

OPERATÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA
VARYASYONEL VE FAKTORİZASYON YÖNTEMLERİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Yusuf CESUR
5099332049

11/2207

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Şubat 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Temmuz 2001

Tez Danışmanı :

Prof.Dr. Mahir HASANOV

Diğer Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Erdoğan S. ŞUHUBİ (İ.T.Ü.) RED

Prof.Dr. Mehmet CAN (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Albert Kohen ERKIP (S.Ü.)

Prof.Dr. Varga KALANTAROV (H.Ü.)

TEMMUZ 2001

ÖNSÖZ

Bu gelişmanın hazırlanmasında ve gelişmalarının her aşamasında titizlikle bana yardımcı olan ve engin bilgilerinden yararlandığım sayın hocam Prof.Dr. Mahir Hasanov'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu gelişmaya proje bazında ekipman desteği veren İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne ve tezimin yazım işlerindeki yardımlarından dolayı değerli arkadaşım Aras.Gör. Özcan Başkonuş'a da teşekkür ederim.

Ayrıca gelişmalarım sırasında bana sabırla destek olan fedakar eşim Ümmiye Cesur'a ve gocuklarımı da teşekkür ederim.

Ocak 2001

Yusuf Cesur

İÇİNDEKİLER

ii	ÖNSÖZ
iv	ÖZET
vi	SUMMARY
I	1. GİRİŞ
	2. OPERATÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA
8	VARYASYONEL YÖNTEMLER
8	2.1. Tanımlar ve Temel Kavramlar
14	2.2. Atalet Kannun ve Morse İndisleri
25	2.3. Özdeğerlerin Varyasyonel Özellikleri
	3. OPERATÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA
26	FAKTORİZASYON YÖNTEMİ
26	3.1. Faktörizasyon Koşulları Arasında Bağlantı
35	3.2. Regülerlik Koşulunu Sağlayan Operatör Değeri Fonksiyonların Faktörizasyonu
	4. KUVAZİHIPERBOLİK DEMET VE RİESZ
36	İZDÜŞÜM FORMÜLÜ
36	4.1. KHD Tanımı ve Formlar
41	4.2. Operatörler Sınıfında Riesz İzdüşüm Formülü
45	4.3. KHD Sınıfında Riesz İzdüşüm Formülü
	5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA
55	KAYNAKLAR
59	ÖZGEÇMİŞ

OPERATÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA VARYASYONEL VE FAKTORİZASYON YÖNTEMLERİ

ÖZET

Tezde bir sınıf kendine eş operatör değerli fonksiyonlar sınıfında (Rayleigh Sistemi) varyasyonel ve faktörizasyon yöntemleri ve bu yöntemlerin yardımı ile bir takım spektral ve faktörizasyon problemleri incelenmiştir.

Tez Giriş Bölümü ve 3 esas bölümden oluşur.

2. Bölümde sürekli operatör fonksiyonlar sınıfında varyasyonel prensiplerin ve spektral dağılım fonksiyonu için bir formülün bulunması soruları ele alınmıştır. Burada esas amaç Atalet teoremlerinin ispatlanması ve varyasyonel teoride Atalet teoremlerini yeni bir yöntem olarak varyasyonel prensiplerin ve spektral dağılım fonksiyonunun bulunmasında uygulamaktır. Elde edilen esas sonuçlar Teorem 2.2.2, Teorem 2.3.2 ve Sonuç 2.3.1 de verilmiştir.

3. bölümde analitik ve analitik olmayan operatör fonksiyonlar sınıfında faktörizasyon koşulları ve bu koşullar arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Elde edilen esas sonuç bir sınıf Rayleigh sistemleri için (Tanım 3.2.1) zayıf regülerlik koşulu altında faktörizasyon teoreminin ispatlanmasıdır (Teorem 3.2.2).

4. bölümde elde edilen sonuçlar 2. bölümde verilen varyasyonel prensiplerin ve operatör teoriden bilinen Riesz izdüşüm formülünün bir uygulaması olarak değerlendirilebilir. Bu bölümde ele alınan sınıf kuazihiperbolik demetler (KHD) sınıfıdır. Bu sınıf son yıllarda tanımlanmış ve hiperbolik demetlerin bir genişlemesi olduğu ispatlanmıştır. Hiperbolik demetler için varyasyonel ve faktörizasyon teoremleri araştırılmıştır. Bu nedenle aynı yöntemlerin KHD sınıfına uygulanması doğal bir problem olarak bu bölümde ele alınmıştır.

Ayrıca izole özdeğerin civarında operatör teoriden bilinen

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z) dz$$

Riesz izdüşüm formülünün operatör fonksiyonlar teorisinde aynen sağlanmadığı ve bunun KHD sınırında $\Delta[z] = T'(z)$

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z) \Delta[z] dz$$

şeklinde olacağı bu bölümde ispatlanmıştır (Teorem 4.3.4).



VARIATIONAL AND FACTORIZATION METHODS IN THE SPECTRAL THEORY OF OPERATOR VALUED FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, we investigate variational and factorization methods for a class of selfadjoint operator-valued functions (Rayleigh system) and using these methods we study some spectral and factorization problems.

This thesis contains an introduction and 3 main chapters.

In Chapter 2, we aim to obtain spectral distribution function and investigate variational methods for continuous operator-valued functions. Our main aim is to prove Inertia theorems and to give an application of these theorems, as a new method, in establishing of variational principles and spectral distribution function. The basic results, proved in this section are given in Theorem 2.2.2, Theorem 2.3.2 and Corollary 2.3.1.

In Chapter 3 factorization methods and connection between factorization conditions for analytic and non-analytic operator-valued functions are considered. Under the weakly regularity condition (Definition 3.2.1) we prove a factorization theorem for a class of Rayleigh systems (Theorem 3.2.2).

The results, proved in Chapter 4 can be considered as an application of variational principles, given in Chapter 2 and of the well known in operator theory Riesz decomposition theorem. The class, to be considered in this chapter is a class of quasihyperbolic operator pencils (QHP). This class was defined recently and it was proved that the class of quasihyperbolic operator pencils is an extension of the class of strongly hyperbolic pencils. The variational and factorization theorems for hyperbolic pencils were investigated. For this reason we study these problems for quasihyperbolic pencils.

Particularly, we prove that an analog of Riesz projection formula at the neighborhood of an isolated eigenvalue in the spectrum, i.e

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z) dz .$$

is not valid for QHP and we obtain the following formula

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z) \Delta[z] dz .$$



1. GİRİŞ

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemler sistemi, integro-diferansiyel ve parametreye bağlı denklemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntemlerden bir tanesi verilen denklemleri Hilbert veya Banach uzaylarında operatör katsayılı denklemlere dönüştürmektir [1,2]. Bu tür denklemlerin çözümlerinin bulunması operatör denklemlerin spektrumunun bulunmasına indirgenir. Örneğin A , B ve C H (Hilbert veya Banach) -uzayında operatörler, $U : R^1 \rightarrow H$ fonksiyon olmak üzere

$$A\ddot{U}(t) + B\dot{U}(t) + CU(t) = 0 \quad (1.1)$$

denkleminin çözümü

$$U(t) = ve^{\lambda t} \quad (v \in H)$$

gibi aranır, $U(t)$ nin (1.1) denkleminin özel bir çözümünü oluşturması için v fonksiyonu ve λ parametresi

$$\lambda^2 Av + \lambda Bv + Cv = 0 \quad (1.2)$$

denklemini sağlamalıdır. Öteyandan (1.2) denklemleri $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ operatör denlemi için özdeğer problemidir. Dolayısıyla, (1.1) denkleminin $U(t) = ve^{\lambda t}$ şeklinde özel çözümlerinin bulunması problemi

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$$

gibi 2. mertebeden operatör denleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması problemine eşdeğerdir. Eğer (1.1) denklemleri n . mertebeden diferansiyel denklemler olursa o zaman buna karşı gelen operatör denlemi

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + A_0$$

şeklinde olur.

Bu yöntem gözünün değeri, Cauchy integral ve benzer formlerin operatör değeri fonksiyonları sınıfına genişletmelerinin kullanıldığı ve genelde analitik operatör fonksiyonları sınıfında uygulanan bir yöntemdir.

II. Analitik yöntem [3,4].

$\tilde{H} = H^n$ gibi tanımlar [1].

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -A_0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & 0 & \cdot & 0 & I & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{n-1} & I & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

uygulanabilir ve

şeklindeki operatör demetler için $A_n = I$ (veya $A_n \gg 0$) koşulu altında

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + A_0$$

spektrumunun bulunmasına indirgenmiş olur. Bu yöntem

$\tilde{A}$ bulunuyorsa $L(\lambda)$ nun spektral problemleri lineer $\tilde{A}$ operatörünün olacak şekilde aranmaktadır. Dolayısıyla (1.3) formülünü sağlayacak

$$\sigma(L(\lambda)) = \sigma(\tilde{A}) \quad (1.3)$$

tanımlı öyle bir lineer $\tilde{A}$ operatörü

Bu yöntemde H da verilen $L(\lambda)$ operatör fonksiyonu için başka bir $\tilde{H}$ uzayında

I. Lineerizasyon yöntemi.

Ele alınan problemin yapısına bağlı olarak $L(\lambda)$ operatör fonksiyonu operatör demeti, analitik, düzgün veya düzgün olmayan operatör fonksiyon olabilir [1-3]. Tezin konusu da bir sınıf operatör fonksiyonunun spektral yapısının incelenmesidir. Operatör fonksiyonlar teorisinin, farklı alanlarında 1950 yıllarından itibaren çok sayıda araştırmalar yapılmış ve bu araştırmalar devam etmektedir. Genelde, bu gelişmelerde uygulanan yöntemler 4 sınıfa ayrılır.

λ -parametresine göre lineer olmayan spektral problemlerde sağlanmaz ve özdeğerlere karşı gelen özfonksiyonların ortogonal olmasıdır. Böyle bir özellik teorinde bu soruların basit bir şekilde çözülmesinin nedeni $A = A^*$ ise farklı problemlerin çözümü ile elde edildiği iyi bilinmektedir [7]. Operatör $p(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$ fonksiyonelinin $\min$, $\max$ gibi ekstremal özdeğerlerinin veya $N(\lambda)$ -spektral dağılım fonksiyonunun bulunması soruları Operatörler teorisinde kendine eş bir A operatörünün varyasyonel yöntemle oluşturur.

varyasyonel prensiplerin bulunmasıdır ve bu sonuçlar 2. bölümün içeriğini teoremlerinin ispatlanması ve bu teoremleri kullanarak yeni bir yöntemle sonuçlar bir sınıf sürekli operatör fonksiyonlar sınıfında (Inertia) analitik, analitik olmayan,...) uygulanabilir. Tezde elde edilen esas uygulamaları ile ilgilidir. Her geniş operatör-fonksiyonlara (operatör demet, Varyasyonel yöntem $\min$, $\max$, $\max$ gibi prensiplerin bulunması ve IV. Varyasyonel yöntemler.

gelişmeler yapılmıştır [5,6].

sınıfında uygulanır, fakat analitik olmayan operatör fonksiyonlar sınıfında bulunmasına indirgenir. Bu yöntem genelde analitik operatör fonksiyonlar $L(\lambda)$ nin mertebesinde daha düşük $L_1(\lambda)$ veya $L_2(\lambda)$ nin spektrumunun yazılabilir. Böylece $L(\lambda)$ nin spektrumunun bir kısmının bulunması mertebesi

$$\sigma(L(\lambda)) = \sigma(L_1(\lambda)) \cup \sigma(L_2(\lambda))$$

dolay

$L_1(\lambda)$ ve $L_2(\lambda)$ daha küçük mertebeden operatör demetler olur ve (1.4) den şeklinde göstermektedir. Örneğin $L(\lambda)$ n. mertebeden bir operatör demet ise

$$(1.4) \quad L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda), \quad (\sigma(L_1) \cap \sigma(L_2) = \emptyset)$$

bir bölgede

Bu yöntemin uygulanmasında esas amaç $L(\lambda)$ operatör fonksiyonunun verilen

III. Faktörizasyon yöntemi.

sorunun çözümünün zorlaşmasında esas neden olarak görülmektedir. Ayrıca $p(x) = \frac{(A, x, x)}{(x, x)}$ fonksiyoneli yerine uygun bir fonksiyonelin seçilebilmesi de lineer olmayan spektral teoride karşılaşılan zorluklardan bir tanesidir. Bu tür sorular ilk olarak Duffin [8] tarafından sonlu boyutlu uzayda

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$$

operatör demeti için ele alınmış ve $p(x)$ fonksiyoneli olarak $(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin $p_{\pm}(x)$ gibi köklerinin seçilebileceği gösterilmiştir. Bundan sonra gelen gelişmelerde $(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin $\forall x \in H \setminus \{0\}$ için tek bir $p(x)$ kökünün bulunduğu aralık seçilip bu aralıktaki spektrumun noktalarının $p(x)$ in *minimax* özelliklerinden elde edildiği ispatlanmaktadır.

Operatör fonksiyonların varyasyonel teorisinin bir sonraki aşamasını (1967-1985 yılları) Turner [9,10], Rogers [11], Werner [12], Abramov [13] vs., gelişmeleri oluşturmaktadır. Bu gelişmelerde ele alınan genellikle sonsuz boyutlu uzaylarda operatör demet, analitik ve sürekli diferansiyellenebilir operatör fonksiyonların sınıflıdır ve operatör fonksiyon $L(\lambda)$ ve $L(\lambda)$ nin spektrumunun belli bir parçasındaki noktaların bulunmasında kullanılan $p(x)$ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağlar ;

1) $L : (c, d) \rightarrow S(H)$ - kendine eş, sınırlı operatörler uzayı) ve $L(\lambda)$ sürekli diferansiyellenebilir operatör fonksiyondur.

2) $(L(\lambda)x, x) = 0$ ($x \neq 0$) denkleminin (c, d) aralığında tek bir kökü bulunur $p(x)$ ile gösterilir).

3) $(L'(p(x))x, x) > 0$ ($x \neq 0$) koşulu sağlanır, yani $p(x)$ basit köktür.

Yukarıdaki üç koşul varyasyonel teoride Rayleigh sistem aksiyomları olarak kabul edilir ve $H = \{L, p\}$ ikilisine de Rayleigh sistemi denir [11]. 1) - 3) koşulları altında $p(x)$ fonksiyonelinin

$$W_p^{nm} \equiv \{p(x) \mid x \in H \setminus \{0\}\} \quad (tnm = tanm)$$

sayısal bölgesindeki özdeğerler ve spektral dağılım fonksiyonu için

$$\theta_n = \min_{B \in B_n} \max_{B \in B_n} p(x), \quad (1.5)$$

2. bölümün içeriğini oluşturan [23] gelişmemizde operatör fonksiyonun farklı yöntemle ispatlanmıştır (Teorem 2.3.2, Sonuç 2.3.1). Ayrıca [2] den farklı olarak özfonksiyonların baz oluşturma koşulu [24] kabul edilmemiştir.

bulunmadığı durum incelenmiştir.

İçin ele alınmıştır. [16] da ise $(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin $\forall x$ için kökünün sorular [21] ve [22] makalelerinde sonlu boyutlu uzaylarda Hermیتیyen demet koşulunun sağlanmadığı hallerde (1.5) ve (1.6) formülleri araştırılmıştır. Benzer

$$(L'(p(x))x, x) = (Bx, x) > 0$$

durumunu, yani

edilmiş ve bu koşulun $L(\lambda) = \lambda B - A$ lineer operatör demeti için sağlanmadığı $(L'(p(x))x, x) > 0$ koşulu [20] de belirlilik (definitness) koşulu olarak kabul

koşulları altında (1.5), (1.6) ve (1.7) formüllerinin sağlandığı gösterilmiştir. H da baz oluşturma durumu ispatlanmıştır. [18] ve [19] da A veya C A) koşulu altında ele alınmış ve (1.5), (1.6) formüllerini ancak özfonksiyonların sağlandığı kabul edilmiştir. Örneğin Markus [2] de $L(\lambda)$ operatör fonksiyonunun (1985-2001) yapılan çalışmalarda A , B ve C) koşullarından enaz birisinin Operatör fonksiyonların varyasyonel teorisinin bir sonraki aşamasında

[14-17].

Bu koşullar doğal problemlerin çözümünde çok sık karşılaşılan koşullardır $C) p(x)$ katlı kök olabilir.

$B) (L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin $\forall x \neq 0$ için tek kökü bulunmaz,

$A) L(\lambda)$ operatör fonksiyonu düzgün olmaz,

veya birkağının sağlanmamasından kaynaklanır. Örneğin,

Varyasyonel teoride esas sorun 1), 2) ve 3) aksiyomlarından herhangi birinin formülleri ispatlanmıştır.

$$N(\lambda) = \max_{dim\{E \mid p(x) < \lambda\}} \quad (1.7)$$

$$\theta_n = \max_{E^{n-1}} \min p(x), \quad (1.6)$$

tanımlanan formlar düzgün operatör fonksiyonların varyasyonel teorisinde formlarının bir takım özellikleri bu bölümde yer almaktadır. Yukarıda

$$[x, y/\alpha] = \begin{cases} (\Delta[\alpha, d(y)]x, y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

ve

$$\Delta[\alpha, \beta] = \begin{cases} \frac{L(\alpha) - L(\beta)}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta, \\ L'(\alpha), & \alpha = \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} (\Delta[d(x), d(y)]x, y), & x, y \neq 0, \\ 0, & x, y = 0, \end{cases}$$

gök kullanılır

4.1.3). Ayrıca düzgün operatör değeri fonksiyonların varyasyonel teorisinde en iyi uygulanacağı sınıflardan bir tanesi hiperbolik demetler sınıfıdır. Bu bölümde operatörlerle [29,30] aynı olduğu [26] da ispatlanmıştır. Varyasyonel teorisinde [27,28]. KHD lerin spektral özelliklerinin belirli kılınabilir (definitizable) bir genişlemesi olup pek çok problemlerin çözümlerinde ortaya çıkmaktadır KHD kavramı ilk olarak [26] da verilmiştir. Bu sınıf hiperbolik demetlerin Dördüncü bölümde ele alınan sınıf kuazihiperbolik demetler (KHD) sınıfıdır. ve bu koşullar arasındaki bağlantılar da verilmiştir.

3. bölümde bir sınıf Rayleigh sistemi için faktörizasyon problemleri ele alınmıştır. Bu bölümdeki çalışmanın esas amacı bir sınıf analitik, Rayleigh aksiyomlarını sağlayan operatör fonksiyonun faktörizasyonunu bulmaktır (Teorem 3.2.2). Benzer problem analitik olmayan operatör fonksiyonlar sınıfında ek integral koşulu altında [a, b] aralığında [5, 6] çözülmüştür. Teorem 3.2.2 de Rayleigh koşulları dışında zayıf regülerlik koşulu kullanılmaktadır [25]. İspatlanan bu teorem [2] de verilen Teorem 30.6 nun bir genelleştirilmesi olarak kabul edilebilir. Üçüncü bölümde aynı zamanda diğer faktörizasyon koşulları

Morse indislerinin özellikleri de ele alınmıştır (Teorem 2.2.2, Lemma 2.2.3, de (1.5), (1.6) ve (1.7) formlarının dışında Atalet teoremleri ve $c(\alpha)$, $d(\alpha)$ Kullanılan esas yöntem yaklaşım (aproksimasyon) ve Atalet teoremleridir. [23]

belirsiz (indefinite) skaler çarpım olarak kullanılmaktadır. Düzgün olmayan operatör fonksiyonlarda ortaya çıkan zorlukların esas nedeni $\alpha = \beta$ da $\Delta[\alpha, \beta]$ nin ve dolayısıyla de diğer formların tanımsız olmasıdır.

Bu formları kullanıp operatör teoride Riesz izdüşüm formu olarak bilinen [3,7]

$$P_{\sigma} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R(z) dz$$

formülünün benzerinin KHD sınıfında izole özdeğer civarında

$$F(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\lambda_0}} R(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda$$

gekinde olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.3.4). Burada $\Delta[\lambda] = \Delta[\lambda, \lambda] = L'(\lambda)$ dir. Benzer formül bir sınıf operatör demet için [10] da verilmiştir. Kullanılan yöntem [10] da verilen yöntemin aynısıdır, fakat ele alınan sınıf çok daha geniş bir sınıftır.

2. OPERATÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA VARYASYONEL YÖNTEMLER.

2.1. Tanımlar ve Temel Kavramlar.

Bu bölümde, aşağıdaki koşulları sağlayan kendine-eş operatör değerli fonksiyonlar sınıfı ele alınmaktadır:

1) $L(\alpha) : S(H) \rightarrow S(H)$ sürekli, operatör değerli bir fonksiyon ve

$$L(\alpha)x, x = 0, \quad x \neq 0$$

denklemi (c, d) de sadece bir $p(x) \in (c, d)$ köküne sahip olsun.

2) $L(\alpha)x, x$ fonksiyonu $p(x)$ noktasında artan (veya azalan) fonksiyondur.

$$3) \quad c > \gamma_{nm}^- \equiv \inf_{H \setminus \{0\}} p(x), \quad \sup_{H \setminus \{0\}} p(x) \equiv \gamma_+ > d.$$

Yukarıdaki 1) – 3) koşulları altında $L(\alpha)$ operatör değerli fonksiyonu ile $p(x)$

fonksiyonelinin (Rayleigh fonksiyonelinin) oluşturduğu $R = \{L, p\}$ ikilisine

Rayleigh sistemi (RS) denir [2, 11]. RS aksiyomlarında 3) koşulu yerine

$\gamma_- = -\infty$ veya $\gamma_+ = +\infty$ kabul edilebilir. Bu durumda $R = \{L, p\}$ sistemi

sınırsızdır denir.

Örnek 2.1.1. $L(\lambda) = \lambda I - A, A \in S(H)$ olsun. Buradan

$$p(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

olur ve $R = \{L, p\}$ ikilisi bir RS oluşturur.

Örnek 2.1.2. $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C, A \gg 0, B$ ve $C \in S(H)$ olsun.

Burada $A \gg 0 \iff \exists \delta > 0$ sayısı $(Ax, x) \geq \delta(x, x), \forall x \in H \setminus \{0\}$ olacak şekilde bulunur. Ayrıca $A \gg 0$ koşulunu sağlayan operatöre pozitif belirlili

operatör denir.

Bu örnekte

$$d(x) = (Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) > 0, \quad x \neq 0$$

koşulunun sağlandığı varsayılmaktadır. Buradan

$$p_{\pm}(x) = \frac{1}{2(Ax, x)}[-(Bx, x) \pm \sqrt{d(x)}]$$

olmak üzere $R = \{L, p_{\pm}\}$ bir RS oluşturur.

Gerçekten $p_{+}(x)$ için $L'(\lambda) = 2\lambda A + B$ dan

$$(L'(\lambda)x, x) = 2(Ax, x)\lambda + (Bx, x)$$

olduğundan

$$(L'(p_{+}(x))x, x) = \frac{2(Ax, x)}{1}[-(Bx, x) + \sqrt{d(x)}] + (Bx, x)$$

$$= \sqrt{d(x)} > 0$$

olur.

$W_{+}^{p_{+}} \cap W_{-}^{p_{-}} = \emptyset$ hiperbolik demetler teorisinden iyi bilinmektedir [2]. Böylece

1) $L(\lambda) : (c, d) \rightarrow S(H)$ sürekli operatör değeri bir fonksiyon ve

$$L(\lambda)x, x) = 0, \quad x \neq 0$$

denklemi (c, d) de sadece bir $p_{+}(x) \in (c, d)$ köküne sahip olur. Burada $(c, d) = W_{+}^{p_{+}}$.

2) Yukarıda $(L'(p_{+}(x))x, x) > 0$ olduğunu gösterildi. Buradan $L(\lambda)x, x)$ fonksiyonu $p_{+}(x)$ noktasında artandır.

3) Bu aksiyom $A \gg 0$ koşulundan elde edilir.

Benzer şekilde $(L'(p_{-}(x))x, x) > 0$ olduğu görülür ve $R = \{L, p_{-}\}$ de bir RS oluşturur.

RS aksiyomlarını sağlayan sınıfla örnek olarak hiperbolik demetlerin oluştuğu sınıf da gösterilebilir.

Tanım 2.1.1.

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k, \quad A_k \in B(H)$$

$(B(H)$ -sınırlı lineer operatörlerin uzayıdır) operatör demeti için $A_k^* = A_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $A_n \gg 0$ ve $\forall f \neq 0$ için $(L(\lambda)f, f) = 0$ denkleminin kökleri reel ve birbirinden farklı ise $L(\lambda)$ ya hiperbolik demet denir.

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0$$

olsun. Eğer

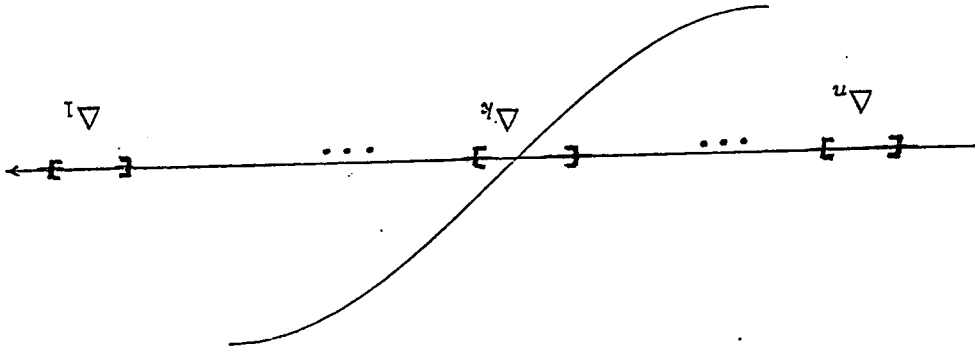
$$(A_k x, x)^2 \geq 4(A_{k-1} x, x)(A_{k+1} x, x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

koşulu sağlanıyorsa [[2] de kaynak [241]] den $L(\lambda)$ nun hiperbolik demet olduğu bilinmektedir.

$(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin kökleri azalan sıra ile $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ şeklinde gösterilsin. $\Delta_n = W_{p_n}$ olmak üzere

$$\Delta_1 \equiv \{p_1(x) \mid x \in H \setminus \{0\}\}, \quad \Delta_2 \equiv \{p_2(x) \mid x \in H \setminus \{0\}\}, \dots, \Delta_n \equiv \{p_n(x) \mid x \in H \setminus \{0\}\}$$

gibi kümeler tanımlansın. Hiperbolik demetler için $i < j$ ise Δ_i nin reel ekseninde Δ_j den sağda bulunduğu ve $i \neq j$ için $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ olduğu ispatlanmıştır [[2], Teorem 31.7]. Dolayısıyla $\forall x \neq 0$ için $(L(\lambda)x, x)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.1

köklere sahip veya düzgün olmayan operatör demetler araştırılmamıştır. koşulunun sağlanması şart koşulmuştur. Bu nedenle bu gelişmelerde katlı

$$(2.1.1) \quad (L'(\alpha)x, x) > 0, \quad x \neq 0$$

olması ve α sayısı $(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin kökü ise bu gelişmelerde ve genelde daha sonra yapılan gelişmelerde $L(\lambda)$ nın düzgün göstermiştir. Bu konudaki daha genel sonuçlar [11 – 13] de verilmiştir. Fakat nın pozitif özdeğerlerinin varyasyonel prensipler ile karakterize edilebildiğini operatör demetinin özvektörlerinin baz oluşturmaları durumunda $A - B(\lambda)$

$$A - B(\lambda) = A - (\lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots + \lambda^N B_N) = A - B_1(\lambda) - \lambda I$$

(resolvent) nın basit bir kutbu olduğunu ispatlamış ve bir sonlu katlı izole özdeğeri ise bu noktanın $R_\lambda = (A - B_1(\lambda) - \lambda I)^{-1}$ gözücü $B(\lambda) = \sum_{k=1}^N \lambda^k B_k$ ve $B_1(\lambda) = \sum_{k=2}^N \lambda^k B_k$ olmak üzere λ_0 noktası $A - B(\lambda)$ nın incelemiştir. Turner [10] daki gelişmelerde A kompakt, $B_k \geq 0$, $B_1 = I$, daki gelişmelerde $L(\lambda)$ nın kuadratik ve H nı sonsuz boyutlu olduğu durumu [11] tarafından daha genel matris problemlerine genişletilmiştir. Turner, [9] özdeğerlerin karakterize edilebildiğini göstermiştir. Duffin'in gelişmesi Rogers koşulları sağlamak üzere Rayleigh fonksiyonelinin minimum değerleri ile

$$(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) > 0, \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$$

minimum prensiplerini incelemiş ve $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$ ve dolayısıyla şekilde operatör demet için sonlu boyutlu uzayda özdeğerlerin bulunması için

$$A\lambda^2 + B\lambda + C$$

gelişmelerde [8]

olarak Duffin [8], Rogers [11] ve Turner [9,10] tarafından ele alınmıştır. Duffin yöntemle bulunmasıdır. Lineer olmayan özdeğerler için minimum problemleri ilk Burada amaç Rayleigh sisteminin spektrumuna ait noktaların varyasyonel sağlandığı elde edilir.

Buradan geometrik olarak $R_k = \{L_k, p_k\}$ nın Δ_k aralığında RS aksiyomlarının

Buna karşılık [18] ve [19] da farklı bir yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemde,

parçalı lineer sistemler ile düzgün olmayan Rayleigh sistemlerine yaklaşım yapılabilmesi ispatlanmış ve bu teorem varyasyonel yöntem için esas alınmıştır.

Bu bölümde düzgün olmayan operatör fonksiyonlar sınıfında spektrumun varyasyonel karakteristiklerinin araştırılması için farklı bir metod verilmiştir. [18] ve [19] daki yaklaşım (approximation) teoremleri ve bu bölümde ispatı verilen Atalet Kanunu (Law of Inertia) kullanılmaktadır [11,23]. Atalet

teoremleri operatör fonksiyonlar sınıfının en çok araştırılan konularındandır ve bu teoremler $Re\lambda > 0$, $Re\lambda = 0$ ve $Re\lambda < 0$ koşullunu veya $Im\lambda > 0$, $Im\lambda = 0$ ve $Im\lambda < 0$ koşullunu sağlayan özdeğerlerin dağılımı ile ilgilidir [31,32]. Aynı şekilde 2.2. bölümde tanımlanan $H^+(\alpha)$, $H^-(\alpha)$ ve $H^o(\alpha)$ uzaylarının yapıları ile ilgili teoremler de Atalet teoremleri olarak bilinmektedir [11,20]. Bu

yaklaşım altında, kendine-eş operatör fonksiyonların, düzgün operatör değeri fonksiyonlar sınıfına kısıtlanması koşulu gerekmektedir ve bu nedenle sadece 1) – 3) şartlarını sağlayan operatör değeri fonksiyonlarla çalışılmaktadır.

Tanım 2.1.2. Eğer operatör değeri $L(\alpha)$ fonksiyonu (c, d) üzerinde parçalı lineer ise bu durumda $R = \{L, p\}$ Rayleigh sistemi de parçalı lineerdir denir.

Eğer $\lambda \in W_p$ ve $L(\lambda)u = 0$ olacak şekilde bir $u \neq 0$ vektörü varsa λ noktasına $R = \{L, p\}$ Rayleigh sisteminin özdeğeri, u vektörüne ise özvektörü denir. $\sigma_e(R)$ ile özdeğerlerin kümesi tanımlanmaktadır.

$$\sigma_1(R) = \{\alpha \in \underline{W}_p \mid \exists \{x_n\}, \|x_n\| = 1, x_n \xrightarrow{w} 0 \text{ ve } L(\alpha)x_n \rightarrow 0\},$$

ve

$$\pi_1(R) = \{\alpha \in \underline{W}_p \mid \exists \{x_n\}, \|x_n\| = 1, x_n \xrightarrow{w} 0 \text{ ve } L(\alpha)x_n \rightarrow 0\}$$

kümelere sırasıyla spektrum ve limit spektrum adı verilir. Eğer $\alpha \in \sigma_1(R)$ ve $p(x_n) \rightarrow \alpha$ ise $\alpha \in \sigma_2(R)$ dir denir. Eğer $\alpha \in \pi_1(R)$ ve $p(x_n) \rightarrow \alpha$ ise $\alpha \in \pi_2(R)$ dir. Buradaki $\sigma_2(R)$ ve $\pi_2(R)$ kümelere sırasıyla yaklaşık spektrum (approximate spectrum) ve yaklaşık limit spektrum (approximate limit spectrum) denir.

Spektrum noktalarından sadece $\sigma_2(H)$ in noktaları $p(x)$ Rayleigh fonksiyoneli nin *minmax* değerleri ile karakterize edilebildiği ispatlanmıştır ([11], *Theorem 1*). Operatörler teorisinde $\sigma_1(H) = \sigma_2(H)$ ve $\pi_1(H) = \pi_2(H)$ formülleri her zaman sağlanır. Fakat operatör fonksiyonlar sınıfında bu formüllerin sağlanması için ek koşullar verilmelidir. Bu koşullardan birisi regülerlik koşuludur [6, 24, 25].

Tanım 2.1.3.

$$|(L(\alpha)f, f)| > \varepsilon \quad (\alpha \in (c, d), \|f\| = 1) \implies (L'(\alpha)f, f) > \delta \quad (2.1.2)$$

olacak şekilde pozitif ε , δ sayıları bulunabiliyorsa $L(\alpha)$ - regülerdir denir. Eğer RS (2.1.2) şartını sağlıyorsa [13] de $\sigma_1(H) = \sigma_2(H)$ ve $\pi_1(H) = \pi_2(H)$ olduğu gösterilmiştir.

Tanım 2.1.4. [18] $R = \{L, p\}$ ikilisi bir RS olsun. Eğer her $\alpha \in [\gamma_-, \gamma_+]$ için $n \rightarrow \infty$ iken $L_n(\alpha) \rightarrow L(\alpha)$ (operatör normuna göre), $W_{p_n} \subset \underline{W}_p$ ve

$$\|p_n - p\|_\infty \stackrel{nm}{=} \sup |p_n(x) - p(x)|, \quad x \in H \setminus \{0\}$$

olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - p\|_\infty = 0$$

ise $R_n = \{L_n, p_n\}$ RS ler dizisi $R = \{L, p\}$ ye yakınsaktır denir. Her $R = \{L, p\}$ RS ne parçalı lineer $R_n = \{L_n, p_n\}$ RS ile yaklaşılabildiği ise ([19], *Theorem 7*) de gösterilmiştir. Bu teorem operatör demetlerin spektrumunun varyasyonel teorisi ile ilgili soruların araştırılmasında çok önemli rol oynar.

2.2. Atalet Kanunu ve Morse İndisleri.

Bu bölümde varyasyonel yöntemlerle spektrumun noktalarının bulunmasında kullanılan esas teoremler Atalet Kanunu (Teorem 2.2.2), yaklaşımlar teoremi ([19], Teorem 7) ve Morse indisleri olarak tanımlanan [11] $c(\alpha)$ ve $d(\alpha)$ nın özellikleridir.

H , Hilbert uzayı

$$\begin{aligned} H^+(\alpha) &= \{u \mid L(\alpha)u, u\} > 0\} \cup \{0\}, \\ H^0(\alpha) &= \{u \mid L(\alpha)u, u\} = 0\}, \\ H^-(\alpha) &= \{u \mid L(\alpha)u, u\} < 0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

şeklinde üç kısma ayrılırsın. $H^+(\alpha)$, $H^-(\alpha)$ ve $H^0(\alpha)$ kümeleri lineer uzay koşulunu sağlamaz. Örneğin u ve $v \in H^\pm(\alpha)$ ise genelde $u+v \notin H^\pm(\alpha)$. Fakat bu kümelere bulunan maksimal alt uzaylar varyasyonel teoride çok önemli rol oynar. [11] de

$$\begin{aligned} c(\alpha) &= \max \{ \dim E \mid E \subset H^+(\alpha) \}, \\ d(\alpha) &= \max \{ \dim E \mid E \subset H^-(\alpha) \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $c(\alpha)$ ve $d(\alpha)$ sayılarını sırasıyla $L(\alpha)$ 'nın imza (signature) ve eş-imza'sı (co-signature) veya Morse indisleri denir. Eğer $L(\alpha)u, u\} = 0$ ise u ve v kendi aralarında α -ortogonaldir denir. $\langle u, v \rangle_\alpha \equiv L(\alpha)u, v\}$ şeklinde tanımlanursa α -ortogonal u ve v vektörleri $\langle u, v \rangle_\alpha = 0$ koşulunu sağlar. $\langle u, v \rangle_\alpha$ da skaler çarpım aksiyomlarını kısmen sağlar. Örneğin $\langle u, u \rangle_\alpha \geq 0$ koşulunu sağlamaz. Bu nedenle $\langle u, v \rangle_\alpha$ gibi çarpımlara belirsiz (indefinite) skaler çarpım denir. $\langle H, \langle u, v \rangle_\alpha \rangle$ ikilisi de Krein uzayları olarak bilinmektedir [34].

Aşağıdaki Lemma 2.2.1'in ispatı RS'nin tanımından çıkar.

Lemma 2.2.1.

$$\begin{aligned} 0 \neq u \in H^+(\alpha) &\iff p(u) > \alpha, \\ u \in H^0(\alpha) &\iff p(u) = \alpha, \\ 0 \neq u \in H^-(\alpha) &\iff p(u) < \alpha. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Teorem 2.2.2 düzgün operatör değeri fonksiyonlar sınıfında [11] de ispatlanmıştır. Benzer şekilde bu teorem düzgün olmayan operatör değeri fonksiyonlar sınıfına genişletilmektedir.

Teorem 2.2.2. (Atalet Kannuu.) Eğer $c(\alpha)$ indisi (sirasıyla , $d(\alpha)$) sonlu ise H- Hilbert uzayı

$$H = X \oplus Y \oplus Z \tag{2.2.2}$$

geçkinde bir ayrışma sahiptir. Burada

$$i) \quad X \subset H^+(\alpha) , \ Y \subset H^0(\alpha) \text{ ve } Z \subset H^-(\alpha) ,$$

$$ii) \quad X , \ Y \text{ ve } Z \quad \alpha - \text{ortogonal altuzaylar,}$$

$$iii) \quad \dim X = c(\alpha) \quad \text{dır (sirasıyla, } \dim Z = d(\alpha) \text{) .}$$

İspat. $c(\alpha) = n < +\infty$ olduğu varsayalım. $H^+(\alpha)$ n n-boyutlu

altuzayı X olsun. X de baz vektörleri $e_1, e_2, \dots, e_n$ olsun ve bunlar için $\langle e_i, e_j \rangle_\alpha = \delta_{ij}$ sağlansın. Eğer bu koşul sağlanmaz ise Gram-Schmidt yöntemi ile $\langle e_i, e_j \rangle_\alpha = \delta_{ij}$ olacak şekilde $\{e_i\}_1^n$ seçilebilir. H da X e

α -ortogonal birtek U altuzayı bulunur ve $H = X \oplus U$ dir.

Gerçekten U aşağıdaki gibi tanımlansın

$$U \equiv \{u \in H \mid \langle u, v \rangle_\alpha = 0, \ \forall v \in X\}$$

$$= \{u \in H \mid \langle u, e_j \rangle = 0, \ j = 1, 2, \dots, n\} .$$

Y ve Z 'nin α -ortogonal olduklarını gösterebiliriz. Farzedelim ki $\langle u, v \rangle_\alpha \neq 0$ olacak şekilde $u \in Y$ ve $v \in Z$ elemanları bulunur. Ayrıca $0 < \beta < -\frac{L(\alpha)(u, v)}{2}$ olmak

sağlanamaz. Dolayısıyla $Z \subset H_-(\alpha)$ bulunur.

gökar. Fakat $Y = H^0(\alpha) \cap U$ ve $Z \cap Y = \{0\}$ dir. Bu nedenle $Z \cap H^0(\alpha) \neq \{0\}$ O zaman $U \subset H^0(\alpha) \cup H_-(\alpha)$ olduğu dikkate alınrsa $Z \cap H^0(\alpha) \neq \{0\}$ sonucu $Z \subset H_-(\alpha)$ dir. Bunu göstermek için ters kabul yapalım. $Z \not\subset H_-(\alpha)$ olsun.

$U = Y \oplus Z$ olacak şekilde U 'nin bir tek Z altuzayı vardır. $Y \subset U$ dur. Y ve Z altuzayları H 'da ortogonal alt uzaylar olmak üzere bulunur. Dolayısıyla Y , H in alt uzayıdır. U uzayı bir Hilbert uzayıdır ve

$$Y \ni u + v \in Y$$

$$L(\alpha)(u + v, u + v) = L(\alpha)(u, u) + L(\alpha)(v, v) + 2L(\alpha)(u, v) = 0$$

ii) $\forall u, v \in Y$ için

$$L(\alpha)(ku, kv) = |k|^2 L(\alpha)(u, v) = 0 \Rightarrow ku \in Y,$$

i) $\forall u \in Y, k = \text{sabit}$ için

olduğu göz önüne alınrsa

$H^0(\alpha) \cap U$ formülünde $H^0(\alpha)$ nın tanımından $L(\alpha)(u, v) = 0, L(\alpha)(v, v) = 0$

Buna göre $\forall u, v \in Y$ için $L(\alpha)(u, v) = 0$ olduğu dikkate alındığında ve $Y =$

$c(\alpha)$ 'nin maksimaliği ile gelişir. Bu nedenle $\forall u, v \in Y$ için $L(\alpha)(u, v) = 0$ dir.

$X \oplus [u + L(\alpha)(u, v)v], H^+(\alpha)$ nın $c(\alpha) + 1$ boyutlu bir altuzayıdır. Bu ise

tarafından ise $u + L(\alpha)(u, v)v$ X 'e α -ortogonaldir. Sonuç olarak $X' =$

olur. Bu ise $u + L(\alpha)(u, v)v$ 'nin $H^+(\alpha)$ 'da bulunduğunu gösterir. Diğer

$$= 2|L(\alpha)(u, v)|^2 > 0$$

$$= L(\alpha)(u, u) + 2|L(\alpha)(u, v)|^2 + L(\alpha)(v, v)$$

$$[L(\alpha)(u + L(\alpha)(u, v)v, u + L(\alpha)(u, v)v)]$$

elde edilir. Gerçekten eğer $L(\alpha)(u, v) \neq 0$ ise

$Y = H^0(\alpha) \cap U$ olsun. Buradan $Y \cap X = \{0\}$ ve her $u, v \in Y$ için $L(\alpha)(u, v) = 0$

$$\begin{aligned}
& L(\alpha)(n + \beta(L(\alpha)n, v)v, n + \beta(L(\alpha)n, v)v) = \\
& = 2\beta|(L(\alpha)n, v)|^2 + \beta^2|(L(\alpha)n, v)|^2_2|(L(\alpha)n, v)|^2_2(L(\alpha)n, v) \\
& = \beta|(L(\alpha)n, v)|^2_2(2 + \beta(L(\alpha)n, v)) > 0 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Buradan $n + \beta(L(\alpha)n, v)v \in H^+(\alpha) \cap U$ dir. Bu ise $c(\alpha)$ 'nın maksimaliği ile gelişir. Sonuç olarak Y ve Z α -ortogonal altuzaylardır. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

$E_n(E^n)$, H Hilbert uzayının n -boyutlu (n -ko-boyutlu) altuzaylarının cümlesi olsun.

$$(2.2.3) \quad k_j \equiv_m \inf_{U \in E_j} \max p(n) \cdot$$

geçkinde k_j sayıları tanımlansın.

Lemma 2.2.3. Eğer $\alpha \in \sigma_2(H)$ ve $c(\alpha) < +\infty$ ise

$$(2.2.4) \quad \alpha = \inf_{U \in E_{c(\alpha)+1}} \max p(n)$$

formülü sağlanır.

İspat. ([11], *Theorem 1*) de α reel sayısının k_j 'ye eşit olması için yeter ve gerek koşulun $c(\alpha) < +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\alpha)n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \alpha$ olacak şekilde $\{v_n\}, \|v_n\| = 1$ vektörler dizisinin bulunması olduğu ispatlanmıştır. Sonuç olarak $\sigma_2(H)$ 'ın tanımından

$$(2.2.5) \quad \alpha = \inf_{U \in E_j} \max p(n),$$

olacak şekilde bir j indisi bulunur. $j = c(\alpha) + 1$ olduğunu gösterecektir.

Eğer $j \leq c(\alpha)$ ise $H^+(\alpha)$ 'nın j boyutlu altuzayı bulunur. Böylece $j \leq c(\alpha)$ için $U \in E_j$ ve $U \subset H^+(\alpha)$ bulunur ve Lemma 2.2.1 den

$$(2.2.6) \quad \inf_{U \in E_j} \max p(n) < \alpha$$

olur. Diğer taraftan $j > c(\alpha)$ için tüm j boyutlu U altuzayları için $\max_U p(n) \geq \alpha$ 'dır. Bu nedenle Lemma 2.2.1 gereğince $j > c(\alpha)$ için

$$(2.2.7) \quad \inf_{U \in E_j} \max p(n) \geq \alpha$$

dir. k_j nin tanımından

$$(2.2.8) \quad k_1 \leq k_2 \leq \dots k_{c(\alpha)} \leq k_{c(\alpha)+1} \leq \dots$$

olur.

Yukarıdaki (2.2.6) dan $j \leq c(\alpha)$ için $\alpha \neq k_j$, (2.2.5) den $\alpha = k_j$ olacak şekilde k_j var. Dolayısıyla (2.2.7) ve (2.2.8) den

$$(2.2.9) \quad \alpha \leq k_{c(\alpha)+1} \leq k_{c(\alpha)+2} \leq \dots$$

yazılabilir. Öteyandan $j \geq c(\alpha) + 1$ koşulu ve

$$\inf_{E_j} \max_U p(n) = \alpha$$

söğlayan j bulunur. Eğer $j = c(\alpha) + 1$ ise ispat biter. Eğer $j = c(\alpha) + l$,

$1 < l < \infty$ ise (2.2.9) dan

$$\alpha \leq k_{c(\alpha)+1} \leq \dots \leq k_{c(\alpha)+l} = \alpha$$

olacağından yine $j = c(\alpha) + 1$ için

$$\alpha = k_{c(\alpha)+1} = \inf_{E_{c(\alpha)+1}} \max_U p(n)$$

olur ve ispat biter.

Ayrıca $\forall n \in H \setminus \{0\}$ için $p(n) \geq \gamma_-$ ve $p(n) \leq \gamma_+$ olduğundan (2.2.1) den $\forall n \in H \setminus \{0\}$ için $L(\gamma_-, n, n) \leq 0$ ve $L(\gamma_+, n, n) \geq 0$ dir.

Sonuç 2.2.1. $c(\gamma_-) = 0$,

$$(2.2.10) \quad \gamma_- = \inf_{U \in E_1} \max_U p(n) \quad \text{ve} \quad \gamma_+ = \sup_{U \in E_1} \min_U p(n)$$

dir.

İspat. $c(\gamma_-) = \max\{E | E \subset H_+(\gamma_-)\}$ dir.

$$H_+(\gamma_-) = \{n | L(\gamma_-, n, n) > 0\} \cup \{0\}$$

olduğundan $H_+(\gamma_-)$ da bulunan maximum boyutlu alt uzayın boyutu 0 dir.

Buradan $c(\gamma_-) = 0$ dir.

(2.2.10) un doğru olduğunu göstereyim. Önce (2.2.10) daki ilk formülün doğru-

luğunu göstereyim.

$p(x_n) \rightarrow \gamma^-$ olacak şekilde $\{x_n\} \in H$ daima bulunur. Bu $\{x_n\}$ dizisinin elemanları ile sırasıyla $L_1 = \{tx_1\}$, $L_2 = \{tx_2\}$, ..., $L_k = \{tx_k\}$, ... gibi bir boyutlu ($\dim L_k = 1$) uzayları oluşturulsun.

L_1 üzerinde (Rayleigh fonksiyonelinin homojenlik özelliğinden) $p(tx_1) = p(x_1)$ ve dolayısıyla $\max_{L_1} p(x) = p(x_1)$ olur. Aynı şekilde L_2 üzerinde $p(tx_2) = p(x_2)$ ve $\max_{L_2} p(x) = p(x_2)$ olur. Benzer şekilde devam edilerek L_k üzerinde $p(tx_k) = p(x_k)$ ve $\max_{L_k} p(x) = p(x_k)$ bulunur. Böylece

$$\gamma_k = \max_{L_k \in E_1} p(x) \rightarrow \gamma^- \quad (2.2.11)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\gamma^- \leq \max_{U \in E_1} p(x) \quad (2.2.12)$$

daima sağlanır. Dolayısıyla (2.2.11) ve (2.2.12) den infimum tanımı sağlanır ve

$$\inf_{U \in E_1} \max p(x) = \gamma^-$$

olur. Bu ise $\alpha \leq k_{j+1}$ kabulü ile gelişkidir. Diğer bir durum olarak $c(\alpha) < j$ olduğunun farzedelim. Buradan

$$\max \dim \{E \mid E \subset H^+(\alpha)\} < j$$

olur. Bu durumda j boyutlu keyfi bir U altuzayı için $U \cap (H^0(\alpha) \cup H^-(\alpha)) \neq \{0\}$ olur. Böylece keyfi bir $U \in E_j$ için $\max_U p(n) \geq \alpha$ olduğundan

$$k_j = \inf_{U \in E_j} \max_U p(n) \geq \alpha$$

dir. Fakat kabulümüzde $\alpha > k_j$ idi, dolayısıyla gelişki elde edilir. Kısaca $c(\alpha) \geq j+1$ ve $c(\alpha) < j$ den gelişki elde edilir. Buradan ise sonuç olarak keyfi $\alpha \in (k_j, k_{j+1}]$ için $c(\alpha) = j$ olduğu çıkar.

Sonuç 2.2.2. $\forall j$ için $c(k_{j+1}) = j$ dir.

2.3. Özdeğerlerin Varyasyonel Özellikleri.

Bu bölümde özdeğerlerin varyasyonel yöntemlerle bulunabilmesi problemi ele alınmıştır. Uygulanan esas yöntem [19] da verilen yaklaşım yöntemi, Teorem 2.2.2 (Atalet teoremi) ve $c(\alpha)$ Morse indisinin özellikleridir.

Tamam 2.3.1. Her $\delta > 0$ sayısı için $\exists N(\delta)$ sayısı $n > N(\delta)$ için $\sigma_1(R_n) \subset V_\delta(\sigma_1(R))$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\sigma_1(R_n)$ spektrumlar dizisi $\sigma_1(R)$ spektrumuna yakınsaktır denir ve $\sigma_1(R) \rightarrow \sigma_1(R)$ şeklinde gösterilir.

Burada $\sigma_1(R)$ in δ civarı

$$V_\delta(\sigma_1(R)) \stackrel{tm}{=} \{ \lambda \in R^1 \mid dist(\lambda, \sigma_1(R)) > \delta \}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ için $\sigma_2(R_n) \rightarrow \sigma_2(R)$, $\pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(R)$ ve $\pi_2(R_n) \rightarrow \pi_2(R)$ ifadeleri de tanımlanabilir. Eğer parçalı lineer RS $R_n = \{L_n, p_n\}$ dizisi RS $R = \{L, p\}$ 'e yaklaşıyorsa bu takdirde $n \rightarrow \infty$ için

$$\sigma_1(R_n) \rightarrow \sigma_1(R), \quad \sigma_2(R_n) \rightarrow \sigma_2(R),$$

$$(2.3.1) \quad \pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(R) \quad \text{ve} \quad \pi_2(R_n) \rightarrow \pi_2(R)$$

olduğu ispatlanmıştır ([18], *Theorem 2*).

Varyasyonel yöntemle özdeğerlerin bulunabilmesi için $[\gamma_-, \gamma_+]$ aralığının bir bölümünde spektrumun diskret olduğu, yani sonlu katlı, izole özdeğerlerden oluştuğu gösterilmektedir.

Teorem 2.3.1. $R = \{L, p\}$ Rayleigh sistemi olsun. Eğer

$$(\theta, \gamma_+] \cap \pi_2(R) = \emptyset \quad \text{veya} \quad [\gamma_-, \theta) \cap \pi_2(R) = \emptyset$$

sağlanıyorsa $\sigma_2(R)$, $(\theta, \gamma_+]$ (veya $[\gamma_-, \theta)$) aralığı üzerinde diskretdir.

İspat. Teoremin koşulları altında $\sigma_2(R)$ in $(\theta, \gamma_+]$ da diskret olduğunu, yani sonlu katlı izole özdeğerlerden oluştuğunu gösterebiliriz. R bir Rayleigh sistemi olsun ve $R_n = \{L_n, p_n\}$ parçalı lineer RS dizisi $R = \{L, p\}$ 'e yakınsasın, yani

$$(2.3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\alpha) = L(\alpha) \quad \text{ve}$$

$$(2.3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - p\|_\infty = 0$$

koşulları sağlansın. $\beta > \theta$ olacak şekilde sabit bir β sayısı seçilsin. Bu takdirde $[\beta, \gamma_+] \cap \pi_2(R) = \emptyset$ dir. Eğer $\alpha_o \in \sigma_2(R) \setminus \pi_2(R)$ ise α_o özdeğerdir ve sonlu rank'a sahiptir. Gerçekten $\alpha_o \in (\beta, \gamma_+] \cap \sigma_2(R)$ olsun. $\sigma_2(R)$ in tanımından $\|x_n\| = 1$, $L(\alpha_o)x_n \rightarrow 0$ ve $p(x_n) \rightarrow \alpha_o$ olacak şekilde dizi bulunur. Her sınırlı diziden zayıf yakınsak alt dizi seçilebilir. Bu nedenle $x_n \rightharpoonup x$ yazılabilir. $\alpha_o \in (\beta, \gamma_+] \cap \sigma_2(R)$ ve $(\beta, \gamma_+] \cap \pi_2(R) = \emptyset$ olduğundan $\alpha_o \notin \pi_2(R)$ ve buradan $x \neq 0$ dir. Ayrıca $L(\alpha_o)x_n \rightarrow 0$, $x_n \rightharpoonup x$ olduğundan $L(\alpha_o)x_n \rightharpoonup 0$ ve $L(\alpha_o)x_n \rightharpoonup L(\alpha_o)x$ doğrudur. Limitin teklifi kullanılırsa $L(\alpha_o)x = 0$, $x \neq 0$ bulunur. Buradan $L(\alpha_o)x = 0$, $x \neq 0$ ve $\alpha_o \in W_p$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_o \in \sigma_e(R)$ olur.

α_o in sonlu katlılığı ise ters kabul ile gösterilir. $\dim p(\alpha_o) = \infty$ olduğunu varsayalım ve $p(\alpha_o)$ ile α_o özdeğerine karşı gelen özfonksiyonlar uzayı tanımlansın. O zaman $p(\alpha_o)$ sonsuz boyutlu uzayında $\{x_n\} \subset p(\alpha_o)$ ve $L(\alpha_o)x_n = 0$, $x_n \rightharpoonup 0$ ve $p(x_n) = \alpha_o$ olacak şekilde dizi bulunur (misal olarak $p(\alpha_o)$ da ortonormal baz seçilebilir). Bu ise $\alpha_o \notin \pi_2(R)$ ile gelişki verir. Böylece $\dim p(\alpha_o) > \infty$ olur ve $\alpha_o \in (\beta, \gamma_+] \cap \sigma_2(R)$ sonlu katlıdır.

formülü sağlanır.

$$\theta_n = \inf_{U \in E_n} \max_{p(u)} \quad (2.3.8)$$

cümlesi olmak üzere

Theorem 2.3.2. Eğer $[\gamma_-, \theta) \cap \pi_2(R) = \emptyset$ ise E_n , n boyutlu tüm altuzayların

Bu bölümde elde edilen en önemli sonuç aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

şeklinde sıralanabilmektedir.

$$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n \leq \dots$$

aralığındaki özdeğerler artan sırada (katlılıklar dahil)

olmak üzere sonlu katılığa sahip izole özdeğerlerden oluşur. Bu nedenle $[\gamma_-, \theta)$

2.3.1'den $[\gamma_-, \theta)$ üzerinde $R = \{L, p\}$ 'nin spektrumunu yegane limit noktası θ

Bu kısımda $[\gamma_-, \theta) \cap \pi_2(R) = \emptyset$ olduğu farzedilmektedir. Bu durumda Theorem

diskret olduğu benzer şekilde ispatlanır.

olduğu çıkar. $[\gamma_-, \theta) \cap \pi_2(R) = \emptyset$ ise $\sigma_2(R) \cap [\gamma_-, \theta)$ cümlesinde spektrumun

(2.3.7) ile gelişki verir. Buradan ise $(\theta, \gamma_+]$ aralığı üzerinde spektrumun diskret

olduğu görülür. Bu nedenle $n \geq m$ için $N(\beta - \epsilon_n, R_n) > +\infty$ 'dur. Bu ise

her $[\lambda, \gamma_+]$ aralığı üzerinde $n \geq m$ ($\exists m$ bulunur) için R_n spektrumunun diskret

elde edilir. Öteyandan (2.3.1) formülü ve Tanım 2.3.1'den $\lambda > \theta$ olmak üzere

$$= +\infty \quad (2.3.7)$$

$$N(\beta - \epsilon_n, R_n) = \max \dim \{E \mid p_n(x) \geq \beta - \epsilon_n, x \in E \setminus \{0\}\}$$

ifadesi geçerlidir. Her $x \in X$ için $p(x) \geq \beta$ olduğundan (2.3.6) ve (2.3.5) den

$$N(\beta, R_n) = \max \dim \{E \mid p_n(x) > \beta, x \in E \setminus \{0\}, \beta > \theta\}. \quad (2.3.6)$$

Bu nedenle

formülü ile tanımlanır ve β 'dan büyük özdeğerlerin sayısını gösterir.

$$N(\beta, R) = \sum_{\theta_i > \beta} 1$$

verilen koşullar altında

sağlanır ([19], Theorem 6). Burada $N(\beta, R)$ -spektral dağılım fonksiyonudur ve

İspat: $\gamma \pm \in \sigma_2(H)$ olduğunu [19]’dan bilmekteyiz. Teorem 2.3.1 den dolayı $\gamma_- \in \sigma_e(H)$ ve $\gamma_- = \theta_1$ ’dir. $\bar{n} = \max\{i \mid \theta_i = \theta_n\}$ ve $\bar{n} = \min\{i \mid \theta_i = \theta_n\}$ olsun. k_j ler (2.2.3) deki gibi tanımlanmaktadır. Burada $j = 1, 2, \dots, n, \dots$ için $k_j = \theta_j$ olduğunu gösterilecektir. Lemma 2.2.1 den $H^+(\theta_1) = H^+(\gamma_-) = \{0\}$ dir. Sonuç olarak $c(\theta_1) = 0$ bulunur. Burada θ_1 noktasında Lemma 2.2.3 uygulanırsa

$$\theta_1 = \inf_{E_{c(\theta_1)+1}} \max_{U \in E_{c(\theta_1)+1}} p(u) = \inf_{E_1} \max_{U \in E_1} p(u) = k_1.$$

$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n_1}$ olsun ve $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ vektörleri θ_1 ’re karşı gelen lineer bağımsız özvektörlerin bir sistemi olsun. Buradan

$$\gamma_- = \theta_2 \leq k_2 = \inf_{E_2} \max_{U \in E_2} p(u) \leq \max_{\text{span}\{x_1, x_2\}} p(u) \leq \theta_2$$

ve burada $\text{span}\{x_1, x_2\}$ ile x_1, x_2 ’nin gerdiği uzay gösterilmiştir. Bu ise $\theta_2 = k_2$ olduğunu verir. Benzer şekilde

$$\gamma_- = \theta_{n_1} \leq k_{n_1} = \inf \max p(u) \leq \max p(u) \leq \theta_{n_1}$$

formülü ile tanımlanır. Lemma 2.2.3 ve Teorem 2.3.2’den aşağıdaki sonuç elde

$$N(\lambda,R)=\sum_{\theta_i<\lambda}1,\quad \lambda>\theta,$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Benzer şekilde $(\theta,\gamma+]\cap \pi_2(R)=\varnothing$ ise

$$N(\lambda,R)=\sum_{\theta_i<\lambda}1,\quad \lambda>\theta,$$

özdeşler bulunur. Bu durumda $N(\lambda,R)$ spektral dağılım fonksiyonu $[\gamma-,\lambda)$ aralığında $\lambda>\theta$ olmak üzere Teorem 2.3.1’den dolayı sonlu sayıda tamamlar.

Böylece $k_{n+1}=\theta_n$ olmaz. Buradan ise $k_{n+1}=\theta_{n+1}$ elde edilir. Bu ise ispatıdır ve $\dimker L(\theta_n)=n+2-\bar{n}$ olur bu ise $\dimker L(\theta_n)=n-\bar{n}+1$ ile gelişir.

$$\inf_{E_i}\max_{U\in E_i}p(u)=\theta_n$$

dir. Eğer $k_{n+1}=\theta_n$ ise buradan $i=\bar{n},\dots,\bar{n},\bar{n}+1$ için

3. OPERATÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLAR SINIFINDA FAKTORİZASYON YÖNTEMİ

3.1. Faktörizasyon Koşulları Arasında Bağlantı

Operatör fonksiyonların araştırılmasında kullanılan temel yöntemlerden birisi faktörizasyon yöntemidir. Amaç $L(\lambda)$ operatör fonksiyonunu belirli koşullar altında

$$(3.1.1) \quad L(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda)$$

şeklinde göstermektir. (3.1.1) formülünde $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ nin spektrumları ayrık gelinde göstermektedir. (3.1.1) formülünde $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ nin spektrumlarının incelenmesi $L(\lambda)$ nin spektrumunun incelenmesi $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ nin spektrumlarının incelenmesi problemine indirgenir. Bu tür faktörizasyonlardan birisi spektral faktörizasyon veya kanonik faktörizasyondur.

Bu bölümde amaç Rayleigh sistem aksiyomlarını sağlayan bir sınıf operatör-fonksiyonların faktörizasyonunun bulunmasıdır.

Γ kompleks düzlemde düzlemlendirilebilir (rectifiable) basit kapalı bir eğri ve G^+ genişletilmiş kompleks düzlem $(\infty$ dahil) iki bölgeye ayrısın. Sınırlı olan G^+ ve sınırsız olan G^- olarak tanımlansın. H -Hilbert uzayı ve $B(H)$ ise H 'tan H 'a sınırlı operatörler uzayı olmak üzere, $C(\Gamma, B(H))$ ile $B(H)$ değerli Γ üzerinde tanımlı tüm sürekli operatör değerli fonksiyonların sınıfı tanımlansın. $C_+(\Gamma, B(H))$ ($C_-(\Gamma, B(H))$) ise Γ üzerinde sürekli ve G^+ (G^-) ya analitik genişlemeye izin veren operatör değerli fonksiyonlardan oluşan $C(\Gamma, B(H))$ 'nin bir alt sınıfı olsun. $C^0_-(\Gamma, B(H))$ ise $C_-(\Gamma, B(H))$ 'da sonsuzda sıfıra yakınsak operatör değerli fonksiyonlar sınıfı olsun. Dolayısıyla $X_+(t) \in C_+(\Gamma, B(H))$ operatör fonksiyonu Γ üzerinde sürekli ve G^+ da analitiktir. $X_-(t) \in C^0_-(\Gamma, B(H))$ operatör fonksiyonu Γ üzerinde sürekli G^- de analitik ve $t \rightarrow \infty$ için $X_-(t) \rightarrow 0$ dır.

Tanım 3.1.1. $X(t) \in C(\Gamma, B(H))$ operatör değerli fonksiyonu verilsin. Eğer $X_+(t) \in C^+(\Gamma, B(H))$, $X_-(t) \in C^0_-(\Gamma, B(H))$ olmak üzere $X_+(t) \in G^+ \cup \Gamma$ da ve $I + X_-(t) \in G^- \cup \Gamma$ da tersinir (invertible) ise ve $X(t)$ operatör değerli fonksiyonu Γ üzerinde

$$X(t) = X_+(t)(I + X_-(t)) \quad (t \in \Gamma) \quad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabiliyorsa $X(t)$ nin Γ ya göre sağ kanonik faktORIZASYONU vardır denir.

Tanımın dolaylı operatör değerli $X(t)$ nin faktORIZASYON EĞRİSİ Γ regüler noktalarından geçer.

Operatör değerli fonksiyonlar teorisinde bilinen bazı faktORIZASYON teoremleri ve onlar arasındaki bağlantıyı vereлим.

Wiener cebri, Γ birim çember olmak üzere $X(t) \in C(\Gamma, B(H))$ ve

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} t^k X_k, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \|X_k\| < +\infty \quad (3.1.3)$$

koşulunu sağlayan operatör değerli fonksiyonlardan oluşur. Wiener cebrinde norm

$$\|X(t)\|_W^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \|X_k\|^2$$

formülü ile verilir. Wiener cebrinde

$$\|X(t) - I\|_W < 1 \quad (|t| = 1) \quad (3.1.4)$$

koşulu sağlanıyorsa $X(t)$ operatör fonksiyonu

$$X(t) = X_+(t)(I + X_-(t))$$

şeklinde kanonik faktORIZASYONA sahiptir ([2], *Theorem 23.4*).

Diğer bir faktORIZASYON koşulu ise

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m X_m, \quad (X_k \in B(H)) \quad (3.1.5)$$

şeklindeki operatör fonksiyonlar sınıfında

$$\|X(t) - I\| < 1 \quad (|t| = 1) \quad (3.1.6)$$

koşulu ile verilir ([2], *Theorem* 24.2). Burada norm her noktada operatör norm olarak tanımlanır.

Operatör fonksiyonların faktörizasyonunu konusunda temel koşullardan birisi akretiflik koşuludur [4].

Tanım 3.1.2. ([4], T.Kato) $ReA_{\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{2}(A + A^*)$ ($A \in B(H)$) olsun. Eğer $ReA \gg 0$ ise A ya düzgün akretif operatör (uniformly accretive operator) denir.

Burada

$$ReA \gg 0 \Leftrightarrow (ReAf, f) \geq \delta(f, f), \delta > 0, f \in H.$$

Yukarıda verilen koşullar dahil

$$(I + X^-(t)) \prod_{s=1}^j (1 - c_j t^{-1})^{-1} (I + Y^-(t))$$

ve

$$X^+(t) = a^{-1} \prod_{l=1}^j (1 - d_j t^{-1})^{-1} Y^+(t)$$

geçkinde faktörizasyona sahip olur. Bu eşitlikte

$$X(t) = X^+(t)(I + X^-(t))$$

fonksiyonunun yukarıdaki garpım geçkini kullanarak

geçkinde yazılır. Buradan ise $a(t)X(t) = Y^+(t)(I + Y^-(t))$ ifadesinde $a(t)$

$$0 \leq l \leq s, |c_j| > 1, |d_j| > 1$$

$$a(t) = a \prod_{s=1}^j (1 - c_j t^{-1}) \prod_{l=1}^j (1 - d_j t^{-1})$$

olmak üzere $a(t)$ fonksiyonu

sınırladığı bölge içinde kalan kökler c_j ve bu bölgenin dışında kalan kökler d_j

sağlıyorsa Γ (birim çember) ya göre faktörizasyonu vardır. Gerçekten Γ nin

ve $ind_{\Gamma} a(t) = 0$ koşullarını sağlmasına bağlıdır. $a(t)$ fonksiyonu bu iki koşulu

$X(t)$ nin faktörizasyona sahip olması ise $a(t)$ fonksiyonunun $a(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$)

faktörizasyonu var sonucu çıkar. Yani $a(t)X(t) = Y^+(t)(I + Y^-(t))$ olur.

Buradan ise c) ve b) bağlantısı kullanılırsa d) koşulundan $a(t)X(t)$ nin

fonksiyonu bulunur [2].

sağlamıyorsa $Re(a(t)X(t)) \gg 0$ ($|t| = 1$) olacak şekilde $a(t) = \sum_{s=-s}^k a_s t^s$

Eğer $X(t) \in C(\Gamma, B(H))$ ve d) $\inf_{t \in \Gamma} \|f\| = 1$ | $(X(t)f, f) > 0$ koşulu

c) ve d) koşulları arasında bağlantı:

kanonik faktörizasyonu elde edilir.

kanonik faktörizasyona sahiptir sonucu çıkar. $aX(t)$ yi a ile bölersek $X(t)$ nin

olacak şekilde $a > 0$ bulunur. Böylece $ReX(t) \gg 0$ sağlanıyorsa buradan $aX(t)$

$$ReX(t) \gg 0 \Leftrightarrow \|aX(t) - I\| > 1$$

c) ve b) koşulları arasında bağlantı: ([2], Lemma 24.4)

geklindedir.

$ind(X(t)f, f) = 0$ kabulünden ve $Re(a(t)X(t)) \gg 0$ olduğundan

$$0 = ind(a(t)X(t)f, f) = ind a(t) + ind(X(t)f, f) = ind a(t) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\inf_{t \in \Gamma} \|f\| = 1 \quad | (X(t)f, f) | > 0$$

ve

$$ind(X(t)f, f) = 0$$

koşulları bir arada kanonik faktörizasyonun bulunması için yeterli olur.

Yukarıdaki d) faktörizasyon koşulu, yani

$$(3.1.7) \quad \inf_{t \in \Gamma} \|f\| = 1 \quad | (X(t)f, f) | > 0$$

ifadesi $ind(X(t)f, f)$ in f e bağlı olmadığı, Γ nun üzerinde ve ε civarında $(X(t)f, f)$ in kökünün bulunmadığı ve ayrıca $X(t) \in C_+(\Gamma, B(H))$ ise $(X(t)f, f) = 0$ denkleminin Γ içinde kökler sayısının f e bağlı olmadığı anlamına gelir.

$(X(t)f, f) = 0 \quad f \neq 0$ denkleminin Γ içindeki kökler sayısının f den bağımsız olması iki aşamada gösterilebilir.

Birinci aşama (3.1.7) şartı varsa $ind(X(t)f, f)$ in f e bağlı olmadığını göstermektedir. $H \setminus \{0\}$ irtibatlı olduğundan $g, f \in H \setminus \{0\}$ ve $\|f\| = \|g\| = 1$ olmak üzere g, f e yeterince yakın seçilirse ve (3.1.7) ile ε garpının sürekliliği göz önüne alınrsa $|(X(t)g, g)| > \delta$ olduğundan

$$|(X(t)f, f) - (X(t)g, g)| > \delta$$

bulunur. Böylece $(X(t)f, f) - (X(t)g, g)$ ve $(X(t)g, g)$ için *Rouché* teoreminin [33] koşulu sağlanır ve

$$(X(t)f, f) = (X(t)f, f) - (X(t)g, g) + (X(t)g, g)$$

ifadesinde bu koşul göz önüne alınrsa

$$ind(X(t)f, f) = ind((X(t)f, f) - (X(t)g, g) + (X(t)g, g)) = ind(X(t)g, g)$$

elde edilir. $H \setminus \{0\}$ irtibatlı olduğundan cümle üzerindeki keyfi noktaya civarlarla ulaşılabilir. Dolayısıyla $X(t) \in C(\Gamma, B(H))$ ve (3.1.7) şartı varsa $ind(X(t)f, f)$ den bağımsızdır.

İkinci aşama ise $\text{ind}(X(t)f, f) = N - P$ formülünde $X(t) \in C_+(\Gamma, B(H))$ olduğunda $P = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak elde edilir. Gerçekten birinci aşamada $\text{ind}(X(t)f, f)$ in f den bağımsız olduğu gösterildiğinden ve burada $\text{ind}(X(t)f, f) = N$ olduğundan $(X(t)f, f)$ in kökler sayısı f den bağımsız olur.

(3.1.7) koşulunun sağlanması için geometrik anlamda verdiğimiz iki koşul yeterli değildir. Aşağıdaki örnek bu iki koldan (3.1.7) nin elde edilemeyebileceğini gösterir.

Örnek 3.1.1. $A > 0$ kompakt ve kendine eş operatör olsun. Buradan $t_n \in \mathbb{R}^+$ ve $t_n \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\sigma_A = \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$$

olur. $X(t) = tA$ ve Γ birim çember olsun. Böylece $(Af, f) > 0$ olduğundan

$$(X(t)f, f) = t(Af, f) = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \mathbf{R}(X(t)) = \{0\}$$

bulunur. Burada $\mathbf{R}(X(t))$ ile $X(t)$ nin kökler bölgesi gösterilmiştir. Öteyandan $Af_n = t_n f_n$, $\|f_n\| = 1$ olmak üzere f_n dizisi için

3.2. Regülerlik Koşulunu Sağlayan Operatör Değerli

Fonksiyonların Faktörizasyonu

Bu bölümde analitik operatör fonksiyonlar sınıfında yeter koşul olarak bilinen $L'(\lambda) \gg 0$ şartı yerine daha zayıf koşul altında $L(\lambda)$ için faktörizasyon teoremi ispatlanmaktadır. Bu koşul zayıf regülerlik koşulu olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.1 $L(\lambda)$ $[a, b]$ de tanımlı operatör değerli fonksiyon ve $\lambda \in [a, b]$ $\|f_n\| = 1$ olmak üzere

$$(L(\lambda)f_n, f_n) \rightarrow 0 \Rightarrow (L'(\lambda)f_n, f_n) \neq 0$$

sağlanıyorsa $L(\lambda)$ $[a, b]$ de zayıf regülerlik koşulunu sağlar denir.

Daha önce 2.1. bölümde Tanım 2.1.3 ile verilen regülerlik koşulu bu koşuldandır. Gerçekten

$$(L(\lambda)f, f) > \varepsilon \ (\lambda \in [a, b], \|f\| = 1) \Rightarrow (L'(\lambda)f, f) > \delta$$

şeklinde bir faktörizasyona sahiptir. Burada $L^+(\lambda)$, U da holomorf ve tersinir

(invertible), $Z \in B(H)$, $\sigma(Z) \subset (a, b)$ ve Z kendine-eş bir operatöre benzerdir.

Tanım 3.2.2. Eğer operatör değeri $L(\lambda)$ fonksiyonu

$$L(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda) \tag{3.2.2}$$

şeklinde yazılabiliyorsa $C(\lambda)$ ya $L(\lambda)$ nin sağ bölüneni denir. Eğer (3.2.2) de $B(\lambda)$

ile $C(\lambda)$ nin spektrumları ayrık ise $C(\lambda)$ ya $L(\lambda)$ nin sağ spektral bölüneni denir.

Boylece Teorem 3.2.1 de $(\lambda I - Z)$ nin $L(\lambda)$ için spektral bölün olduğunu

gösterilmiştir. Özel halde $L(\lambda) = M(\lambda)(\lambda I - Z)$ şeklinde faktörizasyona sahip

ise $L(\lambda)$ nin U daki spektrumunu Z operatörünün spektrumuna eşit olur.

Elde edilen esas teorem aşağıdadır.

Teorem 3.2.2. $[a, b]$, R de bir doğru parçası ve $L(\lambda)$, $L(a) \ll 0$ ve $L(b) \gg 0$

olmak üzere $[a, b]$ nin R ye göre simetrik bir civarında analitik, kendine eş

operatör değeri bir fonksiyon olsun. Eğer $(L(\lambda)f, f)$ ($f \neq 0$) fonksiyonu

(a, b) 'de bir $p(\cdot)$ ve $[a, b]$ de $\dots$

Teorem 3.2.1 ([2] – *Theorem* 30.6) in şartları sağlanacak şekilde $[a, b]$ nin U da bir tek kök var ve $L(a) \ll 0$, $L(b) \gg 0$ sağlanır demektir. Kısaca U nu civar olarak seçerek $U \setminus [a, b]$ de kök yok, kök $[a, b]$ de olur ve dolayısıyla U dir. Bu ise zayıf regülerlik koşuluna gelişkidir.

$$\varphi(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L(\gamma)f_n, f_n) = 0 \quad , \quad \varphi'(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L'(\gamma)f_n, f_n) = 0 \quad (3.2.4)$$

ve $\varphi(\gamma) = 0$, $\varphi'(\gamma) = 0$ hali geçerlidir. Burada teoreminden $\varphi(\lambda) \equiv 0$ gibi gelişki elde edilir. Dolayısı ile γ da katlı kök vardır nun γ da katlı kökü olmayabilir. Bu halde ise analitik fonksiyonun teklik $\varphi'(\gamma) = 0$ geçerlidir. Bu durum ayrıca ele alınmaktadır. İkinci halde $\varphi(\lambda)$ konusudur. Bunlardan birinci hal $\varphi(\lambda)$ nin γ da katlı kökü var yani $\varphi(\gamma) = 0$, da iki kökü bulunur. Buradan ise $\varphi(\lambda)$ nin iki kökü ile ilgili iki hal söz γ nun civarında en az iki kökü bulunur ve Hurwitz teoreminden $\varphi(\lambda)$ nin bulunur. Dolayısıyla $F_n(\lambda)$ nin belli bir n . teriminden itibaren her teriminin λ_n ve $\bar{\lambda}_n$ dizileri ile yaklaşılabılır. Buradan $F_n(\lambda_n) = 0$ ve $F_n(\bar{\lambda}_n) = 0$ Diğer taraftan $(L(\lambda_n)f_n, f_n) = 0$ dan $(L(\bar{\lambda}_n)f_n, f_n) = 0$ olur. Yani γ ya sağlanır. Dolayısıyla Hurwitz teoreminin şartları sağlanır [33].

ve $\varphi(\lambda) \neq 0$ dan U nun her kompakt alt cümlesinde $F_n(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda) \neq 0$ (γ 'nin kendisinden başka kök olmayan civarı var) olur. Montel teoreminden elde edilir. Buradan ise $\varphi(\gamma) = 0$ ve $\varphi(a) \neq 0$ olduğu dikkate alırsa $\varphi(\lambda) \neq 0$

$$\varphi(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L(\gamma)f_n, f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L(\lambda_n)f_n, f_n) = 0$$

Kabulden ise

ile gösterelim. Ayrıca $L(a) \ll 0$ kabulünden $\varphi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L(a)f_n, f_n) \neq 0$ olur. $F_n(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda)$ olacak şekilde yakınsak alt dizi seçilir. Bu diziyi yine $F_n(\lambda)$ sininli olduğundan Montel teoreminin şartları sağlanır [33] ve $\{F_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ dan civarın her kompakt alt cümlesinde $\|(L(\lambda)f_n, f_n)\| \leq \|L(\lambda)\| < c$ (düzgün Diğer taraftan $[a, b]$ 'nin bir civarında $F_n(\lambda) = (L(\lambda)f_n, f_n)$ fonksiyonlar dizisi $(L(\lambda_n)f_n, f_n) = 0$ olacak şekilde $\{\lambda_n\} \notin [a, b]$ ve $\{f_n\} \in H$ dizileri bulunur.

uygulanırsa ters kabulden $U \setminus [a, b]$ 'de $\lambda_n \rightarrow \gamma \in [a, b]$, $\|f_n\| = 1$ ve dışarda kalacak şekilde yeni bir U_2 seçilir. Dolayısıyla bu işlemler tekrar tekrar

U -civarı bulunur ve dolayısıyla ispatlamak istediğimiz faktörizasyon formülü bu teoremden elde edilir.

İspatlan Teorem 3.2.2 nin benzeri analitik olmayan sınıftan operatör değeri fonksiyonlar için [6] ve [5] de ispatlanmıştır. Fakat burada operatör-değeri fonksiyon analitik olmadıgından ek integral koşulu verilmiştir. Bu koşul $h > 0$ ve $W(t, L'')$ ise L'' operatör fonksiyonunun $[0, h]$ da süreklilik modülü, yani

$$\overline{\lim}_{|t_1 - t_2| < t} \sup_{t_1, t_2 \in [0, h]} \|L''(t_1) - L''(t_2)\|$$

olmak üzere

$$\int_0^t \frac{t}{W(t, L'')} dt > +\infty$$

geklindedir.

Analitik operatör fonksiyonlar için bu koşul sağlanır, fakat [5, 6] da ispatlanan teoremden sadece $[a, b]$ aralığında

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(\lambda I - Z)$$

formülünün sağlandığı sonucu çıkar. Bizim amacımız ise kompleks düzlemde $[a, b]$ nin simetrik bir civarında benzer faktörizasyonu bulmaktır. Teorem 3.2.2 nin koşullarını sağlayan operatör fonksiyon Rayleigh sistem aksiyomlarını sağlar. Gerekten

- 1) $L(\lambda) : [a, b] \rightarrow S(H)$ sürekli operatör fonksiyondur.
- 2) $L(\lambda)x, x = 0$ denkleminin $[a, b]$ de bir $p(x) \in (a, b)$ kökü bulunur.
- 3) $L(p(x))x, x = 0, L(a) \gg 0, L(b) \gg 0$ ve zayıf regülerlik koşulundan $L'(p(x))x, x > 0$ bulunur.

Böylece faktörizasyonu bulunan bu sınıf için bir önceki bölümde ispatlanan varyasyonel teoremler de geçerlidir.

4. KUAZİHIPERBOLİK DEMET VE RİESZ İZDÜŞÜM FORMÜLÜ

4.1. KHD Tanımı ve Formlar

Kendine eş operatör fonksiyonlar sınıfında ele alınan operatör fonksiyona varyasyonel yöntemin uygulanabilmesi için fonksiyonun Rayleigh sistem aksiyomlarını veya bu aksiyomlara çok yakın koşulları sağlaması gerektiği kabul edilmektedir.

Örneğin, varyasyonel yöntemlerin en iyi kullanılabileceği sınıf hiperbolik operatör fonksiyonlar sınıfıdır. Bu sınıfta düzgün RS aksiyomlarından $(L'(p(x)), x, x) > 0$ koşulu sağlanmakta, dolayısıyla

$$\theta_n = \inf_{E_n} \max p(x)$$

formülünde $\inf$ yerine $\min$ yazılabilir. Genelde $(L'(p(x)), x, x) > 0$ koşulu sağlanmadığı takdirde

$$\theta_n = \min_{E_n} \max p(x)$$

formülü sağlanmayabilir.

Son yıllarda kuazihiperbolik demet (KHD) olarak tanımlanan operatör fonksiyonlar sınıfı her yönü ile araştırılmaktadır [26 – 28]. Ayrıca KHD lerin hiperbolik demetlerin genişlemesi olduğu ispatlanmıştır ([26], *Theorem 9*). Bu bölümde amaç varyasyonel yöntemlerin KHD sınıfında uygulamasını vermek ve KHD nin gözücüsünün bir takım özelliklerini kullanarak Riesz izdüşüm formülünü ispatlamaktır. KHD ler sınıfında $(L'(p(x)), x, x) > 0$ koşulu kısmen sağlandığı halde varyasyonel prensiplerde $\inf$ yerine $\min$ yazılabileceği bu bölümde gösterilmiştir.

$$(4.1.3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -A_0 \\ I & 0 & \dots & -A_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

demetinin operatörü (companion operator) olan

operatörü tarafından H^n üzerinde üretilmiş belirsiz skaler garpına göre $L(\lambda)$

$$(4.1.2.) \quad G = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \dots & I \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & I \end{pmatrix}$$

düzgün belirli kilnabilir (uniformly definitizable) operatör denir.

kilnabilir (definitizable), kuvvetli belirli kilnabilir (strongly definitizable) ve gartları sağlanacak şekilde bir p polinomuna varsa A operatörüne sırasıyla belirli

$$[p(A)x, x] \geq 0, \quad [p(A)x, x] > 0 \quad \text{ve} \quad [p(A)x, x] \geq \delta(x, x)$$

garpına göre kendine-eş olsun. Eğer $x \neq 0$, $\delta > 0$ için

Tanım 4.1.3. ([29], *Langer*) A operatörü G nin ürettiği $[x, y] = (Gx, y)$ iç

üretilmiş $[\cdot, \cdot]$ belirsiz skaler garpın $[x, y] = (Gx, y)$ şeklinde tanımlanmış [34].

bağılantı vardır. H üzerinde, tersinir ve kendine-eş G operatörü tarafından KHD ler ve belirli kilnabilir operatörler (definitizable operator) arasında

tip ten noktalar dan oluşuyorsa bu demete kuazihiperbolik demet denir.

Tanım 4.1.2. Birimsel kendine eş operatör demet in spektrum u reel ve belirli

demetine k yinci dereceden birimsel (monic) kendine-eş operatör demet denir.

$$(4.1.1) \quad L(\lambda) = \lambda^n I + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A_k,$$

operatör değeri

Tanım 4.1.1. Eğer $k = 0, 1, \dots, n-1$ için H üzerinde $A_k = A_k^*$ ise bu takdirde

noktalara belirli tip ten noktalar denir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (L'(\lambda)f_n, f_n) < 0$ (λ ek si tip ten) gartlarından birini sağlıyorsa bu tür

$n \rightarrow \infty$ gartı altında $\lim_{n \rightarrow \infty} (L'(\lambda)f_n, f_n) > 0$ (λ artı tip ten) veya

[26] da verilen tanım gereğince $\sigma(L)$ e ait noktalar $\|f_n\| = 1$, $L(\lambda)f_n \rightarrow 0$,

nın kendine eş operatör olduğu bilinmektedir. KHD ler ile belirli kılınabilir operatörler arasındaki ana bağlantı Teorem 4.1.1 ile sağlanmaktadır.

Teorem 4.1.1. ([26], *Lancaster – Matsaev*). Birimsel kendine-eş operatör demetin operatörünün düzgün belirli kılınabilir olması için gerek ve yeter koşul demetin kuazihiperbolik olmasıdır.

Düzgün belirli kılınabilir operatörün spektrumunu ile ilgili bağlantı ise aşağıdaki teoreme verilmektedir.

Teorem 4.1.2. G' 'ye göre kendine-eş olan A operatörünün düzgün belirli kılınabilir olması için gerek ve yeter koşul $\sigma(A) \subset R^1$ ve $\sigma(A)$ 'nın belirli tipten noktalardan oluşmasıdır.

KHD in tanımından $L(\lambda)$ kuazihiperbolik demetin spektrumunu sadece belirli tipten reel noktalardan oluşur. Bu nedenle artı ve eksi tipten spektrum kümeleri arasındaki uzaklık pozitifdir. Ayrıca R^1 de sadece pozitif veya negatif tipten noktalari kapsayacak sonlu sayıda aralık bulunur. Bu özellik spektrumun varyasyonel özelliklerinin araştırılması için çok önemlidir.

Düzgün operatör değeri demetlerin varyasyonel teorisinde aşağıdaki formlar önemli bir yer tutar.

$$\Delta[\alpha, \beta] = \begin{cases} \frac{L(\alpha) - L(\beta)}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \\ L'(\alpha), & \alpha = \beta \end{cases}$$

$$[x, y] = \begin{cases} (\Delta[p(x), p(y)](x, y), & 0, \\ ||x|| \cdot ||y||, & x, y \neq 0, \end{cases}$$

$$[x, y/\alpha] = \begin{cases} (\Delta[\alpha, p(y)](x, y), & 0, \\ y, & y \neq 0. \end{cases}$$

Bu formların Riesz izdüşüm formülünün bulunmasında da önemli rol oynadığı gösterilecektir. L - KHD ve (c, d) aralığı sadece bir tipten spektrum noktalarmı kapsayan aralık olsun. Örneğin artı tipten olduğunu varsayalım.

$R = \{L, p\}$ Rayleigh sistemi ve $(\theta, d) \cap \pi_2(R) = \emptyset$ olsun. (θ, d) aralığında özdeğerler

$$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_k = \dots = \theta_k > \theta_{k+1} \geq \dots$$

şeklinde sıralansın.

Bu özdeğerlere karşı gelen özfonksiyonlar $x_1, x_2, \dots, x_k, \bar{x}_k, \dots, x_{\bar{k}}, \dots$ şeklinde

sıralansın.

$$x^m(\alpha) = \frac{L(\alpha) - L(\theta^m)}{\alpha - \theta^m} x^m, \quad \alpha \in (c, d), \quad m = 1, 2, \dots$$

vektör fonksiyonları tanımlansın.

Ö zaman

$$[x, x_i/\alpha] = (x, x_i(\alpha)), \quad i = 1, \dots, n, \dots$$

olur. Bu formun bazı özellikleri şunlardır:

a) $[x, x_i/\alpha] > 0$, $\alpha \in W_p$, x_i ler özvektörler.

b) Eğer $\theta_i \neq \theta_j$ ise $[x_i, x_j/\theta_i] = 0$ olur.

$[x, x_i/\alpha]$ formunun a) ve b) özelliklerini sağladığını göstereлим.

a) $\alpha = \theta_i$ ve $\alpha \neq \theta_i$ hallerini inceleyelim.

i) $\alpha = p(x_i) = \theta_i$ ise

$[x_i, x_i/\alpha] = [x_i, x_i/\theta_i] = (x_i, x_i(\theta_i)) = (x_i, L'(\theta_i)x_i) = (L'(\theta_i)x_i, x_i) > 0$ olur.

Gergekten KHD tanımından spektruma ait θ_i özdeğerleri artı tipten ise bunlar

için $(L'(\theta_i)x_i, x_i) > 0$ sağlanır.

ii) $\alpha \neq \theta_i$ ise

$$[x_i, x_i/\alpha] = (x_i, x_i(\alpha)) = (x_i, \frac{L(\alpha) - L(\theta_i)}{\alpha - \theta_i} x_i)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \theta_i} (x_i, L(\alpha)x_i) - \frac{1}{\alpha - \theta_i} (x_i, L(\theta_i)x_i) = \frac{1}{\alpha - \theta_i} (L(\alpha)x_i, x_i) - \frac{1}{\alpha - \theta_i} (L(\theta_i)x_i, x_i)$$

olur. Buradan ise $\frac{1}{\alpha - \theta_i} (L(\alpha)x_i, x_i)$ ifadesi iki aşamada incelenir.

ii) $\alpha - \theta_i > 0$ için $(L(\alpha)x_i, x_i) > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{\alpha - \theta_i} (L(\alpha)x_i, x_i) > 0$$

olur.

ii) $\alpha - \theta_i > 0$ için $L(\alpha)x_i, x_i > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{L}(\alpha - \theta_i)L(\alpha)x_i, x_i > 0$$

olur. Buradan $[x, x_i/\alpha]$ formunun **a**) özelliği gösterilmiş olur.

b) $\theta_i \neq \theta_j$ için $[x_i, x_j/\theta_i] = 0$ olduğunun gösterelim.

$$[x_i, x_j/\theta_i] = (x_i, x_j(\theta_i)) = L(\theta_i) \frac{\theta_i - \theta_j}{L(\theta_j)} x_j$$

$$= \frac{1}{L}(\theta_i - \theta_j)[(x_i, L(\theta_i)x_j) - (x_i, L(\theta_j)x_j)] = \frac{1}{L}(\theta_i - \theta_j)L(\theta_i)x_i, x_j = 0$$

olur.

[19] da $R = \{L, p\}$ RS ve sadece özdeğerlerde

$$(4.1.4) \quad (L'(\theta_n)x, x) > 0, \forall x \in V_n^{\bar{n}} \setminus \{0\}$$

koşulu sağlanıyorsa

$$\theta_n = \min_E p(x)$$

ve

$$\theta_n = \max_E p(x)$$

formüllerinin sağlandığı gösterilmiştir. Öte yandan (4.1.4) koşulu KHD tanımından dolayı sağlanır. Bu nedenle aşağıdaki Teorem 4.1.3 doğrudur.

Teorem 4.1.3. $R = \{L, p\}$, RS L - KHD ve

$$\theta_1 \geq \theta_2 > \dots \geq \theta_k = \dots = \theta_{k+1} > \dots$$

ise

$$\theta_n = \min_E p(x)$$

ve

$$\theta_n = \max_E p(x)$$

formülleri sağlanır.

4.2. Operatörler Sınıfında Riesz İzdüşüm Formülü.

Bu bölümde operatörler sınıfında bilinen bazı kavramlar verilmektedir. Bir operatör için verilecek bu kavramların bir kısmı sonraki bölümde operatör değerli fonksiyonlardan kuazihiperbolik demetlere genişletilecektir. Bir sonraki bölümde izole özdeğer civarında Riesz izdüşüm formülü kuazihiperbolik demetler için genişletileceğinden bu kavramları karşılaştırmaya amacı ile öncelikle bir operatör için nasıl verildiği bu bölümde incelenmektedir. Kısaca bir operatör için Riesz ayrışımı (decomposition) teoremi ve Riesz izdüşüm formülünün tanımı ve Riesz ayrışım teoreminin ispatında kullanılan kavramlar ve ispatın ana adımları hakkında bilgi verilmektedir [7].

Teorem (Riesz Ayrışımı) 4.2.1. B Banach uzayında sınırlı lineer T operatörü verilsin. T nin spektrumunun iki izole ve birbirinin tümlayeni olan parçaları σ ve $\bar{\sigma}$ ile gösterilsin. Bu takdirde B uzayı lineer bağımsız ve T altında invariant M_σ ve $M_{\bar{\sigma}}$ altuzaylarının toplamına ayrılabilir. Ayrıca T operatörünün M_σ veya $M_{\bar{\sigma}}$ ye kısıtlaması olan operatörlerin spektrumunu sırasıyla σ veya $\bar{\sigma}$ dir. B Banach uzayının M_σ üzerine $M_{\bar{\sigma}}$ boyunca paralel izdüşümü

$$(4.2.1) \quad P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R_z dz$$

integrali ile verilir. Bu integral $\sigma = \sigma(T) \cap D$ sağlanacak şekilde bir D bölgesinin sınırı üzerinde alınmaktadır. $P_\sigma = I$, $P_{\bar{\sigma}} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\sigma = \sigma(T)$ ve $\bar{\sigma}$ nin boş olmasıdır.

Burada teoremin ifadesinde kullanılan kavramlar ve ispatın ana adımları verilmektedir. D bölgesi olarak kompleks düzlemde sınırlı ve açık D cümlesi alınmaktadır. Bu D cümlesi irtibatlı veya irtibatlız olabilir. D nin ∂D sınırı sonlu sayıda kapalı düzlemlendirilebilir eğriler ile oluşturulmuştur. ∂D sınırı $\rho(T)$ gözücü cümlesinde bulunur.

$\sigma(T)$ nin izole bir parçasını σ ve bundan pozitif uzaklıktaki ise $\bar{\sigma} = \sigma(T) \setminus \sigma$ şeklinde tanımlansın. $\sigma(T)$ nin izole parçaları olan σ ve $\bar{\sigma}$ spektrumlarından birinin boş olmasına izin verilmektedir. Buradan

$$\sigma = \sigma(T) \cap D$$

(4.2.2)

$T' = T|_{M_\sigma}$, $T'' = T|_{N_\sigma}$, $I' = I|_{M_\sigma}$ ve $I'' = I|_{N_\sigma}$ olmak üzere M_σ ve N_σ altuzayları T altında invariyanttır. Diğer taraftan T operatörü R_z ile komütatif olduğundan P_σ izdüşümü ile de komütatiftir. boyunca M_σ üzerine izdüşüm denir.

$P_\sigma f = f$ koşulunu sağlayan elemanları M_σ altuzayını ve $g \in B$, $P_\sigma g = 0$ bağmsız M_σ ve N_σ altuzaylarına ayırabiliriz. B Banach uzayının $f \in B$, izdüşümün karakteristik özelliğidir. Dolayısıyla P_σ ile B Banach uzayını lineer integraleri yukarıdaki toplamda kullanılırsa $P_\sigma^2 = P_\sigma$ elde edilir. Bu ise paralel

$$\int_{\partial D'} \frac{1}{z - z'} dz' = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{\partial D} \frac{1}{z - z'} dz = 2\pi i$$

bulunduğu göz önünde bulundurularak elde edilen olur. Ayrıca z nin D' tanım cümlesinin dışında ve z' nün D nin içinde

$$P_\sigma^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \int_{\partial D'} R_z R_{z'} dz dz' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \int_{\partial D'} \frac{R_z - R_{z'}}{z - z'} dz dz'$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R_z dz \int_{\partial D'} \frac{1}{z - z'} dz' - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D'} R_{z'} dz' \int_{\partial D} \frac{1}{z - z'} dz$$

Buradan ve Hilbert özdeşliğinden $(R_z - R_{z'}) = (z - z') R_z R_{z'}$

şeklinde yazılabilir.

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R_z dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D'} R_{z'} dz'$$

Böylece

sınırlı lineer operatördür.

kadar getirilebilir. Bu bakış altında (4.2.3) deki integral P_σ ile gösterilir. P_σ tanımlar. Aynı mantık ile ∂D büzülerek $\rho(T)$ terkedilmenden σ nun sınırına içinde ve D den daha küçük olan D' için de (4.2.3) formülü aynı operatörü integrali oluşturulabilir. Yukarıdaki (4.2.2) koşulu sağlanacak şekilde D nin

$$(4.2.3) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R_z dz$$

olsun. D nin ∂D sınırı $\rho(T)$ de bulunduğundan olacak şekilde D cümlesi bulunur. D (4.2.2) deki koşulu sağlayan bir bölge

N_σ nun T altında invariant olduğu gözönünde bulundurulursa $B = M_\sigma + N_\sigma$

toplamına göre

$$(4.2.4) \quad T - \lambda I = \begin{pmatrix} T' - \lambda I' & 0 \\ 0 & T'' - \lambda I'' \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(T - \lambda I)$ nin tersinin olması $(T' - \lambda I')$ ve $(T'' - \lambda I'')$ nün tersinin olmasıyla $\rho(T)$ gözücü cümlesi T' ve T'' nün $\rho(T')$ ve $\rho(T'')$ gözücü cümlelerinin kesişimine eşittir ve buradan

$$\rho(T) = \rho(T') \cap \rho(T'')$$

olur. Buradaki $\rho(T')$ ve $\rho(T'')$ cümleleri eşit değildir. D nin dışı $\rho(T')$ içi ise $\rho(T'')$ nin altcümlesidir. Eğer

$$(T - \xi I)R_z = (T - zI)R_z + (z - \xi I)R_z = I + (z - \xi I)R_z$$

ifadesi kullanılırsa

$$(T - \xi I) \frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz = \frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz I + \frac{1}{R_z} \int_{\partial D} R_z dz$$

olur. Bu toplam ise ξ ye bağlı olarak elde edilir. ξ noktası D nin dışında ise toplam $0.I - P_\sigma = -P_\sigma$ ve ξ noktası D nin içinde ise toplam $1.I - P_\sigma = I - P_\sigma$ olarak elde edilir. Diğer taraftan $(T - \xi I)$ ile R_z komütatif olduğundan ξ , D nin dışında olmak üzere

$$(T - \xi I) \frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz = -P_\sigma$$

ifadesinin M_σ ya kısıtlaması göz önüne alınırsa

$$-\frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz (T - \xi I) |_{M_\sigma} = P_\sigma |_{M_\sigma}$$

olur. Kısıtlama uygulandığında bu ifade

$$-\frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz (T' - \xi I') = I'$$

şeklinde elde edilir.

Buradan ise

$$R'_\xi = (T' - \xi I')^{-1} = -\frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz$$

olur.

Aynı şekilde ξ , D nin içinde durumuna bakılırsa

$$\frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz (T - \xi I) |_{N_o} = I - P_o |_{N_o}$$

elde edilir. Kısıtlama uygulanırsa bu ifade

$$\frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz (T'' - \xi I'') = I''$$

şeklini alır. Buradan ise

$$R''_\xi = (T'' - \xi I'')^{-1} = \frac{1}{R_z} \int_{\partial D} \frac{2\pi i}{z - \xi} dz$$

olarak bulunur. Bu kabullerden $\sigma(T')$ nin $\sigma(T)$ nin D deki σ kısmına ve $\sigma(T'')$ nin D dışındaki $\bar{\sigma}$ spektrumuna eşit olduğu görülür.

4.3. KHD Sınıfında Riesz İzdüşüm Formülü.

4.2. bölümde verilen formüller aynen operatör değerli fonksiyonlar sınıfında geçerli değildir. Örneğin

$$P_{\sigma} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R(z) dz$$

formülü operatör fonksiyonlar için aynı özelliği sağlamaz. $\sigma = \{\lambda_0\}$ izole

özdeğer ise

$$P_{\sigma} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R(z) dz$$

operatörünün H_{λ_0} -uzayına $(\lambda_0$ a karşı gelen öz fonksiyonlar uzayına) izdüşüm

olduğu elde edilir.

Fakat $L(\lambda)$ operatör değerli fonksiyon λ_0 -izole özdeğer ise

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} L^{-1}(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} R(z) dz$$

H_{λ_0} -uzayına izdüşüm operatörünü vermez. Bu bölümde amaç KHD sınıfında

benzer formülü bulmaktır. Bölümde ele alınan sorular A -kompakt, $B_k \in B(H)$

ve $B_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$ olmak üzere

$$L(\lambda) = A - \sum_{k=1}^N \lambda^k B_k$$

geçkinde operatör demet için Turner [10] tarafından ele alınmıştır. Bu bölümde

kullanılan yöntem Turner'ın [10] da verdiği yöntemidir. Elde edilen sonuçlar ise

KHD sınıfına genelleştirir.

Tanım 4.3.1. $L(\lambda)$, H ta tanımlı ve $\lambda \in C$ noktasında $L(\lambda)$ nin tersi var,

tersi sınırlı ve değer cümlesi H da yoğun ise λ -noktasına $L(\lambda)$ nin regüler noktası

denir.

$L(\lambda)$ nin regüler noktalar cümlesi $\rho(L(\lambda))$ ile gösterilir. Bu cümlemin

tümleyenine $L(\lambda)$ nin spektrumunu denir ve $\sigma(L(\lambda))$ ile gösterilir.

$\lambda \in \rho(L(\lambda))$ noktaları için $R_{\lambda} \equiv L^{-1}(\lambda)$ olsun.

Önce operatör teoriden bazı tanım ve teoremleri verelim.

A kapalı operatör olsun. A nın sınırlı tersinin bulunduğunu kabul edelim. Yani $\|Ax\| \geq c\|x\|$ koşulunu sağlayan $c > 0$ bulunsun. $d(A) = \dim \mathcal{R}(A)^\perp$ sayısına A operatörünün d -sayısı (deficiency number) denir [4]. Burada $\mathcal{R}(A)$ ile A operatörünün değer kümesi gösterilmiştir.

Teorem 4.3.1. ([4], Kato) A operatörü ;

a) Kapalı ,

b) $\|Ax\| \geq c\|x\|$ koşulunu sağlasın,

c) d -sayısı $d(A)$ ya eşit bir operatör olsun.

Eğer $D(B) \supset D(A)$ ve $\|Bx\| \leq a\|Ax\|$, $|a| < 1$ (yani B kuvvetli anlamda A -sınırlı) ise o zaman $A + B$ operatörü de kapalıdır, sınırlı tersi bulunur ve ayrıca $d(A+B) = d(A)$ olur.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1. A kapalı, $\|Ax\| \geq c\|x\|$ olsun, B sınırlı ve $\|B\| < c$ ise o zaman $A + B$ Teorem 4.3.1 in koşullarını sağlar.

Gerçekten $D(B) = H$ dir. Bu nedenle $D(B) \supset D(A)$ sağlanır. Öte yandan

$$\|Bx\| \leq \|B\|\|x\| \leq \frac{c}{\|B\|}\|Ax\|$$

yazılabilir ve $\frac{\|B\|}{c} < 1$ olduğundan B kuvvetli anlamda A -sınırlıdır.

Teorem 4.3.2.

a) $\rho(L(\lambda))$ açık cümledir.

b) $\forall \mu, \lambda \in \rho(L(\lambda))$ için genelleştirilmiş gözücü denklemi

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu \Delta[\mu, \lambda]R_\lambda, \quad (4.3.1)$$

sağlanır.

c) $\mu, \lambda \in \rho(L(\lambda))$ için

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}[\lambda, \mu] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{L^{(k)}(\mu)}{k!} (\lambda - \mu)^{k-2}$$

olmak üzere

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu[\bar{\Delta}[\mu] + (\lambda - \mu)\bar{\Delta}]R_\lambda, \quad (4.3.2)$$

sağlanır.

d) $R_\lambda, \rho(L)$ de analitiktir ve

$$(4.3.3) \quad \frac{d}{d\lambda} R_\lambda = -R_\lambda \Delta[\lambda] R_\lambda$$

geklindedir.

İspat:

a) $\lambda_0 \in \rho(L(\lambda))$ alalım. $B(\lambda_0, \epsilon) \subset \rho(L(\lambda))$ sağlanacak şekilde ϵ sayısının bulunabileceğini göstereлим.

Koşulumuzdan dolayı $L(\lambda_0)$ tersinirdir. Dolayısıyla $d(L(\lambda_0)) = 0$ olur.

$$L(\lambda) = \overbrace{L(\lambda_0)}^A + \overbrace{(L(\lambda) - L(\lambda_0))}^B.$$

$\|L(\lambda_0)u\| \geq c\|u\|$ koşulumu sağlayan $c > 0$ bulunur. Öte yandan $\lambda \rightarrow \lambda_0$ için $L(\lambda) - L(\lambda_0) \rightarrow 0$ dir. Buradan $\|L(\lambda) - L(\lambda_0)\| \rightarrow 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$\exists \epsilon > 0, |\lambda - \lambda_0| < \epsilon \text{ için } \| \overbrace{L(\lambda) - L(\lambda_0)}^B \| < c$$

bulunur. O zaman Sonuç 4.3.1 den $L(\lambda)$ nin simetrik olması var ve $d(L(\lambda)) = d(L(\lambda_0)) = 0$ formülünden $L^{-1}(\lambda)$ tüm uzayda tanımlıdır. Dolayısıyla $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ koşulumu sağlayan her λ sayısı regüler noktadır. Buradan $\rho(L(\lambda))$ ağırlık kümledir bulunur.

b) $\Delta[\mu, \lambda]$ nin tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= (\lambda - \mu) R_\mu \Delta[\mu, \lambda] R_\lambda = (\lambda - \mu) L^{-1}(\mu) \left(\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{L(\mu) - L(\lambda)} \right) L^{-1}(\lambda) \\ &= - (L^{-1}(\mu) L(\mu) L^{-1}(\lambda) - L^{-1}(\lambda) L(\lambda) L^{-1}(\mu)) = -R_\mu - R_\lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

c) $L(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A_k$, μ civarında Taylor serisine açılırsa

$$L(\lambda) = L(\mu) + L'(\mu)(\lambda - \mu) + \frac{L''(\mu)}{2!}(\lambda - \mu)^2 + \dots + \frac{L^{(n)}(\mu)}{n!}(\lambda - \mu)^n$$

olur. Buradan

$$\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} = L'(\mu) + (\lambda - \mu) \left[\frac{L''(\mu)}{2!} + \dots + \frac{L^{(n)}(\mu)}{n!} (\lambda - \mu)^{n-2} \right]$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağında $\Delta[\mu]$ ve $\bar{\Delta}[\lambda, \mu]$ nin tanımları dikkate alınrsa

$$\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} = \Delta[\mu] + (\lambda - \mu) \bar{\Delta}[\lambda, \mu]$$

olur. Bu eşitlik

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu \Delta[\mu, \lambda] R_\lambda,$$

ifadesinin sağında kullanırsa

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu \left[\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} R_\mu \right] R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu [\Delta[\mu] + (\lambda - \mu) \bar{\Delta}[\lambda, \mu]] R_\lambda$$

olur.

d) R_λ nin tanımından

$$R_\lambda L(\lambda) = I$$

dir. Her iki tarafının türevi alınrsa

$$R'_\lambda L(\lambda) + R_\lambda L'(\lambda) = 0$$

olur. Burada $\Delta[\lambda]$ tanımından

$$R'_\lambda L(\lambda) = -R_\lambda \Delta[\lambda]$$

elde edilir. Bu son ifadenin her iki tarafı $L^{-1}(\lambda)$ ile çarpılrsa

$$R'_\lambda = -R_\lambda \Delta[\lambda] R_\lambda$$

bulunur.

Aşağıdaki teoremden izole özdeğerin civarında R_λ nin ayrışımı verilmektedir.

Teorem 4.3.3. $L(\lambda)$, KHD ve λ_0 sonlu katlı izole bir özdeğer olsun. O zaman A simitli ve $B(\lambda)$ λ_0 in civarında analitik olmak üzere R_λ

$$(4.3.4) \quad R_\lambda = \frac{A}{\lambda - \lambda_0} + B(\lambda)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. Teoremin koşullarından λ_0 noktası $L(\lambda)$ nin izole özdeğeridir. $L_1(\lambda) \equiv L(\lambda) + \lambda I$ şeklinde bir operatör demet tanımlansın. Buradan λ_0 in $L_1(\lambda_0)$ operatörünün adi izole özdeğeri olduğu açıktır. $L_1(\lambda)$ ya karşı gelen formalar $\Delta_1[\alpha, \beta]$ ve $\Delta_1[\alpha]$ ile gösterilsin. $L_1(\lambda)$ nin ifadesinden ve

$$\Delta[\alpha, \beta] = \begin{cases} \frac{L(\alpha) - L(\beta)}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \\ L'(\alpha), & \alpha = \beta \end{cases}$$

den

$$\Delta_1[\alpha, \beta] = \Delta[\alpha, \beta] + I \quad \text{ve} \quad \Delta_1[\alpha, \alpha] = \Delta[\alpha] = \Delta[\alpha] + I$$

gıkar. $L(\lambda)$, KHD olduğundan $\sigma(L) \subset R^1$ dir. Buradan $\lambda_0 \in R^1$ ve $L_1(\lambda_0)$ kendine-eş bir operatördür. Bu durumda $R_\lambda^\lambda \equiv (L_1(\lambda_0) - \lambda I)^{-1}$ gibi tanımlansın, $P(\lambda_0)$ operatörü $Ker(L_1(\lambda_0) - \lambda_0 I)$ uzayında ortogonal izdüşüm ve $Q(\lambda)$ operatör fonksiyonu λ_0 rin civarında analitik olmak üzere R_λ^λ için

$$(4.3.5) \quad R_\lambda^\lambda = \frac{P(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + Q(\lambda)$$

formülü geçerlidir [3].

$$L^{-1}(\lambda) = (L_1(\lambda) - \lambda I)^{-1} = (L_1(\lambda_0) - \lambda I + L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0))^{-1} \\ = \left[I + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0)) R_\lambda^\lambda \right]^{-1} \\ = R_\lambda^\lambda \left[I + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0)) R_\lambda^\lambda \right]^{-1}$$

(4.3.6)

ve

$$H(\lambda) = I + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0)) R_\lambda^\lambda$$

olsun. Burada $H(\lambda)$ nin λ_0 in civarında tersinir olduğu ispatlanacaktır.

Yukarıda verilen (4.3.5) kullanılsa

$$H(\lambda) = I + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0))R_0^\lambda = I + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0)) \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{P(\lambda_0)} + Q(\lambda) \right) \\ = I + \Delta_1[\lambda, \lambda_0]P(\lambda_0) + (L_1(\lambda) - L_1(\lambda_0))Q(\lambda)$$

olur. Böylece

$$H(\lambda_0) = I + \Delta_1[\lambda_0]P(\lambda_0)$$

ve buradan $P(\lambda_0)$ sonlu ranka sahip dolayısıyla kompakt bir operatördür. Buradan $\Delta_1(\lambda_0)P(\lambda_0)$ kompakttır. Eğer $H(\lambda)$, λ_0 da tersinir ise civarında da tersinir olur. Ters kabul yapalım. Buradan $H(\lambda_0)$ tersinir değil ise λ_0 için bir özdeğerdir ve $y \neq 0$ için $H(\lambda_0)y = 0$ olur. Buradan

$$H(\lambda_0)y = y + \Delta_1(\lambda_0)P(\lambda_0)y = y + (L'_1(\lambda_0) + I)P(\lambda_0)y = 0$$

dikkate alınarak

$$(P(\lambda_0)y, H(\lambda_0)y) = 0$$

olur ve

$$0 = (P(\lambda_0)y, y) + (P(\lambda_0)y, L'_1(\lambda_0)P(\lambda_0)y) + (P(\lambda_0)y, P(\lambda_0)y)$$

elde edilir. $L(\lambda)$ kuazihiperbolik ve $P(\lambda_0)y \in \text{Ker}(L(\lambda_0))$ olduğundan $(L'_1(\lambda_0)P(\lambda_0)y, P(\lambda_0)y) > 0$ olur. Böylece $P(\lambda_0)y = 0$ dir. Sonuç olarak $H(\lambda_0) = I + \Delta_1(\lambda_0)P(\lambda_0)$ tersinir değil ise $y = 0$ bulunur bu ise gelişkidir.

Bu gelişkidir $H(\lambda)$, λ_0 in civarında tersinirdir sonucu bulunur.

Diğer taraftan (4.3.5) ve (4.3.6) dan

$$L^{-1}_1(\lambda) \equiv R_\lambda = \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{P(\lambda_0)} + Q(\lambda) \right) H^{-1}_1(\lambda)$$

gelişkidir. Böylece $A(\lambda) = P(\lambda_0)H^{-1}_1(\lambda)$ ve $B_0(\lambda) = Q(\lambda)H^{-1}_1(\lambda)$ olmak üzere teoremdaki iddia doğrudur. $A(\lambda)$ analitik olduğundan λ_0 in civarında

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k A_k = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k A_k = A_0 + A_1(\lambda)$$

yazıp $A_0 = A$ ve

$$B(\lambda) = \frac{A_1(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} + B_0(\lambda)$$

olduğu dikkate alırsa

$$R_\lambda = \frac{A}{\lambda - \lambda_0} + B(\lambda)$$

bulunur. Burada $B(\lambda)$ λ_0 in civarında analitik operatör fonksiyondur.

Aşağıdaki teorem Riesz integral teoreminin benzeridir [3,7,10].

Teorem 4.3.4. $L(\lambda)$ KHD ve λ_0 sonlu katlı izole bir özdeğer olsun. C_{λ_0} sadece

λ_0 ri içine alan $\rho(L)$ de kapalı bir kontur olmak üzere

$$(4.3.7) \quad F(\lambda_0) = \frac{1}{i} \oint_{C_{\lambda_0}} R_\lambda \Delta[\lambda] d\lambda$$

operatörü $L(\lambda)$ nin λ_0 özdeğerine karşı gelen özfonksiyonların oluşturduğu

altuzay üzerine bir izdüşüm operatörüdür.

İspat. C_1 ve C_2 sırasıyla r ve $2r$ yarıçaplı λ_0 merkezli çemberler olsun.

Buradan yeterince küçük r için

$$F^2(\lambda_0) = \frac{1}{i} \oint_{C_2} R_\mu \Delta[\mu] d\mu \oint_{C_1} R_\lambda \Delta[\lambda] d\lambda$$

olur. Ayrıca (4.3.2) den

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu [\Delta[\mu] + (\lambda - \mu) \bar{\Delta}[\mu, \lambda]] R_\lambda$$

olduğundan

$$\frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} = R_\mu \Delta[\mu] R_\lambda + (\lambda - \mu) R_\mu \bar{\Delta}[\mu, \lambda] R_\lambda$$

ve $\Delta[\lambda]$ ile her iki taraf çarpılırsa

$$\frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} \Delta[\lambda] = R_\mu \Delta[\mu] R_\lambda \Delta[\lambda] + (\lambda - \mu) R_\mu \bar{\Delta}[\mu, \lambda] R_\lambda \Delta[\lambda]$$

olur. Böylece

$$(4.3.8) \quad R_\mu \Delta[\mu] R_\lambda \Delta[\lambda] = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} \Delta[\lambda] - (\lambda - \mu) R_\mu \bar{\Delta}[\mu, \lambda] R_\lambda \Delta[\lambda]$$

geklindedir. (4.3.8) ifadesi C_1 üzerinde λ ya göre ve C_2 üzerinde μ ye göre

integre edilirse

$$F^2(\lambda_0) = \frac{1}{i} \oint_{C_2} \oint_{C_1} R_\mu \Delta[\mu] R_\lambda \Delta[\lambda] d\lambda d\mu =$$

$$I_{21} = \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \frac{\mu - \lambda_0}{1} \left[\oint_{C_1} \frac{\lambda - \mu}{(\lambda - \mu)} A \bar{\Delta}[\mu, \lambda] A \Delta[\lambda] d\lambda \right] d\mu$$

$$= -\frac{1}{1} \oint_{C_2} A \bar{\Delta}[\mu, \lambda_0] A \Delta[\lambda_0] d\mu = 0,$$

ve Cauchy integral formülü kullanırsak [33]

olur. I_{21} ve I_{23} integraleri önce $\lambda \in C_1$ ya sonra $\mu \in C_2$ ye göre integrale edilişse

$$= I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}$$

$$+ \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} (\lambda - \mu) B(\mu) \bar{\Delta} B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$+ \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda - \mu)} B(\mu) \bar{\Delta} A \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$+ \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \frac{\mu - \lambda_0}{(\lambda - \mu)} A \bar{\Delta} B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \frac{(\lambda - \mu) A \bar{\Delta}[\mu, \lambda] A \Delta[\lambda]}{(\lambda - \mu) (\mu - \lambda_0) (\lambda - \lambda_0)} d\lambda d\mu$$

$$+ \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \left(\frac{\mu - \lambda_0}{(\lambda - \mu) A} + (\lambda - \mu) B(\mu) \right) \bar{\Delta}[\mu, \lambda] B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \left(\frac{\mu - \lambda_0}{(\lambda - \mu) A} + (\lambda - \mu) B(\mu) \right) \bar{\Delta}[\mu, \lambda] A \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} (\lambda - \mu) \left(\frac{\mu - \lambda_0}{A} + B(\mu) \right) \bar{\Delta}[\mu, \lambda] \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{A} + B(\lambda) \right) \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$I_2 = \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} (\lambda - \mu) R_\mu \bar{\Delta}[\mu, \lambda] R_\lambda \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

Önce I_2 integralini inceleyelim. I_2 integralinde $R_\lambda \min(4.3.4)$ ifadesi kullanılsın

olur. Yukarıdaki integralerden birincisi I_1 ikincisi I_2 şeklinde gösterilsin.

$$- \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} (\lambda - \mu) R_\mu \bar{\Delta}[\mu, \lambda] R_\lambda \Delta[\lambda] d\lambda d\mu = I_1 - I_2$$

$$= \frac{1}{1} \oint_{C_2} \frac{(2\pi i)^2}{2} \oint_{C_1} \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

olduğu kullanılsa

$$\oint_{C_2} \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu = 2\pi i$$

bolge olmak üzere $\lambda \in \Omega_{C_2}$ ve

elde edilir. Ayrıca I_{12} de pozitif yön alındığında $\Omega_{C_2} - C_2$ eğrisi ile sınırlanan

$$I_{11} = \frac{-1}{R_\mu} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{1}{\mu - \lambda} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu = 0$$

olduğundan, Cauchy integral formülünden

olur. Burada $\frac{\mu - \lambda}{\Delta[\lambda]}$ operatör değeri fonksiyon C_1 üzerinde ve içinde analitik

$$I_1 = \frac{-1}{R_\mu - R_\lambda} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu = \frac{-1}{R_\mu} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu + \frac{1}{R_\lambda} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu = I_{11} + I_{12}$$

I_1 integrali göz önüne alırsa

bulunur. Buradan $I_2 = 0$ olur.

$$I_{24} = \frac{1}{\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2}} (\lambda - \mu) B(\mu) \tilde{\Delta}[\mu, \lambda] B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda d\mu = 0$$

Cauchy integral formülünden

elde edilir. I_{24} integralinin integrantı $\lambda \in C_1$ ya göre analitik olduğundan

$$I_{22} = \frac{1}{\oint_{C_2} \left[\oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2} A \tilde{\Delta}[\mu, \lambda] B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda \right] d\mu} = \frac{1}{\oint_{C_1} \frac{2\pi i}{\lambda - \lambda_0} A \tilde{\Delta}[\lambda_0, \lambda] B(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda} = 0$$

integral formülü kullanırsa

olur. I_{22} integrali önce $\mu \in C_2$ ye sonra $\lambda \in C_1$ ya göre integre edilir ve Cauchy

$$I_{23} = \frac{1}{\oint_{C_2} \left[\oint_{C_1} \frac{(2\pi i)^2}{2} B(\mu) \tilde{\Delta}[\mu, \lambda] A \Delta[\lambda] d\lambda \right] d\mu} = \frac{1}{\oint_{C_2} \frac{2\pi i}{\lambda_0 - \mu} B(\mu) \tilde{\Delta}[\mu, \lambda_0] A \Delta[\lambda_0] d\mu} = 0$$

olur. Böylece, $F(\lambda_0) = P(\lambda_0) H^{-1}(\lambda_0) \Delta[\lambda_0]$, buradan ise $P(\lambda_0) F(\lambda_0) = F(\lambda_0)$ dir. Benzer şekilde $F(\lambda_0) P(\lambda_0) = P(\lambda_0)$ eşitliği yukarıdaki ispatın analikrine bağlı kalmak suretiyle gösterilir.

$P(\lambda_0) F(\lambda_0) = F(\lambda_0)$ ve $F(\lambda_0) P(\lambda_0) = P(\lambda_0)$ olduğundan $F(\lambda_0)$ ve $P(\lambda_0)$ rin değer cümleleri eşittir. Gerçekten $\forall x \in H$ için $P(\lambda_0) F(\lambda_0) = F(\lambda_0)$ olsun. Buradan $F(\lambda_0) F(\lambda_0) x = F(\lambda_0) x$ olduğundan $\mathcal{R}(F(\lambda_0)) \subset \mathcal{R}(P(\lambda_0))$ olur. Benzer şekilde $\forall x \in H$ için $F(\lambda_0) P(\lambda_0) = P(\lambda_0)$ olsun. Buradan $F(\lambda_0) P(\lambda_0) x = P(\lambda_0) x$ olduğundan $\mathcal{R}(P(\lambda_0)) \subset \mathcal{R}(F(\lambda_0))$ olur. Her iki durum göz önüne alındığında $P(\lambda_0)$ ortogonal izdüşümü ile $F(\lambda_0)$ rin değer cümlelerinin aynı olduğu elde edilir. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

$$F(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\lambda_0}} R_{\lambda} \Delta[\lambda] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\lambda_0}} R_{\lambda} H^{-1}(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\lambda_0}} \left[\frac{P(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + Q(\lambda) \right] H^{-1}(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\lambda_0}} \frac{P(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} H^{-1}(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\lambda_0}} Q(\lambda) H^{-1}(\lambda) \Delta[\lambda] d\lambda$$

$$= P(\lambda_0) H^{-1}(\lambda_0) \Delta[\lambda_0]$$

$R_{\lambda}^0 = \frac{P(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + Q(\lambda)$ dir. Bu formülleri kullanarak tüm civarında analitiktir ve (4.3.6) dan $R_{\lambda} = R_{\lambda}^0 H^{-1}(\lambda)$ dir. Diğer taraftan $P(\lambda_0)$ ve $P(\lambda_0) F(\lambda_0) = F(\lambda_0)$ olduğuna gösterilmeli. Burada $H^{-1}(\lambda)$, λ_0 rin ortogonal izdüşümün aynı değer cümlesine sahip olduğu veya $F(\lambda_0) P(\lambda_0) = P(\lambda_0)$ olarak $F^2(\lambda_0) = F(\lambda_0)$ elde edilir. Diğer taraftan $F(\lambda_0)$ ile $P(\lambda_0)$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{R_{\lambda}}{\lambda - \mu} \Delta[\lambda] d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} R_{\lambda} \Delta[\lambda] \left[\oint_{C_2} \frac{1}{\lambda - \mu} d\mu \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} R_{\lambda} \Delta[\lambda] d\lambda = F(\lambda_0)$$

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tezde Rayleigh sistem aksiyomlarını sağlayan operatör değerli fonksiyonlar sınıfında varyasyonel ve faktörizasyon problemleri incelenmiştir.

Varyasyonel problemlerle ilgili elde edilen esas sonuçlar Teorem 2.2.2, Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.3.2 de verilmiştir.

Faktörizasyon konusunda esas amaç [2] de verilen (Teorem 3.2.1), $(L(\lambda)f, f)$ fonksiyonunun $\forall 0 \neq f \in H$ için $[a, b]$ nin simetrik bir civarında tek kökü bulunması koşulunu kullanmadan, sadece zayıf regülerlik koşulunu kullanarak analitik operatör değerli fonksiyonlar sınıfında faktörizasyon teoremini ispatlamaktır. Bu sonuç Teorem 3.2.2 de verilmiştir. Ayrıca tezde elde edilen sonuçların yeni sınıflara uygulanması da ele alınmıştır.

Örneğin, varyasyonel teoride skaler garpın yerine kullanılan $\Delta[\alpha, \beta]$ (bölüm 4.1) formlarını kullanarak izole özdeğer civarında kuazihiperbolik demetler için, operatör teoride bilinen Riesz izdüşüm formülünün benzeri bulunmuştur (Teorem 4.3.4).

Ele alınan sınıflarda $(L(\lambda)x, x) = 0$ denkleminin (c, d) aralığında $\forall x \in H \setminus \{0\}$ için tek bir kökünün bulunduğu kabul edilmektedir ve bu koşul uygulanan yöntem için vazgeçilmez bir koşuldur.

Fakat son yıllarda bu koşulu veya Rayleigh aksiyomlarından herhangi birisini sağlamayan operatör fonksiyonlarla ilgili çalışmalara başlanmıştır (örneğin [14-16] ve [16] daki kaynaklar).

Tezde ele alınan soruların devamı olarak ileride bu tür problemlerin öğrenilmesi amaçlanabilir.

Son yıllarda ele alınan diğer bir konu [5,6] analitik olmayan operatör fonksiyonlar sınıfında faktörizasyon teoremlerinin araştırılmasıdır. Bu konuda çok az sayıda yayınlar bulunur ve bu konuda ileride bir araştırma konusu olarak değerlendirilebilir.

- [1] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., 1982. Matrix Polynomials. *Academic Press*.
- [2] Markus A.S., 1988. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils, *Amer. Math. Soc., Providence*.
- [3] Gohberg I.C. and Krein M.G., 1969. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, *Amer. Math. Soc. Providence*.
- [4] Kato T., 1980. Perturbation Theory for Linear Operators, *Springer-Verlag*, New York.
- [5] Markus A. and Matsaev V., 1991. Principal Part of Resolvent and Factorization of an Increasing Nonanalytic Operator-Function. *Int. Eq. and Operator Theory*. 14, 717-746.
- [6] Markus A.S and Matsaev V., 1993. Factorization of Selfadjoint Nonanalytic Operator Functions II. Single Spectral Zone., *Int. Eq. and Operator Theory*. pp.539-563.
- [7] Riesz F., Nagy B.S., 1990. Functional Analysis. *Dover Publications. INC.* New York.
- [8] Duffin R.J., 1955. A Minimax Theory for Overdamped Networks, *J. Rational Mech. Anal.* 4, 221-233.
- [9] Turner R., 1967. Some Variational Principles for a Nonlinear Eigenvalue Problem, *J. Math. Anal. Appl.* 17, pp.151-160.
- [10] Turner R., 1968. A Class of Nonlinear Eigenvalue Problems, *J. of Func. An.* 2, pp.297-322.
- [11] Rogers E.H., 1968. Variational Properties of Nonlinear Spectra, *J. Math. and Mech.* 18, pp.479-490.
- [12] Werner B., 1971. Das Spektrum Von Operatorscharen Mit Veralgemeinerten Rayleighquotienten. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 42, 223-238.

- [13] Abramov Yu. Sh., 1983. Variational Methods in the Theory of Operator Pencils. Spectral Optimization. *Izdat. Len. Gos. Univ.*
- [14] Adamjan V., Langer H., 1995. Spectral Properties of a Class of Rational Operator Valued Functions. *J. Oper. Th.* 33, 259-277.
- [15] Adamjan V., Langer H., Mennichen R., 1996. Spectral Components of Selfadjoint Block Operator Matrices With Unbounded Entries. *Math. Nachr.* 178, 43-80.
- [16] Binding P., Eschwe D., Langer H., 2000. Variational Principles for Real Eigenvalues of Self-adjoint Operator Pencils. *Int. Eq. and Operator Theory.* 38, No.2, 190-206.
- [17] Allegretto W., 1989. Second Order Elliptic Equations With Degenerate Weight. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 107, 989-998.
- [18] Hasanov M.G. and Maksudov F. G., 1993. On the Variational Theory of the Spectrum of Operator Pencils. *Rus. Acad. Sci. Dokl. Math.* Vol.46, No.1, 126-130.
- [19] Hasanov M. G., 1994. Approximation and Variational Characteristics of the Spectrum of Nonsmooth Rayleigh Systems, *J. of Math. Sci.* Vol. 72, No.6, 3385 - 3394.
- [20] Binding P., Q Ye., 1991. Variational Principles Without Definiteness Conditions. *SIAM. J. Math. Anal.* 22, No.6, 1575-1583.
- [21] Najman B. and Ye Q., 1991. A Minimax Characterization for Eigenvalues of Hermitian Pencils. *Linear Algebra and Its Appl.* 144, 217-230.
- [22] Najman B. and Ye Q., 1993. A Minimax Characterization for Eigenvalues of Hermitian Pencils. II. *Linear Algebra and Its Appl.* 191, 183-197.
- [23] Hasanov M.G. and Cesur Y., 1997. On a Nonlinear Eigenvalue Problem, *Int. Eq. and Operator Theory.* 29, 491-500.
- [24] Matsayev V and Spigel E., 1993. Conditions for Eigenvectors of a Selfadjoint Operator-Function to Form a Basis. *Int. Eq. and Operator Theory.* Vol.17, No.3, pp.443-449.
- [25] Vitozup A.I. and Matsayev V.I., 1974. The Spectral Properties of a Certain Class of Self-Adjoint Operator Functions, *Functional Anal. Appl.* 8, No.1., 1-10.

- [26] Lancaster P., Markus A.S. and Matsaev V.I., 1995. Definitizable Operators and Quasihyperbolic Operator Polynomials, *J. Func. Anal.* 131, 29-53.
- [27] Barkwell L., Lancaster P., 1992. Overdamped and Gyroscopic Vibrating Systems, *J. Appl. Mech.* 59, 176-181.
- [28] Barkwell L., Lancaster P. and Markus A.S., 1992. Gyroscopically Stabilized Systems: A Class of Quadratic Eigenvalue Problems With Real Spectrum, *Canad. J. Math.* 44, 221-233.
- [29] Langer H., 1982. Spectral Functions of Definitizable Operators in Krein Spaces. *Springer – Verlag*. Berlin. New York. Vol. 948, 1-46.
- [30] Lancaster P. and Qiang Ye., 1993. Definitizable Hermitian Matrix Pencils, *Aequationes Math.* 46, 44-55.
- [31] Lerer L., Rodman L., Tismenetsky M., 1991. Inertia Theorems for Matrix Polynomials. *Linear and Multilinear Algebra*. 30, 157-182.
- [32] Lerer L., Rodman L., 1992. Spectrum Separation and Inertia for Operator Polynomials. *J. of Math. Anal. and Ap.* 169, 260-282.
- [33] Markushevich A. I., 1965. Theory of Functions of a Complex Variable. *Prentice – Hall, Englewood Cliffs, N.J.*, Vols. 1, 2.
- [34] Bognár J., 1974. Indefinite Inner Product Spaces, *Springer – Verlag*, Berlin. New York.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Bulgaristan'ın Razgrad şehrinde doğan Yusuf Cesur, 1984 yılında 50. Yıl Avcılar İsa Lisesi'nden , 1988 yılında da İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. Mezun olduğu yıl İ.T.Ü Matematik Bölümü Topoloji Anabilimdalında Araştırma Görevlisi olarak görevine başladı. 1992 yılında Y.T.Ü Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Bölümüne birincilikle girdi ve 1993 yılında pekiyi derece ile mezun olarak aynı yıl İ.T.Ü Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora öğrenimine başladı. Halen İ.T.Ü Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

