğün hangi bölgeye ait olduğunu göstermektedir. $c_r^2 = \mu^{(r)}/\rho^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$ için sırasıyla üst tabaka, ara tabaka ve yarım uzaya ait doğrusal kayma hızlarını, $\mu^{(r)} = 2d\Sigma^{(r)}(3)/dI$ kayma modülünü, $n_r = (2/\rho^{(r)})d^2\Sigma^{(r)}(3)/dI^2$ doğrusal olmayan malzeme parametrelerini temsil etmektedir. $\gamma_1 = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, $\gamma_2 = \mu^{(3)}/\mu^{(2)}$ ve $\beta_r = n_r/c_r^2$ dir. Eğer $n_r > 0$ ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, aksi halde kaymada yumuşayan davranış gösterir.

SH DALGALARININ LİNEER OLMAYAN SELF MODÜLASYONU

Lineer olmayan küçük ama sonlu genlikli SH tipi yüzey dalgalarının self modülasyonu, çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenecektir. Bunun için problemin bağımsız değişkenleri aşağıda tanımlanan çoklu ölçeklerin bir kümesine genişletilir:

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (11)$$

Burada ε nonlineerliğin mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre, $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$ yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden değişkenler, $\{x_0, t_0, y\}$ yayılma olayında hızlı değişimi karakterize eden hızlı değişkenlerdir. $u^{(r)}, r = 1, 2, 3$ yer değiştirme fonksiyonlarının, yeni tanımlanan bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonu olduğu kabul edilerek aşağıdaki düzgün geçerli asimptotik açılıma sahip oldukları varsayılır

$$u^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{(r)}(x_0, t_0, x_1, x_2, t_1, t_2) \quad r = 1, 2, 3 \quad (12)$$

(11) ve (12) sınır değer probleminde kullanılarak $u_n^{(r)}(x_0, t_0, x_1, x_2, t_1, t_2)$ fonksiyonlarının ardışık olarak hesaplanabilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bu pertürbasyon problemlerinin ilk üçü aşağıda verilmiştir:

$$O(\varepsilon): \quad L(u_1^{(r)}) \square \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0^2} - c_r^2 \left(\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad r = 1, 2, 3$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \text{ ara yüzeyinde } u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} = 0$$

$$y = -h_2 \text{ de } u_1^{(2)} = u_1^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_1^{(3)} \rightarrow 0$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L(u_2^{(r)}) = 2 \left(c_r^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0 \partial t_1} \right) \quad r = 1, 2, 3$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \text{ ara yüzeyinde } u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} = 0$$

$$y = -h_2 \text{ de } u_2^{(2)} = u_2^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_2^{(3)} \rightarrow 0$$

$$O(\varepsilon^3): \quad L(u_3^{(r)}) = 2 \left(c_r^2 \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial t_0 \partial t_1} \right) + c_r^2 \left(\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0 \partial t_2} \\ + n_r \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_0} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial Y} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) \right) \quad r = 1, 2, 3$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \text{ ara yüzeyinde } u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) - \beta_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(1)})$$

$$y = -h_2 \text{ ara yüzeyinde } u_3^{(2)} = u_3^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(3)}) - \beta_2 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(2)})$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_3^{(3)} \rightarrow 0$$

Herbir merteye problemi lineerdir ve birinci merteye problem ilk defa [4]'de incelenen klasik lineer dalga problemidir. [4]'deki çalışmasında Stoneley, ara tabakanın hızının üst tabakaninkinden daha düşük olması durumunda yani, $c_2 < c_1 < c_3$ için, faz hızının $c_2 < c_1 < c < c_3$ ya da $c_2 < c < c_1 < c_3$ koşullarından birini sağlaması halinde SH tipi yüzey dalgalarının yayılacaklarını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada ilk olarak, faz hızının birinci eşitsizliği sağladığı kabul edilerek analiz yürütülecektir.

Değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak, birinci merteye problemin çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lk_v y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lk_v y} \right\} e^{il\theta} + k.e.$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ikp_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ikp_2 y} \right\} e^{i\theta} + k.e.$$

$$u_1^{(3)} = \sum_{l=1}^{\infty} E_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_3 y} e^{i\theta} + k.e.$$

Burada k dalga sayısı, ω açısal frekans, $c = \omega / k$ faz hızı ve $\theta = kx_0 - \omega t_0$, $v_1 = (1 - c^2 / c_1^2)^{1/2}$, $p_2 = (c^2 / c_2^2 - 1)^{1/2}$, $v_3 = (1 - c^2 / c_3^2)^{1/2}$ olarak tanımlanmıştır, k.e. sembolü kompleks eşleniği göstermektedir.

Birinci mertebe çözümlerde görülen $A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}, E_1^{(l)}$ fonksiyonları, birinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde edilir. Birinci mertebe çözümler sınır koşullarında yerine yazılırsa,

$\mathbf{U}_1^{(l)} = (A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}, E_1^{(l)})^T$ olmak üzere $\mathbf{U}_1^{(l)}$ vektörleri için $\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}$ homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu homojen denklem sistemlerinin sıfırdan farklı çözümleri ancak $\det \mathbf{W}_l = 0$ olması durumunda mevcuttur. $\det \mathbf{W}_l = 0$ koşulu aşağıdaki dispersiyon bağıntısını verir:

$$-v_1 p_2 \tanh V_1 - \gamma_2 v_1 v_3 \tanh V_1 \tan P_2 - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 + \gamma_1 p_2^2 \tan P_2 = 0$$

burada $V_1 = k v_1 h_1$, $P_2 = k p_2 h_2$ olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının doğrusal olmayan self modülasyonu inceleneceği için yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilecektir, yani

$$l \geq 2 \text{ için } \det \mathbf{W}_l \neq 0.$$

Bu koşul altında $\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}$ çözümleri, $\mathbf{R}$

$$\mathbf{W}_l \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

cebirsel denklem sistemini sağlayan bir sütun vektör olmak üzere, $l=1$ için $\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R}$ ve $l \geq 2$ için $\mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}$ olarak elde edilir. Burada $\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ dalga modülasyonunun birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonudur. $\mathbf{U}_1^{(1)}$ birinci mertebe çözümlerde yerine yazılırsa bu çözümler:

$$u_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(R_1 e^{-kv_1 y} + R_2 e^{kv_1 y}) e^{i\theta} + k.e.$$

$$u_1^{(2)} = \mathcal{A}_1(R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\theta} + k.e.$$

$$u_1^{(3)} = \mathcal{A}_1 R_5 e^{kv_3 y} e^{i\theta} + k.e.$$

olarak elde edilir. Birinci mertebe çözümün tamamen belirlenebilmesi için, $\mathcal{A}_1$ fonksiyonunun hesaplanması gerekmektedir. Bunun için daha yüksek mertebe pertürbasyon problemleri incelenmelidir.

Yukarıda verilen birinci mertebe çözümler, ikinci mertebe pertürbasyon probleminde yerine konulursa, bu denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$L(u_2^{(1)}) = 2iM^{(1)}(R_1 e^{-kv_1 y} + R_2 e^{kv_1 y}) e^{i\theta} + k.e.$$

$$L(u_2^{(2)}) = 2iM^{(2)}(R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\theta} + k.e.$$

$$L(u_2^{(3)}) = 2iM^{(3)} R_5 e^{kv_3 y} e^{i\theta} + k.e.$$

Burada $M^{(\alpha)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + kc_\alpha^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1}$, $\alpha = 1, 2, 3$.

$u_2^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$ çözümlerini $u_2^{(r)} = \bar{u}_2^{(r)} + \tilde{u}_2^{(r)}$ şeklinde iki parçaya ayırılabilir; öyle ki $\bar{u}_2^{(r)}$ $r = 1, 2, 3$ için sırasıyla homojen olmayan diferansiyel denklemlerin özel çözümleridir ve belirsiz katsayılar metoduyla bulunurlar, $\tilde{u}_2^{(r)}$ 'ler ise $L(\tilde{u}_2^{(r)}) = 0$ $r = 1, 2, 3$, homojen denklemlerinin çözümleri olsunlar. İkinci merteye homojen çözümler, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak birinci merteye çözümler gibi yazıldığında ikinci merteye yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonu $\mathbf{U}_2^{(l)} = (A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}, D_2^{(l)}, E_2^{(l)})$ için homojen olmayan sınır koşulları kullanılarak aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)}$$

Burada $l \neq 1$ için $\mathbf{b}_2^{(l)} = \mathbf{0}$ ve $\det \mathbf{W}_1 \neq 0$ olduğundan $\mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{0}$ 'dır. Fakat $l = 1$ için $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2^{(1)}$ denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için $\mathbf{L}$, $\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0}$ ile tanımlanan bir satır vektörü olmak üzere, $\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = 0$ uygunluk koşulu sağlanmalıdır. Bu uygunluk koşulu $\mathcal{A}_1$ fonksiyonu için aşağıdaki denklemi verir:

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0, \quad V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Bu denklemden $\mathcal{A}_1$ 'in, V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığı sonucu elde edilir yani $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ yapısındadır.

Buradan $l = 1$ için $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2^{(1)}$ denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2 \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right)$$

olarak bulunur, burada $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci merteye genliğini temsil etmektedir ve $\mathcal{A}_2$ 'nin x_1 ve t_1 terimlerine bağıllılığı $\mathcal{A}_1$ 'inki gibi kabul edilecektir, yani $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$ yapısında olacaktır.

Yukarıda türetilen birinci ve ikinci merteye çözümler, üçüncü merteye probleme ait denklemlerde kullanırsa elde edilen homojen olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümleri

$$u_3^{(r)} = \bar{u}_3^{(r)} + \tilde{u}_3^{(r)}, \quad r = 1, 2, 3$$

şeklinde iki parçaya ayrılabilir. Burada $\bar{u}_3^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$, sırasıyla üçüncü merteye problemin özel çözümleridir ve belirsiz katsayılar yöntemiyle bulunur. $\tilde{u}_3^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$, homojen çözümleri, bir önceki pertürbasyon problemindeki yol izlenerek yazılırsa ve üçüncü merteye dalga genliği fonksiyonları $\mathbf{U}_3^{(l)} = (A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)}, D_3^{(l)}, E_3^{(l)})$ için üçüncü merteye pertürbasyon probleminin homojen olmayan sınır koşulları kullanılırsa aşağıdaki homojen olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}.$$

Burada $l \neq 1, 3$ için $\mathbf{b}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ ve $\det \mathbf{W}_l \neq 0$ olduğundan $\mathbf{U}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ elde edilir. Fakat $\det \mathbf{W}_1 = 0$ ve $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_3^{(1)} = \mathbf{b}_3^{(1)}$ denklem sisteminin $\mathbf{U}_3^{(1)}$ için çözümünün olması için aşağıdaki uygunluk koşulu sağlanmalıdır:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3^{(1)} = 0$$

Bu uygunluk koşulundan aşağıdaki doğrusal olmayan Schrödinger denklemi elde edilir:

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A} = 0 .$$

Denklemdaki boyutsuz değişkenler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\tau = \omega t_2 , \quad \xi = k \epsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k (x_1 - V_g t_1) , \quad \mathcal{A} = k \mathcal{A}_1 , \quad \Gamma = \frac{k^2}{2\omega} \frac{d^2 \omega}{dk^2}$$

Δ katsayısı doğrusal olmayan malzeme parametrelerini içermektedir.

Böylece elde edilen Schrödinger denkleminin, $\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi)$ formunda verilen bir başlangıç koşulu için çözümü bulunduğundan sonra $u_1^{(r)}$, $r = 1, 2, 3$, birinci mertbe çözümleri elde edilmiş olur.

Benzer analiz $c_2 < c_1 < c < c_3$ durumu için de yürütüldüğünde aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir:

$$p_1 p_2 \tan P_1 + \gamma_2 p_1 v_3 \tan P_1 \tan P_2 - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 + \gamma_1 p_2^2 \tan P_2 = 0$$

Burada $P_1 = k p_1 h_1$ olarak tanımlanmıştır. Bu durum için birinci mertbe lineer olmayan modülasyon bir öncekinden farklı Γ ve Δ katsayılarına sahip bir NLS denklemi ile karakterize edilir.

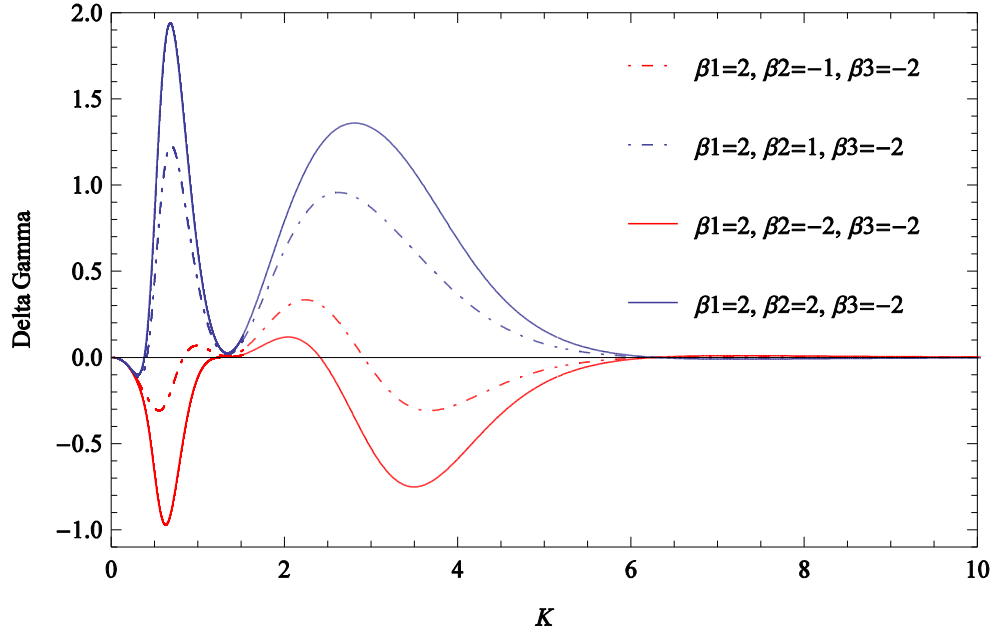
Yapılan hesaplamalar sonucunda, her iki durumda da doğrusal olmayan dalga modülasyonunun, asimptotik olarak doğrusal olmayan bir Schrödinger denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir.

SONUÇLAR

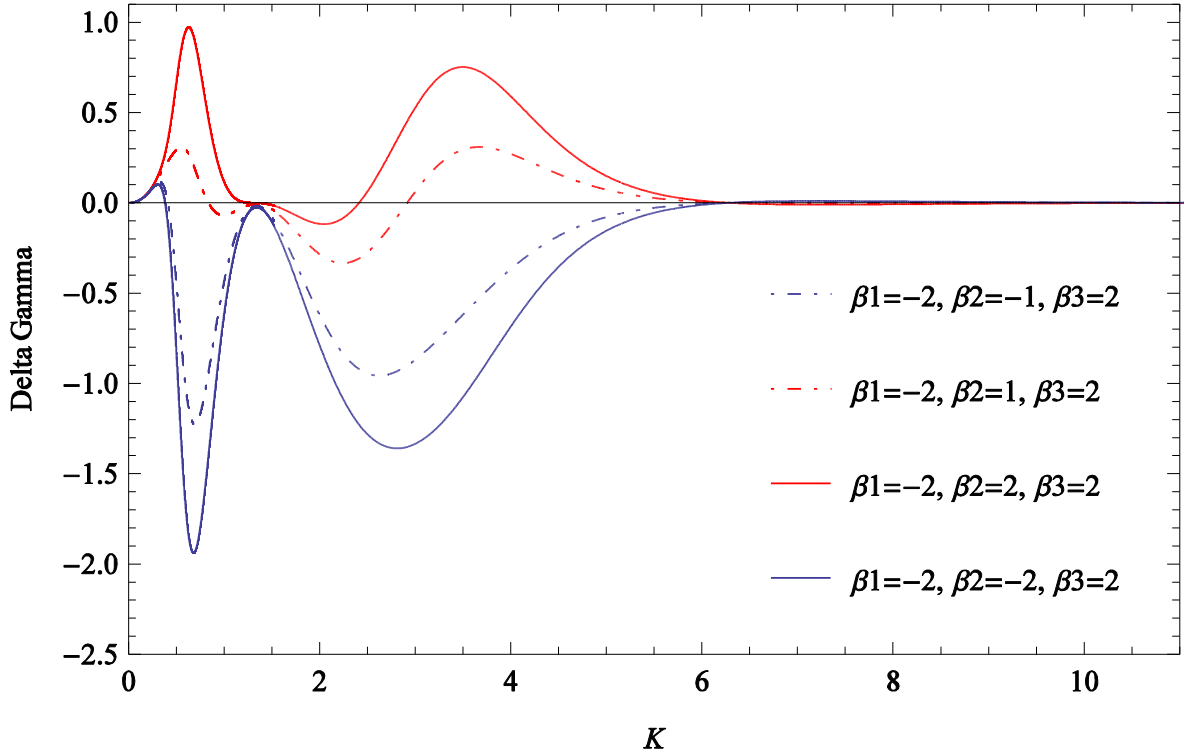
Bilindiği gibi lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümlerinin kararlılığı, lineer terim katsayısı Γ ve lineer olmayan terim katsayısı Δ 'nın çarpımının işaretine bağlıdır. Lineer olmayan malzeme parametrelerinin $\Gamma \Delta$ çarpımının işaretine etkilerini görebilmek için nümerik hesaplamalarda malzemelerin doğrusal özellikleri $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ ve $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 9$ seçilerek sabit tutulmuş ve doğrusal olmayan parametreler değiştirilerek $\Gamma \Delta$ 'nın $K = k(h_1 + h_2)$ boyutsuz dalga sayısına göre değişimi, tabakaların kalınlıkları oranı $h_2 / h_1 = 1$ seçilerek dispersiyon bağıntısının ilk dalı için incelenmiştir.

Şekil 1 ve Şekil 2'de NLS ile karakterize edilen asimptotik dalga alanının çözümlerinin davranışlarını belirleyebilmek amacıyla $\Gamma \Delta$ 'nın K 'ya göre değişimi gösterilmiştir. . Şekil 1'de üst tabakanın her zaman sertleşen, yarım uzayın her zaman yumuşayan, ara tabakanın ise bazen sertleşen bazen yumuşayan malzemelerden oluştuğu durumlar incelenmiştir. Üst tabakanın ve yarım uzayın doğrusal olmayan malzeme parametreleri sırasıyla $\beta_1 = 2$, $\beta_3 = -2$ seçilerek sabitlenmiş ara tabakaya ait doğrusal olmayan malzeme parametreleri $\{1, 2, -1, -2\}$ seçimleriyle değiştirilmiştir. Ara tabaka yumuşayan malzemeden meydana geldiğinde grafik eksenini üç noktada keserken, sertleşen malzemeden meydana geldiğinde grafik eksenini iki noktada kesmekte ve $\Gamma \Delta$ 'nın işareti değişmektedir. Bunlardan sonuncusu Γ 'nın sıfırdır. $\Gamma \Delta > 0$

olduğu aralıkta düzlem dalgaları kararsız ve zarf soliton tipi çözümler mevcuttur, $\Gamma\Delta < 0$ için düzlem dalgaları kararlı olacaktır ve sadece dark soliton tipi çözümler mevcut olacaktır [6]. Şekil 2'de ise malzeme özellikleri bunun tam tersidir ve Şekil 1 ile Şekil 2'nin yatay eksene göre simetrik oldukları görülmektedir. Dolayısıyla çözümlerin davranışı bir önceki modele göre tam tersi özellik gösterir. Yapılan hesaplamalarda ara tabakanın doğrusal olmayan malzeme özelliklerinin zarf soliton tipi dalgaların varlığını kuvvetli bir şekilde etkilediği görülmektedir.



Şekil 1. Üst tabaka sertleşen, yarım uzay yumuşayan malzeme, ara tabaka bazen yumuşayan bazen sertleşen malzemeden oluşurken $\Gamma\Delta$ 'nın K'ya göre değişimi



Şekil 2. Üst tabaka yumuşayan, yarım uzay sertleşen malzeme, ara tabaka bazen yumuşayan bazen sertleşen malzemeden oluşurken $\Gamma\Delta$ 'nın K'ya göre değişimi

KAYNAKLAR

- [1] H. Jeffreys, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 1,282-292, 1925
- [2] R. Stoneley, E. Tillotson, Notices Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 1,521-527, 1928
- [3] H.İ. Var, Tabakalı Bir Hiperelastik Yarım Uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgalarının Yayılması, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1997
- [4] R. Stoneley, , Monthly Notices Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 6,28-35, 1950
- [5] M. Teymur, Small But Finite Amplitude Waves in a Two Layered Incompressible Elastic Medium, Int. J. Engng Sci..34 227-241, 1996
- [6] Ablowitz, M.J. ve Clarckson, P.A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.