

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YERÇEKİMİ AKIMLARININ
LİE GRUP ANALİZİ KULLANILARAK
İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Derya Şahin**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı : Matematik Mühendisliği

HAZİRAN 2007

**YERÇEKİMİ AKIMLARININ
LİE GRUP ANALİZİ KULLANILARAK
İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Derya Şahin

(509041008)

Tez teslim tarihi : 02.05.2007

Tez savunma sınavı tarihi : 12.06.2007

Tez Danışmanı: Doç .Dr. Nalan ANTAR (İ.T.Ü.)

Eş Danışmanı: Doç. Dr. Teoman ÖZER (İ.T.Ü.)

Sınav jürisi üyeleri : Doç .Dr. Ali ERCENGİZ (İ.T.Ü.)

Doç .Dr. Emanullah HİZEL (İ.T.Ü.)

Yard. Doç. Dr. Kunt ATALIK (B. Ü.)

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen hocalarım Sayın Doç. Dr. Nalan ANTAR ve Doç. Dr. Teoman ÖZER'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mayıs, 2007

Derya ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARI	7
2.1 Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Elde Edilmesi	7
3. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARININ BOYUT ANALİZİ KULLANILARAK İNCELENMESİ	13
4. LIE DÖNÜŞÜM GRUPLARI	20
5. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARININ LIE GRUP ANALİZİ KULLANILARAK İNCELENMESİ	31
5.1 Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Kabul Ettiği Lie Simetri Gruplarının Bulunması	31
5.2 Simetri İndirgenmesi	39
5.3 Benzerlik Çözümleri	59
6. SONUÇ VE TARTIŞMALAR	71
KAYNAKLAR	72
EK A	76
ÖZGEÇMİŞ	77

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 5.1 Simetri üreteçlerinin Lie parantezi tablosu	40
Tablo 5.2 Simetri üreteçlerinin adjoint temsil tablosu	49

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1 : Tek Tabakalı Yerçekimi Akımı	8
Şekil 2 : Değişken Bir Akımın Olmadığı Durum	60
Şekil 3 : Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	62
Şekil 4 : Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda	62
Şekil 5 : Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	63
Şekil 6 : Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda	64
Şekil 7 : Sabit Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	65
Şekil 8 : Sabit Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda	65
Şekil 9 : Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	66
Şekil 10 : Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda	66
Şekil 11 : Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	67
Şekil 12 : Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda	68
Şekil 13 : Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda	69
Şekil 14 : Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durum	69

SEMBOL LİSTESİ

$\frac{D}{Dt}$: maddesel türev

∇ : gradyent vektör

δ : sığ su parametresi

$\acute{g}$: indirgenmiş yerçekimi ivmesi

u : akışkanın yatay eksen boyunca hızı

w : akışkanın eksenel yöndeki hızı

h : akışkanın derinliği

ρ : akışkanın yoğunluğu

P : basınç

$\mathfrak{F}$: Froude sayısı

ξ, η : sonsuz küçükler

X, V : sonsuz küçük üretç

pr^n : n. dereceden uzanım

ζ : benzerlik değişkeni

L_r : r -boyutlu bir Lie cebiri

YERÇEKİMİ AKIMLARININ LIE GRUP ANALİZİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

ÖZET

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine doğru yerçekiminin etkisiyle akması ile oluşan ve bazen yoğunluk akımları olarak adlandırılan yerçekimi akımları, bir çok doğal ve insan yapımı durumda ortaya çıkmaktadır. Yerçekimi akımlarındaki yoğunluk farkı, ısı etkileri ya da maddenin erimesi nedeniyle oluşabilir. Bu çalışmada, içerisinde parçacık bulunmayan yerçekimi akımları incelenmiştir ve benzerlik çözümlerinin elde edilmesinde Lie grup teorisinden yararlanılmıştır. Lie grup teorisi, bu çalışma içerisinde Boyut Analizinin bir genelleştirilmesi olarak başlıca temel yöntem olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada mevcut tanımı ve kapsamı verilen problem Lie grup analizi kapsamında literatürde ilk defa incelenmiştir. Lie grupları teorisi son otuz yıl içerisinde gerek matematiksel fizikte, gerekse mühendislikteki pek çok probleme başarı ile uygulanmıştır. Lie grup teorisi, lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sisteminin analitik çözümlerinin elde edilmesinde literatürdeki en önemli çözüm yöntemidir. Bununla birlikte, literatürde boyut analizi, sıg su denklemlerinin benzerlik analizinde kullanılan tek yöntemdir ve boyut analizi sadece tek bir benzerlik değişkeninin elde edilmesini mümkün kılmaktadır.

Boyut analizi altında yapılan tüm çalışmalarda benzerlik değişkeni $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ formunda ele alınmıştır. Burada δ sayısal bir sabittir. Benzerlik değişkeninin bu formu boyut analizi yaklaşımından gelmektedir ve bize orjinal diferansiyel denklem sisteminin sadece tek bir özel formda olan indirgenmiş yapısını elde etmemize imkan vermektedir. Bu çalışmayla mevcut ve benzeri problemlerin incelenmesinde boyut analizine alternatif olarak, Lie grupları teorisinin çok daha genel ve trivial olmayan benzerlik yapıları ve benzerlik çözümlerinin elde edilebilmesinde kullanılabileceği gösterilmiştir. Bu tezde değişken akımlı yerçekimi akımlarının benzerlik çözümleri Lie grup analizi altında incelenerek boyut analizi altında elde edilen benzerlik değişkeninden farklı benzerlik değişkenleri ve buna bağlı olarak grup parametrelerinin bazı özel değerleri için farklı benzerlik çözümleri elde edilebileceği gösterilmiştir.

THE INVESTIGATION OF GRAVITY CURRENTS BY USING LIE GROUP ANALYSIS

SUMMARY

Gravity currents, (sometimes called density currents or buoyancy currents), which consist of fluid of one density flowing under the influence of gravity into fluid of another density, occur in many natural and man-made situations. The density difference in gravity currents can be caused by thermal effects or as the result of dissolved material. In this thesis, gravity currents without particles were investigated and Lie group theory was utilized to obtain the similarity solutions of these gravity currents. Lie group theory will be used as a fundamental approach for the solution of the problem, which is the generalization of the dimensional analysis. The problem described above will be investigated for the first time in the literature based on the Lie group analysis. In the last 30 years, the Lie group analysis is successfully applied to the many problems in both mathematical physics and engineering. In fact, symmetry analysis based on Lie group theory is the most important method for solving nonlinear problems. All of the studies in the current literature are related to the self-similarity analysis of the shallow-water related problems based on the dimensional analysis. In fact, the dimensional analysis enables to find only one particular type of similarity variable. The similarity variable in all related studies is usually considered in the form of $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ where δ is a numerical constant. This form of the similarity variable is resulting from the dimensional analysis method and it enables to obtain only one specific type of reduced form of the original governing equation. In this thesis, the similarity solutions of gravity currents with variable inflows were investigated by using the Lie group analysis, different similarity variables and also different similarity solutions were obtained for the special values of the group's parameters. The Lie group analysis was presented as an alternative approach to the dimensional analysis for investigating similar problems in fluid mechanics and this approach presented the opportunity to obtain more general and nontrivial similarity forms and similarity solutions for the problem.

1. GİRİŞ

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine doğru yerçekiminin etkisiyle akması ile oluşan ve bazen yoğunluk akımları diye de adlandırılan yerçekimi akımları, bir çok doğal ve insan yapımı durumda ortaya çıkmaktadır. Yoğunluk farkı, ısı etkileri ya da maddenin erimesi nedeniyle oluşabilir. Fırtınalar yoğun soğuk havanın atmosferde oluşturduğu yerçekimi akımlarıdır ve okyanuslardaki tuzlu suyun yoğunluğu diğer suyun yoğunluğuna göre daha büyük olduğundan okyanus üzerindeki akışkanın hareketi bir yerçekimi akımı oluşturur. Sıvılar üzerindeki yerçekimi etkisiyle oluşan akım hareketi incelenmek istenirse barajlar ve su bendleri deneysel olarak yeterli gözlem olanağı sağlamaktadır.

Birçok deneysel ve teorik çalışmada sabit hacimli bir sıvı tarafından üretilen yerçekimi akımlarının davranışları incelenmektedir. Yerçekimi akımlarıyla ilgili en geniş kapsamlı gözlemleri Simpson [1] elde etmiştir. Yerçekimi akımlarının hareketini analiz etmek için sıg su teorisi kullanılır ve bu nedenle sıg su denklemlerinden yararlanılır. Sıg su denklemleri hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerdir. Başlangıç koşulu düzgün bile olsa hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerin çözümünde belli bir t zamanından sonra süreksizlikler oluşabilir. Sıg su denklemlerinde süreksizliğin söz konusu olduğu durumlarda çözüme ulaşmak için sayısal çözüm yönteminin bu süreksizliği ortadan kaldıracak şekilde uygulanması gerekir. Sıg su denklemlerinin çözümleri elde edilirken sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, spektral metodlar [2] gibi birçok sayısal çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Ayrıca McCormack'ın [3] ve [4] Godunov'un metodları standart olarak kullanılan sayısal metodlardır. Korunum yasaları şeklinde ifade edilen denklem sistemlerinin çözümünü elde etmek için Jin ve Xin [5] tarafından kullanılan sonlu farklar yöntemi olan rölaksasyon yöntemi kullanılan yöntemlerden birisidir. Bunun yanı sıra Montgomery ve Modie [6] uzaysal koordinatları içeren akı fonksiyonları ile iki tabakalı yerçekimi akımlarının

$u_x + u_t = S(x)$ şeklinde ifade edilen denklem sistemleri için rölaksasyon yöntemini kullanmışlardır. D'Alessio et al [7], belli miktarda bir ağırlığa sahip sıvıyı dikdörtgen bir kanalda yatay bir şekilde serbest bırakarak oluşan yerçekimi akımı problemini McCormack yöntemi kullanılarak incelemişlerdir ve hiperbolik sistemi sayısal olarak integre ederek çözümün deneysel sonuçlarla iyi sonuçlar verdiğini gözlemlemişlerdir.

Bu çalışmada, Lie simetri grup özellikleri ve sığ su teorisi kullanılarak tek tabakada oluşan yerçekimi akımlarının benzerlik çözümleri araştırılmıştır. Sığ su denklemlerinin sahip olduğu Lie simetri grubunun özellikleri esas alınarak bu denklemlerin matematiksel ve fiziksel yapısı anlaşılabilir. Lie grup teorisi, Sophus Lie'nin 1871' de başladığı çalışmaların sonucunda ortaya çıkmıştır. 1871-1890 arasındaki Lie ve Engel'in çalışmalarıyla Lie grup teorisi modern matematikte oldukça önemli bir yer edinmiştir. Ayrıca Lie'nin önerdiği Lie simetrileri yardımıyla, bir çok fiziksel problemin sonucu olan diferansiyel denklemler için yeni çözümler bulunmuştur. Literatürde araştırılacak olursa; Ovsianikov [8], Olver [9], Ibragimov [10], Bluman ve Kumei' in [11] Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla ilgili önemli çalışmalar yapmış oldukları görülmektedir. Kovalev, Krivenko ve Pustovalov [12] birlikte yaptıkları çalışmada Vlasov kinetik denklemleri için Lie grup analizi kullanmışlardır. Roberts [13] bir boyutlu Vlasov-Maxwell denklemlerinin Lie grup analizi kullanarak benzerlik çözümlerinin elde edildiğini göstermiştir. Kupershmidt, Manin [14] Lie grup teorisinden yararlanarak uzun dalga denklemlerinin çözümleriyle ilgili araştırmalar yapmışlardır. Meleshko [15] vizkoelastik ortamın hareket denklemleri ile ilgili yaptığı çalışmada denklemlerin sahip olduğu grup özelliklerini araştırmıştır. Özer [16,17] bir ve iki boyutlu elastodinamik problemlerin simetri gruplarının sınıflandırmıştır. Ayrıca yerel olmayan elastisite denklemlerinin simetri grup özelliklerini araştırmıştır[18]. Navier denklemlerinin çözümü ve Boussinesq probleminin çözümüyle ilgili yaptığı çalışmalarında Lie simetri gruplarını kullanmıştır [19,20]. Tüm bu çalışmalardan Lie gruplarının modern matematiğin bir çok alanında uygulanabildiği görülür. Rottman ve Simpson [21,22] tabanda oluşan sabit hacimli yerçekimi akımını incelemişler ve çalışmalarında benzerlik teorisinden elde edilen tahminlerdeki gibi

akımın uzunluğunun $t^{\frac{2}{3}}$ oranında arttığını göstermişlerdir, bu değer benzerlik teorisinde elde edilmiştir. Grundy ve Rottman [23] hem düzlemsel hem de eksenel durumda ele alınan bir problemde sabit hacimli yerçekimi akımlarının hareketini temsil eden sıg su denklemlerinin benzerlik çözümleri [24,25] üzerinde çalışmışlardır. Bu çözümlerin simetrik pertürbasyonlara karşılık lineer olarak kararlı kaldıklarını göstermişlerdir. Sabit hacimli bir akışkanın serbest bırakılması durumuna karşılık gelen sıg su denklemlerinin başlangıç değer problemi çözümlerinde ele alınan zaman koşullarını oluşturmuşlardır. Sabit hacime sahip yerçekimi akımlarının davranışı bir çok araştırmacı tarafından incelenmiş olmasına rağmen hacmi zamana bağlı olarak artan yerçekimi akımlarının zaman içerisindeki yayılma oranı daha az araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Grundy ve Rottman [24], t zaman ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere t^α şeklinde bir kaynağa sahip akışkanın hareketi başlatıldığında oluşan yerçekimi akımlarını temsil eden sıg su denklemlerinin çözümlerinin varlığını incelemişlerdir. Ayrıca çalışmalarında zaman orijindeki akışa bağlı olmak üzere dış kaynaklı bir akımın hem düzlemsel hem de eksenel yöndeki bir problem için benzerlik çözümlerini bulmak amacıyla faz-düzlemi yaklaşımını kullanmışlardır.

Gratton ve Vigo [25] belli bir yoğunluğa sahip bir sıvı içerisinde, başlangıç konumunda, daha yoğun bir sıvı girişinin yapılması sonucunda oluşan değişken akımlı yerçekimi akımlarını düzlemsel olarak araştırmışlar ve çalışmalarında giren sıvı hacminin zamana bağlı olarak değiştiğini göstermişlerdir.

Değişken akımlı yerçekimi akımlarını karşılık gelen sıg su denklemlerinin benzerlik çözümleri ve bu çözümlerinin varlığı, söz konusu akımların t^α oranında bir hacme sahip olduğunu göstermektedir. Elde edilen benzerlik çözümleri adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri şeklindedir. Dolayısıyla benzerlik çözümleri sayesinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerden oluşan bir çok problemle uğraşmak zorunda kalınmamıştır.

Tüm bu bahsedilen çalışmalar içerisinde sıg su denklemlerinin benzerlik çözümleri elde edilirken Lie simetri grupları kullanılmamıştır. Glaister [26] Rankine-Hugoniot şok bağıntılarını kullanarak silindirik simetriye sahip iki tabakalı sıg su denklemleri üzerinde çalışmıştır. Velan ve Lakshmana [27] Lie simetrileri kullanarak tek bir denklem formunda bulunan dispersif sıg

su denkleminin değişmez çözümlerini ve indirgenmiş benzerlik dönüşümlerini bulmuşlardır. Özer [28] Benney sisteminin simetri grup özelliklerini araştırarak Benney sistemi ile Sığ su denklemlerinin benzerlik çözümleri arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Tek tabakalı klasik tipteki sığ su denklemlerinin benzerlik çözümlerini kullanarak integro-diferansiyel Benney sisteminin benzerlik çözümlerinin elde edilebileceğini göstermiştir [29]. Ayrıca Özer ve Antar [30] iki tabakalı sığ su denklemlerinin, Lie grup analizi kullanılarak benzerlik çözümlerinin elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Literatürde, sığ su denklemlerinin indirgenmiş formlarını ve benzerlik değişkenini elde etmede kullanılan en genel teknik boyut analizidir. Fakat boyut analizi yardımıyla sadece tek tipte bir benzerlik değişkeni ve indirgenmiş form bulunabilmektedir. Bu nedenle boyut analizi kullanılan bu tür çalışmalarda [31,32] benzerlik değişkeni δ bir sayısal sabit olmak üzere, $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ şeklinde alınmaktadır. Bu yaklaşım sadece belirli bir formda benzerlik çözümünün bulunmasına imkan vermektedir. Söz konusu yaklaşımda probleme ait yönetici denklem çoğunlukla lineer olmayan kısmi türevli denklem veya denklem sistemlerinden oluşmaktadır.

Benzerlik analizindeki temel yaklaşım, orjinal denklem veya denklem sistemini adi türevli bir denklem veya denklem sistemine indirgenmesini sağlayacak olan benzerlik değişkeninin elde edilmesidir. Benzerlik değişkeni orjinal denklemin bağımsız değişkenlerini içeren belirli bir fonksiyon yapısındadır. Boyut analizi yardımı ile bu fonksiyonun açık formu elde edilebilmekte ve bu fonksiyon yardımı ile orjinal denkleme ait diğer bağımlı değişkenlerin benzerlik formları bulunabilmekte ve elde edilen bağımsız ve bağılı değişkenlere ait benzerlik yapılarından hareketle orjinal denklem'in basamağı bir merteye düşürülebilmektedir. Probleme ait yeni sınır koşulları yeni benzerlik dönüşümleri altında elde edilmekte ve problem artık yönetici denkleminin basamağı bir merteye düşürülmüş yeni yönetici denklem takımından hareketle incelenmektedir. Literatürde yapılan önceki çalışmalarda, değişken akımlı ve tabakalı sığ su problemlerinde, başlangıçtaki akışkanın akış fonksiyonu yine boyut analizine göre belirlenmektedir. Orjinal denklemin benzerlik analizinin yapılabilmesi için bu akışkanın formunun hangi yapıda olması gerektiği sorusu literatürdeki

beşinci bölümde tek tabakalı sığ su denklemleri Lie grup analizi altında incelenmiştir. Ayrıca beşinci bölümde Lie grup analizi kullanılarak denklemlerin indirgenmiş formları bulunmuş ve benzerlik dönüşümleri yardımıyla benzerlik çözümleri sayısal ve analitik olarak elde edilmiştir.

2. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARI

2.1 Tek Tabakalı Sıg Su Denklemlerinin Elde Edilmesi

Akışkanlar mekaniğinin en genel denklemleri kütle , momentum ve enerji korunum yasalarını temsil eden denklemlerdir [36]. x konum vektörü ve t zaman olmak üzere herhangi bir noktadaki akışkanın hızı $u(x, t)$ fonksiyonu ile ifade edilir. Akışkanın yoğunluğu (birim hacim başına düşen kütlesi) $\rho(x, t)$ olmak üzere akışkanın herhangi noktadaki basıncı $P(x, t)$ ile gösterilir. $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $P(x, t)$ fonksiyonları sürekli ve diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Ayrıca akışkanın birim kütlesine etki eden kuvvet $F(x, t)$ olmak üzere F korunumlu bir kuvvet ise $F \equiv \nabla\varphi$ olacak şekilde bir φ potansiyel fonksiyonu vardır.

Kütle korunum yasalarını temsil eden süreklilik denklemleri

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

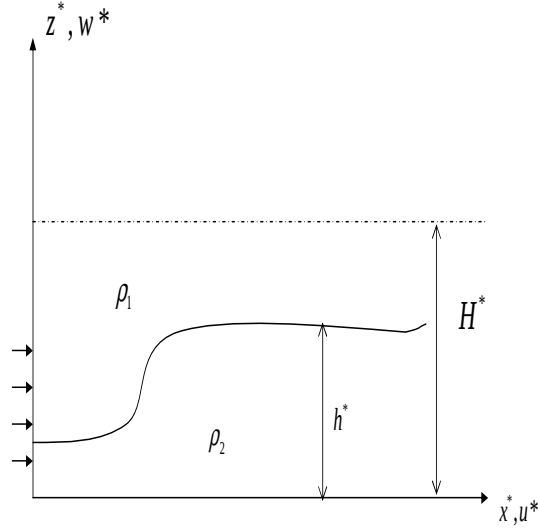
ve momentum korunum yasalarını temsil eden denklemler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \cdot \nabla \varphi + F(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.2)'de ifade edilen $F(\mathbf{u})$ akışkana etkiyen korunumsuz bir kuvveti temsil etmektedir. Burada $\frac{D}{Dt}$ maddesel türev olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \quad (2.3)$$

Bu çalışma içerisinde, sabit hacimli ρ_1 yoğunluklu bir akışkanın içerisinde $\rho_1 < \rho_2$ olacak şekilde ρ_2 yoğunluklu bir akışkan girişi yapıldığı ve akışkanların birbirine karışmadığı varsayılmıştır.



Şekil 1: Tek Tabakalı Yerçekimi Akımı

H^* toplam derinliği, h^* tabandaki akışkanın derinliği, P^* toplam basınç (P_1^* yüzeydeki basınç ve P_2^* akışkanlar arasındaki basınç), $u^* = (u^*, w^*)$ olmak üzere u^* yatay eksen boyuncaki akışkanın hızı, w^* eksenel yöndeki akışkanın hızını göstermektedir. $t^* > 0$ ve $x^* = 0$ konumunda bir kaynak tarafından akımın sürekliliğinin sağlandığı varsayılırsa, q_0 akışkanın başlangıçtaki hacmi olmak üzere oluşan yerçekimi akımının toplam hacmi $q(t^*) = q_0 f(t^*)$ [23] şeklinde gösterilsin. Akımın son konumu $x_f(t^*)$ ile gösterildiği takdirde

$$\int_0^{x_f(t^*)} h^*(x^*, t^*) dx^* = q_0 f(t^*) \quad (2.4)$$

olur. $t^* > 0$ ve $x^* = 0$ konumunda değişken akımlı bir kaynağın olmadığı durum düşünüldüğü takdirde $q(t^*) = q_0$ olacaktır. Yukarıda Şekil 1’de ele aldığımız model için yüzeyde her yerde basınç aynı ve sabit olduğundan akışkanın yüzeyi denge konumundadır. Yerçekimi akımlarında akışkanın birim kütesine etki eden kuvvet yerçekimi olduğundan; $F \equiv (0, 0, -g)$ şeklindedir. Yoğunluk farkları $\Delta\rho$ ile gösterilmek üzere $\frac{\Delta\rho}{\rho}g$ ifadesine indirgenmiş yerçekimi denir ve $\acute{g}$ ile gösterilir. Ayrıca ele aldığımız model için akışkanlar sıkıştırılmaz olduğundan akışkanın yoğunluğu her yerde sabittir ve dolayısıyla zamana karşı bir değişim göstermez.

Yerçekimi akımları üzerinde yapılan araştırmalarda hiperbolik sıg su denklemlerinden yararlanılmaktadır. Sıg su teorisinde; akışkanın derinliğinin akışkanın yatay olarak kapladığı genişlikten oldukça küçük olması yaklaşımı

geçerlidir ve h_0 akışkanın derinliği, L akışkanın yatay olarak uzunluğu olmak üzere $\delta = \frac{h_0}{L}$, $\delta \ll 1$ [37] kabulü geçerlidir. δ parametresi sığ su parametresi olarak isimlendirilir. Yerçekimi akımı modellendiğinde ortaya çıkan denklemler hiperbolik sığ su denklemleridir. Bu çalışmada değişken akımlı yerçekimi akımları tek tabakalı sığ su denklemleri ele alınarak incelenmiştir. Bu çalışma içerisinde için viskozite ve yüzeydeki gerilmeler ihmal edilmiştir. Bu durumda söz konusu yerçekimi akımının kütle korunumu denkleminde

$$\frac{D\rho}{Dt^*} + \rho \cdot \nabla \cdot u^* = 0 \quad (2.5)$$

akışkanın sıkıştırılmaz olduğu kabulü kullanılırsa $\frac{\partial \rho}{\partial t^*} = 0$ ve $\nabla \cdot u^* = 0$ elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.6)$$

bulunur ve (2.6) denklemini z^* 'a göre integre edilecek olursa

$$w^*(x^*, z^*, t^*) = -z^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \widetilde{w}^*(x^*, t^*) \quad (2.7)$$

elde edilir.

Ayrıca akışkanın $z^* = h^*$ 'daki kinematik koşulu

$$w^*(x^*, z^*, t^*) = \frac{Dh^*}{Dt^*} \quad (2.8)$$

ve $z^* = 0$ 'daki kinematik koşulu

$$\widetilde{w}^*(x^*, t^*) = 0 \quad (2.9)$$

şeklindedir. Buradan (2.8-9) denklemleri (2.7)'de yerine koyulduğu takdirde

$$-h^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla h^* \quad (2.10)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + h^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.11)$$

denklemini elde edilir.

Momentum korunum denklemleri ise $u^* = (u^*, w^*)$ olmak üzere

$$\rho \frac{Du^*}{Dt^*} = -\nabla P^* - \rho g \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^* - g \quad (2.13)$$

şeklindedir.

Yerçekimi akımlarında akışkanların yoğunluk farklarının küçük varsayıldığı Bousinesq yaklaşımına göre, yoğunluk farkını gösteren $\Delta\rho$ terimi ihmal edilebilirken bu terimin yerçekimi g ile çarpımıyla elde edilen $(\Delta\rho)g$ teriminin dikkate alınması gerekmektedir.

Şekil 1 ile gösterilen yerçekimi akımı için yüzeydeki basınç her yerde aynıdır. Ayrıca ele alınan modelde akışkanlar arasında oluşan tabakadaki basıncı $P_2^*(x^*, z^*, t^*)$ olarak alırsak,

$$P_2^*(x^*, z^*, t^*) = -\rho_2 g z^* + \widetilde{P}_2(x^*, t^*) \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{P}_2(x^*, t^*)$ dinamik basıncı göstermektedir. $z^* = h^*$ için, basıncın hidrostatik olması nedeniyle dinamik koşul $P_2^* = P_1^*$ şeklinde olacağından

$$P_2^*(x^*, h^*, t^*) = -\rho_1 g h^* \quad (2.15)$$

olmak üzere $\widetilde{P}_2(x^*, t^*)$ dinamik basıncı

$$-\rho_2 g h^* + \widetilde{P}_2^*(x^*, t^*) = -\rho_1 g h^* \quad (2.16)$$

$$\widetilde{P}_2^*(x^*, t^*) = (\rho_2 - \rho_1) g h^* \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $(\rho_2 - \rho_1)g$ ifadesi yerine $\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g \rho_2$ yazıldığı takdirde

$$\widetilde{P}_2^*(x^*, t^*) = \rho_2 \acute{g} h^* \quad (2.18)$$

olur. Ayrıca basıncın hidrostatik olmasından dolayı akışkanın yatay eksen boyuncaki hızı u^* , z^* 'dan bağımsız olup $u^* = u^*(x^*, t^*)$ şeklindedir. Bu durumda Momentum denklemi (2.13) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \widetilde{P}_2^*}{\partial x^*} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.15) ifadesi kullanılarak (2.19) denkleminde

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \acute{g} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.20)$$

elde edilir.

Dolayısıyla (2.11) ve (2.20) denklemlerinden oluşan bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi tek tabakalı sığ su denklemleri olarak isimlendirilir.

Bu çalışmada, sabit hacimli ve değişken akımlı olmak üzere iki farklı model üzerinde çalışılmıştır. Ele alınan her iki model için (2.11) ve (2.20) denklemlerinden oluşan sığ su denklemleri kullanılmıştır.

Değişken bir akımın olduğu durumda: $x^* = 0$ 'da , değişken bir akımlı bir kaynak tarafından üretilen yerçekimi akımı problemi ele alınmıştır. Bu durumda sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$t^* > 0, u(0, t^*) = R(t^*), h(0, t^*) = S(t^*) \quad (2.21)$$

Değişken bir akımın olmadığı durumda: Sabit hacimli ρ_2 yoğunluklu bir akışkanın daha az yoğun olan ρ_1 yoğunluklu bir akışkan içerisine yerçekimi etkisiyle akması sonucunda meydana gelen akım problemi incelenmiştir. Bu durumda sınır koşulu

$$u(0, t^*) = 0, \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde alınmıştır.

2.1.1 Boyutsuzlaştırma

Akışkanlar mekaniğinde elde edilen modellerin fizik ve mühendislik gibi birçok alanda kullanılabilmesi için modelin sahip olduğu yönetici denklemlerin birimlerinin genel bir yapıya sahip olması gerekir. Kullanılan birim sistemlerinin çeşitliliğinden kaynaklanan karışıklığın giderilebilmesi için bazı genel parametreler kullanılmaktadır. Bu parametreler sayesinde ele alınan yönetici denklemler tüm birim sistemleri için rahatlıkla uygulanabilir hale gelir. Kullanılan bu parametrelere boyutsuz değişkenler adı verilir. Örneğin zaman, uzunluk gibi birimler yeni bir ölçeklendirme yardımıyla boyutsuz hale getirilebilir. Yapılan bu işleme boyutsuzlaştırma denir. Dolayısıyla yönetici denklemlerdeki tüm değişkenler için yeni notasyonlar tanımlanarak tüm değişkenler boyutsuz hale getirilebilir.

Tek tabakalı sığ su denklemlerinin terimleri boyutsuzlaştırılmak istenirse öncelikle modelin yönetici denklemlerinde kullanılan değişkenlerin yeni boyutsuz değişkenler cinsinden yazılması gerekir. Dolayısıyla yeni bir notasyonun kullanılması gerekir [26].

Bu boyutsuz büyüklükler

$$\begin{aligned} u^* &= Uu, & x^* &= Lx, & z^* &= h_0z, & h^* &= h_0h \\ t^* &= \frac{L}{U}t, & \widetilde{P}_i^* &= U^2 \rho_i \widetilde{P}_i, & w^* &= \frac{Uh_0}{L}w, & U^2 &= gh_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlansın. (2.23) ile gösterilen boyutsuz büyüklükler cinsinden yazılarak tek tabakalı sığ su denklemleri boyutsuzlaştırılabilir.

(2.11) ve (2.20) denklemlerinin boyutsuzlaştırılması sonucunda

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

denklemleri elde edilir.

Bu çalışma içerisinde (2.24), (2.25) denklem sistemi için

Değişken bir akımın olduğu durumda:

$$t > 0, u(0, t) = R(t), h(0, t) = S(t) \quad (2.26)$$

şeklindeki sınır koşulu,

Değişken bir akımın olmadığı durumda:

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.27)$$

şeklinde gösterilen (2.27) sınır koşulu ele alınmıştır.

3. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARININ BOYUT ANALİZİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

Bu bölümde $x = 0$ 'da değişken akımlı bir kaynak tarafından üretilen yerçekimi akımının benzerlik çözümleri boyut analizi kullanılarak elde edilmeye çalışılmıştır. Boyut analizi altında yapılan tüm çalışmalarda benzerlik değişkeni $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ formunda ele alınmıştır. δ sayısal bir sabit olmak üzere benzerlik değişkeninin bu formu boyut analizi yaklaşımından gelmektedir ve bize orjinal diferansiyel denklem sisteminin sadece tek bir özel formda olan indirgenmiş yapısını elde etmemize imkan vermektedir. Boyut analizi deneysel ölçümlerde bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki karmaşık ifadeleri belirlemekte kullanılan bir yöntemdir. Ölçülen fiziksel büyüklükler bir boyut ve bu boyutun standart birimi cinsinden ifade edilen bir şiddete sahiptirler. Eğer bir olay n adet boyutlu değişkene dayanıyorsa boyut analizi bu olayı $k < n$ olmak üzere k adet boyutsuz değişkene indirgeyecektir. Boyut analizi tekniği boyutsal homojenlik kanununa dayanır. Boyutsal homojenlik kanununa göre bir fiziksel işlemde bir eşitlik, değişkenler arasında uygun bir bağıntı ifade ediyorsa boyutsal olarak homojen olacaktır.

Akışkanlar mekaniğinde sonsuz sayıda boyutsuz değişken üretilebilir. En çok kullanılanlar aşağıda belirtilmiştir:

Reynolds sayısı: 1880'lerde İngiliz mühendis Osborne Reynolds tarafından bulunmuştur. Reynolds sayısı, eylemsizlik kuvvetlerinin vizkosite kuvvetlerine oranı şeklindedir. U akışkanın karakteristik hızı, L uzunluk, ν akışkanın kinematik hızını göstermek üzere Reynolds sayısı

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Froude sayısı: İngiliz deniz subay William Froude ve oğlu Robert Edmund Froude'un birlikte keşfettikleri Froude sayısı eylemsizlik kuvvetlerinin yerçekimi

kuvvetlerine oranı şeklinde ifade edilir.

U akışkanın karakteristik hızı, g yerçekimi ivmesi, H akışkanın karakteristik derinliğini göstermek üzere

$$\mathfrak{F} = \frac{U}{\sqrt{gH}} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanmış olup akımlarda serbest yüzey etkileri için çok önemlidir.

Weber sayısı: (We), Eylemsizlik kuvvetlerinin yüzey gerilim kuvvetlerine oranıdır.

Bu boyutsuz sayılar sistemlerin benzerliği için kullanılır. Örneğin, sürtünme kuvvetlerinin önemli olduğu yerlerde Reynolds sayısı, yerçekimi kuvvetlerinin önemli olduğu yerlerde ise Froude sayısı kullanılır. Bu çalışmada yerçekimi akımlarından bahsedildiğinden dolayı Froude sayısı kullanılmıştır. Boyut analizi tekniğiyle ele alınan sistemin benzerlik dönüşümleri elde edilir ve daha sonra bu benzerlik dönüşümleri kullanılarak benzerlik çözümleri araştırılır.

Bu bölümde benzerlik değişkeni, β bir sabit sayı olmak üzere $\zeta = \frac{x}{Kt^{1/\beta}}$ formunda ele alınarak tek tabakalı sıg su denklemlerinin benzerlik çözümleri boyut analizi kullanılarak incelenmiştir. Boyut analizi tekniğiyle değişken dönüştürülmesi yapılarak tek tabakalı sıg su denklemlerinin değişmez denklemleri elde edilmiştir. (2.24) ve (2.25) denklemleri için $0 < \lambda < \infty$ ve α, β, γ boyutsuz sayılar olmak üzere $\tilde{u}(\zeta) = \lambda^\gamma u(x, t)$, $\tilde{h}(\zeta) = \lambda^\alpha h(x, t)$, $t' = \lambda^\beta t$, $x' = \lambda x$ şeklinde değişken dönüştürmesi yapılsın. Yeni değişkenler cinsinden denklemler yazıldığı takdirde (2.24) 'den,

$$\lambda^{-\alpha+\beta} \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-\gamma-\alpha+1} \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-\gamma-\alpha+1} \tilde{h}(\zeta) \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliğinin sağlanabilmesi λ 'ların herbirinin kuvveti birbirine eşit olmalıdır. Dolayısıyla α, β, γ sabitleri arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$-\alpha + \beta = -\gamma - \alpha + 1 \quad (3.4)$$

$$\gamma + \beta = 1 \quad (3.5)$$

Aynı şekilde (2.25)'ten,

$$\lambda^{-\gamma+\beta} \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-\gamma-\gamma+1} \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-\alpha+1} \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$-\gamma + \beta = -2\gamma + 1 = -\alpha + 1 \quad (3.7)$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 1 \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.5) ifadesi (3.8)'de yerine konulduğunda ise

$$\alpha = 2\gamma \quad (3.9)$$

elde edilir.

Uygulanan benzerlik dönüşümleri yardımıyla boyut analizinde alınan benzerlik değişkenlerinin genel formuna ulaşılabilmektedir. Benzerlik değişkeni $\zeta = \frac{x}{Kt^{1/\beta}}$ alınsın. Bu durumda $\tilde{u}(\zeta) = \lambda^\gamma u(x, t)$, $\tilde{h}(\zeta) = \lambda^\alpha h(x, t)$ ifadelerinden $u(x, t)$, $h(x, t)$ fonksiyonları yeni değişkenler cinsinden yazıldığı takdirde;

$$u(x, t) = t^{-\gamma/\beta} \tilde{u}\left(\frac{x}{Kt^{1/\beta}}\right), \quad h(x, t) = t^{-\alpha/\beta} \tilde{h}\left(\frac{x}{Kt^{1/\beta}}\right) \quad (3.10)$$

elde edilir.

Değişken bir akımın olmadığı durumda: Sabit hacimli yerçekimi akımı problemi incelendiğinde, $x = 0$ 'da değişken bir akım kaynağının olmadığı varsayılarak $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}\big|_{x=0} = 0$ alınabilir. Buradan $\lambda^{-\gamma} \tilde{u}(0) = 0$ alınabilir. $\alpha = 1$ için (3.8) ve (3.9) eşitliklerinden $\beta = -\frac{3}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ olarak bulunur ve (3.10)'dan

$$u(x, t) = t^{-1/3} \tilde{u}\left(\frac{x}{Kt^{2/3}}\right), \quad h(x, t) = t^{-2/3} \tilde{h}\left(\frac{x}{Kt^{2/3}}\right), \quad \zeta = \frac{x}{Kt^{2/3}} \quad (3.11)$$

elde edilir. $u(x, t)$ ve $h(x, t)$ 'nin x ve t 'ye göre türevleri

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{3} t^{-4/3} \tilde{u}(\zeta) - \frac{2}{3} \frac{x}{K} t^{-6/3} \tilde{u}'(\zeta) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{t^{-1}}{K} \tilde{u}'(\zeta) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\frac{2}{3} t^{-5/3} \tilde{h}(\zeta) - \frac{2}{3} \frac{x}{K} t^{-7/3} \tilde{h}'(\zeta) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{t^{-4/3}}{K} \tilde{h}'(\zeta) \quad (3.15)$$

şeklindedir. (3.12-15) denklemleri kullanılarak (2.24) denkleminde

$$t^{-5/3}[-\frac{2}{3}\tilde{h}(\zeta) - \frac{2}{3}\frac{x}{K}t^{-2/3}\tilde{h}'(\zeta) + \frac{1}{K}\tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K}\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}'(\zeta)] = 0 \quad (3.16)$$

$$-\frac{2}{3}\frac{d}{d\zeta}(\zeta\tilde{h}(\zeta)) + \frac{1}{K}\frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}(\zeta)) = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir ve (3.16) denklemi, (2.27) sınır koşulu altında incelendiği takdirde

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{2}{3}K\zeta \quad (3.18)$$

bulunur.

(3.12-15) ve (3.17) denklemlerinden yararlanılarak (2.25) denklemi

$$t^{-4/3}[-\frac{1}{3}\tilde{u}(\zeta) - \frac{2}{3}\frac{x}{K}t^{-2/3}\tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K}\tilde{u}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K}\tilde{h}'(\zeta)] = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde bulunur ve (2.27) sınır koşulu altında

$$-\frac{2}{3}K\zeta - \frac{4}{9}K\zeta + \frac{4}{9}K\zeta + \frac{1}{K}\tilde{h}'(\zeta) = 0 \quad (3.20)$$

$$-\frac{2}{9}K\zeta = \frac{1}{K}\tilde{h}'(\zeta) \quad (3.21)$$

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{1}{9}K^2\zeta^2 + D \quad (3.22)$$

elde edilir. Böylece (2.24), (2.25) denklemlerinden oluşan denklem sisteminin (2.27) sınır koşulunu sağlayan (3.18) ve (3.22) şeklinde benzerlik çözümleri elde edilmiş olur. Genel olarak literatürde boyut analizi yaklaşımı kullanılarak elde edilen benzerlik çözümleri A, B, C, D birer sayısal sabit olmak üzere

$$\tilde{u}(\zeta) = A\zeta + B, \quad \tilde{h}(\zeta) = C\zeta^2 + D \quad (3.23)$$

formundadır. (3.18) ve (3.22) ifadeleri de bu genel forma uygundur.

Değişken bir akımın olduğu durumda: (2.26) sınır koşulu için $u(0, t) = u_0$ ve $h(0, t) = h_0$ olduğu varsayılın. $\alpha = 0$ ve $K = 1$ için (3.8) ve (3.9) eşitliklerinden $\beta = 1, \gamma = 0$ elde edilir ve (3.10) ile gösterilen değişkenler

$$u(x, t) = \tilde{u}(\frac{x}{t}), \quad h(x, t) = \tilde{h}(\frac{x}{t}), \quad \zeta = \frac{x}{t} \quad (3.24)$$

olarak bulunur. Buradan $u(x, t)$ ve $h(x, t)$ 'nin x ve t 'ye göre türevleri

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}\tilde{u}'(\zeta), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{t}\tilde{u}'(\zeta) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}\tilde{h}'(\zeta), \quad \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{t}\tilde{h}'(\zeta) \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir, buradan (2.24) ve (2.25)'dan oluşan lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin boyut analizi yaklaşımı kullanılarak

$$\tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - \zeta]\tilde{h}'(\zeta) = 0 \quad (3.27)$$

$$[\tilde{u}(\zeta) - \zeta]\tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) = 0 \quad (3.28)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgendiği görülür. $\tilde{u}(\zeta)$ ve $\tilde{h}(\zeta)$, boyut analizi yaklaşımında kullanılan (3.23)'te gösterilen genel formlar gözönüne alınarak A_0, A_1, B_0, B_1, B_2 'ler birer sayısal sabit olmak üzere

$$\tilde{u}(\zeta) = A_0 + A_1\zeta, \quad \tilde{h}(\zeta) = B_0 + B_1\zeta + B_2\zeta^2 \quad (3.29)$$

şeklinde alınsın. (3.27) ve (3.28)'de yerine konulduğu takdirde

$$(-2B_2 + 3A_1B_2)\zeta^2 + (2B_1A_1 - B_1 + 2B_2A_0)\zeta + B_0A_1 + A_0B_1 = 0 \quad (3.30)$$

$$(-A_1 + A_1^2 + 2B_2)\zeta + A_0A_1 + B_1 = 0 \quad (3.31)$$

olur. Bu eşitliklerin gerçekleşebilmesi ζ kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Buradan

$$B_0A_1 + A_0B_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$A_0A_1 + B_1 = 0 \quad (3.33)$$

$$2B_1A_1 - B_1 + 2B_2A_0 = 0 \quad (3.34)$$

$$-A_1 + A_1^2 + 2B_2 = 0 \quad (3.35)$$

$$-2B_2 + 3A_1B_2 = 0 \quad (3.36)$$

elde edilir. $A_0 = u_0$ ve $B_0 = h_0$ olması durumunda (3.32) ve (3.33)'den $A_1 \neq 1$ için

$$h_0 = u_0^2 \quad (3.37)$$

elde edilir. Ayrıca (3.34),(3.36) eşitliklerinden

$$B_1 = \frac{A_1 - A_1^2}{1 - 2A_1} u_0 \quad (3.38)$$

ve (3.35)'ten

$$B_2(-2 + 3A_1) = 0 \quad (3.39)$$

elde edilir. $B_2 \neq 0$ için $A_1 = \frac{2}{3}$ olur. Buradan $B_1 = -\frac{2}{3}u_0$, $B_2 = \frac{1}{9}$ olmak üzere

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{2}{3}\zeta + u_0, \quad \tilde{h}(\zeta) = \frac{1}{9}\zeta^2 - \frac{2}{3}u_0 + h_0 \quad (3.40)$$

bulunur. $B_2 = 0$ için (3.34-35) ile gösterilen eşitlikler ele alındığında sırasıyla

$$B_1(2A_1 - 1) = 0, A_1(A_1 - 1) = 0 \quad (3.41)$$

bulunur. $A_1 = 1$ için $B_1 = 0$ bulunur. (3.32), (3.33)'ten $B_0 = 0$ ve $A_0 = 0$ olur fakat bu koşullar $u_0 = 0$ ve $h_0 = 0$ olması durumunda (3.27) ve (3.28) denklemleri için bir çözüm oluşturmaktadır.

$B_2 = 0$ için $A_1 = 0$ alındığında (3.33) ve (3.34)'den $B_1 = 0$ bulunur, buradan

$$\tilde{u}(\zeta) = u_0, \quad \tilde{h}(\zeta) = h_0 \quad (3.42)$$

elde edilir.

Değişken bir akımın olduğu durumda: Değişken akıma sahip bir kaynak olduğu düşünülün, bu durumda $\sigma \geq 0$ bir sayısal sabit olmak üzere zaman içerisinde giren akışkanın hacim değişimi t^σ şeklinde ifade edilebilir. Boyut analizinde sınır koşullarına bağlı olarak Froude sayısı;

$$\mathfrak{F}_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \mathfrak{F} = \lim_{x \rightarrow 0} [u / \sqrt{gh}] \quad (3.43)$$

şeklinde alınır. $x = 0$ konumunda değişken akımlı kaynak tarafından akışkan girişi yapıldığı takdirde yerçekimi akımının toplam hacmi $q_\sigma t^\sigma$ şeklinde ifade edilebilir. Boyut analizi kullanılarak yapılan daha önceki çalışmalarda [30] benzerlik değişkeni tek bir formda $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ olarak alınmıştır. Buna bağlı olarak

$$u(x, t) = bt^{\delta-1} \delta\zeta \tilde{u}(\zeta), \quad h(x, t) = bt^{2\delta-2} \delta\zeta \tilde{h}(\zeta) \quad (3.44)$$

şeklinde bulunmuştur.

Benzerlik çözümlerinin sürekliliğini ve hidrolik sıçramaların varlığı incelenirken Froude sayısının sınır koşullarına göre aldığı değerler dikkate alınmaktadır.

Yerçekimi akımlarında Froude sayısının büyüklüğüne göre altkritik ve süperkritik durumların varlığından söz edilir. Eğer akış hızı oluşan dalga hızından daha büyükse yani $\mathfrak{F}_0 > 1$ ise yerçekimi dışında akıma etkiyen kuvvetlerin daha baskın olduğu anlaşılır ve bu duruma süperkritik durum denir. Eğer $\mathfrak{F}_0 < 1$ ise yerçekimi kuvveti akım üzerindeki en baskın kuvvet demektir ve bu duruma ise altkritik durum denmektedir. Gratton ve Vigo [30] çalışmalarında tek tabakalı sığ su denklemleri için benzerlik çözümlerini sayısal integrasyon kullanarak elde etmişlerdir. $\mathfrak{F}_0$ =sabit ve $x = 0$ konumunda değişken akımlı yerçekimi akımlarının benzerlik çözümlerini süperkritik ve altkritik durumlar altında incelemişler ve $p = \frac{1}{3}(\sigma - 1) = \delta - 1$ olmak üzere

$$u(x = 0, t) = t^p \tilde{u}(\zeta), \quad h(x = 0, t) = t^{2p} \tilde{h}(\zeta) \quad (3.45)$$

şeklinde alınmıştır, $\sigma = \frac{5}{2}$ ve $\sigma = \frac{1}{4}$ için t^σ şeklindeki bir değişken akım için varolan benzerlik çözümleri üzerinde çalışmışlardır.

4. LİE DÖNÜŞÜM GRUPLARI

4.1 Lie Gruplarının Temel Özellikleri

Grup, elemanları arasında dört aksiyom gerçekleyen bir işlemin tanımlandığı bir kümedir. Bu işlem, grubun sıralanmış iki elemanı ile başka bir elemanı eşleştirir. Sembolik olarak işlem φ ile gösterilecek olursa a ve b bir grubun herhangi iki elemanı olmak üzere $\varphi(a, b)$ işlemin bu ikiliyle eşleştirdiği yeni elemanı gösterir. Üzerinde herhangi bir işlem tanımlanmış küme grup oluşturmaz. Çünkü bir kümenin bir işlem ile bir grup oluşturması için işlemin bazı özelliklerinin bulunması gerekir. Bu özelliklerden biri kapalılık özelliğidir, G herhangi bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $\varphi(a, b) \in G$ ise bu işlemin kapalılık özelliği vardır denir. Bir gruba ait işlemin sağlaması gereken ikinci özelliği birleşme özelliğidir. Sembolik olarak birleşme özelliği a, b ve c herhangi elemanlar olmak üzere $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$ şeklinde ifade edilebilir. Diğer sağlaması gereken özelliklerden biri de grubun birim elemanının mevcut olmasıdır, G 'nin e gibi bir birim elemanı vardır öyleki her $a \in G$ için $\varphi(a, e) = \varphi(e, a) = e$ olmalıdır. Grup işleminin sağlaması gereken son özellik ise her elemanın bir tersinin bulunması zorunluluğudur. Bir a elemanının tersi a^{-1} ile gösterilecek olursa işlem $\varphi(a, a^{-1}) = \varphi(a^{-1}, a) = e$ bağıntısını gerçekler.

Cebirin çok kullanılan bir kavramı olan grup kavramı geometrik bir yapıyla birleştirilerek tanımlanmak istenirse dönüşüm grubu kavramıyla karşılaşılır.

D , n boyutlu Öklid nokta uzayında bir manifold, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ bu bölgede tanımlı bir nokta olsun. Eğer D 'de tanımlı her $\mathbf{x}$ için, $S \subset \mathbb{R}$ kümesine ait bir ε parametresine bağlı ve S 'deki ε, θ parametreleri arasında $\varphi(\varepsilon, \theta)$ işlemli $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ dönüşümler kümesi

- (i) S 'deki her ε parametresi için dönüşümler birebir ve üzerine ve $x^* \in D$ üzerinde,
- (ii) (S, φ) bir grup olmak üzere,

(iii) $\varepsilon = e$ ise $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$. Yani $X(\mathbf{x}, e) = \mathbf{x}$,

(iv) $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, e)$, $\mathbf{x}^{**} = X(\mathbf{x}^*, \theta)$ ise bu durumda $\mathbf{x}^{**} = X(\mathbf{x}, \varphi(\varepsilon, \theta))$

koşullarını sağlarsa D üzerinde bir dönüşümler grubu oluşturur demektir. Eğer bir dönüşüm grubu aşağıdaki üç ek koşulu da sağlarsa bir Lie dönüşüm grubu tanımlar.

(v) ε sürekli bir parametredir, S kümesi reel ekseninde bir aralıktır.

(vi) X , D 'de sonsuz diferansiyellenebilirdir ve S 'de ise ε 'nın analitik bir fonksiyonudur.

(vii) $\varepsilon, \theta \in S$ olmak üzere $\varphi(\varepsilon, \theta)$, ε ve θ 'nın analitik bir fonksiyonudur.

Birim elemanı $e = 0$, φ işlemiyle tanımlı

$$\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon) \quad (4.1)$$

şeklinde bir Lie dönüşüm grubunu ele alalım. (4.1)'i $\varepsilon = 0$ civarında

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}; \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{x}; \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots \\ &= \mathbf{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}; \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

serisine açıldığında

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}; \varepsilon) \quad (4.3)$$

olsun. $\mathbf{x} + \varepsilon \xi(\mathbf{x})$ dönüşümüne (4.1) Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük dönüşümü, $\xi(\mathbf{x})$ 'in bileşenlerine de $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçükleri denir. Diğer taraftan,

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.4)$$

operatörüne Lie grubunun sonsuz küçük üretici denir.

Yardımcı teorem 4.1.1:

$$X(\mathbf{x}; \varepsilon + \Delta \varepsilon) = X(X(\mathbf{x}; \varepsilon); \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta \varepsilon)) \quad (4.5)$$

Teorem 4.1.2 (Lie'nin birinci temel teoremi):[11] $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ Lie dönüşüm grubunun

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\Gamma} = \xi(\mathbf{x}^*) \quad (4.6)$$

$$\Gamma = 0, \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanan bir başlangıç değer problemine denk olduğu bir $\Gamma(\varepsilon)$ parametrelemesi vardır. Özel olarak

$$\Gamma(\varepsilon) = \left. \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right|_{(a, b) = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)} \quad (4.8)$$

ve $\Gamma(0) = 1$ olmak üzere

$$\Gamma(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (4.9)$$

dir.

İspat 4.1.2: Önce (4.5)'te bahsedilen $X(\mathbf{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ ve $\varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ ifadeleri $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seriye açıldığında

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \mathbf{x}^* + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}; \varepsilon) \Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \frac{\partial \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= \Gamma(\varepsilon) d\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur. (4.5)'in sağ tarafı da $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seriye açıldığında

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= X(\mathbf{x}; \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= X(\mathbf{x}; \Gamma(\varepsilon) \Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2)) \\ &= X(\mathbf{x}; 0) + \frac{\partial X}{\partial \theta}(\mathbf{x}^*; \theta) \big|_{\theta=0} \Gamma(\varepsilon) \Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= \mathbf{x}^* + \Gamma(\varepsilon) \xi(\mathbf{x}^*) \Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) ifadeleri eşitlendiğinde $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ dönüşümünün

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon) \xi(\mathbf{x}^*) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}, \varepsilon = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde verilen bir başlangıç değer problemini sağladığı görülür. (4.2)'den $\Gamma(0) = 1$ çıkar ve $\Gamma(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon'$ parametrelemesi (4.6) ve (4.7) ifadelerini verir.

$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, ($i = 1, 2, \dots, n$), sürekli olduğundan dolayı birinci mertebeden başlangıç değer probleminin varlık ve teklik teoreminden (4.6), (4.7) ve (4.12)'nin çözümleri vardır ve tektir. Bu çözümde (4.1) olmalıdır. Lie'nin birinci temel teoremi gösteriyorki; bir parametrelili Lie dönüşüm grubu sonsuz küçüklerine göre belirlenir.

Verilen bir grup Γ_1 ve Γ_2 parametreleri ile bir φ işlemi $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \Gamma_1 + \Gamma_2$ olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir. Lie'nin birinci temel teoremi göstermektedir ki; (4.1) Lie dönüşümler grubu (4.6), (4.7) ile tanımlanan sabit bir akış tanımlar, üstelik herhangi (4.6), (4.7) sabit akışı bir-parametrelili Lie dönüşümler grubu tanımlar. Ayrıca bir diferansiyel denklemin çözümlerini, aynı denklemin çözümlerine götüren Lie dönüşüm gruplarına o diferansiyel denklemin simetri grupları denmektedir.

Tanım 4.1.1: $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, \varepsilon)$ bir-parametrelili Lie dönüşümler grubunun sonsuz küçük üretici

$$X = X(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})\nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.14)$$

şeklinde bir operatördür. Burada ∇ gradyent operatörü; $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferansiyellenebilen fonksiyonu için $X\mathbf{x} = \xi(\mathbf{x})$ olmak üzere

$$XF(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})\nabla F(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (4.15)$$

dir.

4.2 Değişmez (İnvariant) Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1: Sonsuz diferansiyellenebilen bir $F(\mathbf{x})$ fonksiyonunun herhangi bir (4.1) Lie dönüşüm grubunun değişmez bir fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x})$ olmasıdır. Dolayısıyla $F(\mathbf{x})$ 'e bu dönüşümün değişmez fonksiyonudur denir. Ayrıca $F(\mathbf{x})$ sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise (4.4) üreticili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ Lie dönüşüm grubu için $F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\varepsilon X}\mathbf{x}) = e^{\varepsilon X}F(\mathbf{x})$ dir.

Teorem 4.2.1: Lie dönüşüm grubu altında $F(\mathbf{x})$, $XF(\mathbf{x}) \equiv 0$ olması durumunda değişmezdir.

Tanım 4.2.2: Bir D bölgesinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatları üzerinde uygun bir

değişken dönüşümü yardımı ile bir-parametrelî dönüşüm grubunun tanımladığı dönüşüm her zaman,

$$y_i^* = y_i, i = 1, \dots, n-1 \quad (4.16)$$

$$y_n^* = y_n + \varepsilon \quad (4.17)$$

biçimine dönüştürülebilir. $y_1, y_2, \dots, y_n$ koordinatlarına Lie grubu ile ilgili kanonik koordinatlar denir. $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$ olmak üzere

$$Y = \sum_{i=1}^n \eta(y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (4.18)$$

şekline dönüşür. (4.19), $\mathbf{y}$ koordinatlarına göre sonsuz küçük üreteç olmak üzere

$$\eta(\mathbf{y}) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \dots, \eta_n(y)) = Y\mathbf{y} \quad (4.19)$$

dir. Aynı grup etkisini elde etmesi için $Y = X$ olması gerekir. Buradan $\eta(\mathbf{y}) = X\mathbf{y}$ elde edilir.

4.3 Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler, Değişmez Noktalar

Tanım 4.3.1: Bir $F(\mathbf{x}) = 0$ yüzeyi ancak ve ancak, $F(\mathbf{x}) = 0$ iken $F(\mathbf{x}^*) = 0$ oluyorsa bir-parametrelî Lie dönüşüm grubu altında bir değişmez yüzeydir.

Tanım 4.3.2: Bir $F(x, y) = 0$ eğrisi ancak ve ancak, $F(x, y) = 0$ iken $F(x^*, y^*) = 0$ oluyorsa $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ üreteçli

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (4.20)$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (4.21)$$

Lie dönüşüm grubu için değişmez bir eğridir.

Tanım 4.3.3: Bir $\mathbf{x}$ noktası ancak ve ancak (4.1) Lie dönüşüm grubu altında $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ oluyorsa dönüşüm grubu için bir değişmez noktadır. Bir $\mathbf{x}$ noktası $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ Lie dönüşüm grubu için ancak ve ancak $\xi(\mathbf{x}) = 0$ oluyorsa değişmez noktadır.

Geometrik olarak bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesiyle, bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü ise bir yüzey ailesiyle ifade edilir. Bir dönüşüm grubu bir diferansiyel denklemin çözüm eğrisini başka bir çözüm eğrisine dönüştürüyorsa bu denklem tarafından kabul ediliyor denir. Özel olarak bir

diferansiyel denklem tarafından kabul edilen dönüşüm grubu, çözüm eğrilerini değişmez bırakmak zorundadır.

Tanım 4.3.4: $\omega(\mathbf{x}) = \text{sabit} = c$ yüzey ailesiyle ancak ve ancak $\omega(\mathbf{x}) = c$ iken $\omega(\mathbf{x}^*) = c^* = \text{sabit}$ olduğunda değişmez bir yüzey ailesidir.

Tanım 4.3.5: $\omega(x, y) = \text{sabit} = c$ eğri ailesiyle ancak ve ancak $\omega(x, y) = c$ iken $\omega(x^*, y^*) = c^*$ oluyorsa

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (4.22)$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (4.23)$$

dönüşüm grubu için değişmez bir eğri ailesidir. Bu tanımlardan, ε parametresi ve c nin C gibi bir fonksiyonu için $c^* = C(c, \varepsilon)$ bulunur. Genelliği bozmayacak şekilde $c^* \neq c$ kabul edilir aksi takdirde her yüzeyin kendisi bir değişmez yüzeydir.

4.4 Uzanımlar

Bir Lie grubunu verilen bir diferansiyel denklem sisteminin kabul etmesi durumunda Lie grubunun her üç değişken üzerinde etkisinin bilinmesi gerekir. Diğer taraftan üçüncü tip değişkenler, ikinci tip değişkenlerin birinci tip değişkenlere göre türevi olması bakımından gerçekte bağımsız büyüklükler olarak düşünülmemelidir. Bu bakımdan Lie grubunun sadece ilk iki tip üzerinde tanımlanmış olması gerekli ve yeterlidir. Lie grubunun üçüncü tip değişkenler üzerinde etkisini belirleyen uzanımları ilk iki tip değişken üzerinde etkisini belirleyen ifadesinden elde edilebilir. Lie grubunun bağımsız değişkenleri $\mathbf{x}$ ve bağımlı değişkenleri $\mathbf{u}$ ile gösterilecek olursa bu grubun sonsuz küçük üretici,

$$X = \sum \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \eta^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.24)$$

olarak verilirse, türevler üzerinde etkisini belirleyen uzanımları bu sonsuz küçük üreticiden doğrudan elde edilebilir. $\mathbf{u}$ bağımlı değişkeninin $\mathbf{x}$ bağımsız değişkenine göre her çeşit kısmi türevi $\mathbf{u}^1$ ile gösterilecek olursa $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^1)$ gibi bir fonksiyona uygulanması gereken sonsuz küçük üretici,

$$pr^1 X = X + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m (D_i \eta^\alpha - \sum_{j=1}^n u_j^\alpha D_i \xi^j) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} \quad (4.25)$$

yapısındadır. Burada

$$u_j^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u_j}, D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.26)$$

olur ve

$$pr^1 X - X = \sum \sum \eta_i^{\alpha(1)} \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} \quad (4.27)$$

tanımı yapılabilir. herhangi bir n . uzanımı için;

$$pr^n X - pr^{n-1} X = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \eta^{\alpha(n)}_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^\alpha} \quad (4.28)$$

elde edilir. Burada

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n}} \quad (4.29)$$

$$\eta^{\alpha(n)}_{i_1, i_2, \dots, i_n} = D_{i_n} \eta^{\alpha(n-1)}_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} - \sum_{j=1}^n u_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}j}^\alpha D_{i_n} \xi^j \quad (4.30)$$

olacaktır. Lie dönüşüm grupları çok parametrelidir de olabilir. Çok parametrelidir bir Lie dönüşüm grubunun da yaptığı dönüşüm yine $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ şeklinde gösterilebilir. Burada tek fark ε parametresi r bileşeni olan vektörel bir büyüklüktür. Böyle bir durumda parametre sayısına eşit sayıda sonsuz küçük üreteç ortaya çıkar. Bu sonsuz küçük üreteçler

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^n \xi_{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \alpha = 1, 2, \dots, r \quad (4.31)$$

şeklinde gösterilir. Aynı manifolda ait çeşitli parametrelere ilişkin sonsuz küçük üreteçler Lie parantezine göre aralarında kapalı bir Lie cebiri kurarlar. Burada Lie parantezi

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha \quad (4.32)$$

dır. Lie gruplarının diferansiyel denklemlerin mertebelerinin indirgenerek çözülmesinde başarılı bir şekilde kullanılabilmesi için bu gruplarla ilgili Lie cebirlerinin özel yapıda olmaları gerekir.

4.5 Lie Cebirleri

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve parametreler $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ olmak üzere r -parametrelidir $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ bir dönüşüm grubu olmak üzere parametrelerin φ işlemi

$$\varphi(\varepsilon, \theta) = (\varphi_1(\varepsilon, \theta), \varphi_2(\varepsilon, \theta), \dots, \varphi_r(\varepsilon, \theta)), \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \quad (4.33)$$

ile gösterilsin. $\varphi(\varepsilon, \theta)$ işlemi $\varepsilon = 0$ için $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_r = 0$ birim elemanına karşılık gelen grup aksiyomlarını sağlar. $\varphi(\varepsilon, \theta)$, tanım bölgesinde analitiktir.

r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$ Lie dönüşüm grubunun hem ε_α parametresine karşılık gelen X_α sonsuz küçük üretici (4.31)'deki gibidir.

Tanım 4.5.1: (4.31) ifadesiyle tanımlanmış $\{X_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$ üreteçli, r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \varepsilon)$, Lie dönüşüm grubu olsun. $\{X_\alpha\}$ ve $\{X_\beta\}$ operatörlerinin komutatörü

$$\begin{aligned} [X_\alpha X_\beta] &= X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha \sum_{i,j=1}^n [(\xi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi_{\beta j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &\quad - (\xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j})] \sum_{j=1}^n \eta_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklinde birinci mertebeden bir operatördür. Burada $\eta_j(\mathbf{x})$

$$\eta_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n [\xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\beta i}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i}] \quad (4.35)$$

dir ve $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.5.1 (Lie'nin İkinci Temel Teoremi):[11] Bir r -parametrelili Lie dönüşüm grubunun herhangi iki sonsuz küçük üreticinin Lie parantezi (komütatörü), yine sonsuz küçük bir operatördür. $[X_\alpha, X_\beta] = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, r$; burada $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$ katsayılarına yapı sabitleri denir. Herhangi $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ sonsuz küçük üreteçleri için

$$[X_\alpha[X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta[X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma[X_\alpha, X_\beta]] = 0 \quad (4.36)$$

Jacobi özdeşliği geçerlidir.

Teorem 4.5.2 (Lie'nin Üçüncü Temel Teoremi):[11] $[X_\alpha, X_\beta] = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ bağıntılarıyla tanımlanan yapı sabitleri,

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma = -\mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \quad (4.37)$$

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\rho \mathcal{C}_{\rho\gamma}^\sigma + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\rho \mathcal{C}_{\rho\alpha}^\sigma + \mathcal{C}_{\gamma\alpha}^\rho \mathcal{C}_{\rho\beta}^\sigma = 0 \quad (4.38)$$

denklemlerini sağlar.

Tanım 4.5.2 : Bir L Lie cebiri, Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $[X_\alpha, X_\beta] = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ ve

Jacobi özdeşliğini sağlayan toplamaya göre kapalı olan bir vektör uzayıdır. Özel olarak, r -parametrelili Lie dönüşüm grubunun $\{X_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$ sonsuz küçük üreteçleri $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in L_r$, $a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathbb{R}$ cismini üzerinde bir r -boyutlu L_r Lie cebiri oluşturur.

- (i) $aX_\alpha + bX_\beta \in L_r$;
- (ii) $X_\alpha + X_\beta = X_\beta + X_\alpha$;
- (iii) $X_\alpha + (X_\beta + X_\gamma) = (X_\alpha + X_\beta) + X_\gamma$;
- (iv) $[X_\alpha, X_\beta] \in L_r$;
- (v) $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$;
- (vii) $[X_\alpha[X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta[X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma[X_\alpha, X_\beta]] = 0$
- (viii) $[(aX_\alpha + bX_\beta), X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\gamma] + b[X_\beta, X_\gamma]$

4.5.3 Çözülebilir Lie Cebirleri

Çözülebilir Lie cebirlerini tanımlayabilmek için bazı ara kavramların bilinmesi gerekir. Bunlardan ilki alt cebir kavramıdır; herhangi $X_\alpha, X_\beta \in I$ için $[X_\alpha, X_\beta] \in I$ oluyorsa $I \subset L$ alt uzayına L Lie cebirinin alt cebiri denir. Yani Lie cebirinin bir alt kümesinin Lie parantezine göre kapalı olması durumudur. İkinci kavram ise normal alt cebir kavramıdır; eğer bir alt cebirin herhangi bir elemanı ile Lie cebirin herhangi bir elemanının Lie parantezi yine aynı alt cebir içinde kalıyorsa böyle bir alt cebire normal alt cebir denir. Eğer q - parametrelili bir Lie cebirinin $(q - 1)$ parametrelili bir normal alt cebiri varsa ve bu şekilde alt cebirler dizisi bir parametreye kadar indirgenebiliyorsa böyle bir cebire çözülebilir Lie cebiri denir. L_r , r -boyutlu bir Lie cebiri olmak üzere $L_{(r-1)}$, $r = 1, 2, \dots, q$ için L_r ' nin bir ideali,

$$L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots \subset L_{(q-1)} \subset L_q \quad (4.39)$$

şeklinde alt cebirler zinciri varsa, L_q q -boyutlu çözülebilir bir Lie cebiridir.

4.6 Diferansiyel Denklemlerin Kabul Ettiği Lie Grupları

Bir diferansiyel denklem sisteminin değişkenleri; bağımsız değişkenler, bağımlı

değişkenler ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevleridir. Bütün bu büyüklükler bir Öklid uzayında birbirinden bağımsız koordinatlar olarak göz önüne alınacak olursa bir diferansiyel denklem sistemi böyle bir uzayda bir manifold tanımlar.

Diferansiyel denklem sisteminin bir Lie grubunu kabul etmesi demek Lie grubunun sonsuz küçük üreticinin söz konusu manifolda uygulanması sonucu sıfır elde edilmesi demektir. n . basamaktan bir diferansiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesinden anlaşılan, bu Lie grubuna ait sonsuz küçük üreticinin n . uzanımı diferansiyel denkleme uygulandığı zaman diferansiyel denklemin tanımlandığı manifold üzerinde sonucunun sıfır çıkması gerekir. Formül ile ifade edilecek olursa, eğer elimizde $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ bir diferansiyel denklem varsa bu denklemin bir Lie grubu kabul etmesi Lie grubunun n . uzanımının F 'ye uygulanması sonucu sıfır bulunması demektir. Fakat burada $F = 0$ denkleminin sağlandığının göz önüne alınması gerekir.

$$pr^n XF(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \big|_{F=0} = 0 \quad (4.40)$$

Bu tanım eşdeğer olarak şu şekilde de yapılabilir. Bir diferansiyel denklemin bir diferansiyel denklemin çözümlerini diferansiyel denklemin başka çözümlerine dönüştürmesi veya değiştirmeden bırakması demektir. Verilen bir diferansiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının bulunması, eğer diferansiyel denklemin mertebesi birden büyükse çok belirli bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımına ulaştırır. Bu takım diferansiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının tamamını verir. Elde edilen kısmi türevli denklemlere belirleyici denklemler denir. Bunun için yapılması gereken $pr^n F \big|_{F=0} = 0$ ifadesinin Lie gruplarının sonsuz küçüklerine bağlı olarak yazılmasından ibarettir. Eğer bir adi diferansiyel denklemin r - parametrelili bir Lie grubu varsa ve eşleşen r -parametrelili Lie cebiri çözülebilir ise diferansiyel denklem $(n - r)$ 'ninci mertebeden bir diferansiyel denkleme indirgenebilir. Kısmi türevli bir diferansiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının bulunmasında eşdeğer yöntemler kullanılır. Bir Lie grubunun bir kısmi türevli diferansiyel denklem tarafından kabul edilmesi demek, Lie grubunun kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerini yine kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerine dönüştürmesi demektir. Bir

parametreli bir Lie grubunun sonsuz küçük üreticinin k 'ninci uzanımı

$$pr^k X = \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^1) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots + \eta_i^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}} \quad (4.41)$$

ise bu Lie grubunun $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k) = 0$ kısmi türevli diferansiyel denklemi tarafından kabul edilmesi

$$pr^k X F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k) \big|_{F=0} = 0 \quad (4.42)$$

olmasına eşdeğerdir. Burada $\mathbf{u}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k$ büyüklükleri sırasıyla $\mathbf{u}$ bağımlı değişken vektörünün bağımsız değişkenlere göre birinci, ikinci, ..., k 'ninci türevlerini bir bütün olarak göstermektedir. Eğer bir kısmi türevli denklemin bir çözümü Lie grubun etkisi altında değişmiyorsa bu çözüme kısmi türevli denklemin değişmez çözümü denir. Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin de kabul ettiği Lie gruplarının bulunması için belirleyici denklemler kullanılır. Bu belirleyici denklemlerin bulunması için Lie grubunun k 'ninci uzanımının kısmi türevli denkleme uygulanması sonucu kısmi türevli denklemin sağladığı manifold üzerinde sonucunun sıfır çıkması gerekir. Uzanımlar ξ_i ve η değerlerine bağlı olduğundan belirleyici denklemler de ξ ve η cinsinden kısmi türevli denklemlerdir.

Adi diferansiyel denklemlerdekinin aksine bir kısmi türevli diferansiyel denklemin Lie gruplarını kabul etmesi mertebesinin düşürülmesi olanağını sağlamaz. Fakat Lie grupları sayesinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bağımsız değişken sayısını azaltan benzerlik değişkenleri tanımlanabilir. Böylece bir kısmi türevli diferansiyel denklem benzerlik değişkenleri cinsinden adi bir diferansiyel denkleme indirgenebilir. Bu adi diferansiyel denklem çözülebiliyorsa kısmi türevli diferansiyel denklemin benzerlik çözümleri adını alan çözümleri elde edilir.

5. DEĞİŞKEN AKIMLI YERÇEKİMİ AKIMLARININ LIE GRUBU ANALİZİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

5.1 Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Kabul Ettiği Lie Simetri Grubunun Bulunması

Bu bölümde tek tabakalı sığ su denklemlerini değişmez bırakan en genel Lie dönüşüm grubu verilmiştir, (2.24) ve (2.25) denklemlerinden oluşan denklem sistemi için ε bir grup parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x}(x, t, u, h; \varepsilon) \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(x, t, u, h; \varepsilon) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(x, t, u, h; \varepsilon) \\ \tilde{h} &= \tilde{h}(x, t, u, h; \varepsilon)\end{aligned}\tag{5.1}$$

şeklinde x, t bağımsız değişkenleri ve u, h bağımlı değişkenlerini içeren bir Lie dönüşüm grubu ele alınmaktadır. $\xi^x, \xi^t, \eta^u, \eta^h$ grup değişkenlerinin sonsuz küçükleri olmak üzere ele alınan tek tabakalı sığ su denklemlerinin sonsuz küçük üretici

$$V = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u \frac{\partial}{\partial u} + \eta^h \frac{\partial}{\partial h}\tag{5.2}$$

şeklindedir. Dolayısıyla düzlem akım için elde edilen tek tabaklı sığ su denklemlerine karşılık gelen tek parametrelili Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= e^{\varepsilon X}(x) = x + \varepsilon \xi^x(x, t, u, h) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{t} &= e^{\varepsilon X}(t) = t + \varepsilon \xi^t(x, t, u, h) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u} &= e^{\varepsilon X}(u) = u + \varepsilon \eta^u(x, t, u, h) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{h} &= e^{\varepsilon X}(h) = h + \varepsilon \eta^h(x, t, u, h) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{5.3}$$

şeklinde alınır. Bu diferansiyel denklem sisteminin verilen Lie dönüşüm grubunu kabul etmesi için bu Lie grubuna ait sonsuz küçük üreticinin birinci uzanımı diferansiyel denkleme uygulandığı zaman diferansiyel denklemin tanımlandığı

manifold üzerinde sonucun sıfır çıkması gerekir.

$$\begin{aligned}
\tau_t^u &= \eta_t^u + \eta_u^u u_t + \eta_h^u h_t - u_x(\xi_t^x + \xi_u^x u_t + \xi_h^x h_t) - u_t(\xi_t^t + \xi_u^t u_t + \xi_h^t h_t) \\
\tau_x^u &= \eta_x^u + \eta_u^u u_x + \eta_h^u h_x - u_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - u_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x) \\
\tau_t^h &= \eta_t^h + \eta_u^h u_t + \eta_h^h h_t - h_x(\xi_t^x + \xi_u^x u_t + \xi_h^x h_t) - h_t(\xi_t^t + \xi_u^t u_t + \xi_h^t h_t) \\
\tau_x^h &= \eta_x^h + \eta_u^h u_x + \eta_h^h h_x - h_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - h_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olmak üzere denklem sisteminin birinci uzanımı [8-11];

$$pr^1V = V + \tau_x^u \frac{\partial}{\partial u_x} + \tau_t^u \frac{\partial}{\partial u_t} + \tau_x^h \frac{\partial}{\partial h_x} + \tau_t^h \frac{\partial}{\partial h_t} \tag{5.5}$$

şeklindedir ve (2.24), (2.25) denklemlerine uygulandığında sırasıyla;

(2.24) denklemi için

$$pr^1V\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{h_t=-uh_x-hu_x} = 0 \tag{5.6}$$

(2.25) denklemi için

$$pr^1V\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) \Big|_{u_t=-uu_x-h_x} = 0 \tag{5.7}$$

olur. Buradan

$$\tau_t^h + \eta^u h_x + u\tau_x^h + \eta^h u_x + h\tau_x^u = 0 \tag{5.8}$$

$$\tau_t^u + \eta^u u_x + u\tau_x^u + \tau_x^h = 0 \tag{5.9}$$

elde edilir ve (5.4)'te ifade edildiği şekilde $\tau_x^h, \tau_t^h, \tau_x^u, \tau_t^u$ değerleri

(5.8) denklemde yerine koyulduğu takdirde

$$\begin{aligned}
&[\eta_t^h + \eta_u^h u_t + \eta_h^h h_t - h_x(\xi_t^x + \xi_u^x u_t + \xi_h^x h_t) - h_t(\xi_t^t + \xi_u^t u_t + \xi_h^t h_t)] + \eta^u h_x \\
&+ u[\eta_x^h + \eta_u^h u_x + \eta_h^h h_x - h_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - h_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x)] + \\
&\eta^h u_x + h[\eta_x^u + \eta_u^u u_x + \eta_h^u h_x - u_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - u_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x)] = 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
&(\eta_t^h + u\eta_x^h + h\eta_u^h) + u_x[-u\eta_u^h - h\eta_h^h + h\xi_t^t + \eta^h + u\eta_u^h + uh\xi_x^t + h\eta_u^u - h\xi_x^x \\
&+ uh\xi_x^t] + h_x[-\eta_u^h - u\eta_h^h - \xi_t^x + u\xi_t^t + \eta^u + u\eta_h^h - u\xi_x^x + u^2\xi_x^t + h\eta_h^u - h\xi_x^t] \\
&+ u_x h_x[u\xi_u^x + h\xi_h^x - (u^2 + h)\xi_u^t - 2uh\xi_h^t - u\xi_u^x + u^2\xi_u^t + uh\xi_h^t - h\xi_h^x + uh\xi_h^t \\
&+ h\xi_u^t] + u_x^2[-uh\xi_u^t - h^2\xi_h^t + uh\xi_u^t - uh\xi_u^x - uh\xi_u^t] + h_x^2[-\xi_u^x + u\xi_h^x - u\xi_u^t \\
&- u^2\xi_h^t - u\xi_h^x + u^2\xi_h^t + h\xi_h^t] = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Belirleyici denklemlerin elde edilebilmesi için (5.11) denklemindeki tüm katsayıların sıfıra eşit olması gerekir. Dolayısıyla (5.11) denklemindeki tüm katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen belirleyici denklemler aşağıdaki şekildedir,

$$\eta_t^h + u\eta_x^h + h\eta_u^u = 0 \quad (5.12)$$

$$-\eta_h^h + \eta_u^u + \frac{\eta^h}{h} = \xi_x^x - \xi_t^t - 2u\xi_x^t \quad (5.13)$$

$$-\eta_u^h + h\eta_h^u + \eta^u = \xi_t^x - u\xi_t^t + u\xi_x^x - (u^2 + h)\xi_x^t \quad (5.14)$$

$$-h\xi_h^t - \xi_u^x + u\xi_u^t = 0 \quad (5.15)$$

(5.9) denklemi için de aynı işlemler uygulandığında

$$\begin{aligned} & [\eta_t^u + \eta_u^u u_t + \eta_h^u h_t - u_x(\xi_t^x + \xi_u^x u_t + \xi_h^x h_t) - u_t(\xi_t^t + \xi_u^t u_t + \xi_h^t h_t)] + \eta^u u_x \\ & + u[\eta_x^u + \eta_u^u u_x + \eta_h^u h_x - u_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - u_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x)] + \\ & + [\eta_x^h + \eta_u^h u_x + \eta_h^h h_x - h_x(\xi_x^x + \xi_u^x u_x + \xi_h^x h_x) - h_t(\xi_x^t + \xi_u^t u_x + \xi_h^t h_x)] = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} & (\eta_t^u + u\eta_x^u + \eta_x^h) + u_x[-\eta_h^u h + \eta_u^h + \xi_t^t u + \eta^u u + \xi_x^t(h + u^2) - \xi_x^x u + \\ & \xi_x^t - \xi_t^x + u\xi_t^t] + h_x[-\eta_u^u + \eta_h^h - \xi_x^x + \xi_t^t + 2u\xi_x^t] + u_x h_x[\xi_u^x + u\xi_h^x \\ & - 2u\xi_u^t - (u^2 + h) - u\xi_h^x + u\xi_u^t + u^2\xi_h^t - \xi_u^x + u\xi_u^t + h\xi_h^t] + u_x^2[-uh\xi_h^t \\ & + h\xi_h^x - u^2\xi_u^t + u^2\xi_u^t + h\xi_u^t + h\xi_h^x - u\xi_u^x + u\xi_u^x] + h_x^2[-u\xi_h^t + u\xi_h^t + u\xi_h^t \\ & - \xi_h^x + u^2\xi_u^t] = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

şeklinde bulunur. Burada tüm katsayıların sıfıra eşitlenmesi sonucunda elde edilen belirleyici denklemler

$$\eta_t^u + u\eta_x^u + \eta_x^h = 0 \quad (5.18)$$

$$-\eta_u^u + \eta_h^h = \xi_x^x - \xi_t^t - 2u\xi_x^t \quad (5.19)$$

$$\xi_h^x - u\xi_h^t + \xi_u^t = 0 \quad (5.20)$$

$$\eta_u^h - h\eta_h^u + \eta^u = \xi_t^x - u\xi_t^t + u\xi_x^x - (u^2 + h)\xi_x^t \quad (5.21)$$

$$\xi_u^x - u\xi_u^t + h\xi_h^t = 0 \quad (5.22)$$

şeklinde dir.

(5.8) ve (5.9) denklemlerinden elde ettiğimiz tüm belirleyici denklemler bir denklem sistemi oluşturur. Bu belirleyici denklemlerden oluşan denklem

sisteminin çözümü, (2.24),(2.25) denklemleri ile ifade edilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini, değişmez bırakacak Lie dönüşüm grubunu verir.

Bu denklem sisteminin çözümü için uygulanacak yöntemlerden biri seri çözüm yöntemidir [37]. Bu yöntemde; sonsuz küçükler $\xi^x, \xi^t, \eta^h, \eta^u$ bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin kuvvetleri şeklinde yazılarak önceden elde edilmiş olan belirleyici denklemlerde yerine koyulur ve bu şekilde bir çözüm aranır.

Dolayısıyla tek tabakalı sıg su denklemlerinin kabul ettiği Lie gruplarının elde edilebilmesi için (5.12-5.15) ve (5.18-5.22) belirleyici denklemleri kullanılarak seri çözüm yöntemi uygulandığı takdirde aşağıdaki şekilde sonuçlar elde edilir.

İlk olarak ele alınan tek tabakalı sıg su denklemlerinin kabul ettiği Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçüklerinin, bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin birinci dereceden kuvvetleri şeklinde yazıldığı düşünölsün.

$$\xi^x = a_0 + a_{10}x + a_{11}t + a_{12}u + a_{13}h \quad (5.23)$$

$$\xi^t = b_0 + b_{10}x + b_{11}t + b_{12}u + b_{13}h \quad (5.24)$$

$$\eta^h = c_0 + c_{10}x + c_{11}t + c_{12}u + c_{13}h \quad (5.25)$$

$$\eta^u = d_0 + d_{10}x + d_{11}t + d_{12}u + d_{13}h \quad (5.26)$$

(5.23-26) ifadeleri (5.12) belirleyici denkleminde yerine koyulduğunda

$$c_{11} + c_{10}u + d_{10}h = 0 \quad (5.27)$$

şeklinde bulunur, (5.27) eşitliğinin her u, h değeri için gerçekleştirilebilmesi için tüm katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir, dolayısıyla $c_{11} = 0, c_{10} = 0, d_{10} = 0$ elde edilir. (5.13) belirleyici denkleminde,

$$d_{11} = 0 \quad (5.28)$$

bulunur. (5.14) denkleminde,

$$-c_{13} + d_{12} + \frac{c_0}{h} + \frac{c_{10}x}{h} + \frac{c_{11}t}{h} + \frac{c_{12}u}{h} + c_{13} = a_{10} - b_{11} - 2b_{10}u \quad (5.29)$$

elde edilir

(5.15) denkleminde,

$$d_{13}h + d_0 + d_{12}u + d_{13}h = -b_{11}u + b_{11}u + d_{12}u + a_{11} \quad (5.30)$$

eşitliği elde edilir ve bulunan bu eşitliklerin her u, h değeri için sağlanabilmesi için katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir, buradan $d_{13} = 0, d_0 = a_{11}$ olarak bulunur. (5.18) denkleminde

$$a_{11} + d_{12}u = -b_{11}u + b_{11}u + d_{12}u + a_{11} \quad (5.31)$$

eşitliği ve (5.19) denkleminde elde edilen

$$-d_{12} + c_{13} = b_{11} + d_{12} - b_{11} \quad (5.32)$$

eşitliği kullanılarak $c_{13} = 2d_{12}$ olarak bulunur

(5.20) denkleminde,

$$-b_{13}h - a_{12}u + b_{12}u = 0 \quad (5.33)$$

olmak üzere $b_{13} = 0, b_{12} = a_{12}$ bulunur.

(5.21) denkleminde elde edilen

$$a_{13} - b_{13}u + b_{12} = 0 \quad (5.34)$$

eşitliği kullanılarak $a_{13} = -b_{12}$ bulunur.

(5.22) denkleminde ise,

$$b_{12} - b_{12}u = 0 \quad (5.35)$$

olmak üzere $a_{13} = 0, b_{12} = a_{12} = 0$ bulunur. $b_{11} + d_{12} = 2\alpha_1 - \alpha_3, a_{11} = \alpha_2, b_0 = \alpha_1 - \alpha_3, a_0 = \alpha_4, b_{11} = \alpha_5$ şeklinde ifade edilmek üzere sonsuz küçüklerin 1. dereceden kuvvetleri cinsinden seriye açılması sonucunda aşağıdaki gibi bir 5-parametrelî Lie dönüşüm grubu elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi^x &= (2\alpha_1 - \alpha_3)x + \alpha_2t + \alpha_4 \\ \xi^t &= (\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5 \\ \eta^h &= 2\alpha_1h \\ \eta^u &= \alpha_1u + \alpha_2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Burada elde edilen simetri grupları, literatürde tek tabakalı sıg su denklemleri ile ilgili yapılan Lie simetrisi analizi çalışmalarında elde edilen simetri gruplarıdır [28,30]. Şimdi sonsuz küçüklerin bağımlı ve bağımsız değişkenlere göre 2. dereceden kuvvetleri cinsinden seriye açılarak, belirleyici denklemler çözülmeye

çalışılırsa

$$\begin{aligned}\xi^x = & a_0 + a_{10}x + a_{11}t + a_{12}u + a_{13}h + a_{14}xt + a_{15}ux + a_{16}hx + a_{17}x^2 + a_{18}ut \\ & + a_{19}ht + a_{20}t^2 + a_{21}uh + a_{22}u^2 + a_{23}h^2\end{aligned}\quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}\xi^t = & b_0 + a_{10}x + b_{11}t + b_{12}u + b_{13}h + b_{14}xt + b_{15}ux + b_{16}hx + b_{17}x^2 + b_{18}ut \\ & + b_{19}ht + b_{20}t^2 + b_{21}uh + b_{22}u^2 + b_{23}h^2\end{aligned}\quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}\eta^h = & c_0 + c_{10}x + c_{11}t + c_{12}u + c_{13}h + c_{14}xt + c_{15}ux + c_{16}hx + c_{17}x^2 + c_{18}ut \\ & + c_{19}ht + c_{20}t^2 + c_{21}uh + c_{22}u^2 + c_{23}h^2\end{aligned}\quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}\eta^u = & d_0 + d_{10}x + d_{11}t + d_{12}u + d_{13}h + d_{14}xt + d_{15}ux + d_{16}hx + d_{17}x^2 + d_{18}ut \\ & + d_{19}ht + d_{20}t^2 + d_{21}uh + d_{22}u^2 + d_{23}h^2\end{aligned}\quad (5.40)$$

(5.12) belirleyici denkleminde

$$\begin{aligned}c_{11} + c_{14}x + c_{18}u + c_{19}h + 2c_{20}t + c_{10}u + c_{14}ut + c_{15}u^2 + c_{16}uh + 2c_{17}ux \\ + d_{10}h + d_{14}ht + d_{15}uh + d_{16}h^2 + 2d_{17}hx = 0\end{aligned}\quad (5.41)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin her u, h değeri için sağlanabilmesi için tüm katsayılar sıfır olacağından

$$\begin{aligned}c_{11} = c_{14} = c_{15} = c_{17} = c_{20} = 0, d_{14} = d_{16} = d_{17} = 0 \\ c_{18} = -c_{10}, c_{19} = -d_{10}, c_{16} = -d_{15}\end{aligned}\quad (5.42)$$

şeklinde elde edilir. (5.13) belirleyici denkleminde,

$$d_{11} + d_{18}u + d_{19}h + 2d_{20}t + d_{10}u + d_{15}u^2 - c_{18} + d_{15}h = 0\quad (5.43)$$

olmak üzere

$$d_{18} = -d_{10}, d_{15} = d_{20} = d_{19} = 0, d_{11} = c_{18}\quad (5.44)$$

şeklinde elde edilir. (5.14) belirleyici denkleminde,

$$\begin{aligned}d_{12} - 2c_{23}h - d_{10}t + d_{21}h + 2d_{22}u + \frac{c_0}{h} - \frac{c_{18}x}{h} + \frac{c_{12}u}{h} + \frac{c_{18}ut}{h} - d_{10}t \\ + \frac{c_{22}u^2}{h} + c_{23}h = a_{10} + a_{14}t + a_{15}u + a_{16}h + 2a_{17}x - b_{11} - b_{14}x - b_{18}u - b_{19}h \\ - 2b_{20}t - 2b_{10}u - 2b_{14}ut - 2b_{15}u^2 - 2b_{16}uh - 2b_{17}ux\end{aligned}\quad (5.45)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
a_{15} &= 2d_{22} + b_{18} + 2b_{10}, c_0 = c_{12} = c_{18} = c_{22} = 0 \\
b_{14} &= b_{15} = b_{16} = b_{17} = 0, a_{14} = -2d_{10} \\
a_{10} &= b_{11} + d_{12}, a_{16} = d_{21} - c_{23}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

bulunur. (5.15) belirleyici denkleminde,

$$\begin{aligned}
&d_0 - c_{21}h + d_{13}h + d_{13}h + d_{10}x + d_{12}u - d_{10}ut - 2d_{21}uh + d_{22}u^2 + 3d_{23}h^2 \\
&= a_{11} - b_{10}h + a_{19}h - 2a_{20}t - 2d_{10}x + a_{18}u + d_{12}u - 2b_{10}u - b_{18}ut - 2b_{20}ut \\
&\quad + 2a_{17}ux + (d_{21} - c_{23})uh + (2d_{22} + b_{18} + b_{10})u^2
\end{aligned} \tag{5.47}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
-c_{21} + 2d_{13} &= a_{19} - b_{10}, d_{10} = d_{23} = a_{17} = a_{20} = 0 \\
d_0 &= a_{11}, a_{18} = b_{11}, d_{22} = -b_{18} - b_{10} = -2b_{20} - b_{10} \\
a_{19} &= -c_{21} + 2d_{13} + b_{10}, c_{23} = b_{19} - 3d_{21}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

bulunur. (5.18) belirleyici denkleminde,

$$\begin{aligned}
&d_0 - c_{21}h + 2d_{13}h + d_{10}x + d_{12}u - d_{10}ut - 2d_{21}uh + d_{22}u^2 + 3d_{23}h^2 \\
&= a_{11} - b_{10}h + a_{19}h - 2a_{20}t - 2d_{10}x + a_{18}u + d_{12}u - 2b_{10}u - b_{18}ut - 2b_{20}ut \\
&\quad + 2a_{17}ux + (d_{21} - c_{23})uh + (2d_{22} + b_{18} + b_{10})u^2
\end{aligned} \tag{5.49}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
-c_{21} + 2d_{13} &= a_{19} - b_{10}, d_{10} = d_{23} = a_{17} = a_{20} = 0 \\
d_0 &= a_{11}, a_{18} = b_{11}, d_{22} = -b_{18} - b_{10} = -2b_{20} - b_{10} \\
a_{19} &= -c_{21} + 2d_{13} + b_{10}, c_{23} = b_{19} - 3d_{21}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

elde edilir. (5.19) belirleyici denkleminde,

$$\begin{aligned}
&d_0 - c_{21}h + d_{12}u - d_{23}h^2 - (2b_{20} + b_{10})u^2 = d_0 + (2d_{13} - c_{21})h \\
&\quad + b_{11}u + d_{12}u + (b_{10} - d_{22})u^2 - b_{10}u^2 - d_{21}uh - 2b_{20}ut
\end{aligned} \tag{5.51}$$

olmak üzere

$$-c_{21} = d_{13}, d_{21} = d_{23} = 0, b_{20} = 0, d_{22} = 2b_{10} \tag{5.52}$$

bulunur. (5.20) belirleyici denkleminde,

$$-b_{13}h + b_{12}u - a_{12}u + b_{10}ux + a_{21}uh + 2b_{22}u^2 - 2b_{23}h^2 = 0 \quad (5.53)$$

şeklindeki eşitlik kullanılarak

$$b_{10} = b_{13} = b_{22} = b_{23} = 0, a_{12} = a_{21} = 0 \quad (5.54)$$

bulunur. (5.21) belirleyici denkleminde,

$$a_{13} - b_{12} = 0 \quad (5.55)$$

elde edilir ve buradan

$$a_{13} = b_{12} \quad (5.56)$$

olur. (5.22) belirleyici denkleminde ise

$$-2a_{22} + b_{12}u = 0 \quad (5.57)$$

olmak üzere

$$b_{12} = 2a_{22} \quad (5.58)$$

eşitliği elde edilir. $b_{11} + d_{12} = 2\alpha_1 - \alpha_3, d_0 = \alpha_2, a_0 = \alpha_4, b_{11} = \alpha_1 - \alpha_3, b_0 = \alpha_5, 2a_{22} = \alpha_6$ olmak üzere sonsuz küçüklerin bağımlı ve bağımsız değişkenlerin 2.dereceden kuvvetleri cinsinden seri açılımı sonucunda 6-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu elde edilir, sonuç olarak daha önce bulunan (5.36) ile gösterilen Lie dönüşüm grubuna yeni bir parametre eklenmiş olur.

$$\begin{aligned} \xi^x &= (2\alpha_1 - \alpha_3)x + \alpha_2t + \alpha_4 - \alpha_6h + \alpha_6\frac{u^2}{2} \\ \xi^t &= (\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5 + \alpha_6u \\ \eta^h &= 2\alpha_1h \\ \eta^u &= \alpha_1u + \alpha_2 \end{aligned} \quad (5.59)$$

Seri açılımda parametreler $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ olmak üzere sonsuz küçüklerin kuvvetleri 1. dereceden alındığı takdirde 5- parametrelili bir Lie dönüşüm grubu [28,30], parametreler $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ olmak üzere sonsuz küçüklerin kuvvetleri 2. dereceden alındığında ise 6- parametrelili bir Lie dönüşüm grubu elde edilir. Aynı şekilde sonsuz küçüklerin kuvvetleri 3. dereceden alınarak seriye açılması sonucunda ise α_7 şeklinde yeni bir parametre bulunur ve derecenin her

artımına karşılık daha önce bulunan Lie dönüşüm grubuna yeni bir parametre eklenir.

Sonsuzküçüklerin kuvvetleri 3.dereceden olan bir seri açılım için,

$$\begin{aligned}\xi^x &= (2\alpha_1 - \alpha_3)x + \alpha_2 t + \alpha_4 - \alpha_6 h + \alpha_6 \frac{u^2}{2} - \alpha_6 h + \alpha_6 \frac{u^2}{2} - \alpha_7 h t + \alpha_7 \frac{u^2 t}{2} \\ \xi^t &= (\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5 + \alpha_6 u + \alpha_7 u t - \alpha_7 \frac{x}{3} \\ \eta^h &= 2\alpha_1 h - 2\alpha_7 \frac{u h}{3} \\ \eta^u &= \alpha_1 u + \alpha_2 - 2\alpha_7 \frac{h}{3} - \alpha_7 \frac{u^2}{6}\end{aligned}\tag{5.60}$$

şeklinde 7-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu elde edilir.

Sonsuzküçüklerin kuvvetleri 4.dereceden olan bir seri açılım için ise aşağıdaki gibi 8-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu elde edilir.

$$\begin{aligned}\xi^x &= (2\alpha_1 - \alpha_3)x + \alpha_2 t + \alpha_4 - \alpha_6 h + \alpha_6 \frac{u^2}{2} - \alpha_7 h t + \alpha_7 \frac{u^2 t}{2} - \alpha_8 \frac{h^2}{2} + 2\alpha_8 \frac{u^4}{4} \\ \xi^t &= (\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5 + \alpha_6 u + \alpha_7 u t - \alpha_7 \frac{x}{3} \alpha_8 u h + \alpha_8 \frac{u^3}{3} \\ \eta^h &= 2\alpha_1 h - 2\alpha_7 \frac{u h}{3} \\ \eta^u &= \alpha_1 u + \alpha_2 - 2\alpha_7 \frac{h}{3} - \alpha_7 \frac{u^2}{6}\end{aligned}\tag{5.61}$$

Sonuç 5.1. Burada yapılan tüm işlemlerden, söz konusu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi için sonsuz küçükler bağımlı ve bağımsız değişkenlerin kuvvetleri şeklinde yazılarak seri çözüm uygulandığı takdirde, sonsuz küçüklerin değişkenlerinin kuvvetlerinin arttırılmasıyla elde edilen her bir açılımdan bu denklem sistemi için yeni bir parametre ve dolayısıyla yeni bir Lie dönüşüm grubu bulunabileceği görülmektedir ve dolayısıyla tek tabakalı sığ su denklemleri için bulunabilecek simetri sayısının sonsuz olabileceği anlaşılmaktadır. Ayrıca sonsuz küçüklerin bağımlı bağımsız değişkenlerinin kuvvetleri cinsinden 2., 3. ve 4. dereceden seriye açılması sonucunda elde edilen her bir simetri grubunun literatürde tek tabakalı sığ su denklemleri için kullanılan simetri gruplarından farklı olduğu anlaşılmıştır, dolayısıyla bu çalışma içerisinde tek tabakalı sığ su denklemlerini değişmez bırakacak yeni simetri grupları elde edilmiştir.

5.2 Simetri İndirgenmesi

Düzlem akımda tek tabakalı sığ su denklemlerinin indirgenmesi işleminde, önerme

5.1’de (5.36) ile gösterilen 5- parametrelı Lie simetri grubu kullanılsın. Dolayısıyla bu simetri grubuna karşılık gelen sonsuz küçük üreteler

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + u \frac{\partial}{\partial u} \\
V_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
V_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \\
V_4 &= -x \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial t} \\
V_5 &= \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

olur. Bu simetri grubuna sahip Lie cebiri L_5 çözülebilir ise ele alınan tek tabakalı sıg su denklemleri indirgenebilir demektir. Bunun için üretelerin Lie parantezleri alınarak komutatör tablosu oluşturulur ve Lie cebirinin çözülebilir olma şartını sağlayıp sağlamadığına bakılır.

Tablo 5.1: Simetri üretelerinin Lie Parantezi tablosu

$[\ast, \ast]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	$-v_2$	$-v_3$	0	$-2v_5$
v_2	v_2	0	v_5	$-v_2$	0
v_3	v_3	$-v_5$	0	0	0
v_4	0	v_2	0	0	$-v_5$
v_5	$2v_5$	0	0	$-v_5$	0

Tablodan da anlaşıldığı gibi Lie cebirinin herhangi bir alt kümesi Lie parantezine göre kapalıdır ve aynı zamanda bir alt cebirdir. Yani L_5 Lie cebiri çözülebilirdir.

Bu durumda ele alınan simetri grubu için iki şekilde indirgeme yapılabilir. Bunlardan birincisi parametreler arasındaki ilişkilerinin incelenmesi [31], ikincisi ise bu simetri grubuna sahip L_5 cebirinin optimal sisteminin elde edilmesidir [9] ve bu çalışma içerisinde iki indirgeme yöntemi de kullanılmıştır.

Parametreler Arasındaki İlişkilerin İncelenmesi [29,30]

1.koşul:

$$\alpha_1 \neq 0, 2\alpha_1 \neq \alpha_3 \neq 0, \alpha_1 \neq \alpha_3 \quad (5.63)$$

Bu koşul altında ele alınan simetri grubunun karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + (2\alpha_1 - \alpha_3 x) + \alpha_4} = \frac{dt}{(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.64)$$

şeklindedir.

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + (2\alpha_1 - \alpha_3 x) + \alpha_4} = \frac{dt}{(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5} \quad (5.65)$$

denklemi çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = \frac{[2\alpha_1^2 x - \alpha_1(2\alpha_2 t - \alpha_3 x + \alpha_4) + \alpha_2(\alpha_5 - \alpha_3 t)][(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{(\alpha_3 - 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}}}{\alpha_1(2\alpha_1 - \alpha_3)} \quad (5.66)$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{dt}{(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} \quad (5.67)$$

ve buradan

$$u(x, t) = [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (5.68)$$

olarak bulunur,

$$\frac{dt}{(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.69)$$

denkleminde ise

$$h(x, t) = [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \tilde{h}(\zeta) \quad (5.70)$$

bulunur. Buradan (5.66), (5.68) ve (5.70) ifadeleri kullanılarak (2.24),(2.25)

denklem sistemine karşılık gelen indirgenmiş denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{(\alpha_3 - 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= [(\alpha_3 - 2\alpha_1)x - \alpha_4 - \alpha_2 t][(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{(2\alpha_3 - 3\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \\
\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} &= [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta) \\
\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} &= [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta) \\
\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{-1} \tilde{u}'(\zeta) \\
\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= [(\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5]^{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}} [\alpha_1 \tilde{u}(\zeta) + ((\alpha_3 - 2\alpha_1)x - \alpha_4 - \alpha_2 t) \tilde{u}'(\zeta) \\
&\quad ((\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_5)^{(\alpha_3 - 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1}}] \quad (5.71)
\end{aligned}$$

olmak üzere denklem sistemine karşılık gelen indirgenmiş denklemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [(\alpha_3 - 2\alpha_1)\zeta + \tilde{u}(\zeta)] \tilde{h}'(\zeta) + 2\alpha_1 \tilde{h}(\zeta) &= 0 \\
[(\alpha_3 - 2\alpha_1)\zeta + \tilde{u}(\zeta)] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \alpha_1 \tilde{u}(\zeta) &= 0 \quad (5.72)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2. koşul:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0 \quad (5.73)$$

Aynı şekilde, bu koşul altında elde edilecek olan karakteristik denklem ise

$$\frac{dx}{-\alpha_3 x + \alpha_4} = \frac{dt}{-\alpha_3 t + \alpha_5} = \frac{du}{0} = \frac{dh}{0} \quad (5.74)$$

şeklindedir.

$$\frac{dx}{-\alpha_3 x + \alpha_4} = \frac{dt}{-\alpha_3 t + \alpha_5} \quad (5.75)$$

denkleminde benzerlik değişkeni

$$\zeta = (\alpha_5 - \alpha_3)^{-1} [x - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}] \quad (5.76)$$

olarak bulunur.

$$\frac{dt}{-\alpha_3 t + \alpha_5} = \frac{du}{0} \quad (5.77)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \tilde{u}(\zeta) \quad (5.78)$$

şeklinde bulunur ve

$$\frac{dt}{-\alpha_3 t + \alpha_5} = \frac{dh}{0} \quad (5.79)$$

denkleminde

$$h(x, t) = \tilde{h}(\zeta) \quad (5.80)$$

elde edilir. Bulunan bu yeni değişmezlerin x ve t ye göre türevleri aşağıdaki şekildedir,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = (-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = [\alpha_3 x - \alpha_4](-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-2}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = (-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-1} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = [\alpha_3 x - \alpha_4](-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-2} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = (-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-1} \tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = [\alpha_3 x - \alpha_4](-\alpha_3 t + \alpha_5)^{-2} \tilde{u}'(\zeta) \quad (5.81)$$

Dolayısıyla elde edilen bu yeni değişmezlerle karşılık gelen indirgenmiş denklemler,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\alpha_3 \zeta + \tilde{u}(\zeta)] \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \\ [\alpha_3 \zeta + \tilde{u}(\zeta)] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

şeklindedir.

3. koşul:

$$\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_5 = 0, \alpha_2 \neq 0 \quad (5.83)$$

şeklinde alındığı takdirde

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.84)$$

(5.84) karakteristik denkleminde

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{dt}{0} \quad (5.85)$$

alınırsa buradan

$$\zeta = t \quad (5.86)$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} \quad (5.87)$$

için

$$u(x, t) = (\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4) \tilde{u}(\zeta) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (5.88)$$

ve

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.89)$$

için

$$h(x, t) = (\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4)^2 \tilde{h}(\zeta) \quad (5.90)$$

olarak bulunur. Burada elde edilen yeni değişmezlerin x, t 'ye türevlerine bakıldığında

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 2\alpha_1(\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{h}(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = 2\alpha_2(\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{h}(\zeta) + (\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4)^2 \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha_1 \tilde{u}(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha_2 \tilde{u}(\zeta) + (\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{u}'(\zeta) \quad (5.91)$$

şeklinde olduğu görülür. Bulunan bu yeni değişmezler karşılık gelen denklemler,

$$\begin{aligned}\tilde{h}'(\zeta) + 3\alpha_1\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ \tilde{u}'(\zeta) + \alpha_1\tilde{u}^2(\zeta) + 2\alpha_1\tilde{h}(\zeta) &= 0\end{aligned}\tag{5.92}$$

şeklindedir.

4. koşul:

$$\alpha_3 = 2\alpha_1, \alpha_1 \neq 0\tag{5.93}$$

Bu durumda karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_4} = \frac{dt}{\alpha_5 - \alpha_1 t} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} = \frac{dh}{2\alpha_1 h}\tag{5.94}$$

olur. Buradan

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_4} = \frac{dt}{\alpha_5 - \alpha_1 t}\tag{5.95}$$

ve

$$\zeta = x + \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 \alpha_5}{\alpha_1^2} + \left(\frac{\alpha_4 \alpha_1 + \alpha_5 \alpha_2}{\alpha_1^2}\right) \ln(\alpha_5 - \alpha_1 t)\tag{5.96}$$

elde edilir.

$$\frac{dt}{\alpha_5 - \alpha_1 t} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2}\tag{5.97}$$

denkleminde

$$u(x, t) = [\alpha_2 t + \tilde{u}(\zeta)](\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-1}\tag{5.98}$$

bulunur ve

$$\frac{dt}{\alpha_5 - \alpha_1 t} = \frac{dh}{2\alpha_1 h}\tag{5.99}$$

denkleminde ise

$$h(x, t) = (\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-2} \tilde{h}(\zeta)\tag{5.100}$$

bulunur. Bu durumda yeni değişmezlerin x, t 'ye göre türevleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\alpha_2 t + \alpha_4}{\alpha_1 t - \alpha_5} \\
\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} &= (\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-2} \tilde{h}'(\zeta) \\
\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} &= (\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-3} [2\alpha_1 \tilde{h}(\zeta) - (\alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{h}'(\zeta)] \\
\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= (\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-1} \tilde{u}'(\zeta) \\
\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= (\alpha_5 - \alpha_1 t)^{-2} [\alpha_1 \tilde{u}(\zeta) - (\alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{u}'(\zeta) + \alpha_2 \alpha_5] \quad (5.101)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan yeni değişmezlerle karşılık gelen denklemler,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - \alpha_4] \tilde{h}'(\zeta) + 2\alpha_1 \tilde{h}(\zeta) &= 0 \\
[\tilde{u}(\zeta) - \alpha_4] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \alpha_1 \tilde{u}(\zeta) &= 0 \quad (5.102)
\end{aligned}$$

olur.

5. koşul:

$$\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0, \alpha_5 \neq 0 \quad (5.103)$$

ve bu koşul altında ele alınan simetri grubunun karakteristik denkleminde elde edilen yeni değişmezler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{dt}{\alpha_5} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.104)$$

$$\frac{dx}{\alpha_2 t + \alpha_1 x + \alpha_4} = \frac{dt}{\alpha_5} \quad (5.105)$$

ve

$$\zeta = e^{-\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \left[x + \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1} + (\alpha_2 \alpha_5 - \alpha_4 \alpha_1) \alpha_1^{-2} \right] \quad (5.106)$$

olmak üzere

$$\frac{dt}{\alpha_5} = \frac{du}{\alpha_1 u + \alpha_2} \quad (5.107)$$

için

$$u(x, t) = e^{-\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \tilde{u}(\zeta) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (5.108)$$

olarak bulunur.

$$\frac{dt}{\alpha_5} = \frac{dh}{2\alpha_1 h} \quad (5.109)$$

içinse

$$h(x, t) = e^{\frac{2\alpha_1 t}{\alpha_5}} \tilde{h}(\zeta) \quad (5.110)$$

olarak bulunur ve Bu yeni değişmezlerin x, t 'ye göre türevleri

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = e^{-\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -e^{-\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \alpha_5^{-1} (\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = e^{\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = e^{\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \left[2 \frac{\alpha_1}{\alpha_5} e^{\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \tilde{h}(\zeta) - (\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4) \alpha_5^{-1} \tilde{h}'(\zeta) \right]$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha_5^{-1} \left[\alpha_1 e^{\frac{\alpha_1 t}{\alpha_5}} \tilde{u}(\zeta) - (\alpha_1 x + \alpha_2 t + \alpha_4) \tilde{u}'(\zeta) \right] \quad (5.111)$$

olarak bulunur. Buradan elde edilen indirgenmiş denklemler

$$\begin{aligned} \alpha_5 \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\alpha_5 - \alpha_1 \zeta] \tilde{h}'(\zeta) + 2\alpha_1 \tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\alpha_5 - \alpha_1 \zeta] \tilde{u}'(\zeta) + \alpha_5 \tilde{h}'(\zeta) + \alpha_1 \tilde{u}(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.112)$$

şeklindedir.

5.2.1 Simetrilere Karşılık Gelen Optimal Sistemin Bulunması [9]

Bir diferansiyel denklemin, $r > 1$ boyutlu L_r Lie cebirini kabul etmesi durumunda, bu Lie cebirinin bir, iki, üç,... boyutlu alt cebirine karşılık gelen değişmez çözümlerin bulunması gerekmektedir. Fakat böyle bir Lie cebirinin sonsuz sayıda alt cebiri bulunmaktadır. Bu cebirlerin belli denklik sınıfları bulunarak her bir

denklik sınıfının bir üyesine karşılık gelen değişmez çözümlerin bulunması ile olası tüm değişmez çözümlerin verilmesi mümkün olur. L_r cebirinin iki alt cebirine karşı gelen değişmez çözümler, birbirlerine L_r cebirine ait bir dönüşüm grubu yardımıyla dönüştürülebiliyorsa, bu iki alt cebir tarafından yapılan indirgemeler birbirine denktir denir. Bu şekilde tanımlanan bir denklik bağıntısıyla denklik sınıfları bulunduktan sonra, bu sınıfların herbirinden bir temsilci alınarak, bu temsilciye karşılık gelen değişmez çözümlerin bulunması yeterli olur. Bu denklik sınıflarından birer temsilci alınarak yazılan listeye L_r cebirinin optimal sistemi denir. Optimal sistemin bulunması için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 5.2.1.[9] L_r cebirinin $L_{1,1} = \{v_1\}$ ve $L_{1,2} = \{v_2\}$ bir boyutlu alt cebirlerine karşılık gelen indirgenmiş çözümlerin birbirine denk olması için gerek ve yeter şart

$$Ad(\exp(\varepsilon v))v_1 = v_2 \quad (5.113)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $v \in L_r$ bulunmasıdır. Burada, $Ad(\exp(\varepsilon v))\omega$ aşağıdaki şekilde tanımlanan adjoint temsildir:

$$Ad(\exp(\varepsilon v))\omega = \omega - \varepsilon[v, \omega] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v, [v, \omega]] - \dots \quad (5.114)$$

Ayrıca $\exp(\varepsilon v)$ ise v simetri üretetine (sonsuz küçük üretece) karşılık gelen dönüşüm grubudur.

L_5 Cebirinin Optimal Sisteminin Elde Edilmesi [9]

Öncelikle bu Lie cebirine ait simetri üreteleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + u \frac{\partial}{\partial u} \\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ v_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \\ v_4 &= -x \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial t} \\ v_5 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Tablo 5.2: Tek tabakalı sıg su denklemlerinin simetri üreteçlerinin adjoint temsil tablosu

$Ad(\exp(\varepsilon*)*)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	v_1	$e^\varepsilon v_2$	$e^\varepsilon v_3$	v_4	$e^{2\varepsilon} v_5$
v_2	$v_1 - \varepsilon v_2$	v_2	$v_3 - \varepsilon v_5$	$v_4 + \varepsilon v_2$	v_5
v_3	$v_1 - \varepsilon v_3$	$v_2 + \varepsilon v_5$	v_3	v_4	v_5
v_4	v_1	$e^{-\varepsilon} v_2$	v_3	v_4	$e^{-\varepsilon} v_5$
v_5	$v_1 - 2\varepsilon v_5$	v_2	v_3	$v_4 + \varepsilon v_5$	v_5

Ele alınan denklem sisteminin, optimal sisteminin bulunmasında gerekli olan Lie parantezi ve adjoint temsil tabloları, sırasıyla Tablo (5.2.1) ve (5.2.2)'de verilmiştir. Bu denklem sisteminin kabul ettiği simetri üreteçlerinin en genel hali

$$\tilde{v} = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 + \beta_5 v_5 \quad (5.116)$$

şeklindedir.

Optimal sistemin elde edilmesi için $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ parametreleri bulundukları koşullar altında incelenir.

1. koşul: $\beta_5 \neq 0$ hali için $\beta_5 = 1$ alınabilir.

$$\begin{aligned}
 v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 + v_5 \\
 v' &= Ad(\exp(\varepsilon v_2)v) = v - \varepsilon[v_2, v] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_2, [v_2, v]] + \dots \\
 v' &= v - \varepsilon(\beta_1 v_2 + \beta_3 v_5 - \beta_4 v_2) + \dots \\
 v' &= \beta_1 v_1 + \varepsilon(\beta_2 - \beta_1)v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 + (1 - \beta_3\varepsilon)v_5 \quad (5.117)
 \end{aligned}$$

eşitliğinde $\beta_2 = \beta_1$ ve $\varepsilon = \beta_3^{-1}$ şeklinde alınırsa $v' = \beta_1 v_1 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 v'' &= Ad(\exp(\varepsilon v_1)v') = v - \varepsilon[v_1, v'] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_1, [v_1, v']] + \dots \\
 v'' &= v' - \varepsilon(-\beta_3 v_3) + \dots \\
 v'' &= \beta_1 v_1 + \beta_3 e^\varepsilon v_3 + \beta_4 v_4 \quad (5.118)
 \end{aligned}$$

bulunur.

$\varepsilon = \ln|\beta_3|$ seçildiğinde $\beta_5 \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm vektör alanları ve

$\tilde{v}$ vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelerin, $\beta_3 e^\varepsilon = \kappa \in \{-1, 0, 1\}$ alınması durumunda elde edilen $v'' = \beta_1 v_1 + \kappa v_3 + \beta_4 v_4$ vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelere denk olacağı görülür.

2. koşul: $\beta_3 = 0, \beta_2 \neq 0$ hali için $\beta_2 = 1$ alınabilir.

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + v_2 + \beta_4 v_4 + \beta_5 v_5 \\ \omega &= Ad(\exp(\varepsilon v_2)v) = v - \varepsilon[v_2, v] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_2, [v_2, v]] + \dots \\ \omega &= v - \varepsilon(\beta_1 v_2 - \beta_4 v_2) + \dots \\ \omega &= \beta_1 v_1 + (1 - (\beta_4 - \beta_1)\varepsilon)v_2 + \beta_5 v_5 \end{aligned} \quad (5.119)$$

eşitliğinde $\varepsilon = (\beta_4 - \beta_1)^{-1}, \beta_4 \neq \beta_1$ seçilerek

$$\begin{aligned} \omega' &= Ad(\exp(\varepsilon v_5)\omega) = v - \varepsilon[v_5, \omega] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_5, [v_5, \omega]] + \dots \\ \omega' &= \omega - \varepsilon(2\beta_1 v_5 - \beta_4 v_5) \\ \omega' &= \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \varepsilon(\beta_4 - 2\beta_1 + \beta_5)v_5 \end{aligned} \quad (5.120)$$

eşitliği için $\beta_4 = 2\beta_1 - \beta_5$ alınması durumunda $\beta_3 = 0, \beta_2 \neq 0, \beta_4 \neq \beta_1$ koşulunu sağlayan tüm vektör alanları ve $\tilde{v}$ vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelerin $\omega' = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4$ vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelere denk olacağı görülür.

3. koşul: $\beta_2 = \beta_3 = 0, \beta_4 \neq 0$ hali için $\beta_4 = 1$ alınabilir.

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \beta_5 v_5 \\ X &= Ad(\exp(\varepsilon v_1)v) = v - \varepsilon[v_1, v] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_1, [v_1, v]] + \dots \\ X &= v - \varepsilon(-2\beta_5 v_5) + \dots \\ X &= \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \beta_5 e^{2\varepsilon} v_5 \end{aligned} \quad (5.121)$$

olmak üzere aynı şekilde $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln |\beta_5|$ seçiminden $\beta_5 e^{2\varepsilon} = \kappa \in \{-1, 0, 1\}$ durumunda $X = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \kappa v_5$ şeklini alır.

Dolayısıyla $v = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \beta_5 v_5$ ve $\tilde{v}$ vektör alanları kullanılarak yapılan indirgemeler X vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelere denk bulunur.

4. koşul: $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0, \beta_1 \neq 0$ hali için $\beta_1 = 1$ alınabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} v &= v_1 + \beta_2 v_2 \\ \bar{v} &= Ad(\exp(\varepsilon v_1)v) = v - \varepsilon[v_1, v] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_1, [v_1, v]] + \dots \\ \bar{v} &= v - \varepsilon(\beta_2 v_2) + \dots \\ \bar{v} &= v_1 + \beta_2 e^\varepsilon v_2 \end{aligned} \quad (5.122)$$

eşitliğinden $\varepsilon = \ln \beta_2$ için $\beta_2 e^\varepsilon = \kappa \in \{-1, 0, 1\}$ durumunda $\bar{v} = v_1 + \kappa v_2$ şeklinde bulunur. Buradan $v = v_1 + \beta_2 v_2$ ve $\tilde{v}$ vektör alanları kullanılarak yapılan indirgemelerin, $\bar{v}$ vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelere denk olacağı görülür.

5. koşul: $\beta_2 = \beta_4 = 0, \beta_3 \neq 0$ hali için $\beta_3 = 1$ alınabilir.

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + v_3 + \beta_5 v_5 \\ \vartheta &= Ad(\exp(\varepsilon v_5)v) = v - \varepsilon[v_5, v] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_5, [v_5, v]] + \dots \\ \vartheta &= v - \varepsilon(2\beta_1 v_5) \\ \vartheta &= \beta_1 v_1 + (\beta_5 - 2\varepsilon\beta_1) + v_3 \end{aligned} \quad (5.123)$$

eşitliğinde ise $\varepsilon = \frac{\beta_5}{2\beta_1}$ durumunda $\vartheta = \beta_1 v_1 + v_3$ olur.

$$\begin{aligned} \vartheta' &= Ad(\exp(\varepsilon v_5)\vartheta) = \vartheta - \varepsilon[v_5, \vartheta] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[v_5, [v_5, \vartheta]] + \dots \\ \vartheta' &= \vartheta - \varepsilon(\beta_1 v_3) \\ \vartheta' &= \beta_1 v_1 + (1 - \varepsilon\beta_1) + v_3 \end{aligned} \quad (5.124)$$

eşitliğinde ise $\varepsilon = \beta_1^{-1}$ alınarak $\vartheta' = \beta_1 v_1$ elde edilir.

Böylece $v = \beta_1 v_1 + v_3 + \beta_5 v_5$ ve $\tilde{v}$ vektör alanları kullanılarak yapılan indirgemelerin, ϑ' vektör alanı kullanılarak yapılan indirgemelere denk olduğu görülür.

Sonuç olarak optimal sistem,

$$\begin{aligned} L_{1,1}^a &= \beta_1 v_1, \quad L_{1,2}^\kappa = \beta_1 v_1 + \kappa v_2, \quad L_{1,3}^a = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 \\ L_{1,4}^\kappa &= \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \kappa v_5, \quad L_{1,5}^\kappa = \beta_1 v_1 + \kappa v_3 + \beta_4 v_4 \end{aligned} \quad (5.125)$$

şeklindeki beş tane cebirden oluşacak şekilde bulunur.

Optimal Sisteme Göre İndirgeme

1. $L_{1,1}^a$ Cebiri İçin İndirgeme; $L_{1,1}^a = \beta_1 v_1$ için elde edilen karakteristik denklem;

$$\frac{dx}{2\beta_1 x} = \frac{dt}{\beta_1 t} = \frac{du}{\beta_1 u} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.126)$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{dx}{2\beta_1 x} = \frac{dt}{\beta_1 t} \quad (5.127)$$

denklemini çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = \frac{x}{t^2} \quad (5.128)$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{dt}{\beta_1 t} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.129)$$

karakteristik denkleminde

$$h(x, t) = t^2 \tilde{h}(\zeta) \quad (5.130)$$

bulunur.

$$\frac{dt}{\beta_1 t} = \frac{du}{\beta_1 u} \quad (5.131)$$

denkleminde ise

$$u(x, t) = t \tilde{u}(\zeta) \quad (5.132)$$

elde edilir. Bu yeni değişmezlerin x, t ' göre türevlerinden

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = t^{-2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-2x}{t^3}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = 2t\tilde{h}(\zeta) - \frac{2x}{t}\tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = t^{-1}\tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \tilde{u}(\zeta) - \frac{2x}{t^{-2}}\tilde{u}'(\zeta) \quad (5.133)$$

elde edilir. Buradan yeni değişmezlerle karşılık gelen denklemler,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - 2\zeta]\tilde{h}'(\zeta) + 2\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - 2\zeta]\tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \tilde{u}(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.134)$$

dir.

2. $L_{1,2}^\kappa$ Cebiri İçin İndirgeme; $L_{1,2}^\kappa = \beta_1 v_1 + \kappa v_2$ için elde edilen karakteristik denklem,

$$\frac{dx}{2\beta_1 x} = \frac{dt}{\beta_1 t + \kappa} = \frac{du}{\beta_1 u} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.135)$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{dx}{2\beta_1 x} = \frac{dt}{\beta_1 t + \kappa} \quad (5.136)$$

denklemini çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = \frac{x}{(\beta_1 t + \kappa)^2} \quad (5.137)$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{dt}{\beta_1 t + \kappa} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.138)$$

denklemini ele alındığında

$$h(x, t) = (\beta_1 t + \kappa)^2 \tilde{h} \quad (5.139)$$

bulunur.

$$\frac{dt}{\beta_1 t + \kappa} = \frac{du}{\beta_1 u} \quad (5.140)$$

buradan ise

$$u(x, t) = (\beta_1 t + \kappa) \tilde{u}(\zeta) \quad (5.141)$$

olur.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = (\beta_1 t + \kappa)^{-2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-2\beta_1 x}{(\beta_1 t + \kappa)^3}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{-2\beta_1 x}{(\beta_1 t + \kappa)} \tilde{h}'(\zeta) + 2\beta_1 (\beta_1 t + \kappa) \tilde{h}(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = (\beta_1 t + \kappa)^{-1} \tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \beta_1 \tilde{u}(\zeta) - \frac{-2\beta_1 x}{(\beta_1 t + \kappa)^2} \tilde{u}'(\zeta) \quad (5.142)$$

olmak üzere elde edilen yeni denklemler aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - 2\beta_1 \zeta] \tilde{h}'(\zeta) + 2\beta_1 \tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - 2\beta_1 \zeta] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \beta_1 \tilde{u}(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.143)$$

3. $L_{1,3}^a$ Cebiri İçin İndirgeme; $L_{1,3}^a = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4$ için elde edilen karakteristik denklem

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.144)$$

dir. Buradan

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} \quad (5.145)$$

denklemini çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = xt^{(\beta_4-2\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \quad (5.146)$$

şeklindedir.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.147)$$

karakteristik denkleminde

$$h(x, t) = t^{2\beta_1(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{h}(\zeta) \quad (5.148)$$

bulunur.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u} \quad (5.149)$$

denkleminde ise

$$u(x, t) = t^{\beta_1(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) \quad (5.150)$$

olur.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = t^{(\beta_4-2\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} xt^{(2\beta_4-3\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = t^{\beta_4(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} t^{(\beta_4+\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{h}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} t^{(2\beta_4-\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = t^{-1} \tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} t^{\beta_4(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} xt^{-2} \tilde{u}'(\zeta) \quad (5.151)$$

olmak üzere yeni değişimlere karşılık gelen denklemler,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} \zeta] \tilde{h}'(\zeta) + \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} \tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} \zeta] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} \tilde{u}(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.152)$$

şeklindedir.

4. $L_{1,4}^\kappa$ Cebiri İçin İndirgeme; $L_{1,4}^\kappa = \beta_1 v_1 + \beta_4 v_4 + \kappa v_5$ için elde edilen karakteristik denklem

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.153)$$

dir.Buradan

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} \quad (5.154)$$

denklemini çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = ((2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa)t^{(\beta_4 - 2\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \quad (5.155)$$

bulunur.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.156)$$

karakteristik denkleminde

$$h(x, t) = t^{2\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{h}(\zeta) \quad (5.157)$$

olur.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u} \quad (5.158)$$

denkleminde ise

$$u(x, t) = t^{\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) \quad (5.159)$$

olur.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = (2\beta_1 - \beta_4)t^{(\beta_4-2\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}((2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa)t^{(2\beta_4-3\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = t^{\beta_4(\beta_1-\beta_4)^{-1}}\tilde{h}'(\zeta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = & -((2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa)\frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}t^{(2\beta_4-\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}\tilde{h}'(\zeta) \\ & + \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}t^{(\beta_4+\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}}\tilde{h}(\zeta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = t^{-1}\tilde{u}'(\zeta)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}t^{\beta_4(\beta_1-\beta_4)^{-1}}\tilde{u}(\zeta) - ((2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa)\frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}t^{-2}\tilde{u}'(\zeta) \quad (5.160)$$

olmak üzere, yeni değişmezlerle karşılık gelen denklemler,

$$\tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + [(2\beta_1 - \beta_4)\tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\zeta]\tilde{h}'(\zeta) + \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\tilde{h}(\zeta) = 0$$

$$[(2\beta_1 - \beta_4)\tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\zeta]\tilde{u}'(\zeta) + (2\beta_1 - \beta_4)\tilde{h}'(\zeta) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\tilde{u}(\zeta) = 0 \quad (5.161)$$

olur.

5. $L_{1,5}^\kappa$ Cebiri İçin İndirgeme; $L_{1,5}^\kappa = \beta_1 v_1 + \kappa v_3 + \beta_4 v_4$ için elde edilen karakteristik denklem ise

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa t} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u + \kappa} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.162)$$

olur. Buradan

$$\frac{dx}{(2\beta_1 - \beta_4)x + \kappa t} = \frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} \quad (5.163)$$

denklemini çözülerek benzerlik değişkeni

$$\zeta = (x + \frac{\kappa}{\beta_1}t)t^{(\beta_4-2\beta_1)(\beta_1-\beta_4)^{-1}} \quad (5.164)$$

bulunur.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{dh}{2\beta_1 h} \quad (5.165)$$

karakteristik denklemden ise

$$h(x, t) = t^{2\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{h}(\zeta) \quad (5.166)$$

elde edilir.

$$\frac{dt}{(\beta_1 - \beta_4)t} = \frac{du}{\beta_1 u} \quad (5.167)$$

denklemden

$$u(x, t) = \beta_1^{-1} t^{\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) - \frac{\kappa}{\beta_1} \quad (5.168)$$

bulunur.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = t^{(\beta_4 - 2\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} x t^{(2\beta_4 - 3\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} - \frac{\kappa}{\beta_1 - \beta_4} t^{(\beta_4 - 2\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}}$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = t^{\beta_4(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = & \left\{ \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} \tilde{h}(\zeta) + \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} x t^{(\beta_4 - 2\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta) \right. \\ & \left. - \frac{\kappa}{\beta_1 - \beta_4} t^{-\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{h}'(\zeta) \right\} t^{(\beta_1 + \beta_4)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\beta_1 t} \tilde{u}'(\zeta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{\beta_1 - \beta_4} t^{\beta_4(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \tilde{u}(\zeta) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4} x t^{-2} + \frac{\kappa}{\beta_1(\beta_1 - \beta_4)} t^{-1} \tilde{u}'(\zeta) \end{aligned} \quad (5.169)$$

Buradan elde edilecek olan denklemler ise

$$\begin{aligned} & \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) + \frac{\beta_1(\beta_4 - 2\beta_1)}{\beta_1 - \beta_4} \zeta] \tilde{h}'(\zeta) + \frac{2\beta_1^2}{\beta_1 - \beta_4} \tilde{h}(\zeta) = 0 \\ & [\frac{1}{\beta_1^2} \tilde{u}(\zeta) + \frac{\beta_1(\beta_4 - 2\beta_1)}{\beta_1 - \beta_4} \zeta] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) + \frac{1}{\beta_1 - \beta_4} \tilde{u}(\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (5.170)$$

şeklindedir.

Sonuç olarak simetri indirgenmesi esnasında uygulanan iki yöntem karşılaştırılacak olursa, optimal sistemden elde edilen her bir denklem sistemi için kullanılan parametreler, birinci yöntemde yer alan birinci koşul altında elde edilen (5.71) denklem sisteminde kullanılan parametreler cinsinden yazıldığı takdirde, (5.71) denklem sistemi ile L_5 cebirinin optimal sisteminden elde edilen denklem sistemlerinin birbirine benzer olacağı görülür. Her iki yöntem ile elde edilen indirgenmiş denklemler karşılaştırılacak olursa parametreler arası ilişkilerin incelenmesi sonucunda daha genel indirgenmiş denklemlerin bulunabildiği görülür.

5.3 Benzerlik Çözümleri

Bu bölümde elde edilen (5.72), (5.82), (5.102), (5.112) denklem sistemlerinin benzerlik çözümleri grup parametrelerine birtakım değerler verilerek araştırılmıştır.

Burada Lie grup analizinin boyut analizinin bir genelleştirilmesi olduğunu göstermek amacıyla grup parametrelerine verilen değerler, tek tabakalı sıg su denklemlerinin boyut analizi kullanılarak elde edilen daha önceki çalışmalardaki benzerlik formlarına uygun şekilde alınmıştır ve bu formlar için elde edilen benzerlik çözümleri literatürde varolan çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Öncelikle (5.72) denklem sistemini gözönüne alalım

1.koşul: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 = 0$, $\alpha_3 = -4$ şeklinde alındığı takdirde

$$u(x, t) = t^{-1/3} \tilde{u}(\zeta), h(x, t) = t^{-2/3} \tilde{h}(\zeta), \zeta = \frac{x}{Kt^{2/3}} \quad (5.171)$$

olarak bulunur. Buradaki değerlerin boyut analizi kullanılarak bulunan (3.10) ifadesindeki değerlerle aynı olduğu görülür. (5.72) denklem sisteminde yukarıdaki parametreler kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} [\tilde{h}(\zeta) \tilde{u}(\zeta) - 2\zeta \tilde{h}(\zeta)] &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - 2\zeta] \tilde{u}'(\zeta) - \tilde{u}(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.172)$$

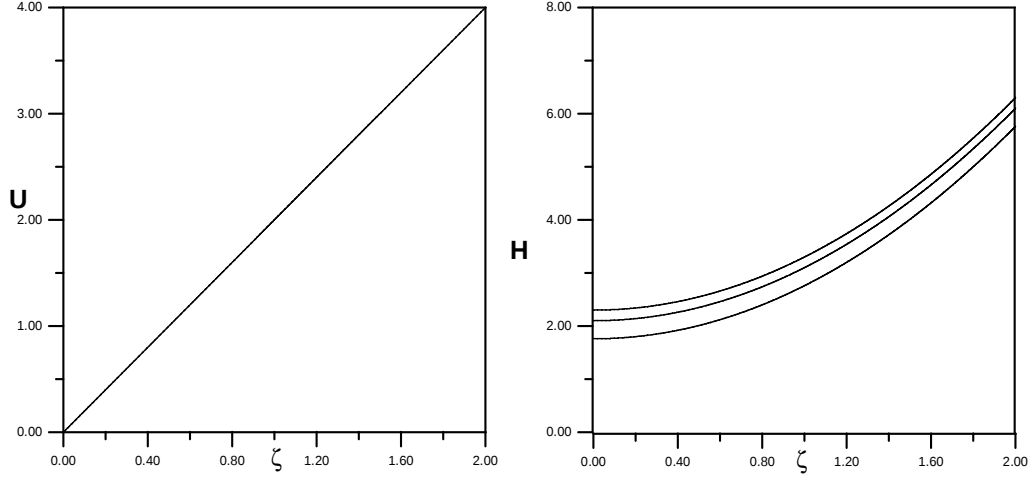
elde edilir.

Değişken bir akımın olmadığı durumda: Bölüm 2’de bahsedilen (2.31) sınır koşulu alınmıştır. Bu koşullar altında (5.172) denklem sistemi $\tilde{h}(\zeta) \tilde{u}(\zeta) - 2\zeta \tilde{h}(\zeta) = 0$

için $\tilde{h}(\zeta) \neq 0$ olması koşulu altında ζ 'ya göre integre edildiğinde

$$\tilde{u}(\zeta) = 2\zeta, \tilde{h}(\zeta) = \zeta^2 + h_0 \quad (5.173)$$

şeklinde benzerlik çözümleri bulunur. Buradan verilen sınır koşulları altında oluşan yerçekimi akımlarının grafikleri



Şekil 2: Değişken Bir Akımın Olmadığı Durum

şeklinde gösterilir. Burada $\tilde{u}(\zeta)$, $\tilde{h}(\zeta)$ ifadeleri şekil üzerinde U ve H olarak gösterilmiştir ve şekil 2'den akımın hızının ζ 'nın aldığı değerlere göre lineer olarak arttığı görülür ve akımın derinliğinin de ζ 'nın aldığı değerlere göre arttığı anlaşılmaktadır. Burada elde edilen benzerlik çözümleri, tek tabakalı sıg su denklemlerine t 'nin büyük değerleri için uygulanan rölaksasyon yöntemi ile elde edilen çözümleriyle aynıdır.

2.koşul : $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 = 0$, $\alpha_3 = -1$ şeklinde alındığı takdirde

$$u(x, t) = t^{1/2}\tilde{u}(\zeta), h(x, t) = t\tilde{h}(\zeta), \zeta = \frac{x}{Kt^{3/2}} \quad (5.174)$$

olarak bulunur.

Değişken bir akımın olduğu durumda: $u(0, t) = t^{1/2}u_0$, $h(0, t) = th_0$ şeklinde sınır koşulları alınsın. Bu durumda (5.72) denklem sistemi belirtilen koşul altında

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]\tilde{h}'(\zeta) + 2\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]\tilde{u}'(\zeta) - \tilde{u}(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.175)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen denklem sistemi lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem sistemidir. Bu durumda bir benzerlik çözümüne ulaşabilmek için bir sayısal çözüm yönteminin uygulanması gerekir.

Bu çalışmada, elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümünde 4. dereceden klasik Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır [38-40]. Sayısal analizde Runge-Kutta yöntemleri, adi diferansiyel denklemlerin çözüm yaklaşımları için kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem 1900'lü yıllarda C. Runge ve M.W. Kutta adlı matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. RK4 veya Runge-Kutta yöntemi olarak adlandırılan Runge-Kutta yöntemler ailesinin bu üyesi sıkça kullanılır.

Aşağıdaki gibi tanımlanan bir başlangıç değer problemini ele alalım.

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0, a \leq t_0 \leq b \quad (5.176)$$

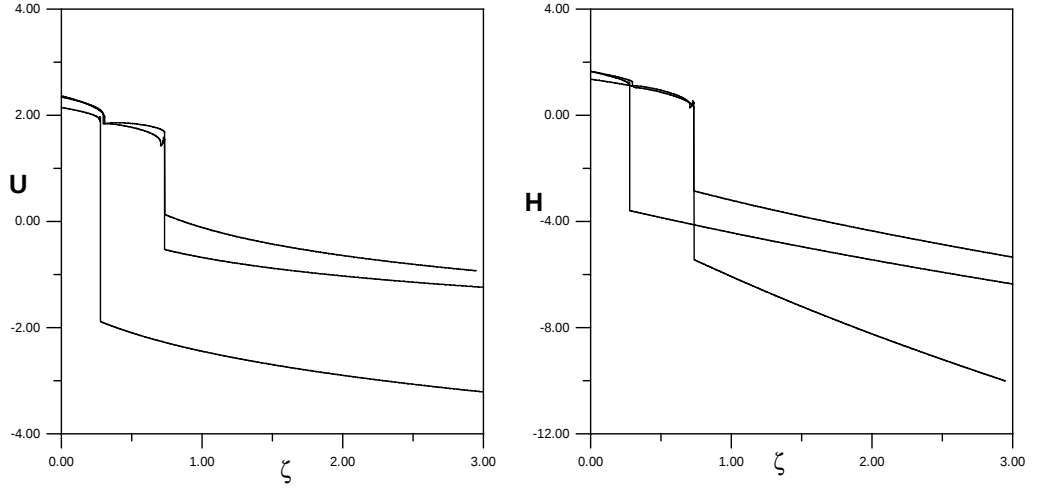
ve bu problem için RK4 yöntemi aşağıdaki denklemlerle verilir.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.177)$$

Burada h problemin çözümünde kullanılacak olan adım sayısıdır ve $h = (b - a)/n$ 'dir. k_1 aralığın başlangıcındaki eğimi gösterir ve $k_1 = f(t_n, y_n)$ dir. k_2 aralığın orta noktasındaki eğimidir, $k_2 = f(t_n + h/2, y_n + k_1/2)$ şeklindedir. k_3 yine orta noktadaki eğimdir ve $k_3 = f(t_n + h/2, y_n + k_2/2)$ şeklindedir. k_4 aralığın sonundaki eğimi gösterir, y değeri ve k_3 eğimi kullanılarak bulunur, $k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3)$ 'dir. Böylece bir sonraki y_{n+1} değeri o anki y_n değerine h aralığının büyüklüğüyle tahmini eğimin çarpımının eklenmesiyle elde edilir. Bu eğim, eğimlerin ağırlıklı ortalamasıdır ve $m = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$ olarak ifade edilir. Yukarıda ifade edilen RK4 yöntemi (5.175) denklem sisteminin çözümünü elde etmek için kullanılmak istendiği takdirde gerekli hesaplamaların yapılabilmesi için bilgisayar programına ihtiyaç duyulur. Bu çalışmada RK4 yöntemi ve Fortran dili kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir [40]. (5.175) denklem sistemi

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(\zeta) &= \frac{[1 - 2\zeta]\tilde{u}(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]^2} \\ \tilde{h}'(\zeta) &= \frac{[\tilde{u}(\zeta) - 6\zeta]\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]^2} \end{aligned} \quad (5.178)$$

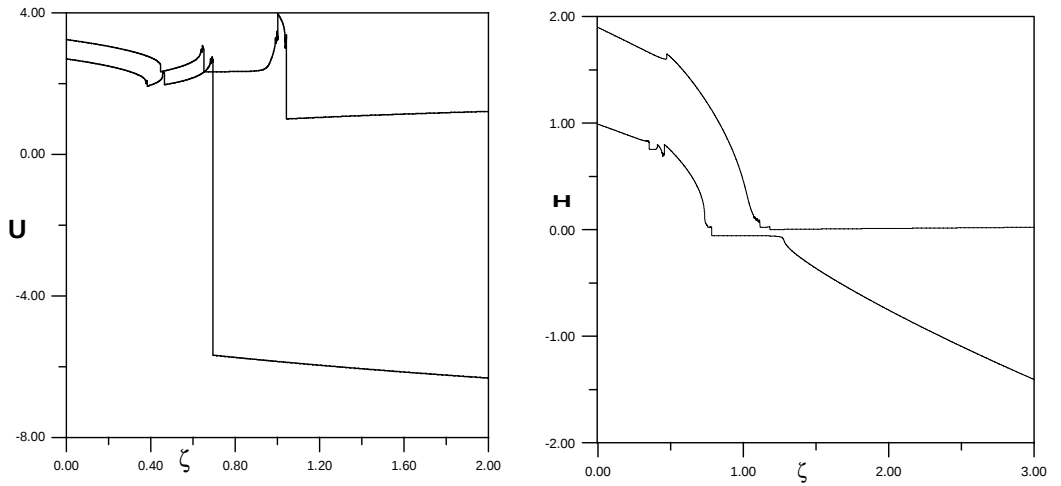
haline getirebilir. Bu denklem sisteminin $1 < \mathfrak{F}_o < 2$ durumu için elde edilen sayısal çözümleri Şekil 3'te gösterilmiştir,



Şekil 3: Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

şekil 3'ten verilen sınır koşulları altında akımın hızının ve derinliğinin ζ 'nin aldığı değerlere göre azaldığı görülür.

$\mathfrak{F}_o > 2$ süperkritik durumu için elde edilen sayısal çözümlere bakılırsa



Şekil 4:Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

şeklinde olduğu görülür ve elde edilen grafiklerden, verilen sınır koşulları altında akımın hızının ve derinliğinin ζ 'nin aldığı değerlere göre azaldığı anlaşılmaktadır

3. koşul $\alpha_1 = -1, \alpha_3 = -5, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 = 0$ alındığı takdirde

$$u(x, t) = t^{-1/4} \tilde{u}(\zeta), h(x, t) = t^{-1/2} \tilde{h}(\zeta), \zeta = b \frac{x}{t^{3/4}} \quad (5.179)$$

şeklinde bulunur. Burada b sabit bir sayıdır.

Değişken bir akımın olduğu durumda: $u(0, t) = t^{-1/4} u_0, h(0, t) = t^{-1/2} h_0$ şeklinde sınır koşullarının olduğu varsayılın. Bu durumda (5.72) denklem sistemi belirtilen koşul altında;

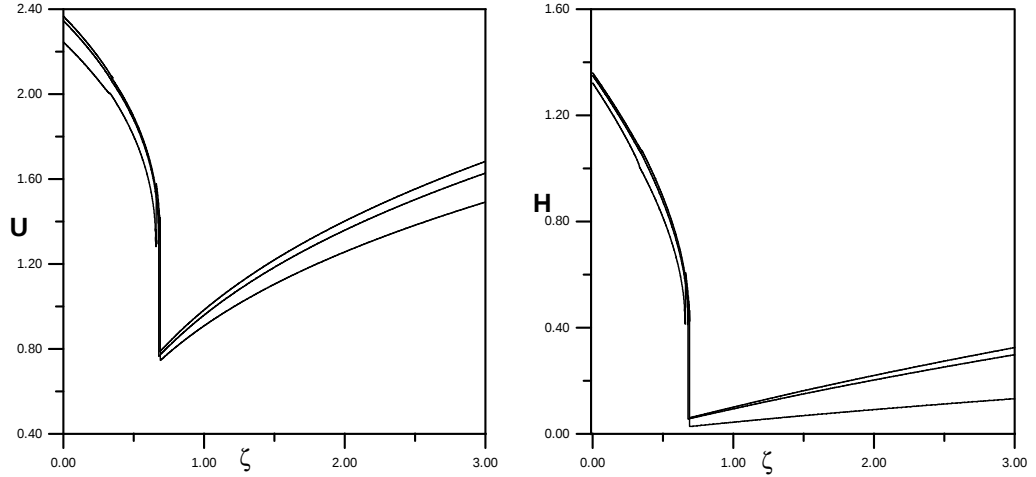
$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta] \tilde{h}'(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta] \tilde{u}'(\zeta) - \tilde{u}(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.180)$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.180) denklem sistemi

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(\zeta) &= \frac{\tilde{u}^2(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta) - 3\zeta \tilde{u}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]^2} \\ \tilde{h}'(\zeta) &= \frac{[\tilde{u}(\zeta) - 6\zeta] \tilde{h}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - [\tilde{u}(\zeta) - 3\zeta]^2} \end{aligned} \quad (5.181)$$

haline getirilir.

Buradan bu denklem sisteminin $1 < \mathfrak{F}_0 < 2$ durumunda

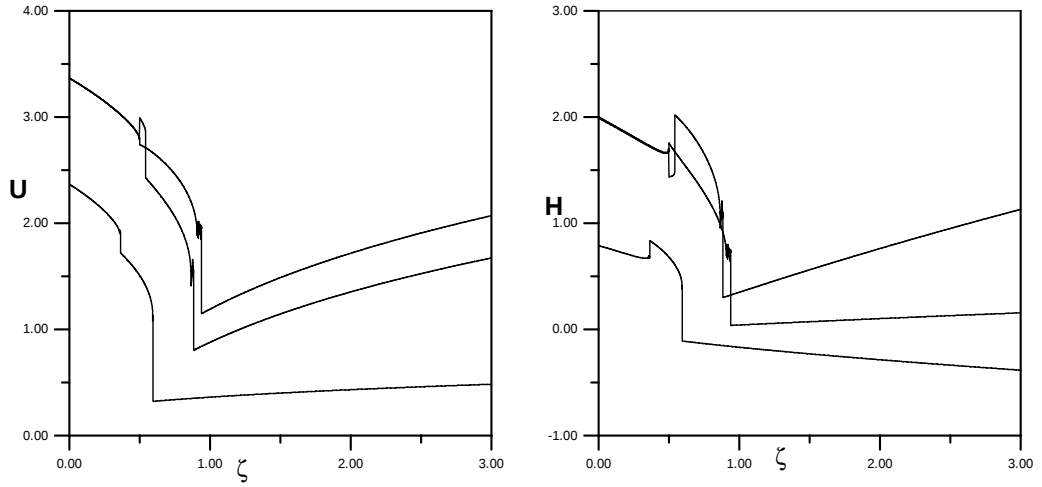


Şekil 5:Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

şekil 5'te gösterildiği gibi sayısal çözümler elde edilir. Buradan akımın hızı ve derinliğinin verilen sınır koşulları altında ζ 'nin aldığı değerlere önce azalıp daha

sonra arttığı görülür.

Değişken bir akım girişi olduğu varsayıldığı takdirde alınan sınır koşulları altında $\mathfrak{F}_o > 2$ durumunda Şekil 6 ile gösterilen sayısal çözümler elde edilir. Şekil 6'dan altkiritik durumda olduğu gibi akımın hızının ve derinliğinin $\zeta \leq 0.5$ ' değerlerine kadar azalıp daha sonra arttığı anlaşılmaktadır.

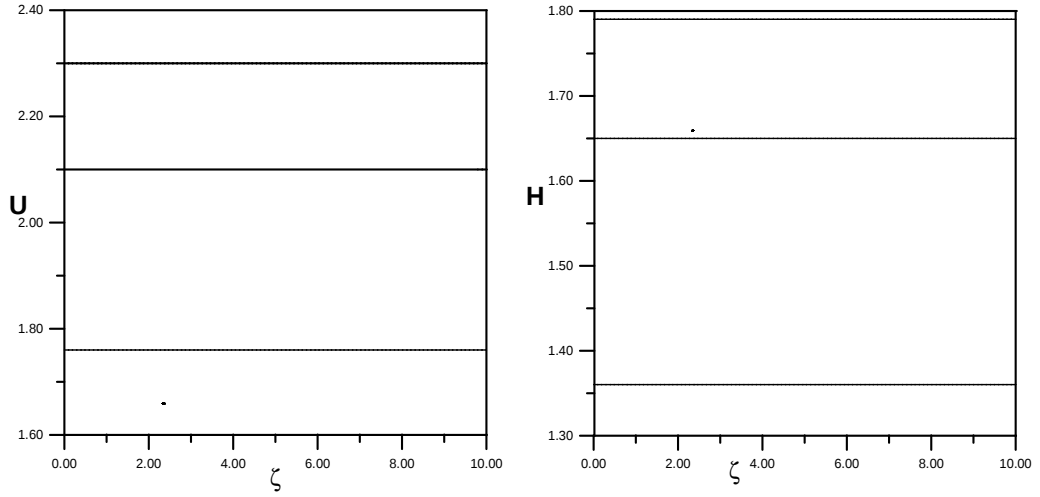


Şekil 6:Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

(5.82) denklem sistemi için, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 = 0$ şeklinde alındığı takdirde $\tilde{u}(\zeta), \tilde{h}(\zeta), \zeta$ değişkenleri, üçüncü bölümde boyut analizi yaklaşımıyla elde edilen (3.10),(3.18),(3.22) ifadeleriyle aynı hale gelir. (5.82) denklem sistemi, (3.27), (3.28) ile gösterilen denklem sistemine dönüşür.

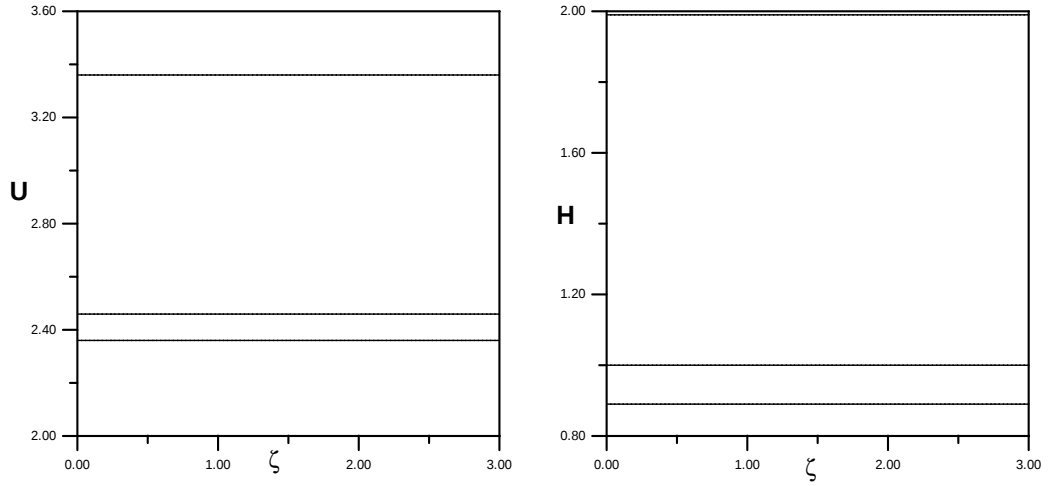
Sabit bir akımın olduğu durumda: $u(0, t) = u_0, h(0, t) = h_0$ sınır koşulları alınırsa üçüncü bölümde (3.40) ve (3.42) ile gösterilen çözümlerinin elde edileceği görülür ve (3.42) ile gösterilen benzerlik çözümlerine sahip yerçekimi akımları aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir.

$1 < \mathfrak{F}_o < 2$ durumunda



Şekil 7: Sabit Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

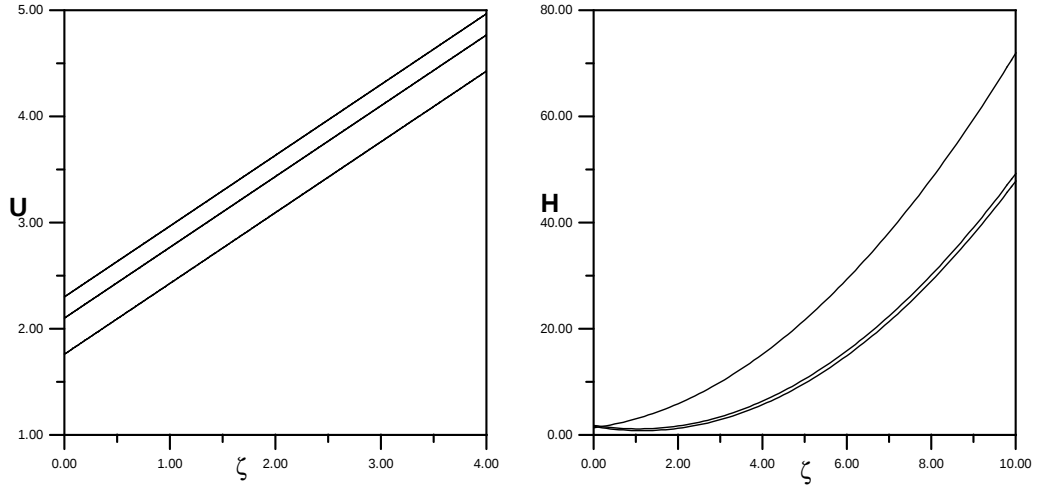
$\mathfrak{F}_o > 2$ durumunda



Şekil 8: Sabit Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

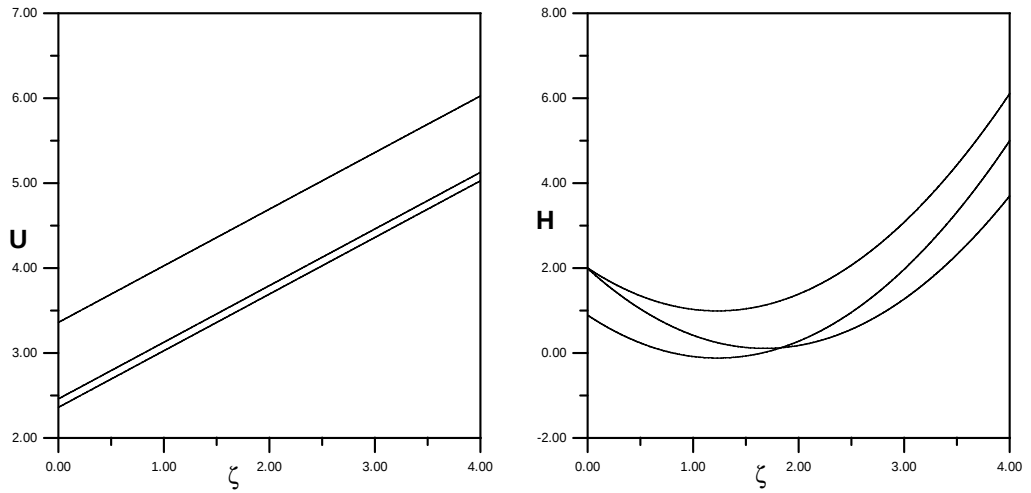
Şekil 7 ve şekil 8’de, verilen sınır koşulları altında akımın hızının değişmediği gösterilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde (3.27), (3.28) ile gösterilen denklem sistemi için değişken bir akım girişi olduğu varsayılarak elde edilen (3.40) ile gösterilen benzerlik çözümlerinin grafikleri ise aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

$1 < \mathfrak{F}_o < 2$ durumunda



Şekil 9: Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

$\mathfrak{F}_o > 2$ durumunda



Şekil 10: Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

elde edilir. Şekil 9 ve şekil 10'dan belirtilen sınır koşulları için ζ 'nın aldığı değerlere göre akımın hızının lineer olarak arttığı ve buna bağlı olarak akımın derinliğinin de arttığı görülür.

(5.100) denklem sistemi için, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 = 0$ şeklinde alındığı takdirde

$$u(x, t) = t^{-1}\tilde{u}(\zeta), h(x, t) = t^{-2}\tilde{h}(\zeta), \zeta = x \quad (5.182)$$

olarak bulunur.

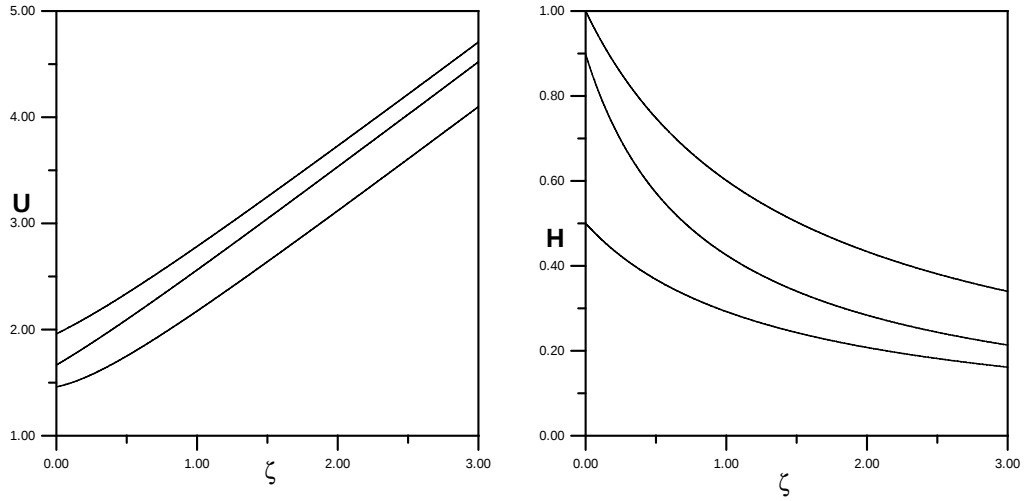
Değişken bir akım olduğu durumda: $u(0, t) = tu_0, h(0, t) = t^2 h_0$ şeklinde sınır koşullarının olduğu varsayılın. Bu durumda (5.100) denklem sistemi belirtilen koşul altında

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) + \tilde{u}(\zeta)\tilde{h}'(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ \tilde{u}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta) - \tilde{u}(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0\end{aligned}\tag{5.183}$$

şeklinde bulunur ve (5.185) denklem sisteminden

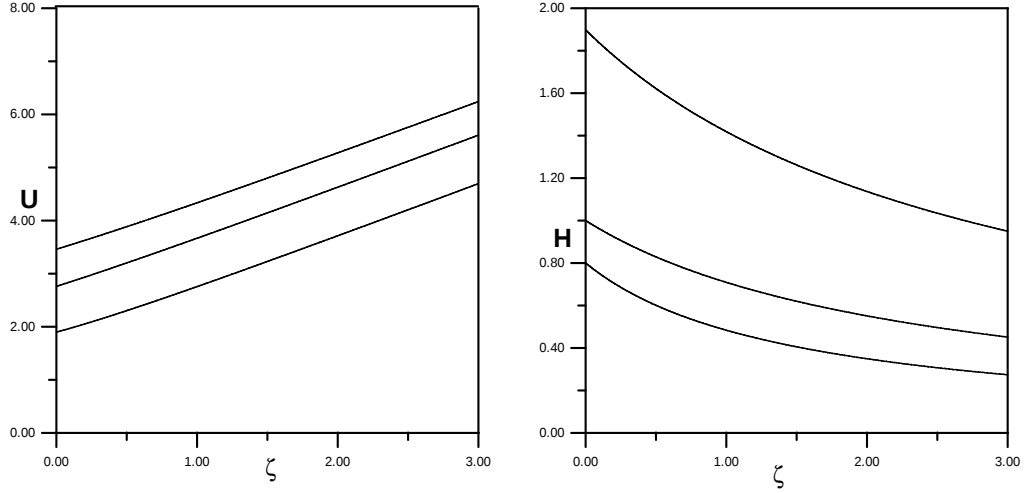
$$\begin{aligned}\tilde{u}'(\zeta) &= \frac{\tilde{u}^2(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{u}^2(\zeta) - \tilde{h}(\zeta)} \\ \tilde{h}'(\zeta) &= -\frac{\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{u}^2(\zeta) - \tilde{h}(\zeta)}\end{aligned}\tag{5.184}$$

bulunur. Buradan $1 < \mathfrak{F}_o < 2$ durumunda



Şekil 11: Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

$\mathfrak{F}_o > 2$ durumunda



Şekil 12: Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

şeklinde sayısal çözümler elde edilir. Şekil 11 ve şekil 12 incelenicek olursa verilen sınır koşulları altında ζ 'nın aldığı değerlere göre akımın hızının lineer olarak arttığı, derinliğinin ise azaldığı görülür. Buradan (5.72), (5.82), (5.102) denklemleri için yukarıda bahsedilen benzerlik çözümlerinin literatürde varolan boyut analizi kullanılarak elde edilen benzerlik çözümleriyle aynı olduğu görülür [24,25,26].

(5.112) denklem sistemi için, $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_5 = 1, \alpha_2, \alpha_4 = 0$ şeklinde alındığı takdirde

$$u(x, t) = e^t \tilde{u}(\zeta), h(x, t) = e^{2t} \tilde{h}(\zeta), \zeta = e^{-t} x \quad (5.185)$$

olarak bulunur. Burada elde edilen benzerlik formları boyut analizi yaklaşımıyla elde edilen benzerlik formlarından farklı yapıdadır ve dolayısıyla değişken bir akım girişi olduğu varsayılarak incelendiği takdirde aşağıdaki gibi yeni benzerlik çözümlerinin elde edilebileceği görülür.

Değişken bir akım olduğu durumda: $u(0, t) = e^t u_0, h(0, t) = e^{2t} h_0$ şeklinde sınır koşulları olduğu varsayıldığında (5.112) denklem sistemi,

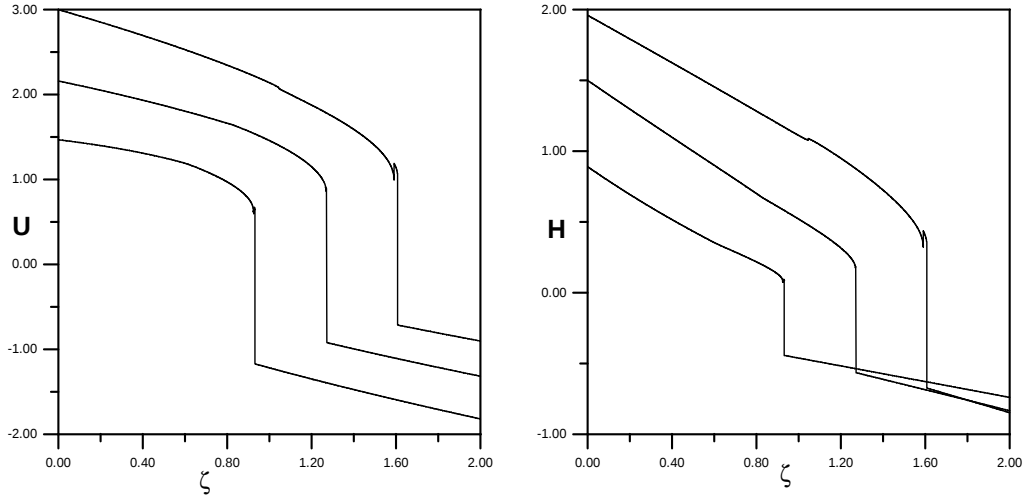
$$\begin{aligned} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + [\tilde{u}(\zeta) - \zeta] \tilde{h}'(\zeta) + 2\tilde{h}(\zeta) &= 0 \\ [\tilde{u}(\zeta) - \zeta] \tilde{u}'(\zeta) + \tilde{u}(\zeta) + \tilde{h}'(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.186)$$

şeklinde bulunur ve (5.186) denklem sisteminden

$$\begin{aligned}\tilde{u}'(\zeta) &= \frac{\tilde{u}^2(\zeta) - \zeta\tilde{u}(\zeta) - 2\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - (\tilde{u}(\zeta) - \zeta)^2} \\ \tilde{h}'(\zeta) &= \frac{\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}(\zeta) - 2\zeta\tilde{h}(\zeta)}{\tilde{h}(\zeta) - (\tilde{u}(\zeta) - \zeta)^2}\end{aligned}\tag{5.187}$$

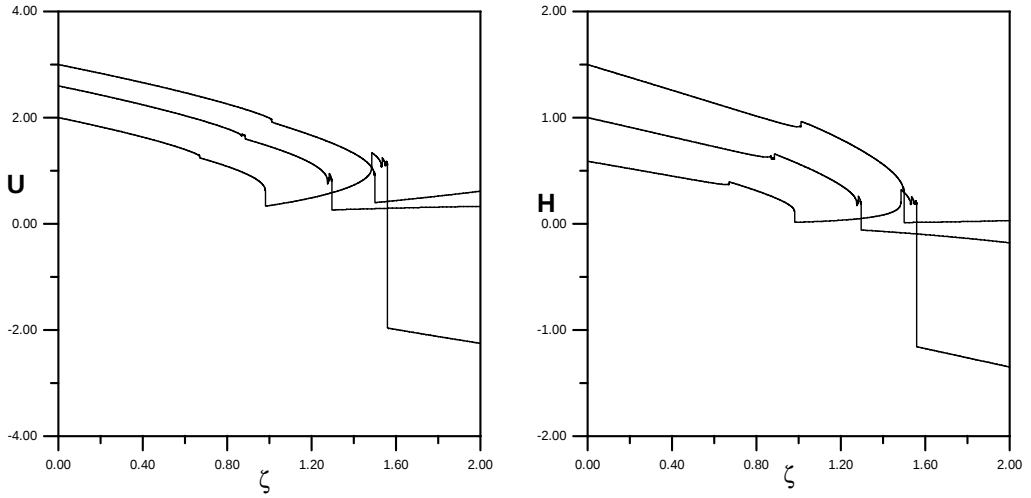
yazıldığı takdirde sayısal çözümler,

$1 < \mathfrak{F}_o < 2$ durumunda



Şekil 13: Değişken Bir Akımın Olduğu Altkritik Durumda

$\mathfrak{F}_o > 2$ durumunda



Şekil 14: Değişken Bir Akımın Olduğu Süperkritik Durumda

şeklinde bulunur. Burada gösterilen Şekil 13 ve Şekil 14 incelendiğinde verilen sınır koşulları altında, ζ 'nın aldığı değerlere göre akımın hızının ve derinliğinin giderek azaldığı görülür.

6. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

- Lie grup teorisi, bu çalışma içerisinde Boyut Analizinin bir genelleştirilmesi olarak ele alınmıştır ve bu çalışmada mevcut tanımı ve kapsamı verilen problem Lie grup analizi kapsamında literatürde ilk defa incelenmiştir.
- Bu çalışma içerisinde tek tabakalı sığ su denklemleri için yeni Lie simetri grupları bulunmuştur ve elde edilen yeni simetri gruplarından yola çıkarak tek tabakalı sığ su denklemlerinin Lie simetri sayısının sonsuz olabileceği görüşüne varılmıştır.
- Simetri indirgemesi için kullanılan yöntemlerden; optimal sistem ile yapılan indirgeme işlemlerine göre parametreler arasındaki ilişkiler bulunarak yapılan indirgeme işlemleriyle daha genel formda indirgenmiş denklemlerin elde edilebileceği anlaşılmıştır.
- Bu tezde değişken akımlı yerçekimi akımlarının benzerlik çözümleri Lie grup analizi altında incelenerek boyut analizi altında elde edilen benzerlik değişkeninden farklı benzerlik değişkenleri ve buna bağlı olarak grup parametrelerinin bazı özel değerleri için farklı benzerlik çözümlerinin elde edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Simpson, J.E.**, 1997. Gravity currents: in the environment and laboratory, Cambridge University
- [2] **Vreugdenhil, C.B.**, 1994. Numerical methods for Shallow-Water Flow, Kluwer,Dordrecht.
- [3] **Leveque, R.**, 1992. Numerical methods for conservation laws, Birkhauser.
- [4] **Godlewski, E. ve Raviart P. A.**, 1996 Numerical approximation of hyperbolic Systems of conservation laws, Springer-Verlag, Newyork
- [5] **Xin S., Jin Z.**, 1995. The Relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, Commun. Pure Appl. Math.48 (235-276)
- [6] **Montgomery P. J., T. B. Moodie**, 2003. Generalization of a relaxation scheme for systems of conservation laws with spatially dependent flux functions, Stud. Appl. Math. 110
- [7] **D'Alessio S. J. D., T.B. Moodie, Pascal J.P., Swaters G. E.**, 1996. Gravity currents produced by sudden releases of a fixed volume of heavy fluid , J. Fluid Mech.135 (95-110)
- [8] **Ovsiannikov L. V.**, 1982. Group analysis of differential equations, Nauco, Moscow 1978 (English translation,W. F. Ames), published by Academis press, Newyork
- [9] **Olver P. J.**, 1986. Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag

- [10] **Ibragimov N. H.**, 1994. CRC Handbook of Lie group analysis to differential equations
- [11] **Bluman G. W., Kumei S.**, 1989. Symmetries and differential equations, Springer-Verlag
- [12] **Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V.**, 1993.
Group analysis of Vlasof kinetic equation I-II, *Differentzial' nie uravneniya* 29 (10)
- [13] **Roberts D.** , 1985. The general Lie group and similarity solutions for the one-dimensional Vlasov-Maxwell equations II, *J. Plasma Phys.* 33. (219-236)
- [14] **Kupershmidt B. A., Manin Yi.I.** , 1977. Long-wave equation with free boundary: I conservation laws and solutions, *Functional Anal. Appl.* 11 (188-197)
- [15] **Meleshko S. V.**, 1988. Group properties of equations of motions of a visco-elastic medium, *Model Mekh.* 2 (114-126)
- [16] **Özer T.**, 2003a. Symmetry group classification for two-dimensional elastodynamics problems in nonlocal elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* 41 (2193-2211)
- [17] **Özer T.**, 2003b. Symmetry group classification for one-dimensional elastodynamics problems in nonlocal elasticity, *Mech. Res. Comm.* 30 (539-546)
- [18] **Özer T.**, 1999. On symmetry group properties of equations of nonlocal elasticity, *Mech. Res. Comm.* 26 (725-733)
- [19] **Özer T.**, 2003c. The solution of Navier equations of classical elasticity using Lie symmetry groups, *Mech. Res. Comm.* 30 (193-201)

- [20] **Özer T.**, 2000. Solution of the Boussinesq problem using Lie symmetries, Math. Comput. Appl. 5 (1-11)
- [21] **Rottman J. W., Simpson J. E.**, 1983. Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel, J. Fluid Mech.135 (95-110)
- [22] **Rottman J. W., Simpson J. E.**, 1983. The initial development of gravity currents from fixed releases of heavy fluids.In Proc. IUTAM Symp. on atmospheric dispersion of heavy gases and small particles, delft, the Netherlands ed. G. Oos., H. Tennekes (347-359)
- [23] **Rottman J. W., Grundy R. E.**, 1986. Self-similar solutions of the shallow-water equations representing gravity currents with variable inflow, J. Fluid. Mech. 169 (337-351)
- [24] **Rottman J. W., Grundy R. E.**, 1972. D. P. Hoult, Oil spreading on the sea, Ann. Rev. Fluid Mech. 4 (341-368)
- [25] **Grundy R. E., J. W. Rottman**, 1985. The approach to self-similarity of the solutions of the shallow-water equations representing gravity current releases, J. Fluid. Mech. 156 (39-53)
- [26] **Gratton J., Vigo C.**, 1994. Self-similarity gravity currents with variable inflow revisited: plane currents,J. Fluid. Mech. 258 (77-104)
- [27] **Glaister P.** 1991. Similarity solutions of the shallow-water equations, Journal of Hydraulic Research 29 (107-116)
- [28] **Velan M. S. and Lakshmanan M.** 1996. Lie Symmetries and invariant solutions of the shallow-water equation, Int. J. Non-linear Mechanics 31 (339-344)
- [29] **Özer T.** 2005. Symmetry group analysis of Benney system and application forthe shallow-water equation,Mech. Res. Comm. 32 (241-254)

- [30] **Özer T.** 2004. On symmetry group properties of Benney system and general similarity forms of the Benney equations in the Lagrangian variables, J. Comput. Appl. Math. 169 (297-313)
- [31] **Özer T., Antar N.** 2007 The similarity forms and invariant solutions of the two-layer shallow-water equations, Nonlinear Anal. Real World Appl.
- [32] **Şuhubi E. S.** Akışkanlar mekaniği, İTÜ yayınları
- [33] **Johnson R. S.** A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge texts in applied mathematics.
- [34] **Charles L. Mader** Numerical modeling of water waves, Newyork Washington D. C.
- [35] **Marsden C.** A mathematical introduction to fluid mechanics Springer-Verlag
- [36] **Taylor E. S.** Dimensional analysis for engineers, OXFORD Clarendon
- [37] **Cantwell B. J.** An introduction to symmetry analysis, Cambridge texts in applied mathematics
- [38] **Atkinson K. E.** An introduction to numerical analysis, University of Iowa
- [39] **Cornaham B., Luthar H. A., Wilkes J. O.** Applied numerical methods, Krieger publishing Company, Malabar, Florida
- [40] **McCormick J., Salvadori M. G.** Numerical methods in fortran, Englewood Cliffs Prentice-Hall

EK A

5. bölümde bahsedilen indirgenmiş denklemlerin çözümlerini elde edebilmek için yazılan Fortran programı aşağıda gösterilmiştir.

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

f1(x1,yy1,yy2)=((1-2*x1)*yy1-2*yy2/(yy2-(yy1-3*x1)**2)
f2(x1,yy1,yy2)=((yy1-6*x1)*yy2)/(yy2-(yy1-3*x1)**2)

OPEN(61,FILE='ss01.DAT')

y1=2.3456d0
y2=1.659d0
h=0.0002
DO 10 J=1,10000

  AJ=J
  x1=h*AJ
  ak11=h*f1(x1,y1,y2)
  ak12=h*f2(x1,y1,y2)
  ak21=h*f1(x1+h/2.,y1+ak11/2.D0,y2+ak12/2.D0)
  ak22=h*f2(x1+h/2.,y1+ak11/2.D0,y2+ak12/2.D0)
  ak31=h*f1(x1+h/2.,y1+ak21/2.D0,y2+ak22/2.D0)
  ak32=h*f2(x1+h/2.,y1+ak21/2.D0,y2+ak22/2.D0)
  ak41=h*f1(x1+h,y1+ak31,y2+ak32) ak42=h*f2(x1+h,y1+ak31,y2+ak32)
  y1=y1+(ak11+2.D0*ak21+2.D0*ak31+ak41)/6.D0
  y2=y2+(ak12+2.D0*ak22+2.D0*ak32+ak42)/6.D0
  WRITE(61,11)x1,y1,y2
  FORMAT(f12.5,F12.8,F12.8,F12.8,F12.8)

  STOP

END
```

Burada bahsedilen Fortran programı, (5.178) denklem sisteminin $1 < \mathfrak{F}_0 < 2$ durumunda çözümlerini elde edebilmek için yazılmıştır. $y1, y2, x1$ değişkenleri sırasıyla $\tilde{u}(\zeta), \tilde{h}(\zeta), \zeta$ değişkenlerine karşılık gelmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Derya ŞAHİN, 02.08.1981 Afyon doğumludur. İlkokul eğitimini Balıkesir Atatürk İlkokulu'nda tamamlamış ve 1999 yılında Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi'nden mezun olmuştur. Aynı yıl girdiği Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2004 yılında bitirdikten sonra 2005 Şubat döneminde de İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına başlamıştır.